
IOHANNES WALLIS S.T.P. GEOMETRIÆ PROF. SAVILIANUS
OXON. REG. MA.TIS A SACRIS. REGALIS SOCIET.TIS LOND. SODALIS
D. Loggan 16 ad vivum delin. 83.


IOHANNES WALLIS S.T.P. GEOMETRIÆ PROF. SAVILIANUS
OXON. REG. MA.TIS A SACRIS. REGALIS SOCIET.TIS LOND. SODALIS
D. Loggan 16 ad vivum delin. 83.

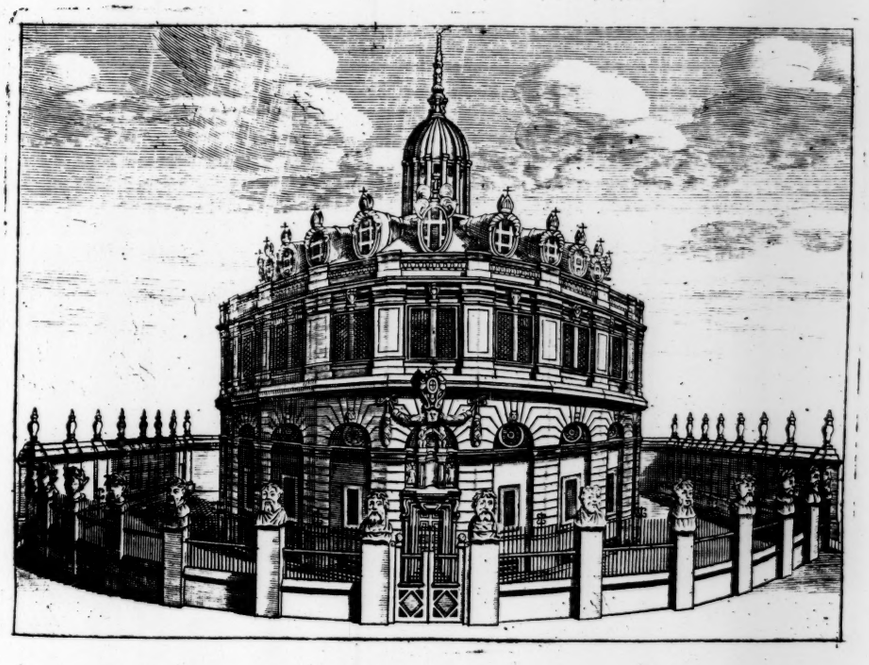
Johannis Wallis S. T. D.

Geometriæ Professoris *SAVILIANI*,

in Celeberrima Academia OXONIENSI;

OPERA MATHEMATICA.

Volumen Primum.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCXCV.

Imprimatur,

Hen. Aldrich

VICE-CAN. *OXON.*

Mar. 26. 1695.

1523:11

AD LECTOREM
PRÆFATIO.

CUM *Oxonienſis* Preli Curatoribus viſum eſt, Scripta mea Mathematica (ante ſeparatim edita) in unum quaſi Corpus colligere; & junctim edere; totius Operis, ordiniſque quo jam comparent, Rationem aliquam Erudito Lectori reddendam eſſe cenſui.

Occurrunt pleraque (non omnia) eo ordine quo fuerant primum edita; Exceptis aliquot quæ Secundo Volumini aut Inſeruntur, aut Suffiguntur, ne nimis excreſceret Prius hoc Volumen.

Cur autem Secundum illud (jam ante duos Annos editum) prius emiſerim, cauſa plane hæc eſt; Quoniam quæ illic continentur pleraque, Lingua tantum Anglicana prodierant prius, erantque jam in Latinum Sermonem convertenda. Quæ itaque meam ipſius inſpectionem magis poſtulabant: cum ea quæ ante prodierant Latine (ſiquid mihi interim humanitus accideret) potuerint non incommode (etiam me mortuo) redimprimi.

Singulis autem adſcribi curabam, quo tempore primum prodierant: ne videar ex aliorum ſcriptis (poſt editis) ea mutuaſſe quæ ſunt utriſque communia. Quippe poſt edita meorum non pauca, non parum promotam eſſe Doctrinam Mathematicam, nemo neſcit: Cui rei quatenus mea ſcripta ſubſervierint, aliorum eſto judicium.

Opus Arithmeticum (ſeu *Matheſis Univerſalis*,) Tironibus præſertim inſtituendis accommodatum erat: Ita tamen comparatum, ut in eo contineantur etiam Peritis non contemnenda. Quæ ſi non plane nova, ſunt ſaltem nove tradita; atque à primis fundamentis demonſtrata. Nonnulla etiam Philologica aut Philoſophica immiſcentur, quo guſtui Academicorum, quales quidem tunc erant, conſuleretur.

Quippe non diſſimulandum eſt, Academicos noſtros, ante ea tempora, Peripateticæ (quæ dicitur) Philoſophiæ maxime deditos, (quæ tunc in Scholis tradebatur, & cujus loquendi formulis res erat accommodanda,) rebus Mathematicis parcius vacaſſe. Erant quidem ex noſtris non pauci Matheſeos ſatis periti (quod eorum ſcripta quæ etiamnum extant teſtantur;) Pauciores tamen quam nunc dierum; iique fere extra Academias agentes. Et quidem per Bella Civilia, quæ per plures Annos nos exercuerant, ſtudia Academica, ſi non penitus interrupta, ſaltem impedita plurimum hic fuerunt, & quaſi de novo reſtituenda; quæ ex eo tempore (quoad res haſce) magis indies viguerunt. Ut non mirum ſit, ſi de Matheſeos neglectu tunc queſti ſimus, de quo non tantus nunc eſt querendi locus.

Quæ contra *Meibomium* ſcripta ſunt; non eo animo ſcribuntur quaſi homini (alias bene merito) male velim: ſed ne ſerpat Error (qui ipſum & alios aliquot infecerat,) dum inter *Rationem Dupli, Tripli*, &c. & *Rationem Duplicatam, Triplicatam*, &c. non bene diſtinxerant. De quo (ſpero) poſthac (re bene intellecta) non multum erit periculi.

De *Angulo* (qui dicitur) *Contactus* Diſſertatio (quæ ſub idem tem-

pus prodiit) Doctrinam non plane Novam continet (ut quam ante tradiderat *Peletarius*,) ſed vix ſatis Receptam, & clare Agnitam, quæ & clariorem meruerat Explicationem; & Defenſionem contra *Clavii* & aliorum Oppugnationes. Sed & ea Defenſio, Vindicatione nova indiguit: Quam itaque in ſubjunctis Secundo Volumini jam adhibui; quo & prior illa Diſſertatio nunc tranſmiſſa eſt. Quæ quidem Doctrina, omnino Utilis eſt (nedum Neceſſaria) extricandis pluribus Difficultatibus, quæ multos ante torſerunt, quæque (hac poſita doctrina) jam evaneſcunt, nec (credo) poſthac quemquam diſcruciabunt; ſaltem non opus erit ut quiquam inde diſcrucientur.

De *Conicis* (quæ dicuntur) *Sectionibus* Tractatus (ex Solido in Planum tralatis) quam clara utilis & perſpicua ſit (præ Veterum earundem in Cono tractatione) non opus eſt ut dicam: (Quam poſt imitatus eſt D. *de Wit*, Tractatu ſuo *Schootenianis* inſerto: item D. *De Chales*, & *De la Hire*.) Quo Conicorum Tractatio (quæ ante tam perplexa habita erat, ut inde deterrerentur plurimi) jam evadat facilis.

Quæ ſequitur *Arithmetica Infinitorum*, eſt Inveſtigandi Methodus plane Nova, & à me (quod ſciam) primitus introducta, non inauſpicate. Quam approbarunt ſummi Viri; & amplo Commentario dignatus eſt Clar. *Buſſialdus*. Quæ quam mihi fuerit uſui, teſtantur alia mea deinceps ſcripta, (de *Cycloide*, de *Curvis Rectificandis* & *Complanandis*, de *Calculo Centri Gravitatis*, &c.) Quam & (non obſtantibus quorundam Exceptiunculis) amplexi ſunt & proſecuti non infimæ notæ Viri; ſive fecerint, ſive non fecerint, mei mentionem. Quamque hinc facta eſt ſpeculationum Mathematicarum promotio, aliorum potius eſto (quam meo) judicio edicendum.

Qui ſequitur de *Cycloide* Tractatus, ſcriptus erat occaſione data à *Provocatione publica*, ad *omnes Europæ Mathematicos*, ab Anonymo quodam Gallo, qui *Dettonvilii* nomen poſt aſſumpſit, qui alias *Paſchalius* audit. Cui quidem Provocationi quam ego ſatisfecerim, opus ipſum teſtatur. Quam item rem fuſius proſecutus ſum (inter alia) in *Mechanicis* (ſive de *Motu* tractatu) ubi de Calculo Centri Gravitatis agitur; Cap. V. prop. 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

Eidem de *Cycloide* tractatui, ſubjungitur alius de Curvis Lineis *Rectificandis*, & Superficiebus Curvis *Complanandis*; hoc eſt, *Lineis Rectis* aſſignandis, quæ ſint expoſitis *Curvis* æquales; & *Superficiebus Planis*, quæ ſint æquales expoſitis Curvis. Quam ego rem totam ex Principiis in Arithmetica Infinitorum traditis deduco; & ultra proſequor quam quiſquam me prior fecerat; Methodumque aperio, cujus ope poterit quiſquam (cui id lubitum eſt) rem ultra pro arbitrio promovere.

In Tractatu ultimo, cui *Mechanica* titulus, ſive *De Motu* tractatus, agitur de *Machinis* (ſeu Inſtrumentis Mechanicis) quas tractare ſolent Mechanicorum ſcriptores. Ubi Res omnis à primis Motuum principiis deducitur & demonſtratur. *Percuſſionum* item & *Reflexionum* Doctrina ex veris & genuinis ſui principiis derivatur. Totaque *Hydroſtaticorum* doctrina ab *Aeris Contrapondio* deducitur, pro Veterum *Fuga Vacui*; (quam fuſius adhuc proſecutus ſum in Tractatu *De Gravitate & Gravitatione*, qui in Secundo jam Volumine comparet.) Et quidem in ea ejus parte quæ eſt de *De Centro Gravitatis ejuſque Calculo*; mirum eſt quam fœcunda ſit Corollariorum Methodus ab *Arithmetica Infinitorum* petita, in extricandis (præter ſpem) Quæſitis perplexiſſimis, habitiſque pro deploratis.

Quæ in Secundo Volumine habentur, in Præfatione eidem præfixa dicitur.

dicitur. Ubi (inter alia) habetur *Newtoni* Methodus, de *Fluxionibus* (ut ille loquitur,) conſimilis naturæ cum *Leibnitii* (ut hic loquitur) *Calculo Differentiali*, (quod, qui utramque methodum contulerit, ſatis animadvertat, utut ſub loquendi formulis diverſis,) quam ego deſcripſi (*Algebræ Cap.* 91. &c. præſertim *Cap.* 95.) ex binis *Newtoni* literis (aut earum alteris) *Junii* 13. & *Auguſti* 24. 1676, ad *Oldenburgium* datis, cum *Leibnitio* tum communicandis (iiſdem fere verbis, ſaltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur,) ubi methodum hanc *Leibnitio* exponit tum ante *decem* annos, nedum plures, ab ipſo excogitatam. Quod moneo, nequis cauſetur, de hoc *Calculo Differentiali* nihil à nobis dictum eſſe.

Tractandi Modum quod ſpectat; conatus ſum à primis Principiis omnia deducere; & eo Ordine Tradere quo ſunt Inventa; quo non tantum, vera eſſe, Lectori conſtet; ſed &, quomodo ſit eo perventum; ut ipſa Inveſtigandi Methodus (etiam alibi adhibenda) non minus innoteſcat. Contra quam quod de Veteribus conqueruntur multi; qui ſic Inventa Tradere & Demonſtrare ſategerunt, ut interim Inveniendi Methodum occuluerint.

Verborum ego & Phraſium Elegantias minime ſectatus ſum; ſtilo ſimplici (modo non barbaro) contentus: Id maxime curans, (in verborum tum Ordine, tum Delectu,) ut ſenſus ſit (quam fieri poſſit) perſpicuus, & ambiguitati minime obnoxius; præſertim ſicubi metus ſit ut vel non intelligatur, vel perperam intelligatur, res propoſita.

Et propterea Receptis uti ſoleo Vocabulis & loquendi Formulis, (& quidem, aliquando, tantum-non invitus,) potius quam (novationem affectando) Lectoris animum turbare formulis non conſuetis, quum receptæ ſuppetunt. Puta, quum dicitur *Ratio Dupla, Tripla*, &c. (quia ſic dici ſolet,) cum tamen (ſi res eſſet integra) dicenda potius foret *Ratio Dupli, Tripli*, &c. Sic, quum dicitur (genere fœminino) *Hæc Diameter, hæc Perimeter*, &c. (propter Græcorum τὴ διάμετρον, τὴ περίμετρον, ob ſubauditam γραμμὴ,) cum Latinius diceretur *Diametra, Perimetra*, (propter ſubauditam *Lineam*;) vel ſaltem *Diametrus, Perimetrus*, (quod ſuperiori ſeculo dicebatur,) cum nulla (quam memini) vox occurrrat (hujus formæ) exiens in *er*, quæ ſit fœminini generis; (unde fit ut, cum de mare dicitur *Socer*, de fœmina dicatur *Socrus*.) Sic dico *Triangulum, Quadratum, Planum, Parallelogrammum*, &c. quia dixerunt Græci τὸ τρίγωνον, τετράγωνον, ἐπίπεδον, παραλληλόγραμμον, propter ſubauditum σχῆμα,) cum Latine ſatius diceretur *Figura triangula, quadrata, plana, parallelogramma*. Sed receptus loquendi mos facit ut utraque locutio cenſeatur ſatis Latina. Nam id in aliis mille caſibus occurrit. Ut cum *Honeſtum* dicitur pro *Re honeſta*, quia dixerant Græci τὸ πρέπον, τὸ καλὸν, propter χρῆμα vel πρᾶγμα ſubintellectum, &c.

Hac authoritate fretus, ego promiſcue dico *Hanc Conoeidem, Sphæroeidem* &c. (ſubintelligendo *Figuram*,) aut *Hoc Conoeides, Sphæroeides*, (quia dicebant Græci τὸ κωνοειδὲς, σφαιροειδὲς, & ſic locuti ſunt Interpretes Latini, quaſi fuerint illa Subſtantiva nomina;) ſed alterum malim ut ἀναλογικώτερον. Similiter, nunc *ut primus ad ſecundum ſic tertius ad quartum* (ſubintelligendo *Numerum* aut *Terminum*;) nunc *ut prima ad ſecundam ſic tertia ad quartam* (ſubintelligendo *Lineam* vel *Figuram*;) nunc etiam, *ut primum ad ſecundum ſic tertium ad quartum*, (per Neutrum abſolute poſitum.) Et ſimiliter in aliis; nunc ſequor quod ipſe malim, nunc morem gero receptis loquendi formulis. Atque in vocibus quæ aliis nunc hoc, nunc illo, modo ſcribuntur; eadem ego libertate utor, non ſolicitus de his minutiis. Quippe non hic Grammaticam tracto ſed Mathematicam; & ſic loqui velim ut optime intelligar. Cauſa-

AD LECTOREM, &c.

Cauſabitur forte non nemo, rem eandem nonnunquam alio atque alio loco traditam eſſe. Atque hoc omnino non eſt negandum, quin hoc aliquando fiat. Nec tamen vitio dandum, aut ταυτολογίας accuſandum. Conſiderandum utique eſt, Tractatus hos omnes non uno impetu, aut continuo opere, ſcriptos eſſe; ſed ſeparatim editos, diverſis temporibus, & longe diſſitis. Et ſiquid ſcitu non indignum priore aliquo opere prodierit, loco non importuno; non eſt cur id quiſquam culpet tum eſſe editum; ſed nec, cur deleatur in eodem opere redimpreſſo, ut mancum fieret. Et quidem ſi in alio opere poſt edendo, res eadem reſumenda veniat; aut amplianda, aut promovenda, aut aliis uſibus accommodanda, aut à calumniis aut aliorum objectionibus vindicanda; non eſt cur & hoc fieri non debeat. Et quidem vix quiſpiam rem aliquam (ſaltem novam) ſic prima vice perfectam tradit, ut non poſſit ſecundis cogitationibus meliorari, promoveri, aut porro confirmari; aut etiam citari, ſive ad explicationem ſive probationem aliorum; ut nec hic commode abeſſe poſſet.

Opuſcula quædam contra *Thomam Hobbes* (Pſeudo-geometram) olim ſcripta, non hic habentur; ne velle videar de homine jam demortuo triumphare. Quamvis enim, prout tunc res erant, id omnino videbatur faciendum, (quando ſub prætextu Magni Geometræ, qualem ſe venditabat, auſus eſt, in Religionis negotio, incautis adoleſcentibus perperam ſentiendi materiam ſubminiſtrare;) ne tamen in Geometriæ damnum id cedat, non jam videtur metuendum. Et quamvis inibi (præter ipſius pſeudo-graphematum refutationem) occurrant alia non pauca ſcitu digna; horum tamen pleraque in aliis alibi locis reperiantur.

Sunt item alia nonnulla (ſive mea, ſive aliorum à me edita) quæ in Voluminum horum neutro habentur; quæ (ſi velit) Lector alibi quærat.

Errata ſic Emendanda.

PAG. 7. *lin.* 54. *lege* Azimuthani. *p.* 15. *l.* 32. abeſſe. *l.* 50. Typographeum, *p.* 29. *l.* 42. quinquaginta. *l.* 50. πεντεκαίδεκατα. *p.* 31. *l.* 16. traditione. *p.* 32. *l.* 21. ſperno. *p.* 36. *l.* 28. ab. *p.* 37. *l.* 45. & *p.* 38. *l.* 5. Euſtathio. *p.* 129. *l.* 21. A & D. *p.* 138. *l.* 24. $1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$. *p.* 202. *marg.* Examen. *p.* 224. *l.* 23. *pro* 4185 *lege* 4285. *p.* 259. *l.* 4. interim ſim. *p.* 264. *l* 24. $\frac{9}{12}+\frac{8}{12}$. *p.* 313. *fig.* 2. *deeſt in imo angulo litera* B. *p.* 333. *l.* 13. biſectam in ε. *p.* 334. *l.* 25. *pro* δξδκ *lege* δξdx. *p.* 337. *l.* 20. poſitos. *p.* 352. *l.* 4. *ante* = DOc *interpone* p^3. *p.* 392. *l.* 15. inter 1 &. *p.* 416. *l.* 23. judicium. *p.* 422. *l.* 14. Subſecundanis. *p.* 470. *l.* 22. *pro* QI = 1. *lege* QI − 1. *p.* 502. *l* 29. parti. *p.* 499, 504. *fig.* 1. *deeſt* e *in protracta recta* GEΓ. *p.* 510. *l. antep.* ZY *pro* CY. *p.* 511. *l.* 30. ſive majorum ſive minorum. *p.* 521. *figura notanda eſt* Fig. 10. *p.* 526. *l.* 13. $\frac{1}{128}$ D^3P. *p.* 527. *l.* 31. $\frac{1}{72}$ D^4. *l.* 52. Bb rectæ. *p.* 530. *l.* 1. $\frac{1}{2}$ D^2P. *l.* 9. $\frac{1}{4}$ D^3. *p.* 531. *l.* 9. ad eβ. *p.* 540. *l.* 16. ſecundus. *p.* 552. *l.* 43, 44. $9c^2$ *pro* $9b^2$. *p.* 554. *l.* 5. *pro* de *lege* dc. *p.* 559. *l.* 10. AT = H. *p.* 564, 565. *pro* Li, Lu, pz. *lege* L^i, L^u, p^z. *p.* 642. *Statera haud ſatis accurate pingitur, indebito unco ſuſpenſa.* *p.* 686. *l.* 34. *pro* $\frac{1}{6}$s *lege* $\frac{3}{2}$s. *p.* 711. *l.* 36. *pro* 99 *lege* nunc 556. *p.* 724. *l.* 34. *ſupra, pro* + 6, *lege* + s^2. *p.* 726. *marg.* pro 154 *lege* 164. *p.* 729. *l.* 19. *pro* $\frac{1}{24}$ *lege* $\frac{7}{24}$. *lin.* 20. *pro* $\frac{1}{3}$ *lege* $\frac{2}{3}$. *p.* 737. *l.* 22. *pro* $\frac{1}{48}$ *lege* $\frac{3}{48}$. *p.* 739. *l.* 16 *infra, pro* $8s^2$, 8 s, *lege* $8s^3$. *p.* 741. *l.* 18. deſcriptum. *p.* 749. *l.* 2. ſemiſolidique. *p.* 755. *l.* 7. *pro* AF *lege* AE. *p.* 758. *l.* 21. $\frac{1}{4}R^2P$. *p.* 765. *l.* 15. ipſi. *p.* 774. *l.* 26. *pro* $+\frac{1}{3}$h, *lege*, $-\frac{1}{3}$h. *p* 380. *l.* 42. *pro* $\frac{3}{8}$ *lege* $\frac{3}{8}$. *p.* 783. *l.* 6. *pro* a *lege* α. *p.* 787. *l.* 43. aciem habentis. *l. pen. pro* − 9sh *lege* + 9sh. *p.* 793. *l.* 31. − 5αsR. *p.* 820. *l. antep. pro* $\frac{35}{24}$ *lege* $\frac{25}{24}$. *p.* 831. *l.* 30. ad B + B. *p.* 846. *l. ult. in fine, pro* a c^2 *lege* a c^3. *p.* 855. *l.* 25. *ſupra, pro* χ *lege* χ^2. *p.* 861. *l.* 22. 1666. *p.* 927. *l* 16. C, κ, puncta. *p.* 1058. *l.* 24. fit.

ELEN-

ELENCHUS CONTENTORUM.

Oratio Inauguralis. Pag. 1.

Matheſis Univerſalis; ſeu Opus Arithmeticum, Philologice & Mathematice traditum. Arithmeticam *Numeroſam* & *Specioſam*, aliaque continens. 11

Dedicatio. 13

Cap. I. DE *Matheſi in genere; ejuſque Objecto & Diſtributione.* 17

II. *De Geometria & Arithmetica ſpeciatim. Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones. Eaſque vere Scientias eſſe.* 19

III. *De Demonſtrationibus Mathematicis: Unde Mathematicas vere Scientias eſſe confirmatur.* 21

IV. *Unitatis & Numeri Definitiones. Quo ſenſu Unum negatur eſſe Numerus. Tam Unum quam Nullum, vario ſenſu, Principium Numeri. Unum eſt Numerus Minimus. Nullum non eſt Numerus. Numeri Fracti, non ſunt veri Numeri.* 24

V. *Numerorum Procreatio. Numerus Maximus non datur. Numerorum Nomenclatura, & Ordinata Diſpoſitio, in continua Proportione Decupla; apud omnes Gentes recepta. Diſpoſitio hæc Gentium Diſtributione antiquior. Unde orta.* 28

VI. *Latina Numerorum Nomina, a Græcis derivata. Aliæque pluriмæ Etymologiæ.* 31

VII. *Numerorum Notatio, per Omnes Alphabeti Literas; Hebræis & Græcis communis.* 41

VIII. *Numerorum Notatio, per Selectas aliquot Alphabeti Literas, Græcis & Latinis communis. Cur illæ potius quam aliæ ſeliguntur.* 43

IX. *Numerorum Notatio per Ciphras Saracenicas, ſive Vulgares Figuras Numerales. Ciphra quid; ejuſque variæ ſignificationes. Occulte ſcribendi modi. Siglæ & Notæ quomodo differunt apud Romanos. Notæ Arithmeticæ a quibus inventæ.* 46

X. *Figurarum Numeralium Valores; Primarius & Secundarius. Locus. Periodus. Ciphræ uſus. Fractiones Decimales. Gradus Aſcendentes & Deſcendentes, in proportione Decupla.* 49

XI. *Gradus Aſcendentes & Deſcendentes in quacunque proportione. Algebræ Fundamentum. Poteſtates Algebricæ cum Geometricis Dimenſionibus comparantur. Earum Appellationes & Characteres. Poteſtates illæ per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimenſiones, aptius explicantur. Algebrica Notatio ulterius tradita. Algebræ Veterum & Recentiorum differentia. Utriuſque uſus.* 52

XII. *Fractionum ſive Minutiarum Notatio. Fractionis Numerator & Denominator. Minutiæ Minutiarum. Fractio Propria, & Impropria.* 60

XIII. *Additio quid? Axiomata quædam, ſeu Communes Notiones. Additionis Summa ſeu Aggregatum. Additionis Praxis, in numeris Simplicibus. Additionis & Subductionis Tabella; ejuſque Demonſtratio. Additionis Praxis in numeris Compoſitis; ejuſque Demonſtratio. Operationis Compendium. Additionis Praxis in Fractionibus Decimalibus. Additionis Praxis in variis Denominationibus.* 62

XIV. *Subductio Additioni contraria. Subductio quid? Subductionis Praxis, in Numeris Simplicibus; In Numeris Compoſitis. Praxeos Demonſtratio. Praxis in Fractionibus Decimalibus. Praxis in variis Denominationibus. Subductio Majoris ex Minore, quatenus Impoſſibilis. Quantitates Negativæ ſeu Ablatitiæ; non abſurde ſupponuntur. Quid innuunt. Subductio Majoris ex Minore quatenus ſupponitur præſtanda.* 67

XV. *Additio & Subductio Algebrica, & Specioſa. Utriuſque Regulæ & praxis.* 70

XVI. *Additionis & Subductionis per contrarias operationes Probatio, ſeu Examinatio.*

natio. Objectionibus Rami respondetur. Quæstiunculæ aliquot familiares solvuntur. Probatio Novenaria. Utut lubrica sit, non tamen contemnenda. Quomodo reddi potest certa. 73

XVII. *Additionis & Subductionis Exercitium in Chronologia, &c. De Nativitate Arphaxadi, & Abrahami; & de Promissione facta. Gen.* 15. *& Gal.* 3. *comparantur. De Israelitarum mora in Ægypto. De duræ Servitutis initio. De Obstetricum Responsione. Numerus Descendentium in Ægyptum. Gen.* 46. *& Act.* 7. *comparantur. Immensum eorum Incrementum.* 79

XVIII. *De Multiplicatione. Quid sit? Quid Multiplicandus, Multiplicator, Factus? Quid, Multiplum, Pars, Partes, Aliquota Pars, Aliquanta Pars. Multiplicatio sensu Stricto, & sensu Laxo, sumpta. Non semper numerum auget. Multiplicatio quatenus est multiplex Additio. Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici potest. Multiplicationis Praxis; In Numeris Simplicibus: In Numeris Compositis: In Partibus Decimalibus. De Indice seu Exponente Numeri Facti.* 84

XIX. *De Divisione. Quid sit Divisio, Dividendus, Divisor, Quotiens. Divisio sensu Stricto & sensu Lato, sumpta. Non semper numerum Divisum minuit. Divisio quatenus est multiplex Subductio. Divisionis Praxis: per Divisorem Simplicem; per Divisorem Compositum. Divisionis Praxis in Partibus Decimalibus. De Indice seu Exponente Quotientis seu Numeri Orti.* 92

XX. *De Multiplicatione & Divisione Algebrica, & Speciosa: Et Quantitatum ex pluribus Denominationibus constantium; earumque ad unam aliquam Reductione.* 102

XXI. *De Multiplicationis & Divisionis Probationibus; earumque probationum Fundamentis. Familiares aliquot quæstiunculæ solvuntur.* 112

XXII. *Multiplicationis Exercitium in Parallelogrammis Rectangulis mensurandis & invicem comparandis. Divisionis in Parallelogrammis Rectangulis Exercitium.* 118

XXIII. *Euclidis Elementum secundum, Arithmetice Demonstratum.* 123

XXIV *Geodæsia Parallelogrammi Rectanguli; Obliquanguli: Cujusvis. Mensuratio Trianguli Rectanguli; Obliquanguli: Cujusvis. Mensuratio cujusvis Figuræ Rectilineæ. Mensuratio Figuræ Regularis. Mensuratio Circuli; ejusque Portionum, Sectorum & Segmentorum. De Circuli Quadratura; & Ratione Perimetri ad Diametrum. De Figuris Mistis. De Figurarum Metamorphosi.* 127

XXV. *Numerorum invicem Comparatio. Aliarum item Quantitatum, sed nonnisi invicem Homogenearum. Comparantur tum quoad Differentiam, tum quoad Rationem. Harum comparationum ab invicem Discrimen. Differentia Subductione investigatur; Ratio, Divisione; sed ea tantum quæ est quantitatum Homogenearum. Quantitatum ad Heterogeneas Applicatio, quatenus ad Divisionem referenda sit. Rationes omnes invicem Homogeneæ, non item omnes Differentiæ. Ratio an ad Quantitatem, an potius ad Qualitatem pertineat.* Πληθότης *quid? Progressio Arithmetica & Geometrica: Continua, & Disjuncta. Proportionalium Notatio. Proportio Harmonica.* 133

XXVI. *Progressio Arithmetica, variorum Problematum familiarium Solutione, explicatur.* 138

XXVII. *Progressio Arithmetica fusius traditur.* 140

XXVIII. *Progressionis Arithmeticæ brevior Synopsis.* 147

XXIX. *Rationum Distributio, & Nomina. Ratio Multiplex, Super-particularis, Super-partiens, Sub-multiplex, &c. Rationum Designatio, & Notatio.* 149

XXX. *De Rationum Compositione seu Continuatione, & Imminutione. Ratio Duplicata, Triplicata, &c. Item Subduplicata, Subtriplicata, &c. Et Subduplicatæ Triplicata, &c.* 154

XXXI. *Progressio Geometrica Continua; Disjuncta. Investigatio Summæ. Investigatio Termini ultimi; aut cujusvis intermedii.* 157

XXXII. *De Logarithmorum Origine, & Usu.* 167

XXXIII. *Progressio Geometrica fusius traditur.* 169

XXXIV. *Progressionis Geometricæ brevior Synopsis.* 180

XXXV. *Euclidis Elementum Quintum Arithmetice demonstratum.* 183

XXXVI. *Elementi Quinti Synopsis.* 193

XXXVII. *Aurea Regula. Ejusdem Praxis & Demonstratio. Exempla varia. Altitudinum per Umbras mensuratio. Horæ diei, sub diversis Meridianis comparatio.*

paratio. Terminorum Proportionalium præparatoria Reductio. Cautela de non-proportionalibus. Gravium Descensus Acceleratus. Effluentis Aquæ Vis languescens. Terminorum Proportionalium Ordinatio. Terminorum Præparatio; per Divisionem; per Multiplicationem. Dubii, de Quantitatibus Heterogeneis, Solutio. Operationis Probatio. 196

XXXVIII. *Aurea Regula Reciproca. Ejus a Directa Discrimen. Praxis & Demonstratio. Quæstiones per hanc Regulam solvendæ. Operationum Compendia & Probationes. Reductio hujus ad Regulam directam.* 203

XXXIX. *Aurea Regula Composita. Tum ubi omnes Analogiæ Componentes, sunt Directæ; Tum ubi Altera, vel etiam Plures, sunt Reciprocæ.* 205

XL. *Regula Societatis. Tum sine Tempore, Tum cum Tempore.* 208

XLI. *Fractiones sive Minutiæ. Fractionum Origo. Numeri Fracti, an veri Numeri. Fractionum Explicatio. Notatio. Denominator. Numerator. Fractiones Propriæ; Impropriæ. Fractionum Explicatio altera. Divisionum Quotientes indicant. Explicatio Tertia quæ & Irrationalibus conveniat. Fractionum Æquipollentia. Earum cum Rationibus Comparatio.* 209

XLII. *Additio & Subductio Fractionum; Tum Cognominum, Tum Non-cognominum. Fractionum ad communem Denominationem Reductio. Minimus communis Denominator. Maximus communis Divisor.* 213

XLIII. *Fractionum Multiplicatio, & Divisio: Per numerum Integrum; Per numerum Fractum. Multiplicationis & Divisionis Inversæ, Æquipollentia. Producti, & Quotientis, in minimis Terminis exhibitio. Operationum præcedentium (Additionis, Subductionis, Multiplicationis, & Divisionis,) brevis Synopsis.* 217

XLIV. *Fractionum Reductiones variæ. Impropriæ Fractionis, ad Numerum Integrum vel Mistum, Reductio; & contra. Reductio ad Minimos Terminos; Ad communem Denominatorem; Ad Denominatorem datum; Ad communem, datumve, Numeratorem. De Fractionum Fractionibus reducendis. De Fractionibus Sexagenariis & Decimalibus, tum ad se invicem, tum ad Ordinarias, Reducendis.*

XLV. *De Fractionum & Rationum Rationibus. Operis Epilogus.* 228

Adversus M. Meibomii de *Proportionibus* Dialogum, Tractatus Elenchticus, Anno 1657 editus. 229

Dedicatio. Ubi de Cubicis Æquationibus. 231
Tractatus ipse. 257
Mersenni locus notatus. 289

De Sectionibus Conicis, Nova Methodo expositis. 291

Dedicatio. 293
Procœmium. 295
Pars Prima. Prop. I. *De Figuris Planis juxta Indivisibilium Methodum considerandis.* 297
II. *De Triangulo.* 298
III. *De Area Trianguli.* 299
IV. *De Triangulis æque-altis.* 300
V. *De Cono.* 300
VI. *De Pyramide.* 302
VII. *De Coni-Sectione.* 303
VIII. *De Parabola, Coni sectione facta.* 306
IX. *De Conoeide & Pyramidoeide Parabolico.* 307
X. *De Conoeideos & Pyramidoeideos Parabolici sectione.* 308
XI. *De Cuneo Parabolico.* 309
XII. *De Parabolæ Latere Recto.* 309
XIII. *De Ellipsi sectione Coni facta.* 312
XIV. *De Elliptico Pyramidoeide, & Conoeide (seu Sphæroeide) & Cuneo.* 312

ELENCHUS CONTENTORUM.

XV. *De Conoideos & Pyramidoideos Sectione.* 314
XVI. *De Ellipſeos Latere-Recto.* 314
XVII. *De Hyperbola, Sectione Coni facta.* 315
XVIII. *De Hyperbolico Conoeide, Pyramidoeide, & Cuneo.* 315
XIX. *De Conoeideos & Pyramidoeideos Sectione.* 317
XX. *De Hyperbolæ Latere-Recto.* 317
Pars Secunda, *De Coni-Sectionibus Cono Exemptis.* 319
Prop. XXI. *De Parabola, abſolute conſiderata.* 319
XXII. *Corollaria.* 321
XXIII. *De Recta Parabolam Contingente.* 322
XXIV. *De Parabolæ Diametris.* 323
XXV. *Effectiones Geometricæ.* 325
XXVI. *De Ellipſi, abſolute conſiderata.* 326
XXVII. *De Ellipſeos Diametro Tranſverſa, & Verticibus oppoſitis.* 328
XXVIII. *Corollaria.* 329
XXIX. *De Ellipſeos Diametris Conjugatis.* 330
XXX. *De Recta Ellipſin Contingente.* 331
XXXI. *De Ellipſeos Diametris.* 333
XXXII. *Effectiones Geometricæ.* 335
XXXIII. *De Hyperbola, abſolute conſiderata.* 336
XXXIV. *De Diametro-Tranſverſa, & Hyperbolis Oppoſitis.* 338
XXXV. *Corollaria.* 339
XXXVI. *De Recta Hyperbolam Contingente.* 340
XXXVII. *De Hyperbolæ Diametris.* 342
XXXVIII. *Effectiones Geometricæ.* 345
XXXIX. *De Hyperbolæ Aſymptotis.* 345
XL. *De Hyperbolis Aſymptotis.* 347
XLI. *De Hyperbolæ Diametris Conjugatis.* 347
XLII. *De Conjugatis Hyperbolis.* 348
XLIII. *De Syſtemate Hyperbolico.* 349
XLIV. *Ellipſeos & Hyperbolæ comparatio.* 349
Appendix. *De Paraboloeidibus.* 350
Prop. XLV. *De Paraboloeide Cubicali.* 350
XLVI. *De Recta Paraboloeides Cubicale Contingente.* 351
XLVII. *De Paraboloeidis Cubicalis Diametris.* 351
XLVIII. *De Area Paraboloeidis; & Conoeidis Pyramidoeidiſve illi accommodati.* 353
XLIX. *De Paraboloeidibus aliis.* 353
L. *De Elliptoeidibus, & Hyperboloeidibus.* 354

Arithmetica Infinitorum. 355

Dedicatio. 357
Oughtredi Approbatio. 363
De Clar. *Bullialdi*, Ad Arithmeticam Infinitorum *Tractatu, Monitio.* 364
Prop. 1. &c. *De Seriebus Primanorum, ſeu Arithmetice-proportionalium, finitis & infinitis, ad ſeries Æqualium comparatis.* 365
3. 4. *De Triangulis, & Conoeidibus ſive Pyramidoeidibus Parabolicis.* 366
5. &c. *Comparatio Lineæ Spiralis, & Peripheriæ.* 366
14. &c. *Comparatio Spiralis & Parabolæ.* 371
19. &c. *De Seriebus Secundanorum, ſive in Arithmetice-proportionalium Ratione Duplicata.* 373
22. *De Cono & Pyramide ad Cylindrum & Priſma comparatis.* 374
23. *De Complemento Semi-parabolæ, ad Parallelogrammum comparato.* 374
24. &c. *De Figuris Spiralibus, ad Circulum & Sectores comparatis.* 375
39. &c. *De Seriebus Tertianorum.* 382
42. *De Complemento Paraboloeidis Cubicalis.* 383
43. *De Seriebus Quartanorum, Quintanorum, aliorumque, in Arithmetice-proportionalium ratione Multiplicata qualibet.* 383
45. &c. *De Complementis Parabolæ, & Paraboloeidium Cubicalis, Biquadraticalis, Super-*

Superſolidalis, &c. ad Parallelogramma comparatis. De Spiralium item variis generibus ad Peripherias comparatis; & Figuris illis adjacentibus, comparatis ad Circulos & Sectores. 384

48. &c. *De Conoeidibus ſive Pyramidoeidibus, Parabolarum & Paraboloeidium Complementis aptandis, (quorum Diametri vel Axes ſint Parabolæ aut Paraboloeidium Tangentes,) ad Cylindros & Priſmata comparandis.* 387

53. &c. *De Seriebus Subſecundanorum, Subtertianorum, aliorumque in Arithmetice-proportionalium ratione Submultiplicata qualibet.* 389

55. &c. *De Parabolis & Paraboloeidibus ad Parallelogramma comparandis.* 390

58. &c. *De Seriebus Compoſitis.* 391

60. &c. *De Parabolis & Paraboloeidibus omnigenis, ad Parallelogramma comparandis; eorumque Conoeidibus ſeu Pyramidoeidibus ad Cylindros & Priſmata.* 393

64. *Theorema Univerſale, de Seriebus præmiſſis omnibus ad Seriem Æqualium comparandis.* 395

65. *De Seriebus diverſis, invicem comparandis.* 395

66. &c. *De Seriebus, ſive analogis Figuris, Truncatis; earumque Segmentis, invicem comparandis.* 396

73. &c. *De Seriebus invicem reſpective multiplicandis; & Figuris ejuſmodi multiplicatione provenientibus.* 398

81. &c. *De Seriei unius ad aliam Applicatione ſive Diviſione, & Figuris inde oriundis.* 401

87. &c. *De Seriebus Reciprocis, & Figuris Interminabilibus.* 403

102. &c. *De Figurarum interminabilium Area; ſive earum ad Parallelogramma comparatione.* 408

106. &c. *De Seriebus Reciprocis Multiplicandis & Dividendis; & Figuris inde oriundis.* 410

108. &c. *De Æqualium Serie, ſeriebus aliis reſpective Mulctata; & Figuris ſimiliter Mulctatis, ſeu excavatis.* 412

117. *De Seriei Æqualium, ſerie Primanorum mulctatæ, Reſiduis; eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 415

118. *De Seriei Æqualium, ſerie Secundanorum mulctatæ, Reſiduis; eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 415

119. *De Conoeidibus & Pyramidoeidibus, ad Parabolæ vel Paraboloeideos cujuſvis ordinatim-applicatas aptatis.* 416

120. &c. *Comparatio Circuli ſive Ellipſeos, ad Quadratum Diametri ſive Parallelogrammi circumſcriptum; Sphæræ item & Sphæroeideos vel Pyramidoeideos Elliptici, ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum.* 416

125. &c. *De Seriei Æqualium, ſerie Tertianorum, Quartanorum, &c. mulctatæ, Reſiduis; eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 419

128. &c. *De Seriei Æqualium, ſerie Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. mulctatæ, Reſiduis; eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 421

129. *De Conoeidibus & Pyramidoeidibus, ad Parabolæ, vel Paraboloeideos cujuſvis, Complementi ordinatim-Applicatam (diametro Parabolæ vel Paraboloeideos parallelam) aptatis.* 422

133. &c. *De Seriei Primanorum, ſerie Secundanorum mulctatæ, Reſiduis; eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 425

134. &c. *Comparatio Circuli ſive Ellipſeos, ad Parallelogrammum; & Sphæræ vel Sphæroeideos ad Cylindrum.* 425

139. &c. *De Seriei Primanorum, ſerie Tertianorum, Quartanorum, &c. mulctatæ, Reſiduis; eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 428

145. &c. *De Seriei Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. aliis Seriebus mulctatæ, Reſiduis: eorumque Quadratis, Cubis, &c.* 430

147. &c. *De Seriei Subſecundanorum, mulctatæ ſerie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel etiam Radicum Quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c.* 431

154. *De Seriebus Subtertianorum, Subquartanorum, &c. varie mulctatis.* 433

155. &c. *De Seriebus Auctis; earumque Aggregatorum Quadratis, Cubis, &c.* 434

162. &c. *Comparatio Conoeideos vel Pyramidoeideos Hyperbolici, ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum; ipſiuſque Hyperbolæ ad circumſcriptum Parallelogrammum.* 436

168. &c. *De Seriebus in ſeries Inverſas reſpective multiplicandis.* 440

168. *Circulus ad Quadratum Diametri, ut* 1 *ad Quantitatem nota* □ *designatam.* 441
169. &c. *De Tabella Numerorum Figuratorum interpolanda; & Quantitatis* □ *Investigatione.* 442
171. &c. *Investigatio Characteris numeri Triangularis; deque ipsis numeris Triangularibus interpolandis.* 443
176. &c. *Investigatio Characteris numeri Pyramidalis, Trianguli-triangularis, Trianguli-pyramidalis, &c. & de ejusmodi Numeris interpolandis.* 445
184. *Interpolationis inceptæ continuatio.* 458
185. &c. *De Seriebus Tabellæ numerorum Figuratorum interjectis; earumque Characteribus, &c. ipsaque Tabella, quantum numerorum natura patitur, completa.* 459
191. *Quantitatis* □ *in numeris absolutis, quam proxime, designatio.* 467
192. &c. *Ejusdem designatio in Lineis.* 476

Eclipsis Solaris Observatio, Oxonii habita. 2 Aug. 1654. St. vet. 479

Dedicatio. 481
Observatio ipsa. 483
Typus Eclipseos. 487

De Cycloide Tractatus. 489

Dedicatio. 491
Præfatio. 492
Scripta duo Proponentis Problemata. 496
De Cycloide, & Corporibus inde genitis, Problematum Solutio. 499
Pars Secunda. 520
Clar. Wrennii; *De Tangente Cycloidis, Tractatus.* 533
Ejusdem Εὐθυσμὸς *Curvæ Cycloidalis.* 534
De Dimensione Cycloidum Contractarum & Protractarum. 538
Problematis Kepleriani per Cycloidem solutio. 540

Tractatus Epistolaris, ad D. *Hugenium.* 542

De Cycloide. 542
De Cissoeide. 545
De Conchoeide. 550
De Curvarum Εὐθυώσει, *seu Rectificatione.* 550
De Paraboloeide Semi-cubicali. 551
De Curvarum Superficierum Πλατυσμῷ, *seu Complanatione.* 554
Conoeidis Parabolici Superficies. 555
Ellipsis Expansa. 556
Cycloidis Socia. 557
Ellipseos curva. 557
Sphæroeidis oblongi Superficies. 558
Sphæroeidis lati Superficies. 558
Lineæ Spiralis longitudo. 559
Ejusdem & Parabolicæ æqualitas. 560
Spirales aliæ. 560
Curvarum Rectificatio per Tangentes. 561
Curvæ Parabolicæ Rectificatio. 561
Conoeidis Parabolici Superficies. 562
Et Centrum Gravitatis. 563
Paraboloeides Semi-cubicalis. 563
Paraboloeidum aliarum Curvæ, rectificatæ. 564
Curva Cycloidis. 565
Cycloides Secundariæ. 567

Mecha-

ELENCHUS CONTENTORUM.

Mechanica; sive de Motu, Tractatus Geometricus. 571

Dedicatio. 573
Cap. I. *De Motu Generalia.* 575
II. *De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.* 594
III. *De Libra.* 615
Pars Secunda. 643
Cap. IV. *De Centro Gravitatis.* 645
V. *De Calculo Centri Gravitatis.* 665
Pars Tertia. 939
Cap. VI. *De Vecte.* 941
VII. *De Axe in Peritrochio; & Machinis cognatis.* 965
VIII. *De Trochlea, seu Polyspasto.* 982
IX. *De Cochlea.* 988
X. *De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.* 992
XI. *De Percussione.* 1002
XII. *De Cuneo.* 1016
XIII. *De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.* 1018
XIV. *De Hydrostaticis.* 1032
XV. *Epilogus, ex Miscellaneis.* 1056

Eorum quæ Secundo Volumine continentur, habetur Index illi præfixus.

Præter ea quæ his duobus voluminibus continentur, extant alia, sive scripta mea, sive à me edita; tum Mathematica, tum alia; quæ sequuntur.

Ptolemæi Harmonica, *Græce tunc primum (ex MSS.) edita; cum Nova Versione Latina, & Notis. Subjungitur* Auctarium *de Veterum Musica ad Hodiernam Comparata.* 1682.

Archimedis Arenarius; & Dimensio Circuli; (& Eutocii *Commentarius*) *Græce & Latine; cum Notis.* 1676.

Aristarchi Samii, *de Magnitudinibus & Distantiis* Solis & Lunæ *liber*: *Et* Pappi Alexandrini *Fragmentum Libri Secundi hactenus desiderati*: *Græce & Latine.* 1688.

Cypriani Computus, (*cum Notis,*) *nunc primum ex MSS. editus*: *inter Cypriani Opera, Oxoniæ edita*; 1682.

Jeremiæ Horroccii, & Guilielmi Crabtree, *Opera Posthuma*; & *Observationes Astronomicæ*; *in ordinem digesta.* 1670.

Interpretationis Numeri 666, *a* Francisco Potter, *anno* 1642 *editæ, Latina Versio. Amstelodami.* 1677.

Contra Thomam Hobbes *scripta, illius scriptis responsoria.* viz.
Elenchus Geometriæ Hobbianæ. 1655.
Hobbii debita Castigatio, ob male redditas Lectiones. 1656.
Hobbiani Puncti Dispunctio. 1657.
Hobbius Heauton-timorumenos. 1662.
Hobbii Quadratura Circuli, Cubatio Sphæræ, & Duplicatio Cubi, Confutata 1669. *Eademque secundis curis edita, denuo refutata.* 1669.
Responsio ad Tria scripta Th. Hobbes. 1671.

Societatis Regiæ Londini, & *Transactionum Philosophicarum* (*pro mense Julio* 1670) Defensio, *adversus Cavillationes W. H.*

Veritas

Veritas Explorata; *ſive Animadverſiones in librum* Roberti D. Brooke, *de Natura* Veritatis *ejuſque cum Anima Identitate.* 1643.

Tractatus de Loquela (*ſive Sonorum Loquelarium Formatione*) *Grammatico-Phyſicus. Una cum Grammatica Linguæ Anglicanæ. Anno* 1653 *primum edita*; *Eademque* (*poſt alias Editiones*) *quarto edita, & ſimul Aucta*, (*cum ſubjuncta* Praxi *Grammatica.*) 1674.

Inſtitutio Logicæ, *ad uſus communes accommodatæ*; (*cum ſubjunctis tribus Theſibus ſeu Diſſertationibus Logicis.*) 1687.

Alia Nonnulla in Tranſactionibus Philoſophicis *ſparſim inſerta.*

THEOLOGICA.

Mens Sobria *ſerio commendata*; *in Concione Latina ad Artium* Baccalaureos Determinantes; *in die Cinerum Febr.* 20. 1655. (ſtilo Angliæ.) *Item Epiſtolæ ad* Titum *Expoſitio, Tribus Prælectionibus* (*pro Gradu Doctorali*) *Oxonii habitis, Maii* 24, 25, 26. 1654. *Et Tres Quæſtiones, in Comitiorum Veſperiis, Julii* 8. 1654, *Defenſæ. Anno* 1657 *editæ.*

Reſurrectionis à Mortuis *Aſſertio*: *in Concione ad Oxonienſem Academiam; in Die Paſchatis,* 1679 *habita,* (*ad* 1 *Cor.* 15. 20.) *& eodem anno* 1679 *edita.*

De Regenerationis *Neceſſitate, Conciones duæ* (*ad Joh.* 3. 3.) 1682.

De Fidei Vita, *Conciones duæ* (*ad Hebr.* 10. 38.) 1684.

Defenſio Sabbati Chriſtiani, (*ſeu Diei Dominici*,) *adverſus Judaizantes Sabbatarios. Pars Prima,* 1692. *Pars Secunda,* 1694.

De Sacra Trinitate, (*adverſus Socinianos,*) Epiſtolæ *Octo*; *&* Conciones *Tres,* (*ad Joh.* 17. 3.) 1690, 1691, 1692.

Tractatus alii Theologici, Anno 1692 *editi,* viz.

De Dei Juſtitia, *&* Suprematu, *Conciones Duæ* (*ad Judices Itinerantes*) *Julii* 14. 1651. *& Martii* 4. $166\frac{3}{3}$,) *ad Gen.* 18. 25.

De Juſto Dei Judicio, *&* Vindicta, *Conciones duæ,* (*ad Pſal.* 58. 11.) *Aug.* 21. 1659. *& ſequente Januario.*

De Iſraelis Retributione *debita, ob nuperam Liberationem.* (*ad Deut.* 10. 12, 13,) *Dec.* 2. 1660. *Coram Rege* Carolo II. *in Angliam tum nuper Reduce.*

De Vero Theſauro, *Conciones duæ*, (*ad Mat.* 6. 19, 20.) *Febr.* 7. 1668, *& Dec.* 10. 1671.

De Dei Liberatione & Protectione *populi ſui, Concio* (*ad* 2 *Cor.* 1. 10.) *Sept.*12. 1686. *quo tempore de reducendo Papiſmo metus erat.*

De Sinceræ Reſipiſcentiæ *&* Reformationis, *Difficultate*: (*ad Jer.* 3. 10.) *Dec.* 30. 1688. *in intervallo, poſt abitum Regis Jacobi* II, *& ante Succeſſionem Regis* Guilielmi, *Reginæque* Mariæ.

De Melchizedeco *Tractatus.*

De Jobo *Tractatus.*

Tractatus de Pſalmorum Titulis.

70-

JOHANNIS WALLIS,

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI,

ORATIO INAUGURALIS:

IN

Auditorio Geometrico, *Oxonii*, habita; ultimo die Menſis Octobris, Anno Æræ Chriſtianæ 1649. quum publicam Profeſſionem auſpicatus eſt.

Edita Anno 1657.

Oratio Inauguralis,

A *Johanne Wallis*, Geometriæ Profeſſore *Saviliano*, in Auditorio Geometrico, Oxoniæ, habita; ultimo die Menſis *Octobris*, Anno 1649; quum publicam Geometriæ Profeſſionem Auſpicatus eſt.

Inſigniſſime Domine, Vice-Cancellarie;

Reliquique Doctores, Profeſſores, Ædiumque Præfecti Venerandi:

Egregii Procuratores; Cæterique, tum Regentes, tum Non-Regentes, Magiſtri:

Unaque quotquot adeſtis Viri, Juveneſque Academici.

QUANTUMVIS ego non ſim neſcius, quanto ſubſidat intervallo Geometra (dicam?) veſter, an hodiernus Orator; tam infra ſublimem tantæ Scientiæ dignitatem, quam Majeſtatem hujuſce Auditorum Coronæ celeberrimæ: Non tamen eſſe, ſpero, quicquam, cur reformidem penitus, favore veſtro fretus, & de nobiliſſima Scientia, & coram humaniſſimis Auditoribus, verba facere.

Suſcepti ratio.

Audacior fortaſſe res videri poſſit, & modeſta parum, virum vix ſatis notum, vix dum alumnum, in Academia celeberrima ſtatim prodire Profeſſorem; eoſque tanquam de Cathedra compellare, quorum non paucis ſatius eſſet ſe auditorem ſiſtere.

Non deeſt tamen quod hic dicendum occurrat, non tam prætextus, quam juſtæ defenſionis loco.

Partim enim invitat notiſſima veſtra Clementia, qua in Advenas, etiam exteros, ſumma ſoletis humanitate propenſi eſſe; præſertim vero in ἀνεψιὸς veſtros, ex conjunctiſſima ſorore *Cantabrigia* nepotes; quos, non tam ut adoptivos, quam germanos filios, in proprio repoſitos ſinu, ſumma ſoletis indulgentia exoſculari.

D. H. Satilii Encomia.

Partim etiam animum faciunt ipſa *Statuta* Domini *Henrici* SAVILII, Equitis Honoratiſſimi, candore morum, & multiplici eruditione inſignis, deque literis literatiſque omnibus optime meriti; Quibus ipſe, pro ſumma qua erat munificentia, animoque ad ſtudia, præſertim Mathematica, promovenda propenſiſſimo, duos *Mathematum Profeſſores* ſancivit, alendos curavit, iiſque leges poſuit; quos ἐκ τῶν de quacunque gente, de quacunque profeſſione, ſtatuit eligendos.

Invitat igitur Clementia veſtra; Suadent *Statuta Saviliana*; propriuſque animus ad hujuſmodi ſtudia per ſe propenſus, eorumque ſive vota, ſive ſuffragia, qui id negotii mihi demandandum curarunt, Jubent, iſtis invitamentis obtemperare.

Cum vero gratiſſimum SAVILII nomen memorare contigerit; prolixa ſatis oratione poſſem in ipſius Encomia, ſi id neceſſe, perorare; ſi nempe, quæ, dum in vivis erat, edidit eruditionis ſpecimina, quæque mortuo ſuperſunt monumenta, recenſerem ſingula. Norunt hæc *Ætonenſes*, Norunt & *Mertonenſes*, quorum utrorumque Collegiis ſumma cum laude ſimul præfuit; imo *Oxonia* tota, & univerſa quidem Reſpublica literaria, norunt melius, quam ut mihi ſit opus ſigillatim illis repetendo ſingulis immorari: eumque ne poſteri penitus ignorare poſſint, hujuſce ſaltem diei & loci celebritas, & exercitia Mathematica, in omnia (ſpero) ſecula, ipſo jubente, continuanda, prohibebunt.

Taceo igitur, ſummam quam habuit Græcarum literarum peritiam, & cognitionem limatiſſimam; qua in re vix ulli, per univerſum terrarum orbem, ſecundus erat. Unde hic ſolus ſelectus fuit, qui Sereniſſimam Angliæ Reginam ELIZABETHAM in Græcis literis inſtitueret; & deinde ab Auguſtiſſimo JACOBO Rege, dum novam Sacri Codicis verſionem Anglicanam parabat, accitus eſt *Savilius*, qui, cum aliquot aliis magni nominis viris, & linguarum peritiſſimis, operam hac in re navaret. Quod & ſumma cum laude præſtitit.

Sed & opera celeberrimi illius Græcorum Theologi, *Johannis Chryſoſtomi* Antiocheni, ſumma induſtria, incredibili labore, & indefeſſis vigiliis, ex variis collatis exemplaribus Manuſcriptis reſtituta, ſuis tandem ſumptibus immenſis, eleganti charactere, excuſa edidit.

Egregium etiam illud *Bradwardini* opus (qui & ipſe aliquando fuerat Collegii *Mertonenſis* præfectus) quod, *De cauſa Dei*, inſcribitur, adverſus *Pelagium*, SAVILIUS noſter ex Manuſcriptis exemplaribus in publicam lucem protulit, & typis commiſit.

Præter autem illa in Theologia (cui tamen ipſe nomen non ex profeſſo dederat) magni moliminis opera; ſe etiam alias præſtitit eximium virum, Hiſtoricum, Criticum, Philoſophum, Mathematicum. Veteres *Hiſtoriæ Anglicanæ* ſcriptores, ex ſitu & pulvere, quibus erant obſiti, in lucem edidit. *Cornelium Tacitum*, celebrem illum Romanorum Hiſtoricum, ſuis in eum annotationibus illuſtravit. Denique (ut alia præteream) in re *Mathematica*, non modo Munificentiſſimus erat Patronus, ſed & egregius ipſe Mathematicus. Quod non modo *Prælectiones* ejus in *Euclidem* editæ teſtantur, ſed & varia etiam quæ ſuperſunt ſpecimina ipſius calamo exarata. Varios ſiquidem veteres Authores Græcos, propria ipſius manu tranſcriptos, ex partibus tranſmarinis huc adduxit, & in ſuorum Profeſſorum uſum reliquit. Suaſque ipſius in *Apollonium Pergæum*, *Eutocium Aſcalonitam*, *Claudium Ptolemæum*, alioſque ex veteribus, Annotationes habemus; ejuſque in *Joſephi Scaligeri Cyclometrica* Animadverſiones; aliaque non pauca ſchediaſmata, acutiſſimi ingenii argumenta; quæ qui legerit, non poterit dubitare, illum & virum fuiſſe ſumme induſtrium, & ſummum Virum; atque in penitiora Matheſeos penetralia, & reconditiores receſſus penetraſſe. Adeo ut mihi quidem res omnino miranda videatur & ſtupenda maxime; virum in omni literaturæ genere exercitatum, adeo tamen in ſingulis eminuiſſe.

Verum hæc ego omnia neceſſe habeo ut taceam; aliaque inſuper multa, quæ in ipſius laudes prolixe dici poſſunt: Ne vel gratiſſimam ipſius apud vos memoriam ſuſpicari, vel abuti videar, nimia digreſſione, patientia veſtra; ſi nempe præſentis immemor inſtituti, Virum, utut digniſſimum, potius ἐγκωμιάζειν, quam lectionibus Geometricis præfari vellem.

De Matheſi generatim.

De rebus autem Mathematicis, & nominatim Geometria, cum verba ſim facturus; hæret aliquandiu ſuſpenſus animus, neſcius unde vel exordium ſumam, vel ubi finem ponam. Ampliſſimum ſiquidem campum apertum video; ubi ſpatiari, quantumlibet, licet; totum percurrere non licet. Si enim Matheſeos Originem, varioſque Progreſſus & Incrementa; ſi, quam utilis, dicerem, & neceſſaria; non ſolum ad diſciplinas reliquas commode perquirendas, verum etiam ad inſignes rerum humanarum uſus innumeros, & propemodum infinitos; ſi, quanta perſpicuitate demonſtrationes inſtituat, quanta ſagacitate veritatem inveſtiget, quanta certitudine inventam probet, & quanta denique voluptate invenientis animum afficiat, vellem delineare: Non oratio unica, ſed multa potius volumina componenda; nec tam eſſet ad Clepſydram perorandum, quam in infinitum.

Matheſeos origo & progreſſus.

Originem ipſius ſi repetam; ad ipſa mundi principia neceſſe eſt recurram: neque enim ipſe Mundus, Mathematum uſum, antiquitate multum ſuperat.

Ante diluvium.

Author eſt *Joſephus*, jam olim, ante diluvium Mathematicas artes viguiſſe: Duaſque memorat *Columnas Sethi*, lateritiam alteram, alteram lapideam; quibus utriſque inſcripſerat res Mathematicas jam tum inventas; eo nempe conſilio, ut, ſive igne ſive aqua mundus periret prius, (Utramque enim perditionem præſenſiſſe dicitur,) earum ſaltem altera ſuperesſet.

Sin illa *Joſephi* relatio dubiæ cuiquam fidei videatur; non ideo tamen dubium erit, quin, & tunc dierum, Mathematum cognitio non obſcura fuerit. Patet illud vel ex artificioſo Numerorum uſu, & rebus apte computandis jam tum accommodato. Numeros enim reperimus, etiam ab ipſis mundi primordiis (prout in æta-

tum Patriarcharum Catalogo liquet) per Monadas, Decadas, Centuriaſque apte diſpoſitos; gradibus, ſcilicet, proportione decupla continue aſcendentibus; ne inordinata Numerorum multitudine & ἀταξίᾳ, confuſus laboraret calculus, vel quidem nullus omnino eſſet. Quod, certe, neque temere, nec inartificioſe factum eſt: ſed Arithmeticam tum cultam eſſe, ſatis indicat.

Eandem numerorum diſpoſitionem, non ut commodam modo, ſed ut abſolute neceſſariam, per omnia huc uſque ſecula continuatam, etiamnum retinemus. Quanquam enim primis Arithmeticis, liberum fuerit, ſive decuplam, ſive aliam quamlibet proportionem ad placitum elegiſſe, juxta quam numerorum gradus diſpoſitos eſſe vellent: attamen, aliquam ſaltem eligendam eſſe, numeroſque neceſſario gradatim diſponendos, res ipſa clamat; niſi nullos omnino numeros eſſe vellent, vel ſaltem nullum eorum uſum. Si enim res miranda olim habita eſt, Cæſarem, aut quemvis alium, ſingulorum in toto exercitu militum nomina memoria retinere, recenſere, & ſua ſingulis applicare poſſe; cum tamen eorum in legiones, turmas, cohortes, & quaterniones diſtributio non parum adjumenti huic negotio contulerit: certe miraculi inſtar eſſet, aut plane impoſſibile, pluſquam decies centies millena millia numerorum nomina, eaque inordinata prorſus & independentia, recordari, intelligere, &, prout oportet, applicare. Hanc enim unam numerorum nomenclaturam callere, plus eſſet negotii, quam omnes omnium linguarum voces ediſcere.

Quiſquis igitur fuerit, ſive Adamus ipſe, ſive quiſpiam alius ætate prima natus, qui primus infinitam numerorum multitudinem in ordinem digeſſit, eoſque quaſi in tribus & familias εὐτάκτως diſponendo ἀταξίαν ſuſtulit, certe digniſſimus eſt qui magnus habeatur Arithmeticus, & πρωτομαθηματικός: ſive etiam nondum lapſus Adam, quum ſua ſingulis creaturis impoſuit nomina, ſua etiam numeris impoſuerit, debito interim ordine diſtributis: ſive denique Deus ipſe Optimus Maximus, quum Adamum Grammaticam docuit, docuerit etiam & Arithmeticam; fuerintque tam loquendi, quam numerandi habitus, ipſi à Deo immediate infuſi, qui tamen aliis poſt illum hominibus præceptis & crebris actibus ſunt acquirendi: ſaltem, utcunque numerandi peritiam ætate prima non fuiſſe incognitam, abunde liquet.

Nec minus dubitandum eſt, Arithmeticæ Geometriam adjunctam eſſe. Partim quod menſurarum omne genus neceſſitas videatur id poſtulare; partim etiam quod, numeris ſemel intellectis, non adeo difficile fuerit eos menſuris applicare.

Atque hoc ideo præſertim videtur affirmandum, quod Inſtrumenta etiam Muſica, Metallorum notitia, & fabriles operæ, non ita multo poſt, à *Caini* poſteris inventa fuerint; authoribus nempe *Jubale*, & *Tubal-Caino*. Quorum ſi illum *Apollinem*, hunc *Vulcanum*, poſtea dictos eſſe dixerimus, à vero fortaſſe non aberrabimus: Neque enim eorum vel nomina vel inventa ſunt prorſus abſimilia. Nam *Jubalis* inſtrumenta Muſica, cum *Apollinis* Lyra, ſat apte concordant; & *Tubal-Caini* fabrilia, *Vulcano* Fabro commode applicantur.

Utrique vero, Arithmeticæ ſcilicet & Geometriæ, *Aſtronomiam* etiam adjunctam eſſe, ex Annorum, tunc temporis, Menſiumque calculo, ſat innoteſcit. Qui Solem enim, & Lunam, reliquaque Sydera, ad dierum, annorum, menſiumque diſcrimina conſtituit Deus, noluit hæc temporum indicia diu ignorari.

Erat igitur univerſa Matheſis, quoad præcipuas ſaltem ipſius partes, etiam tunc exculta; gradatim tamen ſuccedentibus ſeculis perficienda. Adeoque poterit cum diſciplinis reliquis, ſi non omnibus, pleriſque ſaltem, de primatu contendere.

Poſt Diluvium.

Sed neque diluvio extinctus erat Matheſeos ardor; nec ipſa ſuccedentibus ætatibus deferbuit: ſed, ſive *Noachi* arca conſervata, ſive deinceps poſtea exſuſcitata, viguit magis.

Apud Chaldæos.

Apud *Chaldæos* ſiquidem, poſt Diluvium, primo floruiſſe creditur; deinde & apud *Ægyptios*, (unde in *Græciam* tandem, *Italiam*, aliaſque mundi partes eſt allata:) cum hoc tamen diſcrimine, *Chaldæorum* Aſtronomia, *Ægyptiorum* Geometria, præcipue celebrata eſt.

Chaldæos jam olim rebus Aſtronomicis operam dediſſe, teſtantur Obſervationes illæ Cœleſtes, quæ, (Alexandro victore,) à Calliſthene, ad Ariſtotelem, Babylone dicuntur allatæ; annorum ſcilicet mille nongentorum & trium; hoc eſt, ab ipſo circiter Diluvio ad Alexandri tempora continuatæ, ut ex calculo Chronologico ſatis liquet: Nec enim multo plures anni a Diluvio ad Alexandri tempora elapſi fuerant.

Sed & in ſacris Scriptoribus, Chaldæorum non modo peritiam Aſtronomicam, ſed & ſuperſtitionem Aſtrologicam, notatam legimus; quo minus dubitare liceat, artes Mathematicas apud illos antiquitus floruiſſe.

Apud Ægyptios. Nec etiam multo ſerius ad Ægyptios delata eſt Mathematum cognitio: ſive enim ab *Abrahamo*, prout nonnullis videtur, ſive à quopiam alio ex Chaldæis Magiſtro, edocti; ſive etiam ipſa rei neceſſitate coacti fuerint: certum eſt Menſurandi peritiam non ſero ad illos appuliſſe. Adverſus enim notiſſimas inundationes Nili, vix efficacius ullum adhibuere remedium, quam quod Geometriæ beneficio obtinebant: diſpertitis nempe Geometrice terris, quas undarum injuria confuderat, & reſtitutis agrorum emerſorum limitibus, quos ſubmerſio ſuſtulerat, quo melius ſua ſingulis diſtribuerentur.

Geometriæ nomen unde. Atque hinc fortaſſe factum eſt, quod tota menſurandi ſcientia *Geometriæ* nomine indigitetur, quoniam Gæodæticis præſertim menſurationibus applicata; nomine nempe totius, συνεκδοχικῶς, ab inſigniori quadam ipſius parte, mutuato; quæ *Pantometria* non minus recte dici poſſet, vel ſimpliciter Μετρικὴ. Neque enim terræ magis, quam cuiquam alii vel ſpatio, vel corpori, menſurando convenit: agit enim de Magnitudine, ſeu Quantitate continua, abſtracte & ἀνύλως conſiderata, adeoque cuilibet ſubjecto capaci pariter applicabili.

Quæ autem de Ægyptiorum Geometria diximus, non ita dicta velim exiſtimetis, acſi aliarum Matheſeos partium rudes fuerint: ſed quoniam neceſſitate rei coacti, ea præcipue uſi ſint; quo melius Nili injuriis poſſet obveniri: (pari ſcilicet neceſſitate, ac illa quæ Phœnicibus incubuit poſtea, Arithmeticam excolendi; quo felicius nempe ſuccederet mercatura.) Cum enim fuerint Ægyptii Geometriæ periti, Arithmetici calculi ignaros eſſe, ſine quo Geometria practica parum procederet, non eſt exiſtimandum.

Phœnices Arithmeticam excoluerunt.

Nec etiam Aſtronomiæ fuiſſe rudes cenſendi ſunt: cum enim ὀνειροκρίτεις fuiſſe conſtet, adeoque Divinatricis ſive artis ſive impoſturæ ſtudio deditos: non credendi ſunt cœleſtia φαινόμενα, quorum ſive uſus ſive abuſus apud ejuſmodi ſciolos maximus eſſe ſolet, inobſervata præteriiſſe. Quod ideo quidem minus credendum eſt; quia, & regio ipſa, ob perpetuam cœli ſerenitatem, adeo cœleſtibus obſervationibus eſt accommoda, ut nulla magis: Et Chaldæos, à quibus hujuſmodi artes didiciſſe creditum eſt, Aſtrologiæ fuiſſe peritos, abunde liquet; unde non minus Aſtrorum cognitionem, quam cognatas artes, hauſiſſe commode potuiſſent: Imo & vicinos Arabes aſtra notaſſe & nominaſſe, ex hiſtoria Jobi liquido patet; quem Arabiæ vel incolam vel vicinum fuiſſe, & Patriarcharum temporibus Ægypto commorantium vixiſſe, vix dubitandum eſt. Nec interim tota hæc Ægyptiorum doctrina vel futilis erat, vel ſuperſtitioſa; cum Moſen ipſum illorum diſciplina imbutum legimus, nec tamen ideo culpæ inſimulatum.

Verum jamdiu apud Chaldæos & Ægyptios morati ſumus, (diutius fortaſſe quam opus erat,) ut Matheſeos originem, & antiquiores progreſſus inveſtigaremus. Fatendum autem eſt, in toto illo temporis decurſu, quo apud illos Matheſis morata fuerit, vix inſignem aliquem perfectionis gradum adeptam eſſe: ſaltem, niſi forte, vel invidioſa illorum reticentia, qua inter arcana Sacerdotum myſteria etiam res Mathematicas occuluerunt; vel injuria temporis, etiam aliis diſciplinis inimica, eorum inventa oblivioni dederit, quo minus ipſorum peritia poſteris innoteſceret.

Apud Græcos. Ad Græcos tandem Matheſis tranſmigravit: quo etiam feſtinat Oratio noſtra. Eam nempe Thales Mileſius in Græciam primus adduxiſſe creditur; quam Pythagoræ ſubinde Schola, Platonis Academia, Ariſtotelis Lycæum, multique his edocti magiſtris, foverunt, excoluerunt, auxerunt indies. Quod eo quidem ſucceſſu factum eſt, ut paucis annorum centuriis ſub illorum auſpiciis plus floruerit Matheſis & ampliores progreſſus fecerit, quam per omnia ſecula ſuperiora; ne dicam etiam & ſubſequentia, ſi ſaltem ducentos jam proxime elapſos annos eximamus. Teſtatur illud numeroſa Græcorum Mathematicorum cohors: inter quos, præter ſuperius nominatos, etiam Hippocrates Chius, Archytas Tarentinus, Leo, Theudius, Eudoxus, Euclides, Eratoſthenes, Archimedes, Hipparchus, Apollonius Pergæus, Cteſibius, Hero, Gemînus, Soſigenes, Ptolemæus, Pappus, Diophantus, Serenus, Proclus, Theon, aliique multi, quorum ne quidem nomina recenſere licet. Quorum alii Theoremata & Problemata ingenioſe excogitarunt; alii methodice diſpoſuerunt, ἀποδείξεις addiderunt, quibus ea illuſtrarunt & confirmarunt; alii Mechanicis uſibus applicarunt; alii denique cœlis, alii terris, alii aliis magis exercitati:

citati: vix enim ullo uſpiam ſolo, quam apud Græcos, Mathemata feliciùs floruerunt.

Neque ſtudia iſthæc Mathematica coluerunt tantum Græciæ Philoſophi plerique omnes; ſed inter prima eruditionum rudimenta poſuerunt; unde κατ' ἐξοχὴν Μαθήματα nominarunt. Grammatices enim ſtudio vix opus erat; cum lingua vernacula peragebantur omnia: Rhetorices floſculos antiquiores Græci minus curabant; ut qui res magis quam verba inſectabantur: Logicam etiam, qua uſi erant, ipſo potius uſu, quam præceptis, addiſcebant: adeoque prima ſtudiorum principia in ipſis Mathematis ponebant; quique horum rudes eſſent, ut omnino ἀμαθεῖς ἀπαίδευτοι, & Indocti prorſus habebantur. *Matheſis apud Græcos ante alias diſciplinas docebatur. Μάθησις unde dicta.*

Hinc orta eſt illa Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, qua, inſpecto vultu, judicium primo fecit, an Mathematum capaces eſſent, qui ipſius ſcholam adire vellent; nequis ἀμαθὴς, aut ἀπαίδευτος intraret, ſtudiumque male collocaret, Haud ſecus & Plato affixo programmate prohibebat μήτις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Xenocrates poſtea quendam repulit, Mathematum ignarum, ne ſui auditor eſſet, ut qui Anſas Philoſophiæ non habuerit: τὰς λαβὰς inquit, φιλοσοφίας οὐκ ἔχεις. Nec multo ſecius Ariſtoteles feciſſe creditur; qui & Mathematica multa ſcriptis aliis immiſcuit, & libros etiam Mathematicos conſcripſit; licet eorum non pauci injuria temporis perierunt.

At heu! quam noſtræ Athenis illis longe diſpares! Ubi, ſi Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, Platonis Programma, aut cenſura Xenocratis obtineret, ut ἀγεωμέτρητοι omnes exſularent, certe exiguus ſupereſſet Philoſophorum numerus. Studia nempe Mathematica, quæ primas olim obtinebant, vix nunc dierum (neſcio quo malo fato) apparent uſpiam: acſi hodierni Philoſophi Cynicis mallent & Epicureis accenſeri, quibus fere ſolis erat Matheſis neglectui; quam Pythagoricis, Platonicis, aut Ariſtotelicis, quibus & curæ fuit & delectationi. Imo vero res Mathematicas ad Philoſophiam non pertinere, arbitrantur hodierni quales quales Peripatetici, cum tamen erat ipſe Περίπατος egregie Mathematicus: quod ipſi ſive negent, ſive neſciant, ſaltem diſſimulant. *Matheſeos neglectus.*

Verum fatendum ingenue quod res eſt. Ex quo Athenis migrarunt ſeveriores Muſæ, vix uſpiam firmas poſuere ſedes, ſed vel errare coactæ vel delitescere.

Romani nempe, quanquam Græcorum literaturæ hæredes habiti, pro florido quo erant ingenio, potius quam ſolido; dicendi potius copia, & verborum ornatu, quam rerum pondere & argumentorum acumine delectati; Rhetorica magis quam Logica inſtructi; orationis potius quam rationis Magiſtri; leviores Muſas amplexi, ſeveriores omnino inſalutatas præteribant. Grammaticam ſcilicet, Rhetoricam & Poeticam ornare ſatagentes; Philoſophiam interim, Medicinam, & rerum præſertim Mathematicarum ſtudia miſſa faciebant; Condendis carminibus, componendis orationibus, rebus forenſibus agendis ſat erant apti, ut & Hiſtoriis conſcribendis; Verum ſi apud illos Philoſophiam aut Matheſin queſitemus, omnino fruſtra ſumus; Exceptis enim, quæ apud Ciceronem & Senecam occurrunt pauca, Philoſophiæ quidem parum, Matheſeos vix quicquam occurrit uſpiam: Niſi forte quod Architectonica uſi fuerint. *Matheſis Romæ neglecta.*

Verum quidem eſt, Julium Cæſarem annum reformaſſe, *Julianum* deinceps dictum, & Calendarium Romanum inſtruxiſſe: At illud Græci *Soſigenis* ope factum eſt, aliunde advocati; nec enim Romanorum quempiam huic negotio parem legimus.

Romæ vero nimium neglecta Matheſis, ut & Philoſophia reliqua, in Arabiam deflexa eſt; hoſpitium nempe apud Arabes nacta, ſi non quo floreret, ſaltem quo delitesceret. Græcorum enim depoſita conſervarunt potius, & tandem reddiderunt, quam auxerunt. Quanquam & eorum ſtudia, minime contemnenda, non ingrati agnoſcimus: quorum non obſcura veſtigia in multis rerum Mathematicarum nominibus etiamnum retinemus. Hinc puncta *Zenith* & *Nadir* nominata; circuli item *Almicantri* & *Azimuthani* dicti; & ipſa Sinuum appellatio, ut taceam *Algebræ* & *Algorithmi* nomina, & ipſum *Almanach*, & ſiqua ſunt ſimilia, quæ Arabiſmum ſonant. Qui autem Arabum hiſtorias paulo accuratius inſpexerit, varioſque inter illos tum Matheſeos tum aliarum diſciplinarum egregie doctos notaverit, rem illam extra omnem dubitationis aleam poni haud dubitabit. *In Arabiam transiit.*

Poſtremis autem hiſce ſeculis jam tandem redux Matheſis gratiori hoſpitio in variis Europæ partibus excepta eſt: fautores egregios nacta. Quorum indefeſſis vigiliis, *In Europam rediit: & incrementa nacta eſt.*

vigiliis, & ſumptibus haud exiguis, progreſſus & magnos quidem, & non ſperatos, fecit. Exſurgit ſiquidem, quaſi ex alto ſopore exſuſcitata; ſeu potius, ut pridem quaſi ſemimortua, jam reviviſcit: nec reviviſcit tantum, ſed quaſi vegetum vigorem recens adepta, in ſingulis quidem ipſius partibus & aucta multum & ornata incedit.

Arithmeticam ſi ſpectemus; fractionum ad partes decimales reductio, laborioſo calculo ſexagenario multo facilior eſt & expeditior: Et mirandum illud Logarithmorum inventum, egregium attulit calculo ſublevamen; ut alia minora taceam.

Geometriam quod attinet: Doctrina Sinuum, Tangentium, & Secantium, fere tota nova eſt; qua Trigonometriæ calculus maxime ſublevatur. Et præter varia Theoremata de novo inventa, ipſa inveniendi methodus multum facilitatur. Algebræ nempe, ſive Analytices uſus, ultra quam veteribus innotuit, jam innoteſcit.

Aſtronomia, eximiis inventis inſtauratur; non tantum novis ſyſtematis, ſed & novis φαινομένοις. Quis enim veterum vel circum-Joviales planetas? vel Solis maculas? ejuſve motum circa proprium axem? vel cometas etiam, ſive novas in fixarum regione ſtellas, obſervavit? Quis item Veneris aut Mercurii cornua? Saturni anſulas, & figuram ovalem? aut Jovis faciem undulatam? ipſoſque Lunæ montes, & valles, & inæqualiter aſperam ſuperficiem notavit unquam? Et (ut alia levioris momenti tranſeam) Ars ipſa Nautica, Aſtronomicis ut plurimum principiis fulta, præter ſtupendum Magneticæ pyxidis uſum, variis tum inventis tum inſtrumentis locupletatur.

Non ideo tamen mirum videri debet, aut de Græcorum induſtria quicquam derogatum iri, ſi multa veteribus incognita noſtræ ætatis Mathematici inveſtigarint. Multo enim facilius nobis eſt ipſorum inventis addere, quam ipſis primitus invenire. Præſertim cum ſtudia nunc liceat, Typographiæ beneficio, per totam Europam communicare, quæ tunc dierum quaſi unis erant Athenis concluſa.

Παραίνησις ad Matheſeos ſtudium.

Verum omnino excitandi eſtis, Academici, & hortandi ſerio, ut hiſce rebus animum applicetis ſedulo; nec patiamini, ut veternum rebus mathematicis aut denuo obrepat, aut diutius incumbat.

Si, quorſum hæc? quæratis; aut cui bono? Utut ea vox Academicis omnino ſit indigna; mihi tamen erat in animo pluribus ei, quam nunc licebit, obviam ire. Sed anguſtia temporis illud prohibet; Ne nimio vobis tædio moleſtus eſſem.

Ipſius utilitas & neceſſitas.

Quin Mechanicos conſulite, ſi neſciant Academici, alioſque ex vulgo ſive operarios ſive negotiatores, Numquis rerum Mathematicarum uſus? Conſulite Mercatores, numquis plane ἀναρίθμητος eorum ratiocinia curare poſſit? Interrogate nautas, numquis Geometriæ, Aſtronomiæ, Geographiæ plane rudis, navigia poſſit de portu in portum ducere? A Latomis item & Architectis ſciſcitemini, numquis ἀγεωμέτρητος ſuperbas ædificiorum moles, turrita palatia, & arcuata laquearia, Geometrice (ut loquuntur) ad ſtuporem vulgi ſuſpenſa, ædificare? Dicant vel fabri, numquis normæ, libellæ, aut circini uſus? Sed & milites percontari liceat, numquis Matheſeos uſus ad arces & oppida munienda, caſtra ponenda, tormenta bellica commode regenda, aliaque multa militaria peragenda? Reſpondeant ipſi Syracuſani, ut cætera taceam, num non Archimedis rerum Mathematicarum peritia uſui fuerit, Syracuſis ipſis propugnandis?

Academicorum intereſt Mathemata callere.

At, Quorſum hæc omnia? dicetis Academici. Tractent fabrilia fabri: Quid ad nos iſtæc, qui mechanici neque nunc ſumus, nec aliquando futuri? Qui nec inſtrumenta bellica facturi unquam, nec ædificia? Itane, vero Academici? Adeone veſtra nihil intereſt ea ſcire, quæ non aliquando facturi eſtis? Ideone Deus *Os homini ſublime dedit, cœlumque videre, Juſſit,* --- ut ea tantum contempletur, quæ poſſet ipſe conficere? Num libri de Cœlo, de Mundo, de Animalibus, aliiſque rebus naturalibus, omnino indigni ſunt quos legat Philoſophus, niſi hæc omnia poſſit efficere? Apage vox illa, Philoſopho indigna! cujus illud eſt, ea ſcire quæ Deus ipſe condidit, quæque vel Ars vel Natura poſſit efficere. Quem melius deceat Chremetis illud Terentiani, quam Chremetem ipſum, *Homo ſum, nihil humanum a me alienum puto.*

Sed ut ſerio agamus, Auditores; unde eſt quod hæc efficiat Mechanicus operator? Nonne quia Philoſopho Mathematico edoctus? Ea nempe quæ Mechanicus efficit, non niſi Philoſopho dictante facit. Altioris ſiquidem ſcientiæ munus eſt, ea docere & intelligere, quæ ipſi operantur: Prout minoris artis eſt, admoto

pollice

pollice barbita pulsare, quam concentum musicum ἁρμονικῶς depingere. Horologium puta sciothericum depingit forte sive Pictor sive Cæmentarius; sed præscribente Mathematico: Haud secus ac medicamina componit Pharmacopœus, sed dictante Medico. Nec minus interest Philosophi, μαθηματικῶς & intelligere & demonstrare; quam Mechanici χειρεργικῶς operari. Adeoque indignum esset Academicis, si in opificum potius Mechanicorum officinis, quam Philosophorum scholis, Matheseos cognitio quærenda foret.

Matheſin ignorare non leve dedecus.

An vero tantæ laudis est, dicetis forsan, ea scire quæ nec mechanicis sunt alienа? Demus, si placet, non esse; (nec concedamus tamen:) At multa sunt, quæ scire, non est magnæ laudis, cum ea tamen nescire, non parvi sit dedecoris. Non magnæ laudis est, virum Academicum Latine posse & intelligere & loqui, at magni est dedecoris, non posse.

Julius Scaliger Matheſeos ignarus.

Exemplo sit illud Julii Scaligeri; (ut de Josephi Cyclometricis nihil dicam;) qui non modo sibi, sed & aliis non paucis, videtur magnus. Cum Cardanus arguerat sive Cometas, sive Novas Stellas, Luna superiores apparuisse, quod minorem habuerint Parallaxin; Ipse, assumptione concessa, sequelam negat; Cometæ Parallaxin ratus, non ex locali ipsius positione, sed ex superioris cujusdam sive planetæ sive stellæ motu pendere posse. Quæ perinde absurde sonant Mathematicis auribus, & inconcinne dicta sunt, ac si Diem tunc esse neget quum Sol meridiana luce fulgeat: Adeoque, turpiter titubando, insignem prodidit Matheseos imperitiam: ut qui dignior esset à præceptore discere, Quid sit parallaxis; quam de rebus cœlestibus disputare: eoque nomine apud viros doctos, nec semel quidem, nec immerito vapulat. Julius siquidem Scaliger, pro more suo, satis pro imperio Cardanum tractans, negare quidlibet sibi licere ratus est; adeoque sat amplam sibi negandi ansam videtur nactus, si Cardanus affirmaverit. Atque hoc quidem in rebus mere Physicis, magis impune fecisse posset; ubi in utramque ut plurimum partem probabili saltem argumento disputare liceat. Non ita tamen in Mathematicis; ubi veritas semel cognita extra dubium protinus collocatur; errores interim tam manifesto deteguntur, ut nulla quidem superfit vel prætextus larva.

Ovidii σφάλμα.

Nec leve illud Ovidii σφάλμα: dum diurnum Solis motum, Phaethonte duce, describpturus, per singula Zodiaci signa transire fingit: motum nempe Solis Diurnum & Annuum temere confundens. Quod indicio est, ipsum suos ipsius Fastorum libros vix satis intellexisse: & Romanorum potius Calendarium, quam cognitos Syderum ortus & occasus, suis carminibus describsisse.

Verum festinandum esse video: metuo enim ne jamjam fuerim patientiæ vestræ injurius nimis. Ideoque quæ dicenda supersunt multa, quibus Matheseos studia suadere possem, intacta prorsus præterire necesse habeo.

Matheſeos utilitas ad alia perdiſcenda.

Hoc saltem addam: Mathematum studia non modo pro ea quam in se habent veritate colenda esse, (quæ tamen ipsa, per se conspicua, & ultra Scepticorum litigia posita, animum reficiet valde & oblectabit;) sed & quod rerum aliarum cognitioni, nec id uno quidem nomine, conducant multum. Præterquam enim quod in aliis disciplinis passim occurrant multa, quæ citra Matheseos opem nullatenus intelligenda sunt: variaque quotidie, ex Matheseos cultura, Philosophiæ Naturali accedant incrementa: Illud interim non est exiguum; Matheseos studio paratum animum, aliarum disciplinarum capaciorem reddi, rebusque aliis tum apprehendendis tum judicandis longe paratiorem. Haud secus atque cum vesicas nonnunquam, animalium corporibus exemptas, flatu distendimus & exsiccamus, quo fiant rebus aliis commode continendis aptiores. Sive liceat potius cum Verulamio comparationem instituere; qui scientias Mathematicas cum lusu pilæ in sphæristerio confert. Ubi præter ipsum exercitationis bonum, quod per se intenditur, etiam εὐκίνητον σῶμα, (ut cum Hippocrate loquar,) membrorum nempe agilitas, oculorum attenta σκεπτικὴ, totiusque corporis gestus decorus, aliaque subinde commoda, ex accidenti conciliantur. Pariter & Mathesis, præter ipsam Mathematicæ veritatis cognitionem, habet & alia commoda, eaque non exigua, quasi adnascentia. Nec enim aptius occurrit remedium, quo phantasia mobilis attentior fiat, quo ingenium volatile reddatur fixum (ut Chymicorum verbis utar,) quam si Mathematicarum demonstrationum compedibus coerceatur. Vix item maturo magis judicio quispiam, quam qui rebus hisce exercitatus, vel sophismatum deteget fallacias, vel syllogismorum vires justamque sequelam assequetur.

Matheſis ingenium acuit.

Verum ego non parum metuo, ne suada nostra ad persuadendum vix satis valeat:

leat: adeoque Mathematum ſtudia, quæ digna quidem ſunt (Academici) quæ amplectamini, etiamnum nimis neglectui ſint futura.

Sin minus valuerit Oratio noſtra, (quæ fortaſſe non adeo eleganter vel artificioſe eſt elaborata, ut multum valere poſſit:) utinam ſaltem periculum facere dignaremini, ipſaque Mathemata cominus tractare: ut vel voſmet ipſi, experimento tandem edocti, judicium hac de re poſſitis experti ferre. Neque enim vos ipſos aliquando iniquos me habiturum judices, abunde confido.

Quod ego interim non pro forma tantum, Rhetoricantium more; ſed ſerio quidem & animitus opto: ut quod ſiquando feceritis; nec laboris impenſi, nec temporis, ſpero, quaſi male collocati, pigebit unquam. Ea nempe res Mathematicæ dulcedine & ſuavitate delectant ambientis animum, quam iiquis Rhetorico ornatu deſcribere ſatagat, quaſi ad vivum ſe poſſe delineare ratus, omnino truſtra eſt. Haud ſecus enim hac in re contingit, ac ſiquis de Mellis dulcedine judicium laturus eſſet: quæ quanta ſit, vel uno guſtu melius perdiſcet quis, quam Rhetoris, utut facundiſſimi, deſcriptione. Et Mathemata pariter, ipſo quidem quaſi contactu potius, quam *indicatu*, docent, quam ſint delectabilia. Nativa nempe ſua ipſorum pulchritudine, quam penicillo licet peritiſſimo depicta, videntur venuſtiora.

Matheſeos obſcuritas non tanta quanta vulgo creditur.

Siquis autem difficultatis incuſet, & perobſcura queratur ſtudia Mathematica: Quanquam illud quidem non prorſus inficias eam; Tamen--- *eſt infamia vero Major*---Præter enim ipſum aſpectum primum, & frontem quaſi ſubtetricam, cætera quæ ſuperſunt non tam terrere comperta ſunt, quam oblectare. Quodque ipſum, aggreſſuris, videtur prima fronte formidabile, illud, aggreſſis, & dulce ſatis compertum eſt & volupe; Ipſique qui ſubſequuntur labores ſuaviſſimis adeo delectamentis condiuntur, ut neſciam an Labores illi, an Voluptates, haberi mereantur. Sunt enim & luſus ipſi nonnunquam ſatis laborioſi, quæ tamen oblectamenta potius quam gravamina exiſtimantur. Adeoque qui ad Matheſin requiritur ſive mentis labor, ſive attentus animus, ut condimentorum acrimonia, appetitum potius excitat, quam palatum offendit.

Quicquid autem illud ſit difficultatis, quæ Matheſin comitetur, quodque aſperum occurrit, conabor ego ſecuturis (Deo volente) prælectionibus, quanta quidem poſſum facilitate, alleviare. Interim, ne τὰ μετρίως ἀμέτρως dicam, orata prius læſæ patientiæ veſtræ venia, conticebo.

DIXI.

MATHESIS
UNIVERSALIS:

SIVE,

ARITHMETICUM OPUS INTEGRUM,

Tum Philologice, tum Mathematice traditum, *Arithmecam* tum *Numerosam*, tum *Speciosam* sive *Symbolicam* complectens, sive *Calculum Geometricum*; tum etiam *Rationum* Proportionumve traditionem; *Logarithmorum* item Doctrinam; aliaque, quæ Capitum Syllabus indicabit.

Edita Anno 1657.

Insignissimis Doctissimisque Viris,

D. GERARDO LANGBAIN, *S.T.D.*
Collegii Reginensis, Oxoniæ, Præposito.

D. HENRICO WILKINSON, *S.T.D.*
Præbendario Ædis Christi.

D. JOHANNI WILKINS, *S.T.D.*
Collegii Wadhamensis Custodi.

D. JONATHANI GODDARD, *M.D.*
Custodi Collegii Mertonensis.

JOHANNES WALLIS, Geometriæ Professor Savilianus,
S.

CUM quæ in publicum prodeunt, pro more scilicet (eoque satis inveterato) nonnullorum inscripta nominibus soleant prodire; neque mihi quidem a recepto illo more jam recedendum plane videatur: Ex reliquis, quos & amo & veneror Collegiorum Præfectis, aliisque apud nos summis in omni eruditionis genere viris, vestra libuit, Viri Insignissimi, nomina seligere, quibus, qui sequitur, tractatum duxerim offerendum. Quod quidem eo consilio factum est, ut, cum præ ipsorum reliquis (plerisque saltem) Vos maxime studiis hisce Mathematicis indulgeatis, sive etiam incumbatis: eadem opera tum meos in vos affectus & observantiam testari possim, tum sequentis etiam operis rationes breviter aperire.

Hoc autem quicquid est negotii eo potissimum fine susceptum est, ut huic quam sustinere datum est provinciam, non modo non deesse penitus videar, sed & eam ornare potius, pro viribus nostris, & quo defungor munus adimplere. Quippe, cum hoc sibi in animo fuisse propositum, Eques Honoratissimus, idemque munificentissimus Patronus, D. HENRICUS SAVILIUS, *eximius sui temporis Mathematicus, statutis suis satis testatur; ne mera nomina sint Professores sui, sed qui studia Mathematica sedulo promoveant: Id mihi maxime visum est incumbere, ut justissimis illius votis quantum in me est satisfacere, nec nudo contentus titulo, Matheseos studia vel promovere satagam, vel adjuvare.*

Atque in hunc finem, præter assiduas prælectiones publicas, & privatas eorum qui hoc desiderant institutiones, omnino expedire videbatur, ut universalem hujusmodi Calculi traditionem publici juris facerem, qui non tam speciatim Arithmeticam, quanquam & hanc etiam, quam totam Mathesin spectet. Ex quo enim in Mathesin introducta est, quæ dicitur, Arithmetica Speciosa, *sive* Symbolica, *vel (quod aliis etiam audit)* Calculus Geometricus, *aut etiam (forte omnium optime)* Matheseos Universalis principia, *(quippe ut tota Rationum traditio, ita & hujusce Calculi exercitium, indifferenter omnes Matheseos partes respicit;) ex quo, inquam, hæc introducta est,* Vietæ, Oughtredi, Harrioti, Cartesii, *aliorumque magni nominis virorum, ope; quam ingentes fecerit profectus Mathesis universa, nemo hisce*

rebus vel leviter exercitatus ignorare possit. Quod autem ego, post tot eximios qui in hoc negotio præcessere viros, rem hanc aggrediar; non eo factum est animo, ut eorum laboribus quicquam ego derogatum velim; sed quod non ita rem hactenus absolutam putaverim quin & mihi pariter, quod post illorum messem colligam, etiamnum supersesse putem spicilegium.

Et quanquam eorum pars magna, quæ nunc proferimus, Auditoribus nostris jam publicis fuerit prælectionibus exposita; attamen, cum nec eosdem plane auditores continuis semper prælectionibus adesse, res ipsa clamet; & quidem, si adessent, non ea tamen valeant memoria, ut non sæpe ad ea quæ præcesserunt respicere subinde opus habeant; quid, quod & hujusmodi studia non ea sint, quæ attentione prima satis imbibantur, sed attentam insuper mentem postulent, & contemplationem, qua pensitemus serio, & dictis immoremur: Haud importunum fore autumo vel ipsis, qui hæc audiverint, nedum altis, ut & oculis eadem subjecta habeant, quo & ea persentiscant altius, & seriis cogitationibus his assuescant.

Rem ipsam quod attinet; non est ut nova hic expectetis omnia; sed neque nulla tamen. Numerorum natura, saltem quoad integros, jam olim erat Veteribus probe nota. At calculus eorum perplexus admodum & intricatus, labore plane improbo absolvendus: Et siquando ad integrorum particulas descendendum erat, ad scrupulos sexagesimales confugiebant (qui integrorum instar habebantur) aut etiam ad Rationum doctrinam figuris lineisve explicandam. Atque hinc factum autumo, quod Rationum Doctrinam, quæ mihi quidem Arithmeticæ potius consideationis videatur (atque ad omnes plane Matheseos partes perinde spectet,) ad Geometriam plane religarint; partim scilicet quod lineis facilius quam laborioso illorum calculo res exigeretur, partim etiam quod Arithmetices pomœria jam stricta fecerint, ut veris numeris (rationalibus scilicet, & quidem integris,) coercerentur, quibus tamen immensos Rationum campos haud coerceri posse certum erat.

Postquam autem in Arithmeticam introductus est Notarum numeralium usus, quæ Saracenicæ, seu rectius Indicæ, vulgo audiunt (ab Indis quippe in Arabium, atque ad nos inde delatæ;) tum incredibili statim levamine facilior evasit molesti labor calculi, tum etiam Arithmetices pomœria insigniter ampliata. Et quidem ex eo tempore, præter faciliorem integrorum calculum, accessit etiam ad Arithmeticam Fractorum speculatio, (quam Veteres Logisticam *vocabant, ut ab* Arithmetica *distinctam,) sed & Surdorum deinceps numerorum.*

Atque huc quidem ubi perventum erat, revixit denuo, & quasi ex postliminio revocata est Veterum Algebra (nomen jam Arabicum sortita) quæ (præter ea quæ apud Diophantum exstant) jam altum obdormiverat. Quam hæc interea temporis sortem apud Arabes nacta fuerit (qui tum Matheſin, tum alias item eruditionis partes alioqui perituras feliciter conservarunt, & tandem reddiderunt) haud in promptu est ut dicam; sub Cardani saltem, Tartaleæ, & Clavii temporibus redux facta, eorum scilicet aliorumque jam proxime elapsi seculi laboribus ornata, apud Europæos sedem fixit.

Ubi autem hæc redux veterum Algebra jam denuo excoli cœpta fuerat, atque ob jam receptas notas numerales expeditior facta; neque nunc Radicem primam *quam vocant solummodo, ejusque potestates,* Characteribus Cossicis *insignire solenne fuerat, sed &* Radices secundas *literis Alphabeticis: hinc credo ansam arripuit primus acutissimi & sagacis admodum ingenii Vir* Franciscus Vieta, *non ignotas tantum quantitates, sed & cognitas etiam, literis Alphabeticis insigniendi, eamque quam* Speciosam *vocamus Arithmeticam, & Novam Algebram introduxit: quam deinceps* Oughtredus, Harriotus, Cartesius, Schootenius, *&c. auxerunt indies, & plenius excoluerunt.*

Sed & interea temporis, in Arithmeticam numerosam partium Decimalium usus (quæ sexagesimalium scrupulorum vices insigni præstant compendio,) sive a Rhetico *sive a* Regiomontano *sive ab alio quopiam, ita sensim invectus est, ut quis ipsius fuerit primus Author vix (credo) satis constet. Atque insuper* Logarithmorum *doctrina ab Honoratissimo* Johanne Neppero (*Marchistoniæ apud Scotos Barone*) *primitus excogitata, atque ab ipso junctim cum* Henrico Briggio (*Geometriæ primum Professore* Gresshamensi *Londini, deinde* Saviliano *Oxoniæ,*) *recognita*

cognita & penitus absoluta, Multiplicandi, Dividendi, & Radices educendi laborem, incredibili plane compendio sublevavit.

Cum autem hoc adepta sit fastigium Arithmetica, variorum in suo cujusque genere virorum eximiorum ope fulta; quod illi sigillatim præstiterunt, id mihi jam in unicum systema redigendi incumbit onus. Adeoque Arithmeticam (nisi Mathesin *potius* Universalem *malitis appellare) non tantum in* Numeris *speciatim, sive Integris sive etiam Fractis; aut partibus tandem vel Decimalibus vel Sexagesimalibus absolvendam: sed universaliter in* Speciebus *etiam (uti dici solent) vel Symbolis exercendam: hoc est, non Numerosam tantum, sed & Cossicam & Speciosam Arithmeticam, sum traditurus. Sed & Demonstrative omnia (quod tamen negligere solent Arithmetici plerique omnes,) ut & Arithmeticæ speculativæ doctrinam, & praxeos item regulas tradam ex ipsis deductas principiis, continuis inde demonstrationibus (utut breviter, perspicue tamen) stabilitas.*

Verum & Rationum item & Proportionum doctrinam, ad Arithmetica principia revocatam, jam sua tandem sede collocavi. Cum enim eousque se dilatarunt Arithmetices pomœria, ut non contenta solis Numeris, universum illud qua longe lateque patet Matheseos subjectum, Specierum ope, suo jam comprehendat ambitu; & quantitates invicem tum Rationales dictas, tum Irrationales perinde respiciat: non est cur non & Rationum sive proportionum doctrina universa, iisdem se contineri cancellis patiatur; quæ quidem vix alio nomine, relictis Arithmeticis, in Geometricos olim fines recipi postulavit, quam quod Arithmetica, dum veris numeris se concludi passa est, non agnoverit Rationes ullas quam quæ veris explicari numeris potuerunt.

Quod vero longiusculis nonnunquam digressionibus exspatiari videar, (nec tamen extra istius quod susceperam negotii limites,) id data opera factum est, nec quidem uno nomine. Partim enim illud in Lectorum gratiam faciendum videbatur, quo rerum varietate nonnunquam oblectari possint, & traditorum utilitatem vel ipso usu ediscant: partim etiam (quod in toto hoc negotio mihi fuisse propositum non diffiteor) ut reapse ostendam etiam Geometrica Problemata (quatenus saltem a positione sive locali situ abstrahunt) a principiis Arithmeticis vel maxime dependere; & quidem eousque ab esse, ut ad Problemata sive Theoremata pure Arithmetica statuminanda (quod tamen non raro factum video) Geometricæ plane demonstrationes sint huc forinsecus advocandæ, ut contra quæ Geometrica habebantur, simplicius quidem & universalius ex pure Arithmeticis adeoque universalibus demonstranda videantur.

Quod autem vel Philologica, vel etiam alia Philosophica Mathematicis immiscuerim; partim illud ad subjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam ut condimenti loco, quo quæ, tironibus præsertim, satis arida videantur facilius deglutiantur, quippe qui Mathematicis forsan parum ante hac exercitati, diverticulis nonnunquam opus habeant, ne continua mentis intentione nimium defatigentur. In quorum item gratiam, fui ex consulto in primoribus prolixior & fusior explicandis, quam in succedentibus; quippe quod quibus primum aggressuris necessaria visa est prolixitas, iisdem ipsis quadantenus exercitatis non minus grata sit futura brevitas.

Quod denique tardius aliquanto prodeat tractatus hic quam speraverim (quippe jam secundus annus agitur, ex quo prelo subjectus fuerit,) ne miremini, hoc faciet maxime, si saltem quibuscum & quam perpetuis preli difficultatibus luctandum fuerit, satis intelligatis; tum propter Typographos hujusmodi scriptis edendis parum assuetos, tum etiam non admodum instructum Typographum. Quippe hinc non raro factum est, ut nunc ob schematum, nunc characterum inusitatorum, nunc etiam literarum inopiam, (quæ omnia non nisi Londino quoties res exigebat, cum non exigua temporis jactura supplenda erant,) hærendum tum aliquandiu tum aliquoties fuerit. Et quidem eousque, ut postquam hanc Partem Primam aliquatenus inchoaveram, seponenda tamen ea plane fuerit, dum pars altera serius incepta (quæ jam ante annum prodiit) absoluta fuerit. Sed & etiam interea temporis (præter opuscula quædam Theologica emissa) bis occurrebat castigandus Hobbius *tum ob ejus in libro* De Corpore *ἀγωμαχησίαν, tum ob λοιδορήματα quibus ille tum Scholas tum Academias qua Veterum qua Recentiorum omnino omnes lacessit,*

laceſſit, Se vanum efferens, ſuamque ignorantiam cum profeſſo illo omnium contemptu venditans. Nonnihil etiam attulit moræ, quod Marci Meibomii, de Proportionibus Dialogus, *ad examen etiam videbatur revocandus; quod in ſubjuncto huic Tractatu factum eſt. Quæ omnia, (ne & alia memorem negotia, quibus multoties fuerim avocatus,) non mirum eſt ſi nonnihil edendo huic tractatui injecerint moræ.*

Valete denique, Viri inſigniſſimi; & pergite, quod facitis, tum Academiam hanc celeberrimam, tum Rempublicam univerſam literariam, ſtudiis ornare veſtris & decorare.

Oxonii Dec. 20.
1656.

Matheſis

Matheſis Univerſalis.

SIVE,

Arithmeticum opus integrum; tam Philologice quam Mathematice traditum.

CAP. I.

De Matheſi in genere; ejus Objecto & Diſtributione.

PRiuſquam Arithmeticam, quam traditurus ſum, ſpeciatim aggrediar: non omnino abs re fore judico, generalia quædam quaſi προλεγόμενα præmittere de ipſa Matheſi in genere, cujus Arithmetica pars eſt ſatis inſignis: ut, quid ipſa ſint Mathemata, paucis enarrem; cur ita dicta; & quibus in rebus verſentur: & Matheſeos deinde diſtributionem ſubtexam.

Matheſis quid?

Si quid ſint ipſa Mathemata quæratur; aut quas diſciplinas illo nomine indigitemus: Reſpondeo, Mathemata dici, ſeu diſciplinas Mathematicas, omnes illas ſive Artes ſive Scientias, quæ circa *Quantitatem* ſpeciali modo verſantur; ſive Continuam quidem, ſive Diſcretam.

Matheſeos objectum, Quantitas proprie dicta.

Quantitatem vero cum dico, non eam laxiori quodam ſenſu intellectam vellem; prout eam Ariſtoles nonnunquam, ſive poſt illum alii, laxius loquendo, deſcribunt; quando Tempus, Locum, Orationem, aliquando etiam Motum & Pondus, & ſiqua ſunt ſimilia, ipſius ſpeciebus annumerant: Sed ſtrictiori ſenſu, prout ad Numerum & Magnitudinem reſtringi ſolet; quæ vel ſolæ vel ſaltem præcipuæ Quantitatis proprie dictæ ſpecies haberi ſolent. Reliqua vero non niſi reductive ad Quantitatem proprie dictam pertinere volunt Scholæ, quatenus nempe vel Menſuræ vel Numeri ſunt capacia; adeoque vix ullam ſubeunt Mathematicam ſpeculationem, niſi quatenus ad modum vel *Magni* vel *Multi* conſiderantur; præſertim ſi tota Rationum vel Proportionum doctrina vel Arithmeticæ vel ſaltem Geometricæ conſiderationis habeatur.

Verum quidem eſt, ea omnia in diſciplinis Mathematicis tractari, iis præſertim quæ Mixtæ dicuntur: qua forſan ſola ratione, inter Quantitatis ſpecies fuerunt annumerata. *Tempus* enim tractat Aſtronomia, ut & *Motus* cœleſtes quibus menſuratur; item Chronologia; atque etiam Gnomonice, Aſtronomiæ principiis ut plurimum nixa. *Locus* autem in Stereometria, quantum ad ejus capacitatem; in Geographia vero, quoad ejus ſitum & poſituram, ſpeciali modo conſideratur. *Orationem* tractat Muſica, tam quoad Temporum (ut loquuntur) menſuram; quam quoad Tonorum elationem, ſuppreſſionem, vel etiam circumflexionem; unde non modo Rhetorum & Poetarum, ſed & Muſicorum oritur & menſura & modulatio. *Motus* autem & *Pondus* in Mechanicis præſertim conſiderantur.

Verum quidem eſt hæc omnia & horum ſimilia, in diſciplinis Mathematicis tractari, & ſub μεγεθῶν nomine ab Euclide contineri; ſed (ſi Scholas audimus) non per ſe, & primario; ſed quatenus vel menſurantur vel numerantur: Ut ſint ea (prout loquuntur) Matheſeos objecta *Materialia*, ſed ſub ea formalitate, quatenus *Menſurabilia*, adeoque ſecundum *Plus & Minus*, ſeu *Majus & Minus*, conſideranda; & *Rationis* ſeu *Proportionis* capacia.

Dicimus igitur Matheſeos Objectum eſſe Quantitatem proprie dictam; Magnitudinem ſcilicet, & Multitudinem. Reliqua vero eatenus ad Mathemata pertinent, quatenus (reductive) ſunt vel Numeri vel Menſuræ capacia: nempe quatenus de illis interrogari poterit, vel *Quot* ſint, vel *Quanta* ſint. Adeoque ſatis apparet, quibus in rebus verſatur Matheſis: nempe in Quantitate, per ſe; in aliis autem rebus omnibus, quatenus vel Quantitatis capaces ſunt, vel ad eam reductive referantur.

Matheſis, unde dicta. Si de *Mathematum*, ſive *Matheſeos*, nomine quæratur, Cur hac appellatione inſigniantur illæ diſciplinæ: Ideo fortaſſe fuit, quoniam Mathemata apud multos quidem ſola, apud alios Antiquorum primo ante alias Diſciplinas loco, ediſcebantur: adeoque κατ' ἐξοχὴν Μαθήματα dicta, quia προτιμάσθητα.

Atque hæc de Matheſeos in genere tam Objecto, quam Appellatione dicta ſunto. Sequitur ut ipſius ſive Species, ſive Partes, ſeorſim conſiderentur.

Matheſeos diſtributio, in Puram & Mixtam. Sunt autem (prout dividi ſolent) diſciplinæ Mathematicæ aliæ *Puræ*, aliæ *Mixtæ*. Puras dicimus illas, quæ Quantitatem abſolute conſideratam tractant, prout à Materia abſtrahitur. Mixtas autem illas appellamus, in quibus, præter conſiderationem Quantitatis, (ſive Multitudo illa fuerit, ſive Magnitudo,) etiam ſubjectum, cui ineſt, connotatur.

Verbi gratia. Ubi in Arithmetica traditur, *Bis duo quatuor efficere*; Numeri hîc ſeorſum conſiderantur, & abſtracte ab omni materia ſubjecta. Pariter enim verum eſt, ſive de Hominibus, ſive de Angelis, ſive de aliis quibuſcunque rebus agatur. Item, ubi in Geometria traditur, *Circuli peripheriam ubique a ſuo centro æqualiter diſtare*: hic, præter ipſius circuli conſiderationem, ſubjecti nulla ratio habetur; ſive in cœlis ſit ille circulus, ſive in terris, ſive ubivis alias. Adeoque diſciplinas has, Mathematicas *Puras* dicimus; quia pure de ipſis Quantitatibus agunt, non immiſta ſubjecti conſideratione.

In aliis ſecus eſt. Verbi gratia: Cum docet Aſtronomia, *Æquatorem & Zodiacum ſe mutuo in binis punctis ſecare*; & quidem hunc ad illum oblique inclinari, angulumque graduum viginti trium cum ſemiſſe (circiter) conſtituere: videmus hic, præter inſtituta pure Mathematica, multa etiam mere Phyſica immiſceri. Quid ſit *circulus*, & *circulorum interſectio*; quid *obliqua inclinatio*, & *inclinationis angulus*, Mathematica mere ſunt, atque inde petenda; At, Solem (Terramve) hujuſmodi obliquum curſum peragere, eumque annuo ſpatio abſolvere, Phyſica ſunt, ex Hiſtoria nempe naturali obſervanda; adhibitis interim Mathematicis tam Principiis quam Inſtrumentis, quo melius hujuſmodi obſervatio inſtituatur.

Puræ: *Arithmetica, & Geometria.* Mathematicas igitur diſciplinas *Puras* dicimus, duas tantum: nempe *Arithmeticam* & *Geometriam*; Quarum illa agit de Quantitate Diſcreta, ſive Numero; hæc autem de Continua, ſive Magnitudine. Sed & ex his eſt quidem altera magis, altera minus pura: eſt enim Arithmetices ſubjectum purius quiddam & magis abſtractum, quam ſubjectum Geometriæ; ideoque ſpeculationes habet magis univerſales, quæ rei Geometricæ pariter ac aliis æque ſunt applicabiles.

Mixtæ. Reliquas autem omnes *Mixtas* eſſe dicimus. Quæ eatenus quidem ſunt Mathematicæ, quatenus in illis occurrit quidpiam vel Arithmeticum, vel Geometricum; quicquid autem inſuper eſt, pro mathematico non habendum eſt, ſed pro mixtura aliunde allata. Atque ex his quidem aliæ minus, aliæ magis Mixtæ ſunt; prout ad Mathematicas puras magis minuſve accedunt.

Aſtronomia. Inter Mixtas, celeberrima quidem eſt *Aſtronomia*: Quæ menſuram quidem & calculum adhibet, ſed ad Cœleſtia tantum φαινόμενα ſpeculanda. Corporum nempe cœleſtium magnitudines, diſtantias, motus, variaſque eorum & quoad nos, & inter ſe, poſituras contemplatur.

Cometographia. Dum autem Phænomena Cœleſtia nomino; ne ipſos quidem *Cometas* eximo; qui in ſublimi conſpiciuntur, & obſervandi rationem, aſtrorum obſervationibus non prorſus abſimilem, videntur poſtulare; quanquam eorum fortaſſe nonnulli ſint ſublunares: *Nonnulli*, inquam; Omnes enim ſublunares eſſe, (prout cenſebant veteres,) neutiquam eſt concedendum; cum præſentis præteritique ſeculi obſervationes manifeſto reclament.

Geographia. Aſtronomiæ ſubjungo *Geographiam*; utpote Aſtronomicis principiis ut plurimum fultam: Quæ, præterquam quod ab Aſtronomia mutuatur, non multum habet Mathematicum.

Gnomonice. Utrique vero (Aſtronomiæ & Geographiæ) *Gnomonicen* ſubjungo, (unde varia Horologia Scioterica, aliaque inventa conſimilia dependent;) & Artem etiam *Ars Nautica.* *Nauticam*: Quarum utraque tam Aſtronomiæ, quam Geographiæ, peritiam poſtulant.

Chronologia. Sed nec *Chronologiam* penitus omittam; quæ Temporis calculum rerum geſtarum hiſtoriis accommodat: Quod quo melius fiat, ἢ φαινομένων cœleſtium etiam rationem cum primis habet, & Eclipſeon præcipue.

Futiles autem *Genethliacorum* vanitates, aliasque ineptias *Astrologiæ Judiciariæ*, prætereundas duco: ut quæ pro frivolis potius aut superstitiosis impostoris habendæ sunt, quam Mathematicis disciplinis: Ideoque illarum professionem prudentissimus atque Honoratissimus Eques Dominus *Henricus Savilius* Professoribus suis Mathematicis merito interdicendam curavit. *Astrologia judiciaria.*

Post Astronomiam autem, eique affines disciplinas, annumeranda est *Geodæsia*; cui & totam quidem *Longimetriam*, *Planimetriam*, & *Stereometriam* adjungo: Unde propositæ distantiæ, anguli, superficies, & corpora solida, seu (quod perinde est) spatia solidorum capacia, mensurantur: Quæ omnia Geometricis principiis peraguntur, particulari subjecto applicatis. *Geodæsia.*

Sed & *Perspectiva* tota, tam quæ simplicior est, lineasque ab objectis in directum exeuntes perpendit, ipsisque peritioribus Pictoribus usui est; quam quæ in *Dioptricis* & *Catoptricis*, de lineis refractis & reflexis, traditur, Geometrica fere tota est: Quanquam etiam ipsius in Astronomia usus sit haud exiguus. *Perspectiva.*

Neque interim *Mechanices* & *Architectonices* obliviscendum est: Quarum utraque (præsertim Mechanica) Geometricas mensuras ita ad molem corpoream applicat, ut & interim Ponderum, Viriumque motricium, rationem habeat: Unde utilia multa, & quidem admiranda, perficiuntur. *Mechanice.* *Architectonice.*

Tandem etiam & *Musicam* Mathematicis disciplinis accensere solent; quæ Arithmeticam quandam in Sonis exercet; & proportione quadam peculiari Harmonicos concentus effingit. *Musica.*

Atque hactenus Disciplinas Mathematicas, tam Puras quam Mixtas, breviter quidem, sed quantum præsentis instituti ratio postulat, enumeravimus. Siquæ superesse videantur aliæ, possunt quidem illæ ad recensitarum aliquas commode referri.

CAP. II.

De Geometria, & Arithmetica speciatim. Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones; Easque vere Scientias esse.

POst brevem Matheseos Synopsin, in priori capite exhibitam; restat ut eas speciatim seligam disciplinas, quæ muneris nostri conditio ipsaque *Statuta Saviliana*, Professori suo Geometrico peculiariter destinarunt. Adeoque, mixtis plerisque sepositis, de Mathematicis Puris, Arithmetica nempe & Geometria, quædam dicenda restant: Quarum utraque quidem sub *Geometrici Professoris* nomine, (cum mixtis aliquot cognatis,) mihi demandatur: Astronomiâ interim, aliisque quæ ipsi affines sunt, Professorum alteri, *Astronomico* dicto, (Collegæ meo meritissimo,) reservatis.

Geometriam autem & *Arithmeticam* si definire velimus; potest quidem illud fieri vel per Objecta, ut in aliis Scientiis Speculativis; vel per Finem, ut in Artibus & Scientiis Practicis non raro fit. Illud quidem, prout contemplationes pure speculativas continent; Hoc autem, prout ad praxin ordinantur. Arithmeticam enim & Geometriam *Practicam* agnoscimus, non minus quam Speculativam; (quamvis hæc quidem dignitate multum præcedat,) Ut enim datur Geometria Speculativa, eique subordinata Practica; sic etiam Arithmetica Speculativa & Practica. *Geometriæ & Arithmeticæ Definitiones.*

Priori modo definitur *Geometria*, *Scientia Magnitudinis, quatenus est mensurabilis*; *Arithmetica* vero, *Scientia Numeri quatenus est numerabilis*. Quam utramque definitionem Scientiarum Objecta, non tantum Materialia, sed & Formalia, continere liquet.

Posteriori vero modo, *Geometriam* dico, *Scientiam bene mensurandi*; *Arithmeticam* autem, *Scientiam bene numerandi*.

Quod illas autem *Scientias* dixerim, non est cur quisquam miretur. Has enim ego, siquas alias, Scientias appellandas esse nullus dubito: cum ego nihil deesse sentiam, *An sint Scientiæ.*

ſentiam, quod ad Scientias ſtrictiſſimo ſenſu acceptas requiratur. Habent enim Subjecta, Principia, & Affectiones, eaſque de ſubjectis, demonſtrationibus maxime ſcientificis demonſtratas.

Subjecta quod attinet Affectionum, ſeu, quod perinde eſt, Objecta ſcientiarum, circa quæ verſantur; quæ illa ſint jam oſtendimus.

Objectum Geometriæ. Eſt nempe Objectum Geometriæ, Magnitudo, quatenus eſt menſurabilis. *Magnitudo* ſcilicet Objectum Materiale indicat; *Menſurabilitas* ipſius rationem Formalem denotat, qua Magnitudinis tractatio Mathematica ab ea differt, quæ in Logica, Phyſica, aut Metaphyſica, occurrit.

Per *Magnitudinem* intelligo, Lineas, Superficies, & Corpora, Mathematice accepta, hoc eſt, abſtracte à Materia; quorum varias affectiones & Proprietates Geometria demonſtrat.

Menſurabilitatem vero latiſſimo quidem ſenſu acceptam vellem, ut, quicquid ad eorum ſingulas affectiones & habitudines inveſtigandas & intelligendas attinet, comprehendat.

Objectum Arithmeticæ. Objectum Arithmetices, *Numerum* conſtituo, ſive Quantitatem diſcretam, & quidem *quatenus Numerabilem*; Quam Numerabilitatem eadem latitudine accèptam vellem, qua Menſurabilitatem Magnitudinis.

Principia Magnitudinis & Numeri. Principia quod attinet: *Punctum* quidem magnitudinis, *Unitas* autem numeri, principium vulgo perhibetur. Nam ex fluxu Puncti Lineam, ex fluxu Lineæ Superficiem, Superficiei vero Corpus oriri traditur: nec quidem inepte. Item ex Unitatibus fieri Numeros ſatis liquet; cum numerus vulgo definiatur, Unitatum multitudo.

Non minus recte tamen, me judice, diceretur; ſi Magnitudinis principium, diceremus, (prout hic loci *principii* vox videtur intelligenda) ipſam Extenſionem, ſeu partium extra partes poſitionem: menſurabilitatem nempe ab extenſione originem ducere, res ipſa clamat: Numeri vero principium duceremus, ab illa rerum modificatione, qua quid Unum eſſe aut Multa, vel etiam qua quid Idem eſſe aut diverſum dicitur; prout enim ab Identitate (ſi ita loqui liceat) oritur Unitas, ita & à rerum Diverſitate, Numerum oriri, ſeu pluralitatem, ſatis patet.

Sed & ipſa Unitas, non incommode Numerorum catalogo accenſeri poſſit; quamvis apud vulgus haud ita reputetur. Adeoque ut Quantitas continua, ſeu magnitudo, totum illud continet, quo affirmative reſpondetur quæſtioni *Quantum* quid ſit, ſeu *quam Magnum*: ita numerus de illo omni dicatur, quo quæſtioni *Quot ſunt*, affirmative reſpondetur. Certum eſt, Arithmeticam eodem prorſus modo & unitatem & cæteros numeros tractare: & quidem apud Grammaticos, *numerus ſingularis* ſine ſolœciſmo dicitur. Sed hac de re plura poſt dicenda erunt.

Siquis autem hæc, quæ dixi, magnitudinis & numeri Principia, non tam in Matheſi, quam in Metaphyſica, tractari ſuggerat: Neutiquam ego inficias eo. Neque enim illud omnino Scientiis inſolitum eſt, aut eſſe debet, ut principia habeant aliunde præmonſtrata, vel etiam ipſam ſubjecti definitionem; modo ipſæ de ſubjectis affectiones demonſtrent.

Affectiones. Affectiones autem varias, tum in Geometria tum in Arithmetica, de magnitudinibus & numeris demonſtrari adeo notum eſt, ut dictu non ſit opus: idque demonſtrandi methodo tam certa quidem & evidenti; ut vix alia opus ſit Logica, quam connata & naturaliter inſita, qua ſequelæ neceſſitas intelligatur.

Non tamen interim ignarus ſum, à Logicis nonnullis (qui tamen, an Matheſin ſatis intellexerint, neſcio,) defectus quoſdam etiam Mathematicis Demonſtrationibus obtendi, quo minus ad Ariſtotelicæ demonſtrationis, quam *Potiſſimam* dicunt, dignitatem accedant. Operæ pretium igitur exiſtimo de Mathematicis Demonſtrationibus nonnulla ſubjungere, ut eadem opera diſciplinas illas, Arithmeticam puta & Geometriam, Scientias eſſe probem, & ἀποδείξεων naturam ſimul explicem.

CAP. III.

De Demonstrationibus Mathematicis. Unde Mathematicas vere Scientias esse confirmatur.

Demonstratio quid.

DEmonstratio, sive συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ille reputatur *Syllogismus, qui affectiones proprias de subjecto per proprias causas docet*, vel, ut fusius apud Aristotelem traditur, *l. 1. post. An. c. 2.* Ἀπόδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμωτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος. Quæ tamen definitio non omni demonstrationi convenire putanda est; sed illi quæ est τοῦ διότι, quæ etiam κυρίως Demonstratio dicitur. Ad Demonstrationem enim τοῦ ὅτι, sufficit argumentum ab effectis ductum. Quod & satis innuit Aristoteles, cum alium *sciendi* modum innuit, de quo se postea dicturum promittit.

Demonstrationes mathematicæ. An Potissimæ.

Demonstrationes autem Mathematicas quod attinet; nemo est quem scio, qui de earum vel certitudine vel evidentia, modo recte instituantur, dubitat; nec qui ullas omnino alias vel certiores vel magis manifestas esse contendit.

Quæritur tamen à nonnullis, An ad illius, quam *Potissimam* dicunt, & ab Aristotele definitam contendunt, Demonstrationis dignitatem assurgant. Et duo potissimum objiciunt, quo minus id concedatur. Ut videre est apud Smiglecium in Logica sua, *Dis.* 14, Q. 14.

An entia mathematica sint tantum Imaginaria.

Primum est, quod entia Mathematica, quatenus à Mathematicis considerantur, non omnino existant in rerum natura. Non enim uspiam, inquiunt, reperiuntur Lineæ vel Superficies à Corporibus abstractæ; nec quidem corpora sphærica, cubica, aliave regularia; aut trigona, tetragona, circuli, aliæve figuræ planæ, ad amussim Mathematicam exacta: adeoque vel omnino non esse, vel esse tantum imaginaria, contendunt; ideoque de illis Scientiam esse non posse, cum subjectis tantum imaginariis non possint reales affectiones inesse, nedum de illis demonstrari.

Sed leve omnino hoc est, & facile dissipatur. Quod enim de actuali existentia dicitur, omnino παίζειν est: cum existentia sit tantum singularium, scientia vero universalium; & ad hoc, ut aliquid sit objectum scientiæ, sive existat sive non existat perinde est, modo ejusmodi sit, ut (in individuo) existere possit: ut de Rosa in hyeme dici solet. Quod enim hujusmodi est, potius ens in potentia dicendum est, quam vel non ens, vel ens imaginarium, sive ens rationis.

Lineas autem & superficies à Corporibus separatas, aut ipsa quidem Mathematica corpora citra materiam Physicam, non exsistere, (adeo etiam nec exsistere posse,) omnino verum est. Cum autem Matheseos objectum ideo imaginarium tantum esse contendunt: Non levis est hic error. Mathematici namque lineam vel superficiem vel corpus Mathematicum citra corpus Physicum exsistere, non magis vel supponunt vel affirmant quam supponit Physicus vel Animal exsistere quod nec homo sit nec brutum, vel etiam Hominem in genere uspiam reperiri qui non sit vel Plato vel Socrates vel alius aliquis singularis. Non enim negat Mathematicus suas lineas, superficies, & figuras, corpori Physico inesse; sed has tantum perpendit & contemplatur, corpore interim Physico non considerato. Aliud enim est abstrahere, aliud negare: Mathematicus suas quidem magnitudines abstrahit à corpore Physico, non tamen de illo negat: Nec magis asserit Mathematicus quantitatem exsistere sine corpore Physico; quam Physicus, substantiam corpoream exsistere sine quantitate: uterque tamen alteram ab altera abstractam contemplatur. Exsistunt igitur, saltem exsistere possunt, non tantum imaginarie sed realiter, entia Mathematica; non quidem per se, sed in corpore Physico; licet abstracte considerentur. Atque hæc sufficiant ad illud quod primum objicitur diluendum.

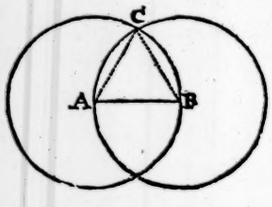
An Demonstrationes sint Scientificæ, sive per veras causas.

Secundum illud quod oggerunt, majoris quidem momenti est ad rem præsentem, modo verum esset: Nempe quod demonstrationes Mathematicæ non contineant in se veras causas essendi, & consequenter, neque illam præcipuam necessitatem quæ ex vera & propria causa desumitur.

Instat Smiglecius, (in disputatione citata) inter alia, in prima demonstratione Euclidis;

Euclidis; ubi, inquit, *demonſtratur triangulum eſſe æquilaterum, ex eo quod ſit conſtructum inter duos circulos, habeatque omnia ſua latera a centro ad circumferentiam.*

Ut autem melius intelligatur argumentum, Euclidis demonſtrationem aliquanto fuſius explicabimus. Propoſuerat ille hoc problema ſolvendum, *Super datam rectam finitam* (*puta* AB,) *triangulum æquilaterum conſtituere.* Quod ut fiat jubet ut *centro* A, *intervallo* AB, *deſcribatur circulus* BC; *item centro* B, *intervallo* BA, *deſcribatur circulus* AC; *& a puncto* C, *in quo circuli ſe mutuo ſecant, ducantur ad puncta* A, B, *rectæ* CA, CB. His peractis, demonſtrat Euclides *conſtructum triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; quia nempe *tres rectæ* CA, AB, BC, *ſunt inter ſe æquales.* (Quæ certe eſt demonſtratio à vera & proxima cauſa: Nam niſi æqualitas laterum ſit vera immediata cauſa cur figura conſtructa eſt æquilatera, quænam ea vera cauſa ſit non poſſum ego vel conjectura aſſequi.) Æqualitas autem laterum CA, AB, BC, demonſtratur, eo quod CA, AB, *ſunt radii circuli* BC, *ideoque æquales*; *item* BA, BC, *radii circuli* AC *ideoque æquales*: *cum igitur tam* CA *quam* CB *æquatur rectæ* AB, *ſunt tres rectæ* CA, AB, BC, *inter ſe æquales.* Eſtque hæc demonſtratio Euclidea.



Verum in hac demonſtratione, inquit Smiglecius, "Nemo non videt, non aſſignari veram cauſam eſſendi; non enim triangulum idcirco eſt æquilaterum quia "eſt inter duos circulos conſtructum; nam etiamſi non eſſet inter duos circulos "conſtructum adhuc eſſet æquilaterum: Unde talis cauſa eſt accidentalis tali proprietati.

Cui ego multa regero.

1° Dico, quod, utut illud verum eſſet quod affirmatur, nempe demonſtrationes Mathematicas non per veram & proximam cauſam procedere; ſunt tamen ſatis ſcientificæ, ſi vel per cauſam remotiorem vel per effectum, vel per aliud aliquod medium ab alio argumentandi loco deductum procedant, modo certo concludant rem ita eſſe prout affirmatur, atque aliter eſſe non poſſe. Sufficit enim ad hoc, ut demonſtratio ſit ſcientifica, *ſi procedat per medium neceſſarium ex natura rei*: ut & ipſi quidem, qui hoc objiciunt, non negant, & *Smiglecius* etiam directe affirmat, *Diſp. 15. qu. 1. & alibi.* Quare nec ipſe, nec quos ſcio, alii, negabunt, Diſciplinas pure Mathematicas ſcientias eſſe, utut perfectiſſimum illis demonſtrandi modum non concedant.

2° Notandum eſt, quod ipſi, qui negant has demonſtrationes perfectas eſſe, in ratione demonſtrationis (ut loquuntur) *Potiſſimæ*; dubitant, an uſpiam alias occurrat in aliis ſcientiis ejuſmodi Potiſſima demonſtratio: ut apud *Smiglecium* videre eſt, quæſtione prius citata.

3° Euclidis demonſtratio non igitur concludit Triangulum ABC æquilaterum eſſe, eo quod *inter duos circulos conſtructum ſit*, (ut *Smiglecio* videtur;) ſed quod *latera* CA, AB, BC, *ſint inter ſe æqualia* (ut ex progreſſu demonſtrationis patet.) Quod eſt, ex vera cauſa demonſtrare. Illud autem, de duobus circulis in conſtructione adhibitis, ſubſervit tantum æqualitati laterum demonſtrandæ.

4° Notandum eſt Euclidem loco citato, non tam Veritatem Theorematis, quam Conſtructionem Problematis, demonſtrare. Non enim ſimpliciter probaturus erat, *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; ſed *Triangulum, eo, quo imperatum erat, modo conſtructum, eſſe æquilaterum*; ſeu Hypotheticam hanc propoſitionem, *ſi Triangulum ſic conſtruatur, erit æquilaterum*, veram eſſe. Jam vero, quanquam aliunde fortaſſe conſtare poſſit veritas conſequentis, nempe *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; veritas tamen conſequentiæ (*nempe illud ex conſtructione ſequi*;) non aliunde probatur, neque ex alia cauſa magis immediata dependet, quam ex ipſa conſtructione: nempe quia conſtructor ſic procedendo acceperat æquales circulorum radios. Ex vera igitur propria & immediata cauſa demonſtravit Euclides *conſtructionem problematis.* Quamvis igitur, *Triangulum illud æquilaterum eſſe*, ſaltem *tria latera eſſe æqualia*, demonſtrare videatur per cauſam vel remotam vel accidentalem; At certe *conſtructionem illam problemati ſatisfacere*, (quod erat Euclidi demonſtrandum) per veram, proximam, & immediatam cauſam demonſtratur.

5° Etiam addendum est, in nulla quidem scientia exspectandum esse, ut omnes ibidem demonstrationes æquali perfectionis gradu procedant. Abunde sufficit, si demonstrationes aliquæ sint per veras & proximas causas, ideoque τὸ διότι, quanquam demonstrationibus illis τὸ διότι, passim immiscеantur aliæ τὸ ὅτι. Ut in scientiis omnibus abunde liquet.

6° Igitur concedo, si non demonstrationem propositam, at saltem alias non paucas, in Matheſi passim occurrentes, procedere, non tam à causis proximis & immediatis, quam ab aliis locis Topicis; adeoque demonstrationes esse τὸ ὅτι, non διότι.

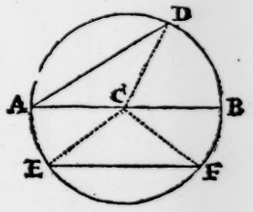
7° Nego tamen, in omnibus demonstrationibus Mathematicis illud obtinere. Multas enim à veris & proximis causis procedere, adeoque demonstrationes esse τὸ διότι, contendo. Ideoque *Smiglecii* enumeratio demonstrationum, quas esse τὸ ὅτι contendit, utut vera esset, non tamen est sufficiens enumeratio, cum occurrant aliæ non paucæ, quas esse τὸ διότι liquet.

Tria Demonstrationum genera.

8° Igitur ut rem totam dilucidius expediam, tres præsertim demonstrationum Mathematicarum sive modos, sive gradus, sive species statuo.

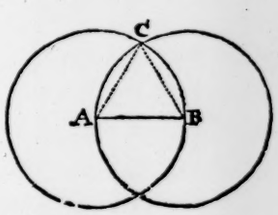
Deductio ad Absurdum.

Prima quidem est illa demonstratio, quæ per *deductionem ad absurdum*, seu impossibile, procedit; ἀπαγωγὴ dicta: quæ, rem ita esse, demonstrat, eo quod sit impossibile, ut secus sit. Ut siquis demonstraturus, *Rectarum circulo inscriptarum, longissimam illam esse, quæ per centrum transit*; illud ita esse asserat, quoniam impossibile est aliam quamvis, per centrum non transeuntem, vel longiorem esse, vel quidem æqualem. Supponatur enim, si fieri possit, recta AD ἀλλαμετρος, per centrum non transiens, diametro AB, per centrum C transeunti, æqualis, vel etiam ipsa longior: & ducatur, à centro C, recta CD. Dico rectam CD æqualem esse rectæ CB, quoniam utraque est recta à centro ad circumferentiam ejusdem circuli; ideoque ACD, (ex duabus rectis AC, CD composita,) erit æqualis diametro ACB, (quoniam si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia;) si igitur AD sit æqualis ipsi AB, erit etiam æqualis ipsis AC, CD, simul sumptis, (nam quæ eidem vel æqualibus æquantur, etiam inter se æquantur;) si AD longior sit ipsa AB, erit & longior, quam AC, CD, simul sumptis, (quibus ipsa AB æqualis est;) At horum utrumque absurdum est & impossibile. Cum enim AD sit recta, quæ inter data puncta breviſſima est, & quidem unica; impossibile est ut vel longior sit, vel etiam æqualis, ipsis AC, CD, simul sumptis, quæ non nisi per circuitum quendam à puncto A ad punctum D procedunt. Non est igitur recta AD, vel æqualis vel major quam est AB. Sed & eadem omnino demonstratio procederet, si ubivis alias recta non per centrum ducta inscribatur, puta EF: si enim EF sit major vel æqualis ipsi AB, erit proinde major vel æqualis EC, CF, simul sumptis; quoniam EC radius æquatur radio AC, & CF radius æquatur radio CB; ergo tota AC, CB, (hoc est, AB,) æquatur toti EC, CF: At impossibile est ut recta EF vel æquet vel superet rectas EC, CF simul sumptas, (cum recta sit breviſſima inter data puncta,) ergo etiam impossibile est ut vel æquet vel superet rectam AB (ipsis EC, CF, simul sumptis æqualem.) Cum igitur impossibile sit ut AD, vel EF, vel alia quævis recta non per centrum, æquet aut superet rectam AB (vel aliam quamlibet per centrum ductam:) sequitur, Rectarum circulo inscriptarum, quæ per centrum transit esse longissimam. Quod erat demonstrandum. Demonstratur autem, ut patet, deductione ad impossibile.



Demonstratio Ostensiva τὸ ὅτι.

Secunda demonstrandi ratio, est, *Ostensiva* τὸ ὅτι. Ut, si *recta* AC demonstretur *æqualis esse rectæ* BC; quoniam utraque demonstrata fuerat æqualis ipsi AB: quæ autem eidem sunt æqualia, sunt & æqualia inter se. Estque hæc demonstratio quidem ostensiva, sed tantum τὸ ὅτι, non autem τὸ διότι. Communis enim utriusque æquatio eidem tertiæ, indicat quidem earum æqualitatem inter se, non autem illius causa est. Essent enim ipsæ AC, BC, sibi invicem æquales, etiamsi ipsa AB non fuisset ducta.



Tertia vero demonstrandi ratio, quæ & omnium perfectissima, est *Ostensiva* τὸ διότι. διότι.

διότι. Quæ demonſtrat & *quod* ſit, & *quare* ſit. Ejuſmodi eſt demonſtratio, ſiquis *Radios omnes ejuſdem circuli æquales eſſe* inde demonſtret, quod definiatur circulus (ſaltem definiri poſſit) *Figura plana, unica linea curva contenta, quæ a medio comprehenſi ſpatii æqualiter ubique diſtat.* Si enim circuli eſſentia poſtulet, ut ipſius peripheria æqualiter à centro diſtet; immediate ſequitur, tanquam à cauſa vera & proxima, radios omnes, quibus illa diſtantia menſuratur, etiam æquales eſſe. Eſtque demonſtratio hæc Oſtenſiva διότι, à cauſa proxima & immediata deſumpta.

Si vero objiciat Smiglecius, cauſam hanc non veram & proximam eſſendi cauſam eſſe, ſed accidentalem tantum, quia radii illi, puta, CA, CB, CD, CE, CF, &c. eſſent lineæ æquales, etiamſi circulus ille neutiquam duceretur. Reſpondeo; Verum eſſe, quod eſſent quidem Rectæ æquales, etiamſi nulla figura fuiſſet ducta; non tamen eſſent æquales Radii: ut enim radii ſint, neceſſe eſt ut ab alicujus figuræ centro ad perimetrum ducantur: Ut autem radii illi, & omnes ejuſdem figuræ alii invicem æquales ſint, requiritur ut perimeter iſtius figuræ æqualiter à centro diſtet. Eſtque hæc, æqualis undequaque diſtantia circumferentiæ à centro, vera quidem, neceſſaria, proxima, & immediata cauſa hujus affectionis, nempe, ipſius radios omnes æquales eſſe. Sunt igitur demonſtrationes Mathematicæ quanquam non omnes, aliquæ ſaltem, non modo ſcientificæ, ſed & διότι.

Siquis denique objiciat, me tres demonſtrationis ſpecies feciſſe, cum vulgo duæ tantum ſtatuantur; nempe ὅτι & διότι. Poterit ille ſi placet, duarum priorum utramque demonſtrationem ὅτι, dicere; illam quidem per deductionum ad impoſſibile, hanc vero oſtenſivam; tertiam denique demonſtrationem διότι. Non enim libet de verbis contendere, modo de rebus conſtet.

Atque hæc ſufficiat de Demonſtrationibus Mathematicis dixiſſe; ut & propoſitæ definitiones vindicentur, & ipſa demonſtrandi methodus inſinuetur. Reſtat deinceps ut ipſam Arithmeticam aggrediar.

CAP. IV.

Unitatis & Numeri definitiones. Quo ſenſu Unum negatur eſſe numerus. Tam Unum quam Nullum, vario ſenſu, Principium Numeri. Unum eſt Numerus minimus. Nullum non eſt numerus. Numeri fracti, non ſunt veri numeri.

Arithmeticæ derivatio & Definitio.

ARithmetica, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ dicta, ab ipſo objecto nomen ſortita eſt. Eſt enim *Scientia numeri, quatenus eſt numerabilis*, vel *ſcientia bene numerandi*, ut ſupra declaratum eſt.

Numeri vero principium *Unitas* dicitur.

Unitatis & Numeri definitiones.

Unitas autem eſt, *ſecundum quam unumquodque Unum dicitur*: *Numerus autem ex unitatibus compoſita multitudo.* Sic enim Euclides, *lib. 7. def.* 1, 2. Μονάς ἐστι, κατὰ τὴν ὁποιανοῦν τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δέ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Ex his autem Unitatis & Numeri definitionibus, plurimi arbitrantur Unitatem numerorum catalogo non accenſendam, adeoque numerum minimum Binarium eſſe; quanquam illud quidem Euclidem uſpiam dixiſſe non memini.

An Unitas ſit Numerus.

Miror tamen eouſque hanc ſententiam invaluiſſe, cum non minus Unitas, quam binarius numerus, aut quivis alius, reſpondeat quæſtioni *Quot ſunt.*

Hac autem de re, erat mihi quidem in animo, litem neutiquam movere; cum illa controverſia Logica potius ſeu Metaphyſica, quam Mathematica, videri poſſit; ſaltem obiter monuiſſe, non modo *Unum* ſed & *Nullum*, apud Arithmeticos eodem omnino modo ac reliquos numeros tractari; adeoque apud illos (quicquid de Metaphyſicis dicendum ſit) vel pro Numeris, vel quaſi numeris reputari. Operæ tamen pretium fortaſſis erit paucis oſtendere, cur Unitatem putem vere numerum eſſe, aliiſque numeris annumerandam.

Nec huic forſan adverſabitur Euclidis aliorumque ſententia probe intellecta.

Cum enim nonnulli Unitatem, proprie loquendo, non modo Numerum esse negent, sed & numeri partem; adeoque *numeri principium impers* esse dicant, ut est Magnitudinis *Punctum*, & Temporis *Momentum*: Intelligendi fortasse sunt de Monade seu unitate, non ut numerum singularem designat, sed ut est communis quasi numerorum omnium Denominatio, sive denominator. Sic enim numerus Quaternarius est, qui quatuor unitates numerat, Ternarius qui tres, Binarius qui duas, & Singularis pariter qui unam quidem Unitatem designat. Secus enim non video quo modo vere dici posset, unitatem non esse numeri alicujus partem: cum certum sit, *Unum* non minus esse *Duorum* dimidium, quam *Duo* medietatem esse τῶν *Quatuor*. Dum igitur *Quatuor* dico tantundem valere ac *quatuor unitates*; τὸ *unitates* nec numerus est, nec pars numeri, sed vel numeri denominatio seu denominator, vel ipsum numeratum. Est autem τὸ *Quatuor* earum unitatum numerus. Ita cum *Unum* tantundem valere dico ac *Unam unitatem*, μίαν μονάδα. *Unitas*, est numeri denominatio, seu denominator. *Una*, numerus est, seu unitatum multitudo, (*multitudinis* nomine laxius accepto, ut post dicetur,) dicit enim *Quot* vel *quam multæ* unitates adesse dicuntur, nimirum unicam. *Quo sensu unitas negatur esse numerus.*

Aliud autem est negare *Unitatem*, τὴν μονάδα, aliud vero negare τὸ ἓν *Unum*, numerum esse: Eodem enim sensu & ἡ δέκας numerus esse negari possit, quamvis δέκας numerus esse non negetur: Siquis enim *duas decadas* numeret, erit *Decas* numeri denominatio; *Duo* vero, decadum numerus.

Sed revera, si accurate loqui velimus, non tam unitas quam *Nullitas* (si ita loqui liceat) seu *Nullum*, (non tam μονὰς seu ἑνότης quam ἀδενότης, ἀδένεια, seu τὸ μηδὲν,) idem respectu numerorum obtinet, quod Punctum respectu magnitudinis, & Momentum respectu temporis. Ut ex operationibus Arithmeticis cum constructione Geometrica comparatis liquido constare possit penitius intuenti. Unitas vero instar certæ cujusdam lineæ, seu alius magnitudinis, ad arbitrium positæ, ad quam aliarum homogenearum fit comparatio. *Nullitas, principium numeri; eo sensu quo punctum, magnitudinis.*

Mihi saltem hoc videtur dicendum. Magnitudo respondet quæstioni Πόσον ὄζι. Numerus vero, quæstioni Πόσα ὄζι. Unde tam Numerus quam magnitudo Ποσότης non incommode dici potest. Latina vero *Quantitatis* appellatio non tam commode videtur (quoad nominis notationem) utrique applicabilis, cum sola continua Quantitas dicit *Quantum* quid sit; Discreta vero, non *Quantum* quid, sed *Quot* sunt; ac si *Quotitas* potius dicenda esset quam quantitas: (sed de nomine non est, ut litigemus, dummodo de re constet.) Ut autem magnitudo, puta Linea, inchoatur à puncto, quod omnino magnitudinis expers est; & quidem (positive) nihil est, sive nullius magnitudinis: ipsa vero Linea tanta est quanto est ipso sive Puncto sive nihilo major: ita & Numerus, non ab unitate, sed revera à nullitate, inchoatus, tantus est, quanto est ipso Nullo major. Et ut *Punctum* puncto additum, sive semel sive centies id fiat, non efficit Quantum; nec etiam Linea, vel quævis alia magnitudo, adjectione Puncti, etiam centies repetita, omnino major fit, aut, ejus ablatione, minor: ita & *Nullum*, sive τὸ μηδὲν, μηδενὶ additum, non faciet ἕν, nec numerus adjectione τοῦ μηδενὸς augetur quidquam, aut ipsius ablatione, minuitur.

At interrogabitur forsan, Num velim ego à Veterum pariter & Recentiorum omnium sententia discedere, qui uno ore Unitatem vocant Principium Numeri?

Respondeo, 1° Nihil absurdi esse majorum inventis addere; præsertim in Mathematicis. Nec hoc illorum laudibus quicquam detrahit: nam & illi prioribus addiderunt.

2° Non mihi tamen volupe est ab aliis discedere, nisi ubi rei necessitas & manifesta ratio suadent. Nec enim placet eorum temeraria audacia, qui cum se vel tantillum scire sentiunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt, vel supercilioſe contemnunt: atque illud potius satagunt, ut aliorum, sive veris sive fictis, σφάλμασιν insultent, quam ut eorum vel sensa satis intelligant, vel probe compertis assentiantur. Est enim illud vel juvenilis nonnunquam levitatis, cum cognitione plerumque non nisi mediocri conjunctæ, vel supercilioſi aliquando fastûs indicium; potius quam subacti & maturi ingenii argumentum. Nec raro à rebus perperam intellectis, potius quam à veris illorum quos culpant erroribus, hujusmodi insultus ortum ducunt: & ea ipsa quæ culpant, si intelligerent, non culparent. Et quidem eorum pars longe major qui veterum sensa rejiciunt & flocci faciunt, ipsorum loco vel eadem ipsa quæ culpant, mutata tantum phrasiologia, substitu-

unt, vel saltem non meliora ; & in eos non raro errores nescii incidunt, eosque pro novis inventis reputant, quos veteres, scientes, declinarunt.

Hujus sententiæ, cum sententiis veterum conciliatio.

3° Quod ad rem præsentem attinet, assero, & veterum sententiam probe intellectam, & quæ nos asserimus, satis constare posse. Ipsa enim *Principii* vox duplici saltem acceptatione occurrit : prout nempe significat *Primum quod sic*, vel *Ultimum quod non*. Ut siquis *Motum* ordiri dixerit vel ab *ultimo momento quietis*, vel à *primo momento motus*. Sic si hæredis jus in rem hæreditariam *ab ipso patris interitu*, vel à supremo paternæ vitæ momento, dicatur ; est hoc, principium *Ultimum quod non* : supremum enim vitæ paternæ momentum ultimum est eorum quibus hæres succedaneus jus non habuit. Si vero dicamus, Hæredis jus inchoari à *primo momento successionis* ; etiam ita vere dicitur ; sed est hoc principium *Primum quod sic*. (Atque huc facit disceptatio illa de termino vitæ ac mortis apud Gellium *l. 6. c.* 13. & apud August. *de civit. Dei. l.* 13. *c.* 9, 10, 11.) Pariter de principio numeri dicendum est. Si *Primum quod sic* quæratur ; *Unitas* assignanda est, ut qui est numerus omnino primus & minimus : Si vero *ultimum quod non* ; assignandum est τὸ μηδὲν, sive *Nullum*, ut quæ est numerorum omnium negatio. At de Quantitate continua, seu Magnitudine, si quæratur *Ultimum quod non* ; *Punctum* assignamus, quod omnis quidem magnitudinis expers est, cui tamen si vel tantillum accedat, emergit Quantum : sin quæratur *Primum quod sic* ; illud omnino non est assignabile ; non datur enim minimum Quantum, cum omne quantum, qua quantum, sit in infinitum divisibile. (Quippe nullum *Quantum* tam est exiguum quin habeat *duos Semisses*.) Atque hinc ortum est quod Veteres, principium Numeri designaturi, *Unitatem* posuerint, nempe *Primum quod sic* : Magnitudinis vero principium, *Punctum* dixerint, nempe *ultimum quod non* ; quoniam in magnitudine, *Primum quod sic* non est assignabile. Non autem eodem sensu dicitur Unitas principium Numeri, quo Punctum principium Magnitudinis ; hoc enim sensu, non τὸ *Unum*, sed τὸ *Nullum*, erit numeri principium, nempe *Ultimum quod non*.

Nollem autem ut quisquam me de lana caprina contendere existimet, dum numeri Principium curiosius inquiro : Insignis enim est hujusce rei utilitas, præsertim in Analytices sive Algebræ speculationibus ; quo melius operationis Arithmeticæ cum Geometricis constructionibus congruentia percipiatur : Atque hinc obscuritas non parva est exorta, quod vera numerorum & magnitudinum comparatio vel non satis fuerit à multis intellecta, vel minus saltem diligenter considerata. Atque hoc animadverterunt, credo, Dominus Des Cartes, ejusque ingeniosissimus interpres Dominus à Schooten ; illi enim, dum effectiones Geometricas Arithmeticis operationibus adaptant, unitatem non instar Puncti habent, sed ut lineam quandam ad placitum assumptam, reliquosque deinceps numeros aliis designant lineis, quæ ad lineam assumptam eandem habeant rationem qnam expositi numeri ad unitatem. Est autem omnino impossibile, si Unitas instar Puncti habeatur, ut ea quæ par est congruentia inter Arithmeticas & Geometricas operationes conservetur.

Quod unitas sit Numerus.

Ego igitur affirmare non dubito, Principium numeri (eo nempe sensu quo Punctum dicitur Principium Magnitudinis) esse τὸ μηδὲν, sive *Nullum* : *Unitatem* vero, seu potius *Unum* non tam esse principium numeri (sensu quo dictum est) quam primum numerum ; est enim vere numerus.

Neque me omnino movet, quod Euclides *Numerum* definiverit τὸ ἐκ μονάδων πλῆθος, *multitudinem unitatum* : Nam τὸ πλῆθος ibidem non stricte sumendum est, prout *Multum* opponitur τῷ *Pauco*, vel τῷ *uni* ; sed ut designationem τοῦ *Quot sunt* indigetat. Si enim quæratur, *Quantum est* ? respondendum erit de magnitudine ; si vero, *Quot sunt* ? respondendum erit de multitudine : fieri tamen omnino potest, ut *Unum* respondeatur, quando de multitudine quæritur : *v. g.* si de unici filii parente, quæratur *Quot* filios (seu *quam multos*) habeat ? respondendum est *unicum*. Quo sensu vero τὸ *unum* respondet quæstioni *quam multa* : eodem & *unitas*, *multitudo* dici poterit. Si quis vero *multitudinem*, vel τὸ πλῆθος ἀχώρως de unitate dici contendat : Concedo quidem, sed & ἀχώρως de *duobus* dicitur, quæ non multa equidem, sed *Pauca* sunt. Erat autem hæc ἀχωρολογία hic loci necessaria, quoniam vox κωεωτέρα nec apud Græcos (quantum scio) nec apud Latinos occurrat ulla. Atque hanc τοῦ πλήθους significationem ideo potius amplectendam existimo, quod Euclides nusquam (quod sciam) unitatem numerum esse neget ; sed contra-

contrarium potius videatur ſentire, dum ipſam unitatem eodem plane modo quo reliquos tractat numeros.

Unum igitur, numerum eſſe, affirmo: Eſt autem numerus omnium *minimus* (& hoc quidem ſenſu, numeri principium recte dicitur, quia *primum quod ſic*, ſeu numerus primus:) minimum enim eſt quod affirmative reſpondet quæſtioni *quam multa*; ideoque minima multitudo. *Unum eſt Numerus minimus.*

Verum quidem eſt quod & *Nullum* reſpondeat aliquando quæſtioni *Quot* ſunt; Ut ſi quæratur, *Quot* ſint Cælorum ſolidi Orbes? reſpondebitur non inepte, *Nullus*. At non propterea quod τὸ *Nullum* reſpondeat quæſtioni *Quam multa*, ideo & *multitudo* erit; quoniam reſpondet Negative. Idem enim eſt *Nullus* ac *ne ullus*; ſicut *Nemo* idem ac *ne homo*. Eſt autem *Ullus* vox diminitiva à voce *Unus*: Ut enim dicitur *Puer*, *puerulus*, & (contracte) *puellus*, (extrito enim per Syncopen *U*, fit *puerlus* & ob Euphoniam, *puellus*;) & *Pulcher*, *Pulcherulus*, *Pulchellus* (pro *pulcher'lus*) *Tener*, *Tenerulus*, *Tenellus*: ſic *Bonus*, *bonulus*, *bellus*; *Unus*, *unulus*, *ullus*: ſic *Vinum*, *Villum*, apud Terent. in *Adel*: Idem igitur eſt Latinorum *Nullum*, (hoc eſt, *ne unum*, vel ne *unulum*;) ac Græcorum Οὐδὲν & Μηδὲν, hoc eſt, οὐδὲ ἕν, μηδὲ ἕν. & Anglorum *None*, hoc eſt *not one*, vel *no one*. Non igitur *Nullum*, ſed *Unum* eſt numerus primus; cum *Nullum* reſpondeat Negative: tollit enim ſubjectum quæſtionis; nec tam oſtendit, *Quot ſunt unitates*, quam *unitatem non eſſe*: ut, qui dicit, *Nullos* eſſe orbes, negat orbes eſſe; orbis enim ſiquis ſit, ſaltem unus erit. Nullum *non eſt numerus.*

Siquis autem objiciat, intermedia multa dari inter Unum & Nullum; puta Unciam, Sextantem, Quadrantem, Trientem, Semiſſem; item Beſſem, Dodrantem; ut & Quincuncem, Septuncem, Decuncem, Undecuncem (ſive deuncem) aliaſque ejuſmodi partes integri. Ut, ſi quæratur (inſtante hora nona) Quot horæ poſt octavam tranſierint; reſpondebitur forte, nec unam, nec nullam, ſed ſemihoram præteriiſſe. Concedo quidem ſic reſponderi poſſe: Concedo etiam numeros quos *Fractos* vocant, ſive *Fractiones*, eſſe quidem *Uni* & *Nulli* quaſi intermedios. Sed addo, quod jam tranſitur εἰς ἄλλο γένος. Reſpondetur enim non de *Quot*, ſed de *Quanto*: Non enim dicitur, *Quot horæ* præterierint; ſed, *Quantum horæ*, ſeu quanta pars horæ; non πόσαι ὧραι, ſed πόσον τῆ ὥρας, ſeu ποσημόριον. Pertinet igitur hæc reſponſio, proprie loquendo, non tam ad quantitatem Diſcretam, ſeu numerum, quam ad Continuam; prout hora ſupponitur eſſe quid continuum in partes diviſibile; quamvis quidem harum partium ad totum ratio numeris exprimatur. Quanquam enim non recte dicatur μηδὲν τῆ ὥρας, *nihil horæ*, recte tamen dicitur μηδεμίαν ὥραν, *nullam horam*, tranſiiſſe, ne unam quidem. Idem dicendum eſt de Fractionibus omnibus; verbi gratia, ſi ($\frac{3}{4}$) tres horæ quadrantes præteriiſſe, dicatur; intelligitur, tantum horæ præteriiſſe, quantum eſt numerus Ternarius (fractionis numerator) ad (ejuſdem Denominatorem) Quaternarium; ſeu (quod idem eſt) ſupponitur hora (ut quid continuum) in quatuor partes Geometrice ſecta, harum vero tres tantum aſſumtas eſſe, quæ quidem Arithmetice numerantur. Indicat igitur Fractionis *Denominator* Geometricam integri in membra partitionem, *Numerator* vero talium membrorum indicatorum numerum ſeu Multitudinem Arithmeticam: adeoque numerus Fractus non tam Numerus eſt, quam numerorum ad invicem Rationis indicium. Eſtque igitur *Unum* Numerus minimus, non autem vel Nullum, vel Numeri Fracti. *Numeri fracti, non ſunt Numeri proprie dicti.*

CAP. V.

Numerorum Procreatio. Numerus Maximus non datur. Numerorum Nomenclatura; & ordinata diſpoſitio, in continua proportione decupla, apud omnes gentes recepta. Diſpoſitio hæc Gentium diſtributione antiquior. Unde orta.

CUm Numerorum natura hæc ſit, ut unitatum multitudinem deſignet, ſeu (quod idem eſt) ut dicant *Quoties* ponatur Unitas, ſeu *Quot* Unitates ſignificentur: pro varia Unitatum multitudine, varias oriri numerorum ſpecies neceſſe eſt. Quælibet enim Unitatis acceſſio numerorum ſpeciem variat.

Numerorum procreatio.

Si igitur, ubi prius Nulla erat, ponatur Unitas, fit numerus *ſingularis*: ſi adhuc addatur Unitas alia, emergit numerus *Binarius*: accedat alia, & exſurgit *Ternarius*: hic autem Unitate auctus fit *Quaternarius*: quem etiam *Quinarius* unitate ſuperat: & hunc *Senarius*: atque ita deinceps de *Septenario*, *Octonario*, *Novenario*, *Denario*, *Undenario*, *Duodenario*, aliiſque ſequentibus dicendum eſt. Eſtque hæc vera numerorum Originatio, ſeu Procreatio.

1 .
2 ..
3 ...
4 ....
5 .....
6 ......
7 ....
8 ....
9 ....
10 ....
11 ....
12 ....
&c.

Maximus numerus non eſt aſſignabilis.

Quoniam vero Unitatum acceſſio in infinitum extendi poſſit; (nec enim numerus ullus adeo magnus eſt, quin illi poſſit Unitas, vel una vel plures, adjungi:) eſt igitur impoſſibile, ut *numerus Maximus* aſſignetur, nedum omnes numeri ſpecies. Ideoque quamvis numeros dari *actu infinitos*, vel etiam *infinitum numerum*, (hoc eſt, qui terminos non habeat, ſed omnes ſuperet limites,) ſit impoſſibile: ſunt tamen numeri poſſibiles Infiniti; hoc eſt, nullus eſt omnino terminus numeris aſſignabilis, quo cum accedit numerus, ulterius augeri non poſſit. Quamvis igitur numerus *Minimus* aſſignetur Unitas, non tamen eſt aſſignabilis numerus *Maximus*; ut nec Magnitudo vel Maxima, vel quidem Minima.

Cum tot vero fuerint Numeri ſpecies: infiniti plane laboris videri poſſit, illarum ſingulis diſtincta nomina vel invenire, vel ediſcere, vel memoria retinere, & in uſum depromere. Quis enim mortalium tot excogitare valeat vocabula, quot ſingulis arenulis (nequid altius dicam) nomina ſuppeditarent? Quod ſiquis tamen fecerit; etiamnum centies millies labor idem iterandus erit, nec dum quot opus eſt aſſequetur.

Numerorum ordinata diſpoſitio & nomenclatura.

Ne igitur infinitus evaderet labor, pro qualibet Unitatis acceſſione nova vocabula cudendi, quibus emergentes numeri appellarentur: Excogitavit prudens Antiquorum ſagacitas, vel Divina potius monſtravit indulgentia, Methodum (nunquam mirandam ſatis) qua infinitam hanc numerorum varietatem finitis numero vocabulis, & quidem paucis, deſignare poſſint; numeros ſcilicet, methodicæ diſpoſitionis ope, per Gradus & Periodos diſtribuendo: adeo ut paucis omnino Vocabulis totam numerorum molem, etiam multa millia excedentem, ſatis diſtinguere valeamus.

Apud Latinos.

Decem primoribus minimiſque ſuum cuique nomen indiderunt, adeoque *Unum*, *Duo*, *Tria*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*, numerabant.

Deinceps vero non tam Unitates numerabant quam Decadas; viz. *Decadem Unam*, *Decades Duas*, *Tres*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*; vel (ut contractius loquuntur) *Decem*, *Viginti*, *Triginta*, *Quadraginta*, *Quinquaginta*, *Sexaginta*, *Septuaginta*, *Octoginta*, *Nonaginta*, *Centum*: Idem enim

valent *Viginti* ac *Decades Duæ*; *Triginta* idem ac *Decades Tres*; & ſic deinceps. *Centum* vero idem valet ac *Decades Decem*, ſive *Una Centuria*. De horum autem Vocabulorum ratione poſt dicetur.

Poſtquam autem ad *Centum* perventum eſt, non tam Unitates, aut etiam Decades, quam *Centurias* numerabant, viz. *Centuriam Unam*, *Centurias Duas*, *Tres*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*; vel, contracte, *Centum*, *Ducenta*, *Trecenta*, *Quadringenta*, *Quingenta*, *Sexcenta*, *Septingenta*, *Octingenta*, *Nongenta*, *Mille*: Idem eſt enim *Ducenta* dicere, ac *Duas Centurias*, *Trecenta*, idem ac *Tres Centurias*, &c. idem vero *Mille* ac *Decem Centurias*.

Quum vero ad *Mille* devenitur, ipſa Millia numerantur; nempe *Mille*, *Bis Mille*, *Ter Mille*, &c. vel *Mille*, *Duo Millia*, *Tria Millia*, & ſic deinceps ad *Decem Millia*, *Centum Millia*, *Millena millia*, *Decies millena millia*, *Centies millena millia*, *Millies millena millia*, *Decies millies millena millia*, & ſic deinceps in infinitum.

Si vero inter majores numeros, præter juſta Millia, ſuperſint Centuriæ, aut, præter Centurias, etiam aliquot Decades; aut tandem, præter Decades, Unitates aliquot; illæ etiam ſunt apponendæ. Ut ſi proponatur numerus (2345) *Bis mille trecenta quadraginta quinque*; eſt numerus ille duobus millibus major, tribus vero millibus minor; ideoque exceſſus ſupra *Duo Millia*, adjungendus eſt, nempe *Trecenta*; nec ita tantum, ſed & *Quadraginta*; & denique *Quinque*.

Sic apud Græcos; poſt numeratos decem primores numeros, Ἕν, Δύο, Τεία, Τέσσαρα, Πέντε, Ἕξ, Ἑπτὰ, Ὀκτὼ, Ἐννέα, Δέκα· numerantur deinde Decades, Εἴκοσι, Τεμήκοντα, Τεσσαράκοντα, Πεντήκοντα, Ἑξήκοντα, Ἑβδομήκοντα, Ὀγδόηκοντα, Ἐνενήκοντα, Ἑκατόν· ubi diverſi Monadum numeri, terminationibus tantum variati, tot Decades ſignificant; prout apud Latinos *Triginta*, *quadraginta*, &c. in quibus terminatio *ginta* idem valet quod Græcorum κοντα, mutato nempe κ in *g* (literam ejuſdem organi) quod tamen redit nonnunquam in derivatis, nam promiſcue dicimus *Vigeſimus* & *Viceſimus*, item *Trigeſimus* & *Triceſimus*. Deinde Διακόσια, Τειακόσια, Τετρακόσια, Πεντακόσια, Ἑξακόσια, Ἑπτακόσια, Ὀκτακόσια, Ἐννακόσια, *ducenta*, *trecenta*, *quadringenta*, *quingenta*, *ſexcenta*, *ſeptingenta*, *octingenta*, *nongenta*. Ubi Græca vocabula Διακόσια, Τειακόσια, &c. à Monadum numeris, Δύο, τεία, &c. ſeu Δὶς, τρὶς, &c. cum voce Ἑκατὸν compoſitis derivantur: ut Latinorum *Ducenta*, *Trecenta*, &c. à vocibus *duo*, *tria*, &c. cum voce *Centum* compoſitis. Quæ ſequuntur vero Chiliadum nomina Χίλια, Διςχίλια, Τειςχίλια, &c. reſpondent Latinorum numeris *Mille*, *Bis Mille*, *Ter Mille*, &c. donec deventum eſt ad Μύρια, Δισμύρια, &c. *Decem Millia*, *Viginti Millia*, & ſic deinceps.

Apud Græcos.

Apud Hebræos etiam non diſpar ratio eſt. Nam poſt Monadum numeros אחד שנים שלש ארבע חמש שש שבע שמנה תשע עשר *Unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*; ſequuntur, עשרים שלשים ארבעים חמשים ששים שבעים שמנים תשעים מאה *Viginti*, *triginta*, *quadraginta*, *quaquaginta*, *ſexaginta*, *ſeptuaginta*, *octoginta*, *nonaginta*, *Centum*: deinde מאתים *ducenta*, שלשת מאות *trecenta*, ארבעה מאות *quadraginta*, &c. uſque ad אלף *mille*, שלשת אלפים *bis mille* *ter mille*, & ſic deinceps ad רבבה *decem millia*, & quæ ſequuntur.

Apud Hebræos.

Numeri autem intermedii, tam apud Græcos & Hebræos, quam Latinos, ex aliorum compoſitione nomina mutuantur, ut אחד עשרה שנים עשרה שלשה עשרה ἕνδεκα, δώδεκα, τρισκαίδεκα, &c. *Undecim*, *duodecim*, *tredecim*, *quatuordecim*, &c. ſic εἴκοσι ἕν, εἴκοσι δύο, εἴκοσι τρία, &c. *Viginti unum*, *viginti duo*, *viginti tria*, &c. ſic διακόσια τριάκοντα τέσσαρα, *ducenta triginta quatuor*; δισχίλια τειακόσια τεσσαράκοντα πέντε, *bis mille trecenta quadraginta quinque*; aliaque numerorum nomina compoſita. Atque eodem omnino modo etiam in aliis linguis in uſu eſt.

Sufficiunt igitur pauciſſima vocabula exprimendis Numeris quaſi infinitis. Hæ enim duodecim voces, *Unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*, *centum*, *mille*, cum earum conjugatis, ſufficiunt numeris omnibus exprimendis.

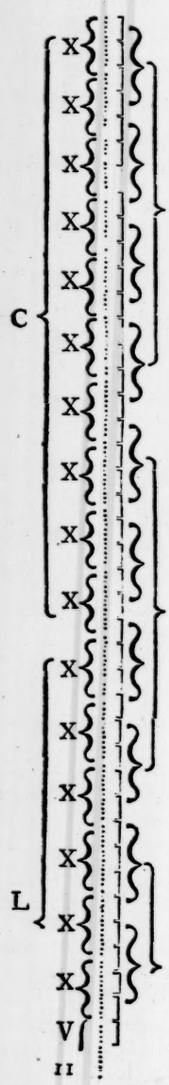
Ut autem hæc numerorum ordinatio facilius percipiatur; ponatur ſeries Punctorum quantum libet longa; ſingulæ vero punctorum decades ſeorſim notentur, totidem uncinis diſtinctæ, quarum quælibet X notetur: Decem vero hujuſmodi decades conjunctæ conſtituunt Centuriam, quam indicat litera C; & (ſi

eousque extenderetur series) decem centuriæ colligatæ constituerent Mille. Multo autem facilius esset singula Millia, vel etiam singulas centurias, aut Decades numerare, quam singulas unitates: faciliusque multo mente concipitur ejusmodi multitudo, ita in Decades & Centurias distributa, quam dum totidem puncta indiscriminatim & confuse ponuntur. Nec multo secus se res habet in Tacticis, ubi militum ordinata distributio consideratur: Nam distributis militibus in varias Legiones, Cohortes, Quaterniones, aliasque ejusmodi partes, partiumque particulas & membra; facile est iis omnibus ab Imperatore mandata tradi: sin promiscua turba seu multitudine ἀτάκτως confundantur; impossibile est ut omnes imperia vel persentiscant vel exsequantur. Atque hactenus de numerorum constitutione & Ordinatione, prout vulgo apud omnes usurpantur.

Duo autem hic in genere monenda existimo; & duo itidem inde observanda.

Quamvis alia quævis proportio adhiberi posset.

Monitorum primum hoc est; Quod quamvis (ut patet) Numeri vulgo proportione decupla distribuantur; ita nempe ut decem Unitates in una Decade colligantur, decem item Decades in una centuria, ut & centuriæ decem in una Chiliade, & sic deinceps; Potuisset tamen alia quævis proportio adhiberi; puta quadrupla, quintupla, sextupla, aut quævis alia. Ita series punctorum modo proposita, quæ ex uno latere distribuitur juxta proportionem decuplam, in decades, & centurias, seu decadum decades; adeoque continet unam centuriam, & sex insuper Decades, septemque Unitates: eadem ex alio latere proportione quadrupla distribuitur in Quaterniones, eorumque quadrupla, & ipsa itidem quadruplata; adeoque continet duos Quaterniones quaternionum quadruplicatorum, & insuper duos Quaterniones quadruplicatos, cum uno etiam Quaternione simplici, tribusque unitatibus.



Et revera, alia nonnunquam proportio aliquibus in rebus usurpatur. Sic enim in fractionibus (ut vocantur) Astronomicis, sive Sexagenariis; 60 minuta quarta constituunt unum minutum tertium; 60 minuta tertia unum secundum; 60 secunda unum minutum primum; & totidem minuta prima, unum gradum, proportione continua sexagecupla. Sic, apud Hebræos: annus quisque septimus erat Sabbaticus; Sabbaticorum vero quisque septimus erat Jubilæus: adeoque anni septem constituunt unam annorum Hebdomadem, & septem hebdomades unam periodum Jubilaicam, sunt enim septies septem (seu septem hebdomades) quadraginta novem. Dicetur forsan, quod Jubilæus, non quadragesimus nonus, sed quinquagesimus annus erat. Fateor quidem annum quinquagesimum Jubilæo destinatum, sed inclusive, Jubilæo nempe utrinque posito in computum admisso: eo scilicet modo quo ludi Olympici quolibet anno quinto dicuntur celebrari (nempe inclusive) cum tamen Olympias sit revera spatium quatuor annorum, ut notum est.

Hoc autem maxime perspicuum est in operationibus Algebricis; ubi Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, aliæque (ut loquuntur) deinceps potestates, juxta quamlibet proportionem proponuntur. Est autem ille progressus potestatum non nisi graduum in certa ratione progressus. Ut in ratione decupla, erit Decas, *Radix*; centuria, *Quadratum*; Mille, *Cubus*; Decies mille, *Quadrati-quadratum*, & sic deinceps. In sexagecupla proportione, si minutum Quartum ut *Unitas* ponatur, erit minutum tertium *Radix*, minutum secundum *Quadratum*, minutum primum *Cubus*, Gradus vero *Quadrati-quadratum*; & sic deinceps. In proportione septupla si Unitas Annum designet, erit *Septennium* (seu annorum Hebdomas) *Radix*, Periodus Jubilaica *Quadratum*, &c. Atque idem accidit in qualibet proportione assumpta. Qua de re plura post dicenda erunt.

Alterum eorum quæ monenda duxi, hoc est; Quod quamvis Numeros licuerit qualibet proportione disposuisse; tamen, quod mirum dictu est, in eadem proportione Decupla omnes ubique terrarum gentes mire conspirant. Nescio enim an ulla unquam natio reperta fuerit, quæ numeros proportione Decupla non disposuit. Sic enim Hebræi, Græci, Latini, hodierni Indi, Barbari omnes, etiam ipsi Americani. Licet enim aliis aliquando proportionibus, aliquibus in rebus usi fuerint, (prout in ponderum Scrupulis, Granis, Unciis, Libris; item in nummorum Denariis, Solidis, Libris, &c.) Numerorum tamen universalis dispositio proportione decupla semper, quod sciam, & ubique obtinuit. *Decuplâ tamen omnes usi sunt.*

Hinc duo mihi videntur serio observanda, ut quæ manifesto inde consequuntur; de quibus nemo, credo, qui rem paulo pressius pensitaverit, omnino dubitare poterit. 1° Gentes omnes ab eadem origine ortas esse, & quasi ex eodem trunco in varios ramos divisas. 2° Hanc numerorum peritiam & dispositionem illa Gentium distributione antiquiorem esse. Impossibile enim omnino videtur, & plane incredibile, ut omnes omnino ubique terrarum Gentes vel fortuito quidem, vel etiam ex pacto, in eandem proportionem incidissent, nisi ab eodem fonte communi quædam traditione derivassent. Secus enim cur eandem potius numerorum dispositionem, quam eandem nummorum, ponderum, aut mensurarum rationem obtinerent; nemo facile dixerit: in his autem quam insignis ubique & fere infinita sit varietas nemo nescit. *Hæc Numerorum dispositio, ipsarum Gentium distributione antiquior.*

Qua vero de causa proportionem Decuplam in disponendis numeris elegerint veteres (primi nempe numerorum dispositores,) potius quam aliam quamvis, cum potuissent ad libitum quamlibet aliam adhibuisse; non nisi conjecturâ valemus assequi, tanquam in re omni memoria antiquiori. Si autem conjecturæ locus sit, nulla mihi potior occurrit ratio, quam quod propter Digitorum numerum illud fecerint. Sicut enim Mensurandi rationem ab ipso corpore humano desumptam esse constet (inde nempe desumptæ sunt mensuræ plurimæ, ut Digitus, Pollex, Palmus, Spithama, Pes, Cubitus, Ulna, Passus, Orgyia, &c.) inde & Numerandi pariter rationem desumptam esse, plusquam est probabile. Ideoque cum singulis digitis totidem Unitates numerassent, necesse est, ut, post integram decadem, denuo ab Unitate incipiant, progrediendo ad secundæ decadis terminum; & sic deinceps; post quamlibet finitam decadem, denuo ad unitatem redeundo. *Unde desumpta.*

Atque hactenus Numerorum Constitutionem, ex Unitatibus; & eorum in proportione decupla Dispositionem, per Decadas, Centurias, & Millia, tradidimus. Sequitur ut eorundem Nominum, saltem apud Latinos, Etymologiam, & eorum Notationem sive Scriptionem explicemus, adeoque tam Appellandi quam Describendi rationem.

CAP. VI.

Latina Numerorum Nomina à Græcis derivantur. Aliæ quam plurimæ Etymologiæ passim immiscentur.

NUmerorum Nomina quod attinet, eorumque Etymologiam; non est ut in omnibus linguis illud prosequar. *Numerorum Nomina.*

Nomina numerorum apud Hebræos, sunt, ni fallor, (vel omnia, vel pleraque saltem,) pure Primitiva, & ad placitum imposita; adeo ut in illorum originem inquirere supervacaneum sit. *Hebræa.*

Atque idem fere de Græcis dicendum est: vel enim ea lingua pure Primitiva est, nec aliunde derivata, (præter vocabula nonnulla ab Hebræis & Arabibus mutuata,) vel saltem, si aliæ fuerint olim linguæ unde descenderat, illæ nunc penitus ignorantur; adeo ut ubi ad Græcam originem deventum fuerit, haud licebit ulterius progredi. Affirmat quidem *Plato* in *Cratilo* Græcos à Barbaris vocabula multa accepisse: at quænam illa fuerint, ut & à quibus mutuata, non nobis erit adeo facile investigatu. *Græca.*

Latina vero numerorum Nomina omnia, à Græcis fuisse desumpta, ego omnino existimo; quanquam eorum aliquot ab eorum origine adeo videantur remota, ut *Latina.*

ægrius

ægrius agnoſcantur. Nos à facilioribus exorſi reliqua ſuo ordine attingemus.

Octo. *Octo* dicitur à Græcorum ὀκτώ. Hinc vero *octavus* (ὄγδοος) *octies*, *octonus*, *octonarius*, &c.

Duo. Ambo. *Duo* à Græcorum δύο dicitur; ſicut & *Ambo*, ab ἄμφω dicitur. (Inde vero noſtrum *two*, ſicut à *Tribus*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, noſtra *Three*, *ſix*, *ſeven*, *eight*; & à *Noveni*, *Deni*, noſtra *nine*, *ten*; Niſi potius antiquos Teutones, unde nos illa accepimus, hæc omnia immediate à Græcis dicamus accepiſſe: at *Four* & *Five*, tam à Græcis quam Latinis remotius abſunt.)

Bis. Latinum *Bis* à Græcorum δὶς derivatur, converſo δ in *B*; ſicut *Bellum*, *Bellatores* dicimus, quod olim *Duellum*, *duellatores* ſcribebant: (niſi forte à Græco πόλεμος dictum *ſit bellum*, quod non exiſtimo.) Sic *Duonus*, *duellus* dicebant priſci, pro quibus nos *Bonus*, *bellus*: ſic *Bes*, *beſſis*, olim *Des*, *deſſis*. videndi Varro & Scaliger in Varr: & Feſt. atque Merul. ad Ennium.

Bini, binarius, bifarius. A *Bis* vero *Bini* dicitur, & *Binarius*, & *Bifarius*, quaſi *Bi-varius*: vel forſan *Bifarius*, *Trifarius*, &c. quaſi διφάσιος, τριφάσιος: mutato σ in *r*, ut in χθές, χθεσὶ, *heri*; χυμὸς *humor*, κρέσσον *porrum*.

Viginti. Sed & *Viginti* (quaſi *Biginti*, vel *Biſginti*) terminatione à Græcorum κοντα deſumpta. Quæ enim Latini *Triginta*, *Quadraginta*, &c. dicunt, Græci τριάκοντα, τεσσαράκοντα, &c. efferunt.

Sed & ipſum εἴκοσι Græce, quaſi δίκοσι dictum puto; ipſamque terminationem κοσι (in εἴκοσι) tantundem valere ac κοντα in ſequentibus. Nam quod terminatio ſit iſtic ι, hic α, non major eſt diſcrepantia, quam cum Latine dicamus *Viginti*, aut *Triginta*. Quod illic autem reperiatur σ, hic τ, omnino hoc exiguum eſt, cum hæ literæ ſint facillime commutabiles, (ut ab ἀνύτω, fit Futurum, ἀνύσω, item ἐρύτλω & ὀρύσσω promiſcue dicuntur, aliaque ejuſmodi infinita; & quidem εἴκοσι Dorice ἔικατι dicitur; ſic *Aquam* Germani *Waſſer* dicunt, Angli & Belgæ *Water*, aliaque ſunt innumera.) *N* vero, in terminatione κοντα, non Radicale eſt, ſed Epentheticum, ideoque in Derivatis excidit; eodem enim prorſus modo ab εἴκοσι formatur εἰκοσὸς, ac à τριάκοντα τριακοσὸς. Sic à Latinorum *Triginta* formatur *Trigeſimus*; amiſſo *n*, & *t* in *s* converſo, ut ξυπίνη *reſina*, πλύω, Æol. πλύω *ſpuo*, πλυνίζω *ſperne*, & Angl. *ſpurn. meto meſſis*. Ut igitur pro *nt* in *Triginta*, ſubſtituitur ſola litera *s* in *Trigeſimus*; ſic pro ντ in terminatione κοντα, ſubſtituitur ſimplex σ in terminatione κοσι. Sic à λέοντι, τιθέντι, &c. formantur λέυσι, τιθεῖσι, &c. Sic pro εἰσὶ, τύπτωσι, &c. dicunt Dores ἐντὶ, τύπτονσι, &c.

Leviculum autem eſt illud, quod Latinorum terminatio *ginta* per *g* ſcribitur, Græcorum vero κοντα per κ, earum enim literarum facillima eſt commutatio, cum ſint ejuſdem organi; Imo ab iiſdem vocibus *Viginti*, *Triginta*, promiſcue dicimus *Vigeſimus*, *Trigeſimus*, & *Viceſimus*, *Triceſimus*, (ut ſupra dictum eſt,) item *Viceni*, *Triceni*. Sic Græce Γάϊος dicitur qui Latine *Caius*; & contra, à Græcis κυβερνάω, κύκνος, fiunt Latina *guberno*, *cygnus*, aliaque ejuſmodi non pauca paſſim occurrunt. Neque omnino mirum eſt literas *C* & *G* promiſcue uſurpari; Quod quidem facile fieri poteſt, cum literarum *C* & *G*, recte pronunciatarum, (nempe ut Græcorum κ & γ) ſonus admodum affinis ſit. Quamvis enim literæ iſtæ *C* & *G* alios habent nunc dierum ſonos ante vocales *E* & *I*, quam ante *A*, *O*, *U*; illud tamen antiquitus obtinuiſſe neutiquam eſt credibile. Nulla enim ratio videtur cur *Accipio*, *Accentus*, &c. pro *Adcipio*, *Adcentus*, &c. ſcriberentur; niſi ut ſonus literæ D tranſiret in ſonum ſequentis conſonæ, (ut cum *corripio*, *collimo*, *commuto*, *arripio*, *aſſumo*, *allicio*, *appono*, *attendo*, *affundo*, &c. efferuntur pro *conripio*, *conlimo*, &c.) ideoque ſi *C* ut *S* ſonaretur, potius *Aſcipio*, *Aſcentus*, &c. ſcribendum eſſet, ut in *Aſſciſco*, *Aſſcendo*, &c. Atque idem dicendum de litera *G*, propter voces *Agger*, *Aggeſtum*, *Suggero*, *Suggeſtum*, &c. nam certe *Adger Adgeſtum*, &c. mollius ſonarent, ſi *G* deberet eo ſono proferri, quo nos nunc dierum proferimus literam *G* ante *E* & *I*, vel *Azger*, *Azgeſtum*, &c. ſi Gallorum more efferenda ſit. Nam mollior (qui dicitur) ſonus literæ *G*, magnam habet apud nos affinitatem cum ſono literæ *D*, & literæ Z apud Gallos, imo ſonum hunc in ſe continet. Nam verbi gratia, vox *Jupiter*, quam Germani ſonant *Yupiter*, Angli *Dyupiter*, Galli *Zyupiter* pronunciant.

Ut autem à *Bis* fiat *Viginti* (mutata litera *B* in *U*,) non mirum eſt, cum *V* conſona, prout nunc dierum efferri ſolet, non aliter à *B* differat, quam *F* vel *Ph* à *P*, ſeu φ à π, hoc eſt, ut litera aſpirata à ſua tenui. Nam ſi literas *P*, *B*,

pronunciaturis ſpiritus interceptus permittatur erumpere, formabitur illic F, hic V; * (prout nempe *F* & *V* nunc efferimus.) Imo eadem litera Græca βῆτα, ab aliis *Beta*, ab aliis (ſatis quidem barbare) *Vita* dicitur; hinc *f* & *v* in MSS. Græcis ſæpiſſime confunduntur: & Hiſpani fere promiſcue tam ſcribunt quam efferunt *b* & *v*: earumque literarum affinitas maxima nemini non innoteſcit. Hinc à Græcorum βέλομαι ſit Latinum *volo*; ab Hebræorum דוד ſit Græcum Δαβὶδ, unde iterum Latinorum *David* & *Davides*, Anglorum *David*, Cambrorum *Dafid* & *Dewy*: A Latinorum *liber* & *libra* ſit Gallorum *livre*; à *faba*, *febris*, &c. fiunt Gallorum *feve*, *fevre*, &c. Item à Latinorum *libero*, *cooperio*, *habeo*, *recipio*, &c. fiunt Anglorum *deliver*, *cover*, *have*, *receive*, &c. aliaque innumera paſſim obſervanda ſunt; ut non mirum ſit *B* in *U* commutari. Monet tamen ex Salmaſio Gatakerus (quod nec mihi diſplicet) deduci poſſe *Viginti* à Dorico εἴκατι, pro εἴκοσι: præfixo Æolico Digamma, ut in Ἰτέα *Vitex*, ἴτος *vitus*, rotæ canthus, &c. unde Heſychio Γιτέα, ἰτέα: Γέαρ, ἔαρ (ver:) Γία, ἄνθη (violæ utique) ϰ in *g* permutato ut in ϰάβιος *gobius*, ϰύϰνος *cygnus*: *n* inſerto, ut in τόνϰα *tunc*, νίφω *ningo*, λείπω *linquo*. Quæ rectius forte ſcriberentur, Γιτέα, ἰτέα: Γέαρ, ἔαρ: Γία, ἄνθη: per Digamma Æolicum F.

* *Vid. Tractatum de Loquela, quam meæ Grammaticæ linguæ Anglicanæ præfixi.*

Ut autem à *Bis* ſit *Viginti*, ſic à *Tribus*, *Quatuor*, &c. vel *Ter*, *Quater*, &c. fiunt *Triginta*, *Quadraginta*, &c. terminatione ubique à Græcorum κοντα deducta. Pariter apud Anglos, *Twenty*, *Thirty*, (ſeu, ut loquuntur Scoti, *Threety*) *Forty*, &c. à *Twaine*, *Three*, *Four*, &c. deſcendunt, addita terminatione *ty* à voce *Ten*, ut videtur, deſumpta. Sed progrediendum eſt. *Triginta*, &c.

Tres idem eſt Latine ac τρεῖς Græce: Atque hinc *ter*, *ternio*, *ternus*, *ternarius*, *tertius*, &c. *Tres.*

A Græcorum Δέϰα Latinorum *Decem* deſumptum eſſe nemo dubitat, terminatione α in *em* mutata. A *Decem* vero formantur *Decimus*, *Decies*, *Deni* (quaſi *Deceni*,) *Denarius*. &c. *Decem.*

Sic ab Ἕξ, Ἑπτὰ, formantur *Sex*, *Septem*; ſpiritu aſpero in *s* converſo. Quod facile fieri poſſe, ab aliis derivatis abunde liquet. Dicimus enim ab ὗς *ſus*, ab ὑπὸ *ſub*, ab ὑπὲρ *ſuper*, & *ſupra*, (at in *up* & *upper*, inde fortaſſe deductis, *s* iterum excidit,) ſic ab ἕρπω *ſerpo*, ab ἑρμῶς (vel ἑιρμὸς) *ſermo*; ſic ab εἴρω (dico) *ſero*, *ſerui*, eo ſenſu quo dicitur *ſerere ſermones*, & *vario ſermone ſerebant*. Virgil. h. e. *loquebantur*: atque hinc *diſſero diſſerui*: Et ab εἴρω (necto) fit *ſero* (hoc eſt *jungo*) unde *ſertum*, *deſero*, *conſero*: (At *ſero*, *ſevi*, hoc eſt, *ſemino*, à σπείρω dicitur.) ſic ἄλλομαι *ſalio*, ἑ *ſe*, ἑὸς *ſuus*, ὅλος *ſolus*, ἥλιος *ſol*, ἅλς *ſal*, unde & σάλος *ſalum*; ſic ὕλη *ſylva*; ab ἅμα vel ὁμῶ ſit *ſimul*; ſic ὅμοιος *ſimilis*, (ubi terminatio *lis* ſervilis eſt, ut in *facilis*, *humilis*, &c.) ab ἕζω, ἵζω, ἵσημι, *ſedeo*, *ſiſto*; ab ἕπω *ſequor*; ſic ab ὕπατος *ſummus*, (mutato τος in *mus*, hoc eſt, terminatione ſuperlativi Græci in terminationem ſuperlativi Latini; & *p* in *m*, euphoniæ gratia, nempe pro *ſupmus*, *ſummus*, ut ab ὕπνος *ſomnus* & *ſopor*,) ſic ab ἥμισυ *ſemis*, & pro ἡμι in compoſitis Græcis ſit *ſemi* in compoſitis Latinis, ut ἡμικύκλιον *ſemicirculus*: Sed & pro ſpiritu leni nonnunquam ſubſtituitur *s*; ut ab εἰμὶ *ſum*, (quod ab εἶμι deſcendere, ex aliis perſonis magis liquet, cum enim ab ἐσὶς, ἐσὶ, ἐσὲ dicimus *es*, *eſt*, *eſtis*, cur non ab εἰμὶ, ἐσμὲν, εἰσὶ, vel Dor. ἐμμὶ, ἔιμες, ἐντὶ, *ſum*, *ſumus*, *ſunt*.) ſic εἰ ſi, ἐὰν *ſin*, (hoc eſt, *ſi vero* ἐανδὲ, at *ſin* pro *ſi non*, ex *ſi* & *ne* componitur.) Et ante conſonas non raro præfigitur *ſ*; ut à γράφω *ſcribo*, à γλάφω, γλύφω, *ſcalpo*, *ſculpo*, (tanquam à γάλφω & γύλφω, metatheſi literæ λ, ut cum pro ϰράτος & ϰράτιϛος dicimus ϰάρτος & ϰάρτιϛος) quanquam & ipſa γράφω, γλάφω, γλύφω, ab Hebræo כרב *exarare*, deſumpta videntur, mutato (in poſterioribus) ר in ל: cui affine eſt כחב *ſcribere*. Sed de his ſatis. A *ſex* autem & *ſeptem* fiunt *ſexies*, *ſextus* (quaſi ab ἕϰτος) *ſenus* (quaſi *ſexenus*) *ſenio*, *ſenarius*, &c. Item, *ſepties*, *ſeptimus* (ut ἕβδομος,) *ſeptenus*, *ſeptenarius*. &c. *Sex.* *Septem.*

A Græcorum Εἷς, ἓν, ἑνὸς, fit Latinorum *Unus*; mutato ε in *u*; quod ipſum non raro fit. (Atque hinc *Unicus*, & *ullus*, quaſi *unulus*, & *nullus*, quaſi *ne ullus*, ut ſupra dictum eſt.) Sic ἑὸς, *ſuus*; σὸς, τεὸς, *tuus*; σκόπελος, *ſcopulus*; νεφέλη, *nebula*; à φλέγω fiunt φλὲξ, φλογὸς, & *fulgeo*; ab ἀμέλγω, ἀμολγὴ, & *mulgeo*, ab ἀμέργω, ἀμοργὴ, *amurca*; à μείλιχος vel μειλίσσω, *mulceo*; à μέλι, *mel* & *mulſum*; à σφενδόνη, *funda*.

Aut forte dici poſſit *Unus* quaſi contracte pro *Uenus* vel *Wenus* aut *Venus*; Nempe pro ſpiritu aſpero vocis ἓν, ſubſtituta conſona *V*; quæ olim (non raro ſaltem, ſi non ſemper) mollius efferebatur ut noſtrum *W*; (quanquam Priſciani tempore duriorem ſonum adepta fuerat, quem & nunc dierum apud pleroſque retinet;)

tinet;) quod ex derivatis non paucis liquet; eſt enim apud nos *Vinum*, wine; *Via*, a way; *Veni*, went; *Volo*, *vellem*, will, would; *volvo*, wallow; *ventus*, wind; *vellus*, wooll; *veſpa*, a Waſp; &c. Sive autem dicat quis voces noſtrates illas à Latinis, vel potius tam noſtras quam Latinas ab antiqua lingua Teutonica deſumptas, (quæ quidem cum Latina poterit de antiquitate contendere,) perinde omnino eſt; utcunque enim ſe res habet, affines illos fuiſſe ſonos, non eſt dubium. Sic pro *Valens*, *Valerius*, ſcribebant Græci ϝαλὴς, ϝαλέριος, & à Græco ϝαὶ fit Latinum *Væ*, & Anglicum *Wo*, vel (prout dicebant veteres, & etiamnum dicunt Boreales) *wea*.

Ut autem pro ſpiritu aſpero præponatur *V*, hoc eſt, ut pro *Henos*, dicatur *Venus*, *Uenus*, ſeu *Wenus*, facile concedi poteſt; ſic enim ab ἑστία dicitur *Veſta*, ab ἕσπερος *Veſper*; imo etiam pro ſpiritu leni; dicitur enim ab εἶδω (quod ipſum יד') *video*; ab ἑδὴς, *veſtis*; ab ἔδω, *eſca* & *veſcor*; ab οἶνος, *vinum*; ab ἔντερον, *venter*; ab ἶς, *vis*, (niſi forſan à βίη,) ab ἔαρ vel ἦρ, *ver*; ab ἴον, *viola*: Sed & non raro interſeritur *V*; dicitur enim ab ᾠὸν, *ovum*; ab ὄϊς, *ovis*; à βοῦς, βοὸς, *bos*, *bovis*; à ναῦς ναὸς, *navis*; à παῦρον, *paulum*, *parum*, *parvum*; ab αἰὼν *ævum*, (unde etiam noſtrum *aye*, & *age*, nam *y* & *g* ſunt apud nos literæ admodum affines, & ſæpiſſime commutabiles;) ſic à νέω, *novi*; ab ὄγδοος, *octavus*; à νέος, *novus*; & ab ἐννέα, *novem*: ſic Ἰέρνη, *Hiverna*, *Hibernia*, *Ireland*.

Ideo autem *Unum*, tanquam ex *Uenum* contractum videri poſſit, (potius quam immediate ab ἑνὸς, mutato ε in *u*,) quia prima ſyllaba longa eſt, quæ, ſi immediate fieret ex ε, potius eſſet brevis. Forſan dici poterit *Unum* ex ὃ ἓν (per craſin) contractum fieri.

Hinc autem & *Bonum* dici forte conjicias, quaſi ὃ ἓν, *quod unum eſt*. Platonici enim omnes formalem rationem *Boni* in *Vnitate* collocant: unde factum eſt quod *Unum & Bonum converti* dicimus. Nam ſi ex ὃ ἓν *Hoënum*, vel *Uenum* dicatur, &, præfixo *F* Æolico, *Foënum*; digamma illud facile in *B* migrabit, ut fiat *Boënum*, unde & *Boënè*, & (extritis inde *e*, hinc *o*) *Bonum* & *Bene*, unde & *bellus* pro *bonulus*, vel *benulus* vel *boenulus*. Atque hinc forſan evenit, quod quamvis *bonum* & *bene* ſint conjugata, in altero tamen *o*, in altero vero *e* maneat. Sic *forem* & *fore* dicimus, pro *fúerem* & *fúere*, ab antiquo *fuo*, *fui*, quod à Græco φύω deſcendit. Ex *F* autem fieri poſſe *B*, vel inde liquet, quod *Bubulcus* & *Bubſequa* dicitur, pro Boviſequa, à Græco βοῦς βοὸς, Æolice ϐοFος.

Ne quem vero terreat in *Bonum* & *Bene*, ſyllaba prima brevis, quam exſpectarent potius longam futuram ſi ab ὃ ἓν contracta diceretur: Sciendum eſt regulam illam, *ſyllabas contractione factas longas eſſe*, non ubique valere; quod, ne longius abeam, in ipſis *forem*, & *fore*, ex *fuerem* & *fuere* ab antiquo *fuo* contractione factis, eſt extra dubium; ſic in *ſit* pro *ſiet*, & multis aliis.

Contractio per θλίψιν, & per κρᾶσιν.

Quod quidem quo rectius intelligatur, notandum eſt, contractionem duplici modo fieri; nempe vel per θλίψιν, vel per κρᾶσιν. Hoc quidem, quando duarum ſyllabarum vocales in unam ſive vocalem ſive diphthongum coeunt, & quidem vel mutatæ vel non mutatæ, (niſi malis illam κρᾶσιν, hanc συναίρεσιν appellare) ut (apud Græcos) τείχεϊ τείχει, τείχεϙ τείχῃ, τείχεα τείχη, &c. Et ſyllaba ſic contracta evadit longa. Illud autem, quando, nullâ vocalium coalitione factâ, altera plane expulſa, reliqua intacta manet, ut in ἐμαυτῆ, σαυτῆ, &c. ſic in σφῶϊ σφὲ, σφῶιν, σφίν· & multis aliis; vel etiam ubi diphthongi vocalis altera expellitur manente reliqua, ut in Doricis τύπτες, τύπτε, τύπτεν, &c. pro τύπτεις, τύπτει, τύπτειν, & multis aliis. Et quoties hoc evenit, vocalis ea quæ ſupereſt eandem quam prius habuit retinet quantitatem; nempe ſi prius longa fuerit, longa manet; ſin brevis fuerit, manet adhuc brevis, nec propter contractionem producitur. Sic apud Homerum

Iliad. ω. v. 88. Ὄρσο Θέτι· κελέει Ζεὺς — } pro Ὄρσεο
Odyſſ. ν. v. 342. Ὄρσο κέων ὦ ξεῖνε ——— }
Et Il. ε. v. 109. Ὄρσο Πέπον Καπανιάδη. —

Aliquando autem vix aliud ſupereſt indicium per κρᾶσιν an per θλίψιν fiat contractio, quam ex quantitate vocalis quæ ſupereſt, ut βόαε, βόα· ubi duæ vocales breves αε in unam longam α coaleſcunt; adeoque ſi α etiam prius ante contractionem fuiſſet longa, perinde fere eſſet ſive per κρᾶσιν ſive per θλίψιν contractionem fieri diceremus, ſaltem niſi aliorum verborum analogia eorum alterum potius ſuaderet.

Conjugationis tertiæ Verba contracta.

Quod autem Græcis familiare eſt, illud & Latinis non raro uſu venit: præſertim in verbis tertiæ & quartæ conjugationis in *io* terminatis, ut *cupio*, *fugio*, *audio*, *neſcio*, &c.

neſcio, &c. Cum enim ad formam tertiæ conjugationis (*Lego, legis, legit, legimus, legitis, legunt, legebam, legam, lege, legito, legerem, legere, legendi, legens*, &c.) dicendum eſſet verbi gratia, *cupio, cupiis, cupiit, cupiimus, cupiitis, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupie, cupiito, cupierem, cupiere, cupiendi, cupiens*, &c. dicimus tamen contractius *cupis, cupit, cupimus, cupitis, cupe, cupito, cuperem, cupere*, &c. nempe per συίζυγιαν prioris vocalis, reliqua ſuam quantitatem retinente; at *cupio, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupiendi, cupiens*, &c. omnino incontracte: & ſimiliter in iis omnibus quæ, etiam poſt contractionem, reputantur adhuc tertiæ conjugationis.

In reliquis autem quæ ad quartam conjugationem referuntur, (quanquam & ea omnia ſint revera non niſi verba tertiæ conjugationis contracta,) per κράσιν plerumque fit contractio nempe *audīs, audīmus, auditis, audī, audīto, audirem, audire*, &c. duabus nempe vocalibus brevibus *ii*, vel *ie* per κράσιν in unam longam *ī* coaleſcentibus; at *audit* (ultima brevi) per συίζυγιαν alterius *i*, reliqua ſuam quantitatem brevem retinente; item *audio, audiunt, audiebam, audiam, audiendi, audiens*, &c. incontracte: & ſimiliter in aliis verbis conjugationis quartæ: Verum & hic ſuam libertatem exercent Poetæ. Nam verbi gratia, *Neſcis* apud Ovidium habet ultimam brevem, quaſi συίζυγιαν paſſum non κράσιν; & contra *Neſcis* apud Juvenalem habet ultimam longam, quaſi per κράσιν fieret contractio, non per συίζυγιαν. Atque idem accidit in *abit, obit, perit, redit, it, neſcit, petit*, &c. quæ apud poetas ultimam habent longam; imo & *abiit, periit, rediit, ſubiit*, pro *abivit, perivit, redivit, ſubivit*, ultimam habent longam, nempe *v* conſona prius in *u* vocalem tranſeunte (quod aliquando fit, ut *evolüiſſe* pro *evolviſſe* apud Ovidium, & *Sylüæ* pro *Sylvæ* apud Horatium, &c. uti notavit Cl. Gatakerus in tractatu ſuo de Bivocalibus,) & deinde facta craſi duarum vocalium *ui* in *ī* longam. (Exempla ſiquis petat, ne longus ſim, apud Smetium quærat; in ſuo quævis ordine.) *Quarta Conjugatio Verborum, eſt Tertiæ forma contracta.*

His adjungere licet *potĭtur* apud *Virgilium*, & *Ovidium* (probatos autores) penultima correpta, quaſi συίζυγιαν non κράσιν (uti in ſimilibus fieri ſolet) paſſum.

Ovid. *Mars videt hanc, viſamque cupit, potĭturque cupita.*

Virg. *Vi* potĭtur; *quid non mortalia pectora cogis.*

Sic *potĭretur, potĭturus, nequĭtur*, &c. de quibus vide Smetium.

Quod autem de conjugatione quarta dictum eſt, & de ſecunda fere intelligendum erit. Nam verba conjugationis ſecundæ vix aliter differunt à verbis tertiæ, quam quod in pleriſque temporibus (intellige quæ à præſenti formantur, non item quæ à præterito) perpetuam fere patiantur craſin, nempe vocalis *e* cum ſequenti, in *e* longum, puta *doces, docebam*, &c. pro *doceis, doceebam*, &c. excepta tertia perſona præſentis Indicativi, ubi pro *docet* fit per συίζυγιαν *docet*, ultima brevi. Sed & hic ſuam libertatem exercent Poetæ, nam *vide* apud Perſium & Catonem, & *cave* apud Horatium, ultimam habent brevem, (quod notant Lubinus & Farnabius, ad Perſii Sat 1. verſ. 108.) ſed & *vale* apud Ovidium, (& ejuſmodi fortaſſis alibi occurrant alia,) quaſi per συίζυγιαν fieret contractio: ſed & *fervere*, penultima brevi legitur, quanquam à *ferveo*, quaſi ex *ferveere* non κράσιν ſed συίζυγιαν fieret. *Secunda conjugatio Verborum, eſt forma contracta tertiæ.*

Pari modo, ubi pro *poſſiem, poſſies, poſſiet, poſſiemus, poſſietis, poſſient*, (ex *ſiem, ſies, ſiet*, &c. prout olim ſcribebant, compoſitis) dicimus contractius *poſſim, poſſis*, &c. duo illa *poſſim, poſſint*, perinde eſt ſive per thlipſin ſive per craſin contracta dicas; at *poſſimus, poſſitis*, per craſin, propter vocalem longam; *poſſit* per thlipſin, propter ultimam brevem; contra vero *ſit* ex *ſiet* contractum, quaſi per craſin non per thlipſin, ultimam productam habet apud Lucretium.

Deterior ſit ut forma muliercula ametur.

Poſſis indifferenter nunc per hanc, nunc per illam; habet enim apud Horatium ultimam longam, apud Juvenalem ultimam brevem, quaſi ille per craſin, hic per thlipſin contraxerat. Utriuſque exemplum apud Smetium exſtat (librum prædagogis ſatis notum) hoc autem eo potius moneo, quoniam audivi non ita pridem D. *Prideauxium* μαχαιρίτω (virum omnigena eruditione refertiſſimum) immerito à quodam taxatum, quaſi metri leges violaſſet, cum vocem *poſſis* ultima correpta in carmine uſurpaſſet, quod tamen non niſi veterum exemplo fretus fecerat. Et quidem Grammaticalis illa regula, cui nixus ille hanc protulit cenſuram, nempe quod Ultimam longam habeant *ſecundæ perſonæ ſingulares verborum in is, quorum ſecundæ plurales deſinunt in* ĭtis *penultimâ productâ*, non ſine grano ſalis admittenda eſt, nec quidem Grammatici omnes eam ita univerſaliter pronunciant, quod quibus vacat facile collatis Grammaticis reperiant. Verum quidem eſt, quod Syl- *Poſſis*, ultima anticipiti.

labæ illæ longæ esse possint, & non raro sint, non autem vel necessario vel semper producendæ: cum veterum Poetarum autoritas (quæ hîc suprema lex est) sæpissime in contrarium eat. Exempli gratia.

Ovid. Nescis *an excedant etiam loca, venimus illuc.*
(Nisi potius legendum sit *Nescio.*)
Juven. *Tam jejuna fames, cum* possis *honestius illic.*
Pers. ——— *nec te* quæsiveris *extra.*
Horat. *Integer est animi, ne* dixeris, *ergo abi parve,*
Juven. *Accipit Endromidem si* dixeris *æstuo, sudat.*
Virg. *Verum ubi ductores acie* revocaveris *ambos.*
Juven. *Græculus esuriens ad cœlum* jusseris *ibit.*

Et similiter in aliis accidere, cui hæc non sufficiunt exempla, invenire poterit si Smetium consulat ad voces, *concluseris, curtaveris, gustaveris, juveris, oraveris, piaveris, possederis, spectaveris, spreveris, tentaveris, terseris, viceris, videris,* &c. Et quidem non modo in tempore Præterito modi subjunctivi, (ubi volunt Grammatici secundas personas plurales penultimam ancipitem habere,) sed & in tempore futuro, (cujus secundæ plurales penultimam semper habent longam, uti iidem tradunt Grammatici,) ultima secundæ singularis ut plurimum corripitur (contra quam docet allegata regula) & non nisi raro admodum (extra positionem) producta legitur. Si quando autem dubium sit an vox ejusmodi ad tempus præteritum an ad futurum referenda sit; at saltem ubi sensu imperativo usurpatur, ad futurum certo certius referendum erit (non enim jubemus præterita sed futura) atque etiam ubi Hypothetice aliquid asseritur sub conditione rei adhuc futuræ. Sed de his hactenus.

Summa huc redit, si ab ὁ ἓν vel Fοεν deducatur Latinum *Boenum* & *Boene*, & contractius (per thlipsin alterius vocalis) *Bonum* & *Bene*, erit nihilominus utrobique prima brevis. Quod si hoc duriusculum censeatur, non contendo. Sunto *bonum* & *bene*, at antiquis *duonum* & *duene*, (ut *duellum bellum*) atque hæc à *Deo* (ut apud nos **God** & **good** sunt voces cognatæ,) *Deus* autem à Θεὸς, transeunte θ in *d*, quod sæpe fit, ut γανδάω *gaudeo*, πιθῶ *fido*, πέρθω *perdo*, ἔνδεν *inde*, ἔδην, ἐδήν, μηδὲν μηδήν, sic θύρα **door**, θὴρ **deer**, θυγάτηρ **daughter**, ἔθαρ (*uber*) **udder**, ἐρυθρὸς (*ruber*) **red**, **ruddy**, ἀγαθὸς βέλτερος βέλτιστος, **good better best**.

Semel. *Simplex.* *Simplus.*

Ab eodem autem themate Ἑν, formantur *semel, singulus*, & *simplus*, item *simplex* (quod non dicitur, ut vult *Scaliger*, quasi *sine plicâ.*) Nam eodem quo ab ἅμα vel ὁμῶ fit *simul*, (præfixo *s* pro spiritu aspero, & adjuncto servili *l* finali:) sic, ab ἓν, *semel*, *v* interim in *m* conversо, (nisi potius ab ἀμὸς dictum putemus, quod Jonice pro ἑὸς usurpatur.) At *semel* & *simplex* ejusdem esse originis, nemo dubitabit; cum syllaba *plex* sit manifesto adventitia, ut in *duplex, triplex*, &c. ut & *plus* in *simplus, duplus, triplus*, &c. quibus respondent Græcorum ἁπλοῦς, διπλοῦς, &c. Non enim ἁπλοῦς dicitur vel ab α στερητικῷ, vel ab α διπταλικῷ, sed vel quasi ἀμπλοῦς, ab ἀμὸς *unus*. vel ab α μόνωσιν significante, seu *singularitatem*, ut vult Eustathius; ut in ἀμάζων, ἀδελφὸς, ἀγάστωρ, ἀγαλακτος, ἄχοιτις, ἄλοχος, ἀτάλαντος, ἀκόλουθος, &c. Atque huc facit quæ habet Eustathius, dum exponit ἀγάστωρ, ὁμογάστριος: ἄλοχος (quæ & ἄχοιτις) ὁμόλεκτος: Quid enim aliud est ὁμογάστριος, ὁμόλεκτος, quam qui *communi* (hoc est, *uno eodemque*) ventre feruntur, aut lecto concumbunt. Nam *communionis* notio etiam *Unitatis* seu potius *Identitatis* notionem includit. Sic & ἅπαξ, ἅπας, & forte ἀμὸς, & hinc ἅμα, ὁμὸς, ὁμῶ, ὅμοιος, ut & ὐδαμὸς, μηδαμῶς, quasi *nullies*. Terminatio vero πλοῦς, vel est à πίλω, ut Eustathio videtur, vel est paragogica, ut vult Etymologicus.

Singulus. *Sincerus.*

His autem *singulum* & *singularem* cognata esse patet: quæ ab ἑνικὸς dicta videantur, ut ῥῖγος *frigus*, πέφρικα *frigeo*, πύκτης *pugil*, κόμμι *gummi*, κυβερνάω *guberno*. Sed & *sincerus* etiam dicitur ab ἓν & κεράω seu κεράννυμι *misceo*; quod ipsum & ἀκήρατον significare putarem (non tam ab α στερητικῷ quam ab α μόνωσιν significante;) ut id nempe significent quod ex plane Homogeneis conflatur, & non ex varia mixtura: nec quidem magis distant voces ἀκήρατος & *sincerus*, quam ἀειστερὸς *sinister*, (ubi ρ in *n*, ut in ἕρως *Venus*, ἑσπερία *Hispania*, sic ἑρρίκος *Henricus*, quod nos *Henry*, & *Harry* dicimus.) *Sincerum* autem quasi *sine cerâ* dictum esse (quod Scaligero videtur) mihi neutiquam placet; partim quod ipsa præpositio *sine* in compositione nusquam occurrat, sed ipsius forsan loco nonnunquam præpositio inseparabilis *se*, ut *securus* quasi *sine cura*, vel *seorsum a cura*;) partim etiam quod hæc omnia *simplex, simplus, singulus, singularis, semel, simul, similis, sincerus*, cognatæ tam significationis

ficationis quam originis esse nemo merito dubitare possit; in omnibus nempe *Unitas* quædam seu *singularitas*, sive, quod tantundem valet, *communitas* quædam seu *Identitas* innuitur: At qui *sinceram* dictum putant quasi *sine cera*, & *simplex* quasi *sine plica*, non ipsi tamen dicerent, credo, *singulum* dici quasi *sine gula*, aut *simplum* quasi *sine pilo* vel *polo*, aut etiam vocibus *semel*, *simul*, *similis*, ejusmodi nugatorias derivationes affingerent. Sed progrediendum est ad ea quæ sequuntur.

Ab ἐννέα dicitur *novem*, ut à νέος *novus*, (ut supra dictum est,) terminatione item mutata ab α in *em*, ut à δέκα *decem*; ε item seu syllaba ἐν à principio pereunte, quod etiam in aliis Derivatis (præsertim ubi ex una lingua in aliam transitur) non raro fit. Sic ab *expendo* dicimus *spend*, & ab *extraneus* fit Gallicum *estrange*, & nostrum *strange*: ab *Hospitale*, fit Ital. *spedale*, & Anglicum *spittle*, quod & *Hospital* & *Hostel* dicimus, nempe Xenodochium: sic ab *Episcopus* dicimus *Bishop*: ita ἐρεύγω *ructo*, ἐρέσσω remus, ἐρυθρός *rubor*, ἐρυθρὸν *rubrum*, ἐρωτῶ, *rogo*; sic ab ἀμέλγω, *mulgeo*, & nostrum *milk*; ab ἁμαλὸς, μαλὸς, *mollis*; ab ὀτρύνω vel ὀτρύω, *trudo*; ab ἐμὸς *meus*, ab ἀσπάραγος, *asparagus*, *sparagus*; ab ἀστὴρ, *aster* & *stella* (quasi *asterula*:) & nostrum *sterre*, seu *starre*; ab ἀμάω, ἄμητος, ἀμητὴρ, fiunt *meto*, *messis*, *messor*; pro ἀμαυρὸς *obscurus*, ἀμαυρόω, *obscuro*, *infusco*, dicuntur per Aphæresin μαυρὸς, μαυρόω, unde Latinorum *Maurus* & *Mauritania*; à γάλα γάλακτος (quasi à γάλαξ) *lac lactis*; à צרִיק צדק, δίκη, δίκαιος: a σφενδόνη, *funda*; sic apud ipsos Græcos dicuntur promiscue γαῖα & αἶα, item ἐμοῦ, ἐμοῖ, ἐμὲ, & μοῦ, μοὶ, μὲ, item πᾶς, & ἅπας, sic σάχυς & ἄσαχυς; γαῦρος, & ἀγαυρὸς *superbus*, & alia multa; sic ὃς & ἑὸς, αὐτῦ & ἑαυτῦ, κεῖνος & ἐκεῖνος, μαλὸς & ἁμαλὸς, sic γαστέρες ἀργαὶ (*Tit.* 1. 12.) pro γαστέρες μαργαὶ, hoc est γαστρίμαργοι *gulones*: Atque apud Ionas & Poetas augmenti & reduplicationis rejectionem sæpissime fieri nemo nescit, ut cum τύπον & βλήμενος dicunt pro ἔπτυπον & βεβλημένος. A *novem* autem fiunt *nonus*, quasi *novenus*, item *nonies*, *novies*, & *novenarius*, &c. *Novem.*

Ab ἑκατὸν fit *centum*: dempto à capite ε, (ut in ἐννέα *novem*) & Epenthetice inserto *n*. *Centum.*

Hujusmodi autem Epenthesis literæ *N*, vel *M*, (prout sequens consona palatina fuerit aut labialis) est frequentissima. A κῆπος fit *campus*; à סָדִין *sindon*; à לַפִּיד *lampas*, *lampadis*, & quidem λάμπω: & pro Hebræo Dages notissimum est Chaldæos & Syros sæpissime substituere literam *Nun*, (non modo ubi Dages est absentis *Nun* vicarius, sed & alibi.) Sic etiam sive à קוֹף sive à τύπτω fit τύμπανον *tympanum*: sic à φάω, φαίνω, & φαντασία: à τάω, τείνω, & *tendo*; à τύπτω, *tundo*; à σπείδω, σπένδω: ab ἄγχος, ἄγχυμι, *ango*, & *angor*, *angoris*; quod Angli *ake* & *ach* dicunt: ab ἔχις *anguis*, (ubi & χ in *g* transit, ut ἔγχελυς *anguilla*, χαλβάνη *galbanum*, βληχὼν *pulegium*, Καρχηδὼν *Cartago*, ὄνυξ, ὄνυχος, *unguis* & *ungula* &c.) à πετάω *pateo* & *pando*; à χέω, χύω, χύνω *fundo*, (ubi & χ in *f* convertitur, sic à σύγχυσις *confusio*, à χοῖνος *funis* & *finis*; sic in χολὴ *fel*, χλὸη *flos*, Χλωρὶς *Flora*: *Chloris eram quæ Flora vocor*, Ovid. *Fast.* & χυμὸς *fumus*; nisi hoc ultimum potius à θυεῖν *adolere*, unde θύματα & θυήματα *suffimenta*, & θυμᾶν *fumigare*, *suffire*, θ in *f*, ut in θέω *fio*, *suffio*; θῆρες Æol. φῆρες *feræ*, θέρω *ferveo*, θερμὸς *formus*, θράω, θραύω *frio*,) sic à σχίζω ἔσχιδον *scindo* & *findo*; sed & à σχίζω σχινδαλμὸς, sicut & Angli, eodem significatu, à *split*, *splinter*: à σπεύδω *festino* fit σφενδόνη *funda*, teste Eustachio: à λείχω *lingo*; à λείπω *linquo*, ab ἔκπω *inquio*, (ubi π in *q* transit, quod sæpe fit, ut post dicetur) à ζεύγω *jungo*, (ubi ζ in j transit, ut ζεὺς *Jovis*, *Jupiter* vel *Joupiter*, hoc est *Jovis pater*, ζεὺς πατὴρ, ut dicimus *Marspiter*, *Diespiter*, *Liber pater* &c. Sic Insula *Zocotora*, ad Mare rubrum posita, unde *Aloe Zocotrina* nomen sortitur, à nautis vulgo dicitur *Jacatra*: item *Succus*, Italice *succo* & *sugo*, Hispanice *Xugo*, Anglice *juyce*, quæ omnia à *sugendo* dicta:) Illud autem *n* in *tundo*, *fundo*, *scindo*, *findo*, *pando*, *linquo*, *lingo*, *jungo*, & similibus, adventitium esse, inde magis liquet quoniam in derivatis frequenter excidit; dicimus enim *tutudi*, *fudi*, *scidi*, *fidi*, *liqui*, &c. & à *pando*, *passum*; à *jungo*, *jugum*, *jugalis*, *conjux*, *conjugium*, &c. & à λείχω non modo *lingo* dicitur, sed & *liquor*, *liquidus*, (unde *liquido* & *liquet*,) & Anglicum *lick*, quæ quidem omnia ab Hebr. לחך vel לקק descendunt: sic *Triginta*, *trigesimus*, à τριάκοντα τριακοστὸς, ut supra dictum est.

Sic à σκάζω (*claudico*) σκάνδαλον: sed & *scando*, & *scala*, & σκαλμὸς, quod ideo potius moneo, ut Geometricæ vocis σκαλμὸς originem obiter tradam. Formatur enim σκαλμὸς quasi à σκαλὸς vel σκαλάω, aut ejusmodi aliqua voce (cui Latinorum *scala* videtur affinis) quam à σκάζω vel σκάω facile descendere posse nemo dubitabit;

DIGITIZED BY CARLINDERS

bit; ejuſmodi enim terminationes præter radicis ſubſtantiam ſatis frequenter accedunt, ut in ipſo σκάνδαλον, ἁμαρτωλὸς, διδάσκαλος, διδασκαλία, διδασκαλικὸς, διδασκαλεῖον, &c. ſatis patet, ſic & ab ὁμὸς, ὁμαλὸς & ἀνώμολος, & ab εἴκω εἴκελος: A σκαλὸς vero, vel σκαλάω, vel ejuſmodi voce alia, facile fiet σκαληνὸν, ut à Μαγδαλὰ Μαγδαλιὼν: ſic κάρα κάρηνον, item γαλιὼν (Euſtachio teſte) à γελάω quod ipſum à γαίω (unde & γηθέω *gaudeo*;) ut autem γαίω, γελάω, γαλήνη, ſic σκάζω, σκαλάω, σκαλινὸς dici poſſunt: pari modo & ἀπάρχανον, ἀπαρχανόω, ἀπαρχάνωσις, ſive à ἀπαράομαι ſive à ἀπαρχάω: ſic & ab ἔργον vel ἐργάζω, dicuntur ἀργαλέος, ἔργαλεῖον, ὄργανον, Εργάνη: item à ταφὶς, ταφυλὴ & ταφυλῖνος: ſic à κάω κάω (*uro*) fiunt κῆλον (*lignum*) & κῆλον *jaculum ligneum*, item κήλων & κηλώνειον *tolleno*. Nec quicquam in contrarium ſuadet vocum ſignificatio: Conus enim ille *Scalenus* dicitur, qui erectus non eſt, ſed magis in alteram partem propendet, hoc eſt, *claudicat*; quid enim aliud eſt claudicare, quam non erectus incedere, ſed ad latus alterutrum inclinatus? Atque eodem plane ſenſu Triangulum illud *Scalenum* dicitur, quod æquicrurum non eſt, ſed, propter crurum inæqualitatem, in latus alterum inclinatum. Sic etiam ab eadem claudicationis ſive inclinationis notione, voces *ſcando* & *ſcala* non abludunt; in plano ſiquis incedit, non ille *ſcandere* ſed *ambulare* dicitur; quod autem ad perpendiculum erigitur, eſt illud vix aut ne vix ſcanſile; adeoque illud ſolummodo ſcandimus, quod eſt inclinatum ſive acclive: ſiquando autem erectum illud ſit ad cujus ſummum aſcendere velimus, illud *Scalæ* inclinatæ auxilio faciendum erit; ideoque παρὰ τὸ σκάζειν *ſcala* dicitur, eadem ratione qua παρὰ τὸ κλίνειν κλίμαξ. Sed de σκάζω, σκαληνὸς, & *ſcando* hactenus.

Ut autem *n* vel *m* adventitium non raro inſeritur, ſic è contra *n* vel *m* radicale non raro excidit, ut ubi Hebræorum *Nun* tranſit in Dages: & ab Hebræo *Nimrod* fiunt Græca Νέμβρωτος & Νεμβρὼδ (inſerto β ut in μέβλωκα, μεσήμβριον) &, apud Joſephum, Ναβρώδης, extrito μ radicali: ut literæ *n* vel *m* (ſaltem inſertæ) minor ratio in derivationibus habeatur.

A *Centum*, fiunt *Centies*, *centuria*, *centenus*, *centenarius*, *centuplus*, *centurio*, &c.

Mille. Ut autem ab ἑκατὸν *centum*, ſic à χίλια fortaſſe *millia* dici poterit, mutato χ in *m*, ut cum à πέχω in Aoriſto ſecundo fit ἔδραμον pro ἔπεχον, & inde δρόμος: quæ tamen ſi formari dicantur tanquam à δρέμω & non à πέχω, ſaltem erunt δρέμω & πέχω cognata. Sic quem vocant Græci Ιάκωβον, Latini *Jacobum*, Hiſpani *Jago*, Galli *Jaques*, hunc Itali *Jacomo* appellant, & nos *James*. Deinde cum χ & φ, quamvis non ejuſdem organi, ſint tamen literæ invicem commutabiles, (ut ſupra oſtendimus, in χῖνος *funis*, χέω (χύδην) *fundo*, σύγχυσις *confuſio*, χάζω ἔχαδον *findo*, &c.) ipſa π, φ, β, cum litera *m* (ejuſdem organi) commutari poſſe aliunde liquet; dicimus enim à δαπάνη *damnum*, ab ὕπνος *ſomnus*, ſic ab ὕπατος (vel ὑπὲρ) *ſummus*; ſic *ſummitto*, *ſummoveo*, pro *ſubmitto*, *ſubmoveo*; item πολὺς *multus* (niſi forſan à μάλα vel μάλιστα, α in *u*, ut in ταλῶ *tulo tuli*, κραπάλη *crapula*, στραγγαλῶ *ſtrangulo*, ἀγκύλος *uncus*, θρίαμβος *triumphus*; at ſaltem μάλα & πολὺ apud Græcos, ſunt tam cognatæ ſignificationis, quidni & originis; quam apud Latinos *multum* & *plus*:) μολύνω *polluo* (niſi forſan à παλάσσω *contamino*, unde πηλὸς *cœnum*, *lutum*; vel potius à *porro*, ſive *prorſus* & *luo*, unde *lutum* & *lues*, & fortaſſe *abluo*, *deluo*, &c. ne dicam *diluvium*, *illuvies*, *colluvies*, potius quam à *lavo*, quod eſt alterius conjugationis:) ſic μέρος *pars*, (vel utrumque forſan à פרס) & μοῖρα *Parca* (niſi potius, ut Gatakero videtur, à περατῶ unde πέπρωται· itaque videntur olim *Partæ* dictæ quæ nunc *Parcæ*: inde Propert. *l.* 3. *el.* 4. ubi nunc *parca* legitur, veteres codices habere perhibentur *parta*; *Optima mors Parta quæ venit apta die*, i. τῇ πεπρωμένῃ Scalig. Harum autem tertia, quæ Græcis ἄτροπος, Latinis priſcis eſt *Morta* dicta, à μοῖρα, ſive εἵμαρται, unde & εἱμαρμένη. vid. Gell. *l.* 3. *c.* 16. *Mors* certe à μόρος, ut à πλῆθος *plebs*, à μένος *mens*:) ſic ab ἁπαλὸς fiunt ἁμαλὸς, μαλὸς & *mollis*; à φαῦλος *malus*, (vel forſan à μαλὸς, *mollis*, *ignavus*, ut κακὸς à κάζω *recedo*, *fugio*, & contra ab ἄρης ἀρετὴ unde & *ars* & *virtus*, niſi ſi iſtud à *viro*, quod à גבר ſunt qui velint, malim ego ab ἄρης vel ἄρσω:) ſic μῆ Dor. πεδὰ, *apud* & *poſt*: ſic à βουνὸς *mons*, (niſi quis dici malit *montem* à verbo *minere*, quod apud Lucretium reperitur, unde & *minæ* murorum; à *minendo* autem, ſive *eminendo*, *mons montis*; ſicut, à *pendendo*, *pons pontis*; à *prominendo*, *promontorium* quaſi *prominuntorium*; atque ab eodem verbo *mineo* ortum habent illa omnia *emineo*, *immineo*, *præmineo*, *promineo*, non autem à *maneo*; à *maneo* enim non *emineo*, ſed *emaneo*

habetur, unde & *emanſor* dicitur.) Sed & ipſum *m* aliquando ſimpliciter præfigitur, ut cum ab ἄρης ἄρηος fit *Mars, Martis,* (& forſan ab ἅλς, non modo *ſal* & *ſalum* ſed & *mare,*) ſic ab ἄρσην *mas maris.* Sed & *p*, in ὀρέγω *porrigo*; (niſi potius à *porro ago*, ut *porricio, porro jacio*, hoc eſt, *projicio*; vel, quod ego mallem, à *porro rego*, propter præteritum *porrexi*, ad formam *direxi, ſurrexi, correxi*, &c. non *porregi* ad formam *ſategi, peregi, redegi, ambegi*; ipſum autem *rego*, non tam à *re ago* vel *res ago* dictum crediderim, quam à Teutonico ſeu Saxonico antiquo *rice*, quod *dominium* ſive *regnum* ſignificat, quam vocem adhuc retinemus in *Biſhop-rick*, hoc eſt, *Epiſcopatus*, ſive αὐτολεξεὶ *Epiſcopi dominium*, inde autem *rego, rex, regnum, regio*, &c. voces enim *Latinas* non paucas à Teutonicis originem duxiſſe, ego nullus dubito: non negem tamen *rego* ab ὀρέγω dici; &, in imperandi ſignificatu, ab ἄρχω.) Sic ἄρω *paro*, ἄρπη *par*, αἰδέω *pudeo*, ἥβη *pubes*, μόλυβος *plumbum*, אור πῦρ. *Vid. noſtram Grammat. Linguæ Anglicanæ.*

Verum ego *Mille* & *Millia*, potius à μύρια, quam χίλια, deducerem; (niſi potius vox ſit ab utriſque conflata; nam principium potius μύρια exhibet, & finis χίλια:) nam λ & ρ facile tranſmutantur. Sic perinde dicitur κείβατος & κλίβανος: *parum* & *paulum*, utrumque à παῦρος: ſic φραγέλλιον *ſcribunt* Græci quod Latini *flagellum*: γράφω & γλάφω voces ſunt affines utraque à ברב, ſic σκαλμὸς *ſcalmus*, à σκαίρω *ſalio*, Etymologo teſte; ſic *Willelmus* Græce Ἱλερμὸς ſcribitur; ἐσπερία, *Hiſpania*, & *Hiſpalis*; ſic *puer, puellus*; *tener, tenellus*; *pulcher, pulchellus*; *liber, libellus*; aliaque multa. Sic à Græco λείριον fit Latinum *lilium*, & forſan ab εἶρος vel ἔριον, *vellus*, (quanquam Varro & Plinius à *vellendo* volunt, unde vulſuram tonſura priorem probatum eunt: fortaſſe tamen à μάλλος *vellus*.) Sic ab *Epiſtola, Apoſtolo, Capitulo*, dicunt Galli *Epiſtre, Apoſtre, Chapitre*. Hinc decantatus ille Alcibiadis Trauliſmus, λ pro ρ pronunciantis; quo nomine ab Ariſtophane irridetur in *Veſpis*, Εἶτ' Ἀλκιβιάδης εἶπε πρός με παυλίσας, Ὅλας; Θέωλος πὼ κεφαλὼ κόλακος ἔχει, cum dixiſſet, ὅρᾶς. Θέωρος πὼ κεφαλὼ κόρακος ἔχει, adeoque Theoro, pro capite *Corvino* (hoc eſt, nigro) *Adulatoris* caput tribuit; ſalſe quidem & pro more ſuo. Et quidem *R & L in omnibus linguis facile invicem commutantur*, ut notat doctiſſimus Cauſabonus ad Perſii. Sat. 5. verſ. 22.

Numeros Ordinales quod attinet, illi à Cardinalibus derivantur omnes, præter primores duos.

Primus nempe, quaſi *Proimus*, dicitur à Græco πρῶτος, mutata nempe termi- *Primus.*
natione ſuperlativi Græci in terminationem Latini, hoc eſt, τος in *mus*. Vel etiam (quod eodem recidit) à Græco πρό, Poetice πρόαι, fit Latinum *præ*, indeque *prior* & *primus*. Hoc enim dicere mallem, quam *pridem, prior, primus*; cum vox *pridem* videatur idem eſſe ac *prius demum*: vel ſaltem *præ* cum expletivo *dem* compoſitum; ut in *idem, ibidem, itidem, identidem, tantundem*, & ſimilibus.

Secundus autem à *ſequor* dicitur, ut *oriundus* ab *orior*: Quod autem per *C* ſcri- *Secundus.*
batur, & non per *qu*, hoc nihil eſt; tantundem enim valent: ſic à *qui* dicitur *cujus, cui*, vel (apud Plautum) *quojus, quoi*; à *ſecus* (adverbio) *ſequior*; à *ſecus* (præpoſitione) *ſequeſter*; ab εἰκὸς, εἴκελος, *æquus, æqualis*; & *perſecutio, ſecutus*, &c. promiſcue ſcribuntur per *c* & *qu*; ſic *cum* & *quum*, aliaque multa.

Duo ſaltem reſtant Numerorum nomina, nempe *Quatuor* & *Quinque*; quæ, *Quatuor.*
quamvis à Græcis nominibus longiſſime recedant, inde tamen orta puto. *Quatuor* enim Græce dicitur τέσσαρες, Attice τέτταρες & τέτορες, Poetice ſeu potius Æolice πίσυρες (apud Homerum Il. π. & forſan alibi) item πίσυρες & τέτορες, (unde *Petorritum*, Flacco, à rotarum numero,) exinde Cambricum *pedwar*, Armoricum *peuar* (teſte Bocharto) & forſan inde Anglicum *fower*, quod tamen Teutonicæ potius originis eſſe duco. At à πίσυρα, vel πέτταρα, vel πέτορα, ad *Quatuor*, non ita difficilis eſt tranſitus; mutato nempe π in *Qu* vel *C*. Quippe cum Æoles dicant κῶς pro πῶς, & κε pro τε, quidni pro πέτορα aut τέτορα dicant κάτορα & hinc *quatuor*. Oſtendimus autem ſupra gutturales κ & χ cum ipſis labialibus π, β, φ, (aut quæ tantundem valent) aliquando commutari; ſic à χοῖνος, fit *finis* & *funis*; à χέζω, *ſcindo* & *findo*; à χύω, *fundo*; à χολὴ *fel* & *bilis*; & contra à λείπω, *linquo*; ab ἕπω, *ſequor*; ab ἔπω, *inquam*; ab ἵππος, *equus*; à πειράω vel πορέω, *quæro*, (niſi ſit ab Hebr. בקר, *quero*, & à קש *quæſo*; dempto *b*, ut in βρέχω *rigo*, βρώσκω *rodo*) ſic *Gatak.*
à πάτσω, *quatio, quaſſo*, &c. Et revera pauciſſimæ occurrunt voces Latinæ, per *qu* ſcriptæ, quæ non apud Græcos vel per π vel per τ (rarius per κ vel χ niſi in

Æolica

Æolica dialecto) ſcriptæ reperiuntur. Ita enim à τόσα, πόσα, *tot*, *quot*; & πόσος *quotus*; ſic & τόσον, πόσον, *tantum*, *quantum*, (inſerto *u* Epenthetico;) ſic à πότε *quando* (unde Anglicum *whan* ſeu *when*, vel, ut Scoti ſcribunt *quhan*:) ſic πῦ *quò*; πᾶ *qua*; item τοῖος, ποῖος, *talis*, *qualis*, in quibus terminatio *alis* eſt adventitia, ut & in *æqualis* ab *æquus*, (ſicut εἰκαλὸς ab εἰκὸς, & ὁμαλὸς *planus*, ab ὁμὸς *ſimilis*, *par*, ſic ἀμαρτωλὸς, διδάσκαλος, ὑψηλὸς, σκάνδαλον, &c.) & terminatio *ilis* in *ſimilis*, ab ὅμοιος, quod ipſum ab ὁμὸς, quare & Græca terminatio οιος ſervilis eſſe apparet; ſed & *Humilis* ab *humo*, (quod ipſum à χαμαὶ, unde & χθαμαλὸς *humilis*, ut ἄχος ἄχθος, μαλακὸς, μαλθακὸς.) *Facilis* à *facio*, *Habilis* ab *habeo*, (unde & *Habitus*, ut ab ἴχω vel σχῶ, ἕξις & σχέσις,) *Agilis* ab *ago*, aliaque multa, terminationem ſervilem adſciſcunt, prout ſupra *l* in *ſimul* & *ſemel* ſervile eſſe diximus. Sic & à τι *que*, à τις *quis*; ſic ab ἐδίω, *eſca* & *veſcor*; & contra *tolleno* (quaſi *colleno*,) à κηλώνειον. Sic Æoles ὄκα & ἄλλοκα, pro ὅτε & ἄλλοτε, dicebant; ſic apud Latinos *otium*, *negotium*, *ſpatium*, *nuncium*, *vicium*, &c. promiſcue vel per *t*, vel per *c*, ſcribuntur; unde literarum *t* & *c* affinitas magna colligitur: quod idem patet apud Græcos in ὀρύττω, ὀρύσσω, ὤρυχα, ὤρυγμαι, ὤρυκται, aliiſque verbis ejuſdem formæ, ubi τ in ξ, χ, γ, κ, convertitur: Ita etiam promiſcue dicimus *uſpiam* & *uſquam*, *nuſpiam* & *nuſquam*, *quiſpiam* & *quiſquam*; unde etiam maxima affinitas literarum *p* & *qu* ulterius patet; adeo ut non mirum ſit à τέτορα, vel πέτορα, dici *Quatuor*. A *Quatuor* vero fiunt *quartus* (ut τέταρτος) *quater*, *quaternio*, *quaternus*, *quaternarius*, &c.

Quinque. Eadem item opera oſtenditur, & *Quinque* derivari poſſe à Πέντε, Æol. πέμπε, unde & πεμπάζω & πεμπτὸς: poſitis nempe pro πν *quin*, & pro τε *que*, (ut κῶς pro πῶς & κε pro τε) adeoque à κίνκε *quinque*. Atque hinc *quintus* ſeu *quinctus* (πέμπτος) *quinquies*, *quinus*, *quinarius*, &c.

[Hæ duæ, vocum *Quatuor* & *Quinque* Etymologiæ, utut à Græco longius recedere videantur; in eandem tamen eunt ſententiam, non modo *Bochartus* jam citatus; ſed & *Voſſius* in Etymologico ſuo nuper edito; (poſt primam hujus editionem;) &, quem ille citat, *Salmaſius*; ne plures nominem.]

Atque ita oſtendimus Numerorum nomina Latina à Græcis deſumpta eſſe; quanquam illud in nonnullis vix adeo probabile primo intuitu videri poſſit. Sicui vero hac in re nimis prolixus fuiſſe videar, aut etiam à ſemita deviaſſe, cum hæc Grammatica ſint potius quam Mathematica: ſpero ab illo me veniam facile impetraturum, ſi ſaltem intelligat me numeros ex profeſſo hic loci non Mathematice tantum, ſed & Philologice tradendos ſuſcepiſſe; partim quidem quoniam neſcio an quiſpiam antehac illud ſuſceperit; partim etiam quoniam legitimi mei Auditores (quibus hæc primitus parabantur) non omnes eouſque in rebus Mathematicis verſati fuerint, quin opus ſit nonnunquam aliud aliquid ſalis inſtar ſeu condimenti interſpergere, quo melius quæ arida ſecus aut ſicca nimis videri poſſint facilius deglutiantur, neque vel palatum offendant vel ſtomachum moveant. Quod autem nonnunquam prolixior ſim & in exemplis copioſior, ideo factum eſt, quia nonnunquam derivata a ſuo fonte eouſque recedant, ut, niſi magna exemplorum copia illud evincatur, non eſſet adeo perſuaſu facile ullam omnino cognationem inveniri: quod de *Quatuor* & *Quinque* præſertim dictum intelligatur; quanquam & alia aliqua prima forſan fronte vix ſuam familiam ſatis indicarent. Neque hoc quidem mirum, cum illud omnino uſu ſit compertum, ut, ubi vox aliqua ex una in aliam linguam tralata eſt, derivationum leges multo ſint laxiores quam ubi intra eandem linguam manendum eſt. Atque hoc in Latinis à Græcis deductis eo magis accidit, quoniam non tam ex puro fonte Græco ſeu dialecto vel Attica vel Ionica (quarum frequentior eſt uſus) quam ab Æolica adeoque omnium impuriſſima dialecto ut plurimum ducta ſint, quod agnoſcunt omnes; vel ſaltem à Dorica, quæ & ipſa à Communi ſatis deflectit.

Contra vero, ſiquis minutioribus hiſce (prout videri poſſint) delectatus, ampliorem meſſem optaret: conſulat, ſi libet, Caninii Grammaticam Græcam (apud quem olim me hujuſmodi non pauca legiſſe memini;) vel potius (ne multos nominem) acutiſſimi ſimul & Venerandi Senis *Tho. Gatakeri* noſtratis opus κριτικώτατον (qualia ſunt ipſius omnia) quod adverſus Sebaſtianum Pfochenium *de ſtylo novi Inſtrumenti* inſcripſit; apud quem (in prioribus præſertim capitulis) multa hujuſmodi reperiat magno acumine ſcripta: ubi quidem in multis nobiſcum conſentit, atque inde alia in noſtrum uſum, ſi opus eſſet, exempla mutuari poſſent, niſi quod ea perlegere non prius mihi contigerit, quam quæ ſupra habentur, ſcripta

fuerint; quanquam & ex illis aliquot non diffiteor à Clariſſimo illo viro, meique amantiſſimo, me primitus didiciſſe; Qui (magno literarum damno) anno jam proxime præterito 1654 Julii die 27. (poſtquam hæc ſcripta erant atque ab illo quidem lecta & approbata, antequam publici juris fierent,) relicta terra cœlo potitus eſt, octogenarius ſenex.

Atque hactenus de numerorum nominibus diximus. Sequitur Numerorum Notatio ſive Scribendi ratio, proximo in loco tradenda.

CAP. VII.

Numerorum Notatio, per omnes Alphabeti literas præſtita, Hebræis & Græcis communis.

Notatio, ſeu Numerorum deſcriptio.

NUmerorum Notatio, ſive Deſcribendi ratio, non omnibus una eſt. Quamvis enim omnes in hoc conſentiant, ut Numeros Characteriſmis quibuſdam, brevitatis gratia, deſcribant, quo etiam calculus facilior evadat: Gentes tamen variæ varios etiam ſcribendi modos adhibuerunt.

Apud Hebræos.

Hebræi, aliiq; Orientales, in deſcribendis Numeris, Alphabeti Literas adhibent: Primoribus nempe Alphabeti literis Unitatum numeros exprimunt, א ב ג ד ה ו ז ח ט ſequentibus deinceps, quot opus eſt; numeros Decadum, י כ ל מ נ ס ע פ צ & tandem reliquis Centurias, ק ר ש ת Reliquos vero numeros centenarios (quia non ſuperſunt plures Alphabeti literæ) deſignant literarum quinque characteribus finalibus ך ם ן ף ץ aut etiam literis compoſitis תק. תר. תש. תת. תתק.

Numeros autem juſtis Decadibus interjectos, conjunctis literis indicant; numero nempe decadum ſubjungendo numerum adjunctarum unitatum; ut יא כב. At ubi numerum decimum quintum deſcribunt, pro יה, ſcribunt טו, (hoc eſt, pro decem & quinque, ponunt novem & ſex) ne ſcilicet Nomen Dei, iſtis literis expreſſum, videantur temerare. Et pari modo numeros juſtis Centuriis interjectos conjunctis literis deſcribunt, ut רלג קיא.

Millenarios vero numeros & qui ſequuntur, iiſdem quibus Unitates, aut etiam decadas, centuriaſve, literis deſignant; levi fortaſſe punctulo, diſcriminis gratia, diſtinctis; א ב & ſiquæ ſuperſunt centuriæ, decades, aut unitates juſtis millibus interjectæ, ſubjunguntur earum characteres ut אסנה, 1655.

Apud Græcos.

Græci eodem pariter modo quo Hebræi numeros deſignant; primoribus enim Alphabeti literis Monadas deſignant, ſequentibus Decadas, & ultimis Centurias; Millia vero iiſdem repetitis, leviculo puncto vel virgula diſtinctis: Et numeros interjectos literis conjunctis.

Sed & propter literarum defectum, tres characteres præter Alphabeti ordinem interſerunt: inter monadas unum, alium inter decadas, & inter centurias reliquum.

C. ϛ.

Ἐπίσημον C, vel ϛ, (qui character eſt vel τὸ ſigma finalis, vel literarum στ,) numerum Senarium deſignat. Inſeritur vero hoc ordine (potius quam monadum characteribus reliquis poſtponitur) loco Hebræorum ו; ut ſubſequentes literæ eandem poteſtatem obtineant quam eis homologæ apud Hebræos: puta, ut ι & ζ, item ε & ϝ, necnon ϑ & ט, ' item & ι, (& ſic de cæteris) eundem numerum deſignent; quod ſecus non fieret, cum Græci, loco Hebræorum *Vau*, nullam habeant literam, (ſaltem non pari ſede poſitam,) Latini vero eodem ordine reſtituerunt ſuum *F*, (hoc eſt Æolum Digamma) quod fere tantundem valet; imo omnino idem forſan ſonabat olim, cum ipſo ו *Vau* Hebræorum, & Latinorum *V* conſona, prout nunc à pleriſque (ſaltem Anglis) harum utraque pronunciatur: prout & digamma Æolicum *F* olim pronunciatum fuiſſe teſtatur Priſcianus; in cujus locum non raro ſubſtituitur apud Latinos conſona *V*, ut quum ab ὄϊνος, ὄϊς, Æolice Fοῖνος, ὄFις, fiunt Latina *Vinum*, *Ovis*; aliaque ejuſmodi. Unde conjicere licet, duplicem olim fuiſſe ſonum conſonæ *V* apud Latinos: aliquando ille qui nunc dierum auditur in *qui*, *lingua*, *ſuadeo*, ubi idem ſonat ac *w* in *wiſe*, *way*, *perſwade*; aliquando idem cum Anglorum *V*, in *have*, *ſave*, *vaine*, *vice*, &c. Quare

apud Græcos aliquando ſcribitur per β, ut in Βιργίλιος, Δαβὶδ, aliquando per υ, ut in ὐαλέριος, ὐαλὶς, quæ omnia Latine ſcribuntur per *V* conſonam. Sed & etiamnum Cambro-Britanni (& olim, ni fallor, Angloſaxones) *f* eodem modo efferunt quo nos conſonam *v*, nempe ut *b* aſpiratum: ſonum vero quo nos & alii plerique nunc efferimus *f* vel φ, illi per *ff* ſcribunt. Quod autem de Latinorum *V* conſona dictum eſt, dici fortaſſe poterit de Hebræorum *Vau*, nempe ipſius olim ſonum non fuiſſe in omnibus & apud omnes conſtantem; certum enim eſt (ex *Jud.* 12. 6.) non eundem fuiſſe apud omnes ſonum literæ ש, & quare non & eadem eſſe poſſet in litera *Vau* varietas non video: atque nunc dierum Arabes quidem & Perſæ literam illam ut noſtrum *w* pronunciant, & Turcæ ut noſtrum *V*.

צ. Character autem hic צ nongenta deſignat, quem σαν̃ι vocant, quaſi ex literis C (inverſo) & π, nempe *ſigma* (quam Dores σᾶν vocant) & *Pi*, conflatus, vel, ſi libet, ex *Antiſigma* (ſic enim Ↄ, ſive ſigma inverſum, appellant) & *Pi*. Quanquam revera ipſius aliam potius fuiſſe originem exiſtimat Scaliger; nempe ab Hebræorum ſeu Syrorum antiquo charactere literæ *Tzade*.

ק ϙ. Pro Nonaginta vero ponitur ק ϙ; unde figura Latinorum ϙ vel *G.* deducta eſt; antiquis Latinis ignota; qui Græcorum γ per *C* exprimebant, quam literam tertio igitur loco, ut Græcorum γ, ponebant. Dicebatur autem Κόππα ſeu *Kophe*, tanquam ab Hebræorum & Syrorum *Koph*: ſed & *Antirrho*, quaſi *Rho* inverſum. Ab hac figura dicebatur apud Ariſtophanem ἵππος κοππατίας: à præcedente vero σαμφόρας ſive σαμπόρας ſive σαππόρας: (prout hoc aut illo charactere notatus erat.) De utroque videatur Joſephus Scaliger, in ſuis ad Euſebium Animadverſionibus: quibus digreſſionem ſatis longam de antiquis Græcorum literis inſeruit.

Pro ϙ vero ſcribitur à nonnullis ϛ, aut etiam ψ, vel denique ς (idem nempe character cum illo ſenarii numeri) ſed perperam, incuria nempe librariorum. Item pro צ, eadem incuria, ſcribitur nonnunqnam π. Uterque autem error (ponentium ς pro ϙ, & π pro צ) non raro in libris impreſſis retinetur; quod propter typorum inopiam factum credo; cum enim veros typos non habebant, ipſis quam proxime ſimiles ſubſtituerunt: Eodem nempe modo quo in libros tam Manuſcriptos quam Impreſſos (ſive propter Scribarum ignorationem Characterum Hebræorum, ſive propter Typorum defectum) irrepſit error ille ponentium ΠΙ ΠΙ ſeu πι πι pro nomine יהוה: Quomodo etiam pro IHC XPC, vel ιης χρς, (quo pacto Græce contracte ſcribitur ἰησοῦς χριστὸς) ſubſtituerunt Latini ihc xpc vel ihs xps, quibus innuitur *Jeſus Chriſtus*. Sic apud Juriſconſultos, *Digeſtorum* libri, Græce πανδέκτης dicti, hac nota vulgo citantur *ff*, quæ à Græco π deflexit. Smiliter, apud eoſdem, ubi, pro nova clauſula deſignanda, Paragraphum adſcribebant olim, (pro quo jam novum inchoant verſum, retento tamen Paragraphi nomine,) pingebant § (ab S litera deformatum) *Sectionem* eodem innuentes: Pro quo noſtri demum Legiſtæ ſubſtituunt (ſ geminum) *ff* vel *ſs*; proferuntque (quid aliud ſignificet neſcii) per *ſcilicet*.

Atque hæc, de modo ſcribendi numeros Hebræis Græciſque magis uſitato, dicta ſufficiant: Cujus ſpecimen aliquod hic apponitur.

α	1	א		π	80	פ		ια	11	יא	
β	2	ב		ϙ	90	צ		ιβ	12	יב	
γ	3	ג		ρ	100	ק		ιε	15	טו	
δ	4	ד		σ	200	ר		κγ	23	בג	
ε	5	ה		τ	300	ש		νς	56	נו	
C ϛ	6	ו		υ	400	ת		οη	78	עח	
ζ	7	ז		φ	500	ך	תק	σλα	231	דלא	
η	8	ח		χ	600	ם	תר	,αχνε	1655	אסנה	
θ	9	ט		ψ	700	ן	תש				
ι	10	י		ω	800	ף	תת				
κ	20	כ		ϡ	900	ץ	תתק				
λ	30	ל		,α	1000	א׳					
μ	40	מ		,β	2000	ב׳					
ν	50	נ		,γ	3000	ג׳					
ξ	60	ס		,ι	10000	י׳					
ο	70	ע		,κ	20000	כ׳					

Rarius autem tam Hebræi, quam Græci, literas Alphabeti continua ſerie adhibent, ad rerum vel Numerum vel ſaltem Ordinem deſignandum. Sic enim Homeri Ilias & Odyſſea in libros diſtinguuntur. Et eodem modo apud Hebræos Pſalmus CXIX in membra, aliique in Periodos videntur diſtingui. Sed hæc inſinuaſſe ſufficiat.

Supereſt alius Numeros ſcribendi modus, Græcis item uſitatus, Romanorum mori non abſimilis, per aliquot ſaltem, non omnes, Alphabeti literas; de quo proxime agendum eſt.

CAP. VIII.

Numerorum Notatio, per aliquot ſaltem Alphabeti literas præſtita, Græcis & Latinis communis: Et, cur illæ potius quam aliæ, ad hunc uſum ſeliguntur.

PRæter illum quem ſuperius tradidimus Numeros ſcribendi modum, erat etiam alius à Græcis uſitatus; non per omnes quidem, ſed ſelectos quoſdam Alphabeti characteres peractus. Sex ſcilicet literis M. X. H. Δ. Π. I. numeros omnes deſignabant. M deſignat μύρια, ſeu decies mille: X χίλια, ſeu Mille: H ἑκατόν, Centum: Δ δέκα, Decem: Π πέντε, Quinque: I vero ἕν, Unum. Quoties autem plures vel Unitates, vel Decades, Centuriæve, aut Millia apponenda ſunt, illud literis bis, térve, quatérve iteratis indicatur. Quum vero ad Quina deventum eſt, illud litera Π innuitur; hæc enim litera, ſimpliciter poſita, Quinque denotat; at, incluſo Δ, (hoc modo ⟦Δ⟧), Quinquaginta; incluſo H, Quingenta; incluſo X, quinquies mille, &c. Qua de re videatur Herodianus ab Hen. Stephano, & Joh. Scapula, ad Lexici calcem editus. *Notatio aliaGræcorum.*

Eodem plane modo Latini ſeptem literis ſuos numeros deſcribunt. M.D.C.L.X.V.I. Litera M deſignat Mille: D, Quingenta: C, centum: L, Quinquaginta: X, Decem: V, Quinque: I, Unum. Numeros intermedios, aliquorum vel conjunctione, vel repetitione (ſicut & Græci) deſcribunt. Nonnunquam tamen Latini (ſed non item Græci) numerum minorem majori præponentes, illum ex majori auferendum notant; unde IV, IIX, IX, XIIX, XIX, XL, XC, ſignificant 4, 8, 9, 18, 19, 40, 90. Atque idem nonnunquam in numerorum appellationibus faciunt; dicunt enim *undeviginti*, *duodeviginti*, pro *octodecem*, *novendecem*: quod & de aliis ſimilibus intelligendum eſt. Hoc pacto, ſi numerus *Milleſimus ſexcenteſimus quadrageſimus nonus* deſcribendus eſſet; hoc Græci ſic peragerent X⟦H⟧HΔΔΔΔΠIIIII: Latini vero hoc modo MDCXLIX vel etiam ſic CIↃIↃCXLIX. *Notatio Latinorum.*

Latini, pro M, numeri millenarii nota, nonnunquam ſic ſcribunt CIↃ, & hujus dimidium IↃ pro quingentis: deinde CCIↃↃ pro decem millibus, & hujus dimidium IↃↃ pro quinque millibus; item CCCIↃↃↃ pro centum millibus, ejuſque dimidium IↃↃↃ pro quinquaginta millibus: ſic CCCCIↃↃↃↃ pro millenis millibus; & ſic deinceps.

Totius hujus Notationis ſpecimen hic apponitur.

M	10000	CCIↃↃ	I	1	I	⟦Δ⟧	50	L
X	1000	CIↃ.M	II	2	II	⟦Δ⟧ΔΔΔΔ	90	XC
H	100	C	III	3	III.	H	100	C
Δ	10	X	IIII	4	IIII. IV	HHHH	400	CCCC
I	1	I	Π	5	V	⟦H⟧	500	D. IↃ
Π	5	V	ΠI	6	VI	⟦H⟧H	600	DC. IↃc
⟦Δ⟧	50	L	ΠIIII	9	IX	X	1000	M. CIↃ. ∞.
⟦H⟧	500	D. IↃ	Δ	10	X	XXXX	4000	MMMM
⟦X⟧	5000	IↃↃ	ΔI	11	XI	⟦X⟧	5000	IↃↃ.
⟦M⟧	50000	IↃↃↃ	ΔΠ	15	XV	⟦X⟧X	6000	IↃↃc
			ΔΠIIII	19	XIX	M	10000	CCIↃↃ
			ΔΔ	20	XX	⟦M⟧	50000	IↃↃↃ
			ΔΔΔ	30	XXX		100000	CCCIↃↃↃ
			ΔΔΔΔ	40	XL		1000000	CCCCIↃↃↃↃ
							10000000	CCCCCIↃↃↃↃↃ

Literarum numeralium selectarum ratio.

Harum vero literarum numeralium valorem quamvis intelligant plurimi, earum tamen rationem pauci sunt qui animadvertunt; Latinarum præsertim. Imo qui ex professo illarum rationem reddere conantur nonnulli, potius nugas proferunt quam veras rationes: Quas tamen ego exagitare non operæ pretium judico. Legat, qui velit, Julium Scaligerum, *de Causis Linguæ Latinæ*; Hermannum Hugonem, *de Ratione Scribendi*; Venerabilem Bedam, aliosque: qui, quamvis rationes reddere conantur, cur hæ potius quam aliæ literæ numeris significandis adhibeantur, ut plurimum tamen mihi neutiquam satisfaciunt. Alii, quos non consului, fortassis meliores reddant. Ego interim, omissis aliis, eas quæ mihi maxime videntur probabiles, breviter producam.

Apud Græcos.

Quod ad Græcas literas attinet, non est cur multum hæsitemus, cum earum ratio satis in plerisque pateat.

M. X. Δ. Π.

Μ μύρια, Χ χίλια, Δ δέκα, & Π πέντε significant, quia vocum illarum literæ sunt initiales. Item, cur Π, inclusis literis Δ, Η, Χ, Μ, harum valorem quintuplum exhibeat, satis liquet, cum ipsum Π numerum quinarium designet.

De solis literis H & I quæstio restat; quarum illa Centum, hæc Unum indicat: cum nec vox ἑκατὸν, nec εἷς, ab illis incipiat, sed ab Ε utraque.

H.

De priori dicendum est, characterem illum H (prout Centenarium numerum notat) non tam esse figuram literæ *Eta*, quam spiritus asperi. Nam antiquiores Græci, antequam vocales longæ η & ω Alphabeto accesserant, Spiritum Asperum eo charactere designabant, quo jam Latini utuntur: Spiritum autem Tenuem omnino omittebant, ut & Latini etiamnum faciunt. Estque revera ipsa vox *Eta* ab Hebræorum *Cheth* desumpta, & eundem in Alphabeto ordinem retinet, ut & Latinorum H: (saltem si loco Hebræorum *Vau* substituatur vel ὀπίσημον Ϛ, vel Æolicum Digamma, & Latinorum F.) Postea vero eadem litera bisecta Ͱ Ͱ figuras utrique Spiritui suppeditabat; pars nempe prior Spiritum Asperum, posterior Tenuem, designabat. Tandem vero illæ, quas nunc habemus, Spirituum notæ, ut expeditores, obtinebant, ‘ ’. Antiqui igitur, non ἑκατὸν, sed Ηεκατὸν scribebant; unde character ille initialis desumptus est, H, numeri Centenarii nota.

I.

Quod ad reliquam, quæ supereſt, figuram I attinet; adhibita fuit illa, vel quod tam Spiritus Asper, quam prima litera vocis εἷς, ipsi communes essent cum voce ἑκατὸν, ideoque proximam quæ sequitur literam I assumpserunt, qua significent vocem εἷς, adeoque numerum primum seu Unitatem: vel, quod ipsa vox εἷς antiquitus per nudum I scriberetur, ante inventam diphthongum ει, quæ forsan serius, quam numeris Characteres primitus aptabantur, inventa erat. Vel etiam quod ἴος, ἰα, ἴον, dicantur pro εἷς, μία, ἕν: vel denique, quia simplicissima illa & minutissima litera, (μονόγραμμος nempe, & unica lineola constans,) facillime omnium pingeretur; qua ratione, etiam nunc dierum, qui omnino rudes sunt & ἀγράμματοι, adeo ut nequidem literas intelligant, numeros tamen utcunque describunt, totidem forsan in pariete lineolis creta vel rubrica ductis quot vellent innuere unitates. Nec quidem hoc apud Græcos & Latinos tantum, reliquosque populos Occidentales obtinet; sed & in libello quodam Chinensi idem se observasse dicit Gatakerus; paginas nempe quatuor primores ita designatas; primam lineola unica |, secundam duabus ||, tertiam tribus |||, quartam quatuor ||||; sequentes vero aliis characteribus distinctas. Ipseque in variis Codicibus Chinensium comperi similiter lineolis notatas Unitates; & quidem Decadas duabus lineolis decussatis +. Atque hæc de Græcorum characteribus sufficiant.

Apud Latinos.

De Latinorum autem literis non adeo facilis est ratio. Præter duas enim M & C, quarum illa *Mille*, hæc *Centum* inchoat, aliarum origo altius petenda est.

M.

Literam igitur M dicimus ad numerum Millenarium indicandum adhibitam, quia ejusdem litera est initialis. Sed addimus, ipsius figuram aliam aliquando fuisse, & etiamnum esse, quam quæ vulgo adhibetur. In libris quippe Anglicis, Belgicis, Germanicis, aliisque pinguiori typorum forma impressis, occurrit passim

𝔐. istius literæ hic Character 𝔐; rotundiori nempe forma quam in typis Italicis, Gallicis, Hispanicis, fieri solet: Antiquiores vero Anglo-saxones hac forma scri-

ϻ. bebant ϻ; & quidem in Libris Manuscriptis cujuscunque gentis reperitur passim Latinorum litera M majuscula rotundiori forma exarata. Hujusce vero literæ

D. (rotundiori, ut dictum est, forma scriptæ) semissis posterior, literæ D simillimus est; quam ideo adhibuerunt ad numerum Quingenarium indicandum, nempe Millenarii dimidium. Sed & hanc & illam, non antiqui modo, sed & Recentio-

res nonnunquam in membra dividunt: nempe, pro ↀ & D, ſcribunt ↀ & ↁ; priorem vero nonnunquam & hoc modo ∞; ut in libris non paucis apud Belgas præſertim (ſed & alibi) impreſſis videre eſt. ↀ. ↁ. ∞.

Literam vero C, centenarii numeri notam, antiqui Romani ſic ſcribebant Ⅽ, (quadrata ſcilicet forma,) ut ex antiquis marmorum & nummorum inſcriptionibus conſtare dicitur. (Quos imitantur quodammodo typi Germanici Anglicique pinguiores Ⅽ.) Hujus quadratæ literæ ſemiſſis inferior ipſam literam L. Ⅼ. efficit; quæ igitur ad exprimendum numerum Quinquagenarium adhibetur, nempe Centenarii dimidium. Ⅽ. L. Ⅼ.

Ad numerum Denarium exprimendum adhibuerunt, non literam D initialem: (quoniam erat ea quingenarii numeri nota, ut ſupra dictum eſt,) ſed literam X, quæ conflatur ex duplicata litera V ſeu Λ; utroque enim modo Quinarii numeri nota antiquitus ſcripta fuit. X. V. Λ.

Erat autem V litera, Quinarii numeri nota; vel forte quia ex quinque punctis conflari videatur ⁘; Vel quia ipſius figura inverſa Λ (quæ etiam non raro, apud Antiquos, numerum quinarium denotat) ad figuram Græcorum literæ Π (quinarii, apud illos, numeri notam) proxime accedit; (quippe nulla Latinorum litera ipſi eſt ſimilior:) Vel etiam quia vox *Quinque* antiquitus per C V ſcripta fuerit, (antequam litera Q ad Latinorum Alphabetum acceſſerat;) quarum prima C, cum ſit centenarii numeri nota, non potuit adhiberi, ideoque ſequentem V aſſumſerunt. Ipſam vero literam Q, recentius quam reliquæ literæ, ad Alphabetum acceſſiſſe, non eſſe dubitandum exiſtimo; ut nempe illud ſignificet quod conjunctæ literæ C V; (ſicut & *&*, *x*, idem ſonant ac *&*, *cs*:) adeoque ipſa litera U, quæ nunc pro more literæ Q ſubjungitur, omnino redundat, cum ipſius ſonus in ipſa Q litera includatur; (prout contendit Reverendus Senex *Thomas Gatakerus* Anglus, in tractatu quem edidit de Diphthongis, ſive *Bivocalibus*:) ſecus enim litera Q omnino eſſet ſuperflua. Nam ut *gua* conſtituit ultimam ſyllabam in voce *lingua*, & *ſua* primam ſyllabam vocis *ſuadeo*, ſic & *cua* idem ſonat ac *qua* in voce *qualis*: vel igitur redundat *u*, cum Q tantundem valeat ac *Cu*; vel ipſa litera Q omnino eſt ſuperflua, & perperam Alphabeto inſerta, utpote quæ non alia eſt quam litera C. Et revera, non modo ſonus literæ Q, ſed & ipſius character, conflatus videtur ex C V, nam ♌ & Q ſolo ſitu differunt. Eodem prorſus modo ponebant veteres literam K pro C A; adeoque promiſcue *Klendas* & *Calendas*, item *Krtago* & *Cartago*, item *Kriſſimi* & *Cariſſimi* (quod in MSS. ſæpius comperi) multaque iſtiuſmodi: quanquam nunc dierum, tam A perperam ſubjiciatur literæ K, quam U literæ Q; adeoque tam K quam Q, prout nunc uſurpantur, prorſus redundent, nec aliud quicquam ſonent quam C; non nego tamen hunc ſcribendi modum jam olim aliquando obtinuiſſe, neque tanti forſan res eſt ut nunc mutatum iri ſtrenue urgeamus. At ſaltem eodem, ſi non majori, jure dicendum eſſet, *Poſt Q non ſcribitur U*, & *Poſt K non ſcribitur A*, atque dictum eſt, *Poſt X non ſcribitur S* (nempe quia *ſ* includitur in litera *x*, quæ ex *cs* conflatur:) nam pariter abſurdum eſt literam A literæ K incluſam, aut U incluſam literæ Q, repetere, ipſive K vel Q ſubjungere; ac ipſam literam S literæ X incluſam eidem denuo repetitam ſubjungere. Sed neque hæc regula univerſaliter obtinere debet, acſi poſt X nunquam ſcribenda eſſet litera S; quamvis enim illud ſecus obtineat, tamen quoties præter ipſum S literæ X incluſum, aliud ſequatur S juxta vocis analogiam ipſi ſubjungendum, nihil impedit quo minus adjungatur, prout in modernis typis accuratioribus fieri conſuevit. Ideoque melius *exſcribo*, *exſurgo*, *exſiſto*, *exſto*, *exſulto*, *&c.* per *ſ* ſcribuntur, quam *excribo*, *exurgo*, *&c.* ſine *ſ*. Quamvis enim *ſ* in *x* includatur; nihil tamen abſurdi ſequitur ſi geminum *ſ* adeſſe dixero; alterum nempe præpoſitionis *ex*, alterum vocis ſequentis: Sed & eadem de cauſa *aſſto*, *aſſcribo*, *aſſcendo*, *aſſtipulor*, *&c.* per geminum *ſ*, ſcribenda ſunt, (alterum nempe loco abſentis *d*, alterum vocis ſequentis,) non minus quam *aſſumo*, *aſſurgo*, *aſſimilo*, *&c.* quæ ab omnibus per geminum *ſ* ſcribi ſolent. Niſi malit quis utrobique literam *d* retinere, *adſto*, *adſumo*, *&c.* Sic & *exſul*, *exſilium*, per *ſ* ſcribenda ſunt, quæ ejuſdem ſunt originis ac *præſul*, *conſul*, *conſilium*, ejuſdem (credo) cum *exſulto*, *exſilio*, à voce *ſalio*. Sic & *exſemplum* à voce *ſimilis*; dicimus enim Anglice tam *enſample* quam *exſample* & *ſamplar*, unde liquet literam *ſ* radicalem eſſe, & non tantum ad præpoſitionem *ex* pertinere: *p* vero Epenthetice inſeritur, ut in vocibus *exemptus*, *redemptus*,

RESTRICTED BY CAMBRIDGE

redemptus, contemptus, &c. & β *in* Græcis μέμβλεται, μέμβλωκα, pro μεμέλεται, μεμόλικα, ſic & μεσήμβεμον *meridies*, quaſi μεσήμριον, contracte pro μεσημέριον, ut & in Anglicis (vel etiam Gallicis) *Aſſemble, diſſemble, reſemble, ſemblance*, à Latinis *ſimul, ſimulor, ſimilis*, ſic ab *humilis, tremulus*, fiunt *humble, tremble*; ſic *chamber, tender, cinder*, à Gallicis *chambre, tendre, cendre*, cum tamen Latine dicamus *cameram, tenerum, cinerem*; ſic à *Cimmerius* fit *Cimbricus*; ſic ab ἀνέρος, per Syncopen ἀνερ, Euphonice ἀνδρός. Nam revera literæ *m* & *n* cum ſequentibus aliquot conſonis (præſertim *l* & *r*,) vix cohærent niſi poſt illam interveniat *b* vel *p*, poſt hanc *d* aut *t*. Sed hæc obiter.

I. Reſtat alia I, cujus rationem reddituri ſumus. Ea nempe, ut Græci, ſic Romani Unitatem indicant; atque hoc faciunt Romani vel quod Græci ſic prius fecerint; vel, quia litera hæc minima quidem eſt & ſimpliciſſima, ut & ſupra de Græcorum I diximus.

Vel denique, fieri poteſt, ut pro *Unitate* ſimplici, ſive primi loci, poſuerint lineolam ſimplicem I: pro unitate ſecundi loci, hoc eſt *Decade*, duas tranſverſas, ſeu literam X, (hujuſque ſemiſſem V pro numero quinario;) pro unitate tertii loci, hoc eſt, *Centuria*, tres conjunctas, ſeu literam ↂ, (hujuſque ſemiſſem L, pro quinquaginta:) & denique, pro unitate quarti loci, ſeu *Mille*, quatuor conjunctas lineas, nempe literam M vel ↀ, hujuſque ſemiſſem D pro quingentis. Et quidem (ut ſupra dictum eſt) Sinenſes hodierni (credo & antiquiores) Monadem per Lineolam ſimplicem, |; Decadem per duas decuſſatas, +, deſignant: item Duo, per ||; Viginti, per ++; & in aliis pariter.

Atque hactenus de Numerorum Notatione per literas Alphabeticas dictum eſt: ſupereſt, ut eorundem notationem per *Ziphras* (ut vocantur) *Saracenicas*, explicemus.

CAP. IX.

Numerorum Notatio per Ziphras Saracenicas, ſive Vulgares Figuras Numerales. Ciphra quid; ejuſque variæ ſignificationes. Occulte ſcribendi modi. Siglæ & Notæ, quomodo differant apud Romanos. Notæ Arithmeticæ à quibus inventæ.

PRæter eos quos ſuperius tradidimus Numeros deſcribendi modos, per Alphabeti Literas; alius adhuc maximi momenti ſupereſt tradendus: Adhibitis nempe vulgaribus figuris Numeralibus, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. quas *Ziphras Saracenicas* nonnulli dicunt; de quibus nunc agendum eſt.

Ciphra quid? Unde dicitur?

Vox *Ziphra* (vel *zifera*, vel *ſiphra*, vel *ciphra*, variis enim modis ſcribitur) eſt plane Arabica. Sed non uno ſemper eodemque ſenſu uſurpatur. Deſcendere videtur vel ab Hebræorum ספר *ſaphar*, (uti Schindlero placet, in ipſius Dictionario Pentaglotto,) quod & *numerare* ſignificat & *deſcribere* ſive *notare*: Et quidem ſi à priori ſignificatu deſcendere putetur, ſignificaret proprie *notas numerarias*, quo ſenſu novem illas figuras numerarias *Siphras Saracenicas* appellamus; ſi autem à poſteriori, quaſlibet etiam alias *Notas* vel *Characteres* rei alicujus aut vocis, vel etiam literæ indices, quo ſenſu *furtivas literarum notas*, ad occulte ſcribendum inventas, *Ziferas* appellat Baptiſta Porta, ut & alii. Vel, ſi ea derivatio minus placeat, deduci poteſt (&, credo, rectius) ab Arabico צפר *Zaphara*, quod *vacuum eſſe* vel *inane* ſignificat, uti docet D. Golius in Lexico ſuo Arabico: adeoque de *nihili* ſive *nullitatis* nota præcipue intelligenda erit.

Vox illa ab Arabibus ad nos delata, pro certa cujuſdam Numeri *Nota*, ſeu charactere certi alicujus Numeri indice, paſſim occurrit; quo ſenſu decem illæ, nunc vulgo receptæ, figuræ Arithmeticæ vocantur *Ziphræ*, ſeu *Ciphræ*, aut *Siphræ*. Nonnunquam tamen, & quidem frequentius, non de illis omnibus, ſed de illarum unica, vox illa dicitur; Nempe de Circello, *Nullitatis* ſeu *Nullius* nota:

(unde & metaphorice, de re seu persona inutili, παροιμιώδως dicitur, *instar ciphræ*, tanquam *nullius numeri*:) Atque hoc quidem sensu sæpius & apud alios, & apud nos infra occurrit.

Occulte scribendi ratio.

Nonnunquam autem vox illa latius patet, ut non tantum decem illas, quæ in Arithmetica usurpantur, sed simpliciter quaslibet vel literarum vel etiam vocum aut rerum Notas, vel brevitatis vel etiam occultationis causa adhibitas. Atque hoc sensu *Johannes Baptista Porta*, Neapolitanus, librum *De Zipheris, sive furtivis literarum Notis*, conscripsit: Trithemius item *de Steganographia* libellum conscripsit, abstrusum satis; quem inter alios, explicandum suscepit *Gustavus Silenus*; (hoc est, explicatius, *Augustus Luniburgensis*: quippe *Gustavus* ἀναγραμματικῶς est *Augustus*; & *Selene* Lunam designant Græci; indeque *Silenus*, Luniburgensem Ducem.) Item Blasius Vigenerius (Gallice) & alii de ejusmodi Zipheris libros ediderunt. Sed & novæ indies methodi per *Zipheras* scribendi excogitantur, & in rebus majoris momenti, ab iis præsertim qui Principibus sunt à secretis, usui aptantur: saltem quoties aliquid occulte scribendum est, quod nollet scriptor etiam intuentibus innotescere. Hinc voces illæ *Ciphrandi* & *Deciphrandi* ortum habent; est enim *Ciphrare*, aliquid ciphris committere, seu occulte scribere; *Dicephrare* vero est ciphras explicare vel quid sub ciphris occultetur interpretari.

Atque hæc quidem occulte scribendi ratio flagrante nuper apud nos Bello Intestino admodum erat familiaris; adeo ut vix quisquam esset alicujus notæ vir, qui non, in rebus majoris momenti communicandis, hujusmodi ciphras adhibere solebat, scriptasque ad suos epistolas hujusmodi involucris obtegere; ut, si in hostium manus pervenirent, non intelligerentur.

Et hujusmodi quidem scripta non pauca, in itinere intercepta, nobis explicanda tradebantur; diversis quidem occultandi methodis involuta, adeoque alia aliis explicatu difficiliora; & quidem nonnulla tam insuperabili difficultate obvoluta videbantur, ut fere de illorum explicatione desperaverim, nec nisi post diuturnam inquisitionem incredibili labore tandem superaverim. Quorum non pauca specimina in publica Bibliotheca Bodleiana Oxoniæ conservanda tradidi, ubi & conspicienda manent.

Duplex erat hujusmodi apud Romanos scribendi ratio; quarum vestigia saltem ad nos pervenerunt: Altera per *Notas* (ut loquuntur) altera per *Siglas*: Quarum utraque partim expeditionis, partim occultationis causa erat adhibita.

Romanorum Siglæ.

Per *Siglas* scribere dicebantur, cum singulis fere literis totidem voces designabant. Sic Romanorum Nomina & Prænomina non raro pingebantur. Sic *M. T. Cicero*, pro *Marco Tullio Cicerone*, ponitur. Ita per C, *Caium*; per D, *Decium*; per P, *Publium*; per Q, *Quintum*; per Cn, *Cneum*; per A, *Aulum*, intelligebant: (unde lis illa, inter Criticos, de illius nomine qui *Noctes Atticas* scripsit; quem alii *Agellium*, alii *Aulum Gellium*, dicendum putant:) sic S. P. Q. R. *Senatum Populumque Romanum* significabat: (quod Beda noster Romæ agens, uti refert Erasmus, sciscitanti hospiti cuidam, qui saxis inscriptum crebrius offendisset, quid vellet; Respondit, *Stultus Populus Quærit Romam.*) S. P. D. *Salutem plurimam dicit*: A. U. C. *Anno urbis conditæ*: M. S. *Memoriæ sacrum*, aliaque multa.

His sunt consimiles Hebræorum Abbreviaturæ, quas *Rashe Teboth* dicunt: dum nonnunquam vocabula initialibus tantum literis designant. Sic: אשר לברכה זכרו "ארן *cujus memoria benedictioni*, seu *benedicta sit*: quam formulam adjicere solent quum Rabbinos quosdam mortuos nominant; prout nos *Beatæ Memoriæ*. Aliaque hujusmodi innumera videnda sunt apud Buxtorfium in libro quem scripsit *De Hebræorum Abbreviaturis*. Sic & Rabbinorum Nomina vulgo scribunt: ut

רמבם (Rambam) *Rabbi Moshe ben Majemon*, seu *Maimonides*.
רמבן (Ramban) *Rabbi Moses ben Nachman*, seu *Nachmanides*.
רדק (Radak) *Rabbi David Kimchi*.
רשי (Rashi) *R. Solomon Jarchi*.
רלבג (Ralbag) *R. Levi B. Gershom*. &c.

Siglarum mentio est apud Justinian. *in Pandect.* σημείοις, ἤτοι σίγλαις χαλῶσι. Et σημείων ejusmodi meminit etiam *Plut. in Cat. min.* *Siglas* vero dicebant Romani quasi *singulas*, quia singulis literis totidem voces significabant; vel etiam quasi *sigilla*, idque vel propter secretum scribendi modum, vel potius quod sint *signula* seu parva *signa*; hæc enim est prima ac propria sigilli notio unde & *sigillaria*. Quod autem litera *n* excidat in *sigla*, quæ habetur in *singula*, vel *signula*, illud parum

parum est; præsertim cum sit literæ *g* proxima: Dicimus enim *singuli*, *sigillatim*; *Lingua*, *ligula*; *signum*, *sigillum*, (unde Anglicum *Seal*, sicut à *Regula*, *Rule*,) sic *Tignum*, *tigillum*, quæ forsan à *tango*, quia res contiguas copulat; vel, ut Scaligero placet, *Tignum* à *tegendo*, ut *lignum* à *legendo*, nam tignis & tegulis tectum constat. Sic à *jungo*, (Anglice *joyn*) fit *jugum*, Anglice *a Yoke*; (Græce ζεύγω, ζευγνύω, ζεῦγος,) unde forsan *jugulum*, non modo quia Jugum (cervicem pariter ac) jugulum cingit, sed potius quia humerus uterque ad jugulum coeunt & conjunguntur; qua ratione etiam juguli ossa κλεῖδες & κλεῖδες Græce, Latine *Claviculæ*, appellantur, quia utrumque humerum connectunt; sub his autem claviculis est celeberrima illa Arteriæ magnæ, cor ipsum nuperrime egressæ, distributio, unde à communi trunco quasi per varios ramos sanguis arteriosus in varias corporis partes derivatur: Hic & venæ minores à plerisque corporis partibus in communem venæ cavæ truncum conjunguntur. Hinc est quod sæpissime Homerus, lethaliter vulneratos, *sub claviculis transfixos* dicit: est autem illi *sub claviculis figere* perinde ac Latinis *jugulare*, hoc est, jugulum ferire, jugulum resolvere; quod ideo pro lethali vulnere ponitur, non modo propter violatam Trachæam sive Asperam arteriam, sed potissimum quia eadem opera tam Aortæ sive Arteriæ Magnæ quam Venæ cavæ truncus facile dissecantur; adeoque brevissimo compendio (quod & laniis notum est) universum corpus tam venoso quam arterioso sanguine citissime evacuatur. Sed hæc obiter de *jungo* & *jugo*, ubi excidit *n* non minus quam cum à *singulis*, *siglas* dicimus. Sed & à *jungo conjugem* & *conjugium*; & à *jugo*, *jugales*, sic enim boum paria dicimus qui sunt sub eodem jugo conjuncti seu conjugati. Sic à πηγνύω vel πήγνυμι tam *figo* dicitur, quam *pango pegi* (quod significat *jungo*) atque hinc *compingo*, *compactus*, *compages*, &c. Sed de Siglis hactenus.

Romanorum Notæ.

Præter Siglas vero, etiam *Notas* habuerunt Romani; quarum hæc est differentia; *Siglæ* sunt abbreviaturæ per ipsas Alphabeti literas factæ; *Notæ* vero, abbreviaturæ per characteres aliunde sumptos. Hinc *Notarii* apud Romanos dicti, qui brevibus *notis* aliorum sermones exceptos scribebant, ut apud nos Stenographi. Hujusmodi Notæ apud veteres satis erant frequentes: & exstat adhuc libellus *de Notis Senecæ*, *& Tironis liberti Ciceronis*; inter quas tamen nonnullas serius adjectas esse res ipsa loquitur, nec quisquam qui ipsas perpendit dubitare poterit.

Cum igitur pro Numeris ponuntur literæ Alphabeticæ, ut M pro *Mille*, C pro *Centum* &c. est hæc scriptio per *Siglas*: cum vero alii characteres ponuntur, quales sunt ciphræ Saracenicæ, est scriptio per *Notas*; prout *notæ* à *siglis* distingui solebant. Quas vero olim *notas* dicebant, nunc dierum potius *Ziphræ* seu *Ciphræ* dicuntur; quæ vel ad expeditionem vel ad occultationem scriptorum adhibentur.

Ziphræ Saracenicæ.

Atque hactenus de *Ziphrarum* nomine diximus: *Saracenicas* vero vel *Arabicas* dicimus; quia ab Arabibus ad nos devenerunt, ante annos plus minus quadringentos huc adductæ (ut *Vossius*) aut etiam Sexcentos. An autem Arabes, seu Saraceni, has ipsi invenerint, an ab antiquis Phœnicibus (quod non videtur probabile, cum Arabes doctrinam suam ut plurimum à Græcis hauserint, non à Phœnicibus traditam continuaverint) aut potius ab Indis (quod dicendum videtur) aut quibusvis aliis acceperint, ab illis potius quam à nobis determinabitur. Cum autem nos illas ab Arabibus, vel Mauris, accepisse sit extra dubium, unde illas habuerint Arabes ex eorum potissimum scriptis inquirendum est. Cumque illi earum inventionem Indis tribuant, non est cur nos ea de re dubitemus. Eorum autem doctissimus Scholiastes *Alsépadi* (uti à Cl. *Pocockio* nostro, istarum linguarum cognitione nulli secundo, accepi) in commentariis suis ad elegantissimi Poetæ *Tograi* poema *Lamiato'l Ajam* dictum, notat *Indos de tribus suis inventis gloriari*, *ludo Scacchii*, *Figuris numericis*, *& libro* Golaila Wadamna *dicto*, (qui liber in Arabicam, Græcam, & alias linguas conversus, Fabulis Æsopicis, ad istius imitationem factis, ansam dedit:) nec ipse interim huic Indorum gloriæ quicquam derogatum it. Atque huic congruit illud quod testatur *Maximus Planudes* in suæ Arithmetices initio (prout in duobus Codd. MSS. exstat in Bibliotheca Bodleiana) cui Titulus Μαξίμου τοῦ Πλανούδη λογιστικὴ Ἰνδικὴ, (vel Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς) ἣν λέγουσιν μεγάλην: Quem librum ab his verbis orditur, Οἱ μὲν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι, ἐπεὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦ (ὃ) ἀπείρου γνῶσις οὐκ ἔστιν, ἐρεῦσιν σήμασί τινα καὶ μέθοδον δὲ αὐτῶν, ὡς ἂν τὰ πρὸς ἐν χρήσει ἀριθμῶσι εὐσυνοπτότερον κατανοῆται καὶ ἀκριβέστερον. εἰσὶ δὲ σήμασι ἐννέα μόνα, ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα ι μ ϻ ϑ ϥ ν λ q. Τιθέσι δὲ ἕτερόν τι σῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ'

Ἰνδὲς σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα ὧν σήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ὄζιν. ἡ δὲ τζίφρα γράφεται ὅπως ο. τούτων οὖν ἐννέα σημάτων ἕκαστον κατ' αὐτὸν μόνον κείμενον, εἴτ' ἐν τῷ πρώτῳ χώραν ἀπὸ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἡμῖν ἀριθμῶν, τὸ μὲν ι σημαίνει ἕν· τόδε μ δύο· τόδε μι τρία· τόδε δ τέτταρα· τόδε ε πέντε· τόδε ϛ ἓξ· τόδε ν ἑπτά· τόδε λ ὀκτώ· τόδε θ ἐννέα. κατ' ὂν τῷ δευτέραν χώραν τὸ μὲν ι δέκα, τὸ μ εἴκοσι, τὸ δ μι τριάκοντα, καὶ ἑξῆς. Ubi hæc duo confirmat Planudes, nempe figuras illas ab Indis originem habuiſſe, atque etiam *Ziphram* apud Indos (fortaſſe rectius dixiſſet Arabes) ſignificare οὐδέν, ſeu *nihil*; adeoque à צפר *zaphara* potius quam ספר *ſaphar* deductam; quod & confirmat ipſius ſcriptura, ſi enim à כפר deſcendiſſet σίφρα potius quam τζίφρα ſcriberetur. Nos autem eas ab Arabibus accepiſſe, præter communem omnium conſenſum, ulterius adhuc teſtatur, conſenſus ille qui inter Arabum characteres quibus hodie utuntur, (quique ab illis Planudis non multum abſunt,) cum iis qui numeris deſignandis apud nos inſerviunt. Levis enim eſt in pleriſque characteribus diſcrepantia, niſi quod qui apud Arabes ſive proni ſive ſupini jacent, apud nos eriguntur: ut ex appoſita comparatione videre eſt.

o ٩

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Notat autem Erpenius (apud quem hi Characteres exſtant) o circellum ab eorum aliquibus pro nullitatis nota haberi (ut apud nos) qui igitur diſtinctam habent quinarii notam; apud alios vero circellum illum quinarii numeri indicem, qui interim puncto craſſiuſculo nullitatem deſignant. Quod & Arabum libri Manuſcripti teſtantur. Et quidem in MSS. tam Græcis quam Latinis (paulo vetuſtioribus) figuræ numerariæ minus adhuc ad Arabum figuris differunt, quam quibus hodie utimur. Quî autem ab Arabum figuris ſenſim deflexerint, donec ad eas quibns jam utimur figuras pervenerint, qui Codices Manuſcriptos Græcos Latinoſque ſuccedentibus ſeculis exaratos pervolverit, facile perſpiciet, quod nos præ characterum inopia typis exprimere haud valemus.

Atque hactenus de ipſis Ciphris ſeu figuris Arithmeticis: ſequitur ut ipſarum uſum oſtendam.

CAP. X.

Figurarum Numeralium Valores; primarius & ſecundarius. Locus. Periodus. Ciphræ uſus. Fractiones Decimales. Gradus Aſcendentes & Deſcendentes, in proportione decupla.

SUnt illæ (quas diximus) figuræ Arithmeticæ vulgares, omnino decem: quarum valores jam explicandi veniunt. Prima o *Nullum* valet, ſive Numeri negationem, & vulgo *ciphra* dicitur: Reliquæ novem totidem numeros ſignificant (& *figuræ ſignificativæ* dici ſolent:) nempe 1 *Unum*. 2 *Duo*. 3 *Tria*. 4 *Quatuor*. 5 *Quinque*. 6 *Sex*. 7 *Septem*. 8 *Octo*. 9 *Novem*. Suntque hi illarum *valores Primarii*, quos nempe per ſe ſignificant. Habent enim & valores *Secundarios*, quos non per ſe, ſed ratione ſedis ſeu loci ubi reperiuntur, induunt: Sicut enim aliud eſt *duos boves* dicere, aliud *duos homines*; ita & aliud eſt *duas unitates* dicere, aliud *duas decades*, ſive *duas centurias*; nam quamvis in his omnibus *numerus numerans* idem ſit, (nempe *binarius*,) non tamen idem *numerus numeratus*. Hic autem characterum valor ſecundarius ſubinde mutatur, pro ratione *Sedis* ſeu *Loci* ubi reperiuntur. *Figurarum valor primarius.*

Cum igitur horum characterum plures in continua ſerie collocantur; locus ille qui ad dextram eſt, *primus* dicitur; qui illi proximus eſt ſiniſtram verſus, *ſecundus* dicitur; & ſic deinceps reliqui quotquot ſunt loci numerandi ſunt. Ut poſitis his figuris 1654, eſt 4 in loco primo, 5 in loco ſecundo, 6 in tertio, & 1 in quarto. Ubi obiter notandum *Figurarum Sedes, ſeu locus, quid.*

notandum eſt me locum dextrum (in charta vel abaco) illum dicere, qui legentis dextræ opponitur, & eadem ratione ſiniſtrum qui ſiniſtræ: quod ideo facio, quoniam vulgatus loquendi uſus apud pleroſque ſcriptores hic eſſe ſolet, neque ſoleo quidem à recepto loquendi more niſi coactus diſcedere, ne, dum accuratius loqui velim, minus intelligar. Non ignoro tamen, quod ſi accuratius loqui velimus, ea pars chartæ ſeu libri dextra dicenda eſſet, quæ inſpicientis ſiniſtræ opponitur, ſiniſtra vero quæ dextræ; ſupponitur enim liber inſpectus oppoſita facie nos intueri, non terga dare: Atque hinc eſt, quod Feciales, dum Gentilitia Scuta, quibus familiarum Inſignia inſcribuntur, exponunt, eam ſemper Scuti partem Dextram appellant, quæ inſpicientis ſiniſtræ opponitur; quia nempe inſpiciens rem inſpectam adverſa fronte ſupponitur intueri. Verum cum apud alios alius ut plurimum mos loquendi obtinuerit, cum vulgo loquendum eſſe duxi; adeoque (ut alii, ſic ego) eam inſpectæ chartæ dextram appello partem, quæ inſpicientis dextræ objicitur; ideoque figuram loco primo poſitam, ad dextram poni dico; quæ vero in ſecundo loco, illam dico quæ proxima adeſt ſiniſtram verſus; & ſic deinceps.

Figurarum valor ſecundarius. In primo quæ occurrit loco figura, tot Unitates numerat quot ipſius valor indicat: quæ in ſecundo, tot Decades: quæ in tertio, tot Centurias: quæ in quarto, tot Millia; quæ in quinto, tot Decades Millium: in ſexto, tot millium Centurias: in in ſeptimo, toties millena millia, ſeu tot Milliones, (prout nunc apud nos dici ſolet:) octavo, tot millionum Decades: in nono, tot Millionum Centurias: in decimo, tot Millionum Millia, ſeu millies millena millia: & ſic deinceps, pro ſingulis locis, continua proportione decupla valorem ſemper augendo: prout ipſam numerorum diſpoſitionem ſive ordinationem, in decupla proportione procedere, ſupra dictum eſt. Et hac ratione numerus his characteribus exhibitus 1656, eſt *Mille ſexcenta quinquaginta & ſex*, ſeu *unum Mille, ſex Centuriæ, quinque Decades, & ſex inſuper Unitates.* Atque hunc figurarum valorem *ſecundarium* appello; quia nempe ex ſede ſeu loco ubi reperitur conſurgit.

Periodus quid. Sed & ipſa etiam Loca, quo melius intelligantur, præſertim ubi plura occurrunt, in *Periodos* diſtingui ſolent: Ita nempe ut tria priora loca minima primam periodum conſtituant; tria proxima, ſecundam; & ſic deinceps, ſingulis periodis tria loca aſſignando. Has autem periodos, (ubi ſaltem plures occurrunt, ut in grandioribus numeris,) plerique vel punctulis ſuprapoſitis, vel alia ad libitum diſtinctione, diſtinguere ſolent, quo promptius numerus proferatur.

Periodus autem prima *Unitates* denotat; ſecunda denotat *Millia*; tertia vero *Millena millia*; & ſic deinceps. Ut enim locus locum ſuperat proportione decupla, ſic Periodus Periodum proportione Millecupla. Erit igitur numerus iſte

246801357 9, ſic efferendus; *bis mille & quadringenta ſexaginta octo Milliones,* (ſeu *Millena millia*) *tredecim Millia, quingenta ſeptuaginta novem.* Et eodem prorſus modo de Numeris aliis omnibus judicandum eſt; tam ubi numerus datus, eſt ſuis characteribus deſcribendus; quam ubi characteres propoſiti, ſunt ſuis nominibus explicandi: Eadem enim utrobique eſt ratio.

Ciphra, ſeu Nullitatis nota. Ubi notandum eſt, quod circellus ille o, (*Ciphra* vulgo dicta, quam eſſe *nullitatis* notam ſupra diximus,) quamvis per ſe nihil ſignificet ubicunque ponatur, (perinde enim eſt ſive nullas Unitates, ſive nullas Decadas, ſive nullas Centurias, nullave Millia dicamus; nihil enim utcunque ponimus:) Non redundat tamen aut nulli inſervit uſui, ſed neceſſario adhibetur ut locum ſaltem ſua præſentia compleat; unde figuræ omnes in locis ſuperioribus poſitæ juſtum ſuum valorem obtineant. Verbi gratia; ſi, in numero proxime appoſito, 246801357 9, deeſſet circellus ſexto (à dextra) loco poſitus, adjuncta figura 8 numeri octonarii, non ſeptimo, ſed ſexto eſſet loco; adeoque non octies millena millia, ſed ſolum octingenta millia, ſignificaret; atque idem de reliquis judicandum eſſet; nempe figura 6 non octavo (ut nunc) ſed ſeptimo eſſet loco, & 4 octavo, 2 nono; adeoque earum valores decuplo minores eſſent. Sic 1 *Unum* ſignificat, (quia primo loco;) 10 *Unam decadem*, (quia 1 eſt loco ſecundo, & quamvis adjuncta ciphra o per ſe nihil ſignificet, hoc tamen præſtat ut figura 1 ſit jam loco ſecundo, quæ ſecus eſſet primo:) 100 *Unam Centuriam*, &c. Si vero locis ſupremis ponantur ciphræ, nulli prorſus ſunt uſui, nullius ſaltem neceſſitatis, ſed redundant prorſus; tantundem enim ſignificant 0001, 001, 01, & 1. Fieri quidem nonnunquam poteſt ut Elegantiæ

gantiæ gratia, vel quo numcrorum ſupputandorum collatio commodior fiat, ſiquando ſummæ variæ ſint in unam contrahendæ (ut in exemplo appoſito,)

libræ.	ſolidi.	denarii.
13	12	10
24	08	06
05	04	01

aut alia aliqua leviori cauſa accidentali, ejuſmodi redundantes ciphræ ſcribantur; ſed tantundem ſignificant acſi prorſus abeſſent. Atque hinc eſt, quod, licet in hac numerorum notatione, per notas has numerales, hujuſce circelli ſive ciphræ uſus ſit neceſſarius, quia valores notarum pro ratione loci ubi reperiuntur augeri poſſunt aut minui: Ubi tamen per Literas Alphabeticas numeri ſcribuntur, quarum valor conſtans eſt & immutabilis, (prout apud Latinos, Græcos, Hebræos, alioſque antiquitus fieri diximus,) hujuſmodi notæ nullus omnino eſt uſus, unde & nullam excogitarunt: Nam, verbi gratia, M D, *Mille & quingenta* ſignificant, ſive alii ſequantur numeri, ſive non.

Atque hactenus harum Figurarum Numeralium ordinariam ſeu vulgarem Notationem, ſeu (ut loquuntur alii) Numerationem explicavi, prout nempe uſu frequentiori ſolent occurrere: ita nempe ut Locus ad dextram ultimus, vel (ſi libet) primus, qui & omnium infimus eſt, ſemper habeatur pro unitatum Loco.

Recentiores vero, qui de *Fractionibus Decimalibus* agunt, (ultra quam Priores ſolebant Arithmetici,) non modo quotlibet ſupra Unitatum locum aſcendentia ſiniſtrorſum ſupponunt Loca; ſed & etiam infra Unitatum locum loca quotlibet Deſcendentia dextrorſum imaginantur, quibus *Fractiones* (ut loquuntur) *Decimales* ſcribantur. *Fractiones Decimales.*

Ut hoc autem melius percipiatur; ſciendum eſt quemlibet locum ad ſiniſtram progrediendo antecedentis ad dextram decuplum valere, ut ſupra declaratum eſt; contra vero, quemlibet dextrorſum procedendo valere antecedentis ſubdecuplum. Quoniam nempe decem Unitates conſtituunt unam Decadem, & decem Decades unam Centuriam, decem vero Centuriæ unum Mille, &c. (ſiniſtrorſum procedendo:) igitur vice verſa (dextrorſum procedendo) unum Mille continet decem Centurias, & una Centuria decem Decadas, una vero Decas decem Unitates: Atque hic vulgo ſiſtitur neque ulterius dextrorſum proceditur, quoniam Unitatum locus ſupponitur infimus ſive ad dextram ultimus. Si vero libeat plures adhuc dextrorſum locos aſſignare infra Unitatum locum cenſendos: eodem quo prius modo procedendum erit, nempe Quælibet Unitas continebit decem ejuſmodi partes ſeu quantitates (proximo dextrorſum loco numerandas) quarum decem conſtituant Unitatem, hoc eſt, quælibet Unitas continebit decem partes decimas; &, eadem ratione, quælibet pars decima continebit decem partes centeſimas; & quælibet centeſima decem milleſimas; & ſic deinceps: Ideoque quælibet figura loco infra unitates primo poſita deſignabit tot partes decimas; quælibet ſecundo totidem centeſimas; & quælibet tertio infra unitates loco, tot partes milleſimas deſignabit; & ſic deinceps quouſque libet.

Exemplum eſto hic numerus 3579|753; (ubi præter integrorum numerum 3579, adjunguntur partes decimales |753.) Figura 9, unitatum loco poſita, ſimpliciter *novem* (ſeu *novem Unitates*) deſignat: figura 7, quæ ad ſiniſtram eſt, *Septuaginta* (hoc eſt, *ſeptem decades*,) deſignat; at quæ ad dextram ſeptem δεκατημόρια (ſeu, *partes decimas*) innuit: Item 5 ad ſiniſtram *quingenta* (ſeu *quinque centurias*) ſignificat; at 5 ad dextram *quinque partes centeſimas* (quinque ἑκατοστημόρια) ſignificat: ſic & 3 ad ſiniſtram, *tria millia* denotat; ad 3 ad dextram, *tria* χιλιαστημόρια; ſeu *tres partes milleſimas*. Adeoque totus ille numerus 3579|753 denotat *ter mille quingenta ſeptuaginta & novem* integra, & inſuper (7 partes decimas, 5 centeſimas, & 3 milleſimas, ſeu) 753 *partes milleſimas*: (nam 50 *partes milleſimæ* tantundem valent ac 5 *partes centeſimæ*; & 700 *partes milleſimæ* tantundem ac 7 *partes decimæ*; adeoque conjunctim 753 *partes milleſimæ*, tantundem ac 7 *decimæ*, 5 *centeſimæ*, & 3 *milleſimæ*.) Figuræ autem illæ |753 poſt unitatum locum appoſitæ, (quæ *partes* ſeu *Fractiones Decimales* exprimunt) ſunt ab integris, interpoſito punctulo vel *ſeparatrice linea*, diſterminandæ; ut innoteſcat Unitatum locus, & conſequenter reliqui tam ſupra quam infra locum Unitatum, unde tam ſingularum notarum quam totius Numeri valor æſtimandus eſt.

Gradus Aſcendentes & Deſcendentes.

His ita explicatis ; mihi quidem omnino commodum videtur, ſingula numerorum loca ſic diſtinguere, ut, poſito Unitatum loco indifferenter ſive ad aſcenſum ſive ad deſcenſum, (ut qui eſt quaſi utriuſque communis terminus) loci reliqui (prout gradatim vel augentur vel diminuuntur) *Gradus* dicantur vel *Aſcendentes* vel *Deſcendentes*. Ita, in numero propoſito 357|9|753, præter figuram 9 unitatum loco collocatam, accedunt gradus *Aſcendentes* (primus, ſecundus, tertius) ſiniſtrorſum computando, & totidem *Deſcendentes* Dextrorſum. Adeoque ſi graduum Aſcendentium indices ponantur 1, 2, 3, &c. erunt è contra deſcendentium indices —1, —2, —3, &c. vel $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, &c. Atque hoc ſignificatu graduum Aſcendentium & Deſcendentium deinceps facturus ſum mentionem.

3. 2. 1. 0. $\bar{1}$. $\bar{2}$. $\bar{3}$.
3 5 7|9|7 5 3

Atque hæc de Figuris Arithmeticis, juxta continuam proportionem decuplam dixiſſe ſufficiat.

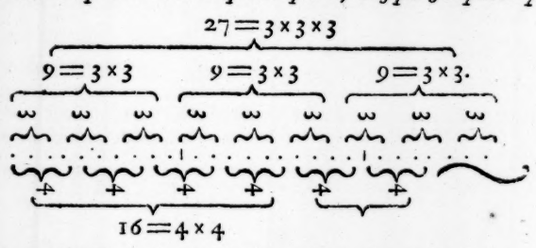
CAP. XI.

Gradus Aſcendentes & Deſcendentes in quacunque proportione. Algebræ fundamentum. Poteſtates Algebricæ cum Geometricis dimenſionibus comparantur. Earum appellationes & characteres. Poteſtates illæ per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas dimenſiones, aptius explicantur. Algebrica notatio ulterius traditur. Algebræ veterum & Recentiorum differentia. Utriuſque uſus exemplo oſtenditur.

Graduum Aſcendentium & Deſcendentium conſideratio eadem eſt in alia qualibet proportione, quæ in Decupla.

NUmeros vulgo in proportione decupla ubique gentium diſpoſitos, eſſe, ſuperius diximus ; atque huic diſtributioni aptatas eſſe vulgares notas ſive figuras Arithmeticas, earumque locos ſeu gradus tam aſcendentes quam deſcendentes. Sed & monuimus, quamvis aliam proportionem in diſponendis Numeris aſſumi potuiſſe, aut etiamnum (ubi opus eſt) poſſe. At quæcunque demum adhibeatur proportio, modo ea continua ſit, eadem omnino erit Graduum tam Aſcendentium quam Deſcendentium conſideratio atque in proportione Decupla.

Exempli gratia. Si exponantur Unitates *vigintiſeptem* : conſtituunt illæ (ut patet) in proportione decupla, *duas Decades cum ſeptem reſiduis Unitatibus* ; ideoque in gradu primo aſcendente (qui decadum locus eſt) ponenda eſt figura 2 (propter *duas* decades,) & (ob reſiduas *ſeptem Unitates*) in unitatum loco figura 7 : ut 27 exprimant *viginti ſeptem*, ſive *duas Decades cum ſeptem inſuper Unitatibus*. Si vero eadem unitatum multitudo in proportione quadrupla diſponatur ; emerget *Quaternionum quaternio* unus, & Duo inſuper ſimplices *Quaterniones*, cum Tribus reſiduis *Unitatibus* : ponenda igitur (quoad hanc proportionem) in gradu ſecundo aſcendente figura 1, (qua quaternionum quaternio *unus* deſignetur ;) & in gradu aſcendente primo nota 2, (propter *duos* quaterniones ſimplices :) & denique (propter *tres* reſiduas unitates) in unitatum loco figura 3 : adeoque 1, 2, 3, exhibebunt *unum quaternionem quadruplum, duoſque ſimplices quaterniones, cum*



tribus inſuper unitatibus, ſeu quod tantundem eſt, *viginti ſeptem*. Si denique proportione tripla diſponantur : emerget præciſe *ternionum triplicatorum ternio* unus :

unus: ponenda igitur est, loco tertio ascendente, figura 1; & in reliquis ciphra seu 0, quia nullus supereſt innuendus vel ternionum ternio, vel ternio simplex, vel etiam unitas, horum igitur loci ciphris erunt supplendi; ut tandem 1, 0, 0, 0. (juxta continuam proportionem triplam) exhibeat præcise *unum ternionum triplicatorum ternionem*, quod tantundem est atque *viginti septem*. Et pari modo de alia quavis proportione dicendum esset. Hoc est,

In proportione { decupla, 2,7 / quadrupla, 1,2,3 / tripla, 1,0,0,0 } tantundem valent.

Pariter dicendum est de gradibus Descendentibus. Nam in proportione quadrupla, erit gradus descendens primus, *Quadrantum* locus; secundus vero, *quadrantum quadrantes* continebit, &c. In proportione tripla, erit gradus descendens primus, *trientum* locus; secundus vero, *trientum trientes* continebit; tertius, *trientum trientes trisectos*; Et sic deinceps in infinitum descendendo, sicut ex alia parte in infinitum proceditur ascendendo. Hujusce rei exemplum satis insigne passim occurrit in fractionibus (ut loquuntur) Astronomicis; ubi Integra intelliguntur dividi in partes sexagesimas & sexagesimarum sexagesimas &c. hoc est, *minuta prima, secunda, tertia*, &c. ad dextram descendendo; & contra ad sinistram ascendendo colliguntur in Aggregata Sexagecupla, & Sexagecuplorum Sexagecupla, &c. quæ vocantur *Sexagena prima, secunda, tertia, &c.* hoc modo.

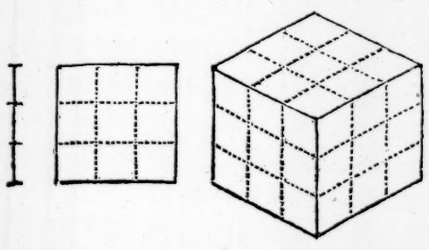
'''' ''' '' ' ° ' '' ''' ''''
49, 36, 25, 15, 1. 15, 25, 36, 49. ubi quilibet locus valet Sexagecuplum loci sibi ad dextram proximi, & contra sexagesimam partem illius qui sibi proximus est ad sinistram. Quod autem vulgo fit in ratione Decupla, & in fractionibus Astronomicis in Sexagecupla, potest & in alia quavis ratione fieri.

His ita explicatis; monendum duco, Uuiversam Artem *Algebræ* sive *Analytices* hoc uno quasi fundamento niti: Atque si hæc, quæ de Gradibus (in quacunque ratione Ascendentibus & Descendentibus) diximus, satis intelligantur; magnam exinde affulgere lucem ad *Potestates* (quas vocant) *Algebricas* intelligendas, & rite tractandas. Nam revera, quod nobis nunc est *gradus* (sive Ascendens, sive Descendens,) *primus, secundus, tertius*, &c. illud est Algebristis *Latus, Quadratum, Cubus*, &c. vel *Potestas prima, secunda, tertia*, &c. cum hoc tamen discrimine: Quod illi per plurium dimensionum Geometricarum suppositionem conantur explicare, nos inter Arithmeticæ fines continemus: vel etiam, si in materia Geometrica velimus illud ostendere, possumus illud per Quantitates Homogeneas (nempe vel per solas lineas, vel per solas superficies, vel per sola corpora) præstare, quod alii per Heterogeneas (nempe per lineas, & superficies, simul cum solidis, aliisque etiam plurium adhuc dimensionum imaginariis quantitatibus comparatas) præstare satagunt. Hoc autem cum olim vel ignorabant, vel non satis attendebant, vel forte dissimulabant, adeoque occultabant Algebristæ Veteres; coacti fuere multa specialiter de Lineis, de Planis, & de Solidis, tradere & demonstrare, quæ rectius (& quidem facilius) de numeris (vel, si libet, de Rationibus) generaliter essent & tradenda & demonstranda; quæ deinde, ubi opus esset, (sive in re Geometrica, sive in quavis alia) specialiter essent accommodanda, non minus quam reliqua Arithmetica tota. Cur autem illi ad Quantitates Geometricas (potius quam Arithmeticas) & quidem Heterogeneas (potius quam Homogeneas) confugerint; nullam ego rationem video verisimiliorem, quam quod Arithmeticorum *Unum* (non vero, ut oportuit, *Nullum*) cum *Puncto* Geometrico comparabant; adeoque non animadvertebant quo pacto possent Arithmetice illud exhibere quod in Geometricis observaverant: aut etiam fortasse, quoniam Elementa Geometrica pro totius Matheseos basi reputabant, putabant etiam Arithmetica omnia eo redigenda esse, neque de horum veritate melius constare posse quam si inde comprobentur; cum tamen revera res Arithmeticæ altioris sint & magis abstractæ naturæ, quam Geometricæ; & v. g. non, quia *linea bipedalis bipedali addita facit quadripedalem*, ideo *duo & duo faciunt quatuor*; sed potius, quia hoc, ergo illud. Totum autem hoc quicquid est negotii melius percipietur postquam Notationem sive Numerationem Algebricam (ut loquuntur) seu Cossicam, ejusque originem, explicavero: Quod jam facturus sum.

Hinc Algebræ fundamentum.

Potestatum Algebricarum cum Dimensionibus Geometricis comparatio. Earumque appellationes.

Obſervarunt illi (qui numeros Coſſicos ordinarunt) ex principiis Geometricis, quod ſi *Linea* aliqua ad libitum aſſumpta (puta, trium pedum longa;) ducatur in ſe, (hoc eſt, ſi tantum extendatur, ſive moveatur directe in latum, quantum eſt in longum extenſa,) fiet *Quadratum*, cujus *Latus* erit linea aſſumpta: ſi vero Quadratum hoc ducatur in ſuum Latus (hoc eſt, ſi tantum extendatur, ſeu moveatur directe in altum, quantum eſt vel in longum, vel in latum extenſum; ſeu, quod perinde eſt, ſi altitudinem acquirat Lateris longitudini æqualem) *fiet Cubus*, cujus itidem latus erit aſſumpta linea. Obſervarunt deinde Aream ſeu magnitudinem Quadrati inveſtigari multiplicando numerum lateris in ſeipſum; (ideoque cum latus ſit trium pedum longitudinè; quoniam ter tria ſunt 9, continebit Area Quadrati novem pedes quadraticos:) Item ſi Area quadrati multiplicetur in ſuum latus, emerget magnitudo Cubi, ſeu potius multitudo pedum cubicorum in cubo contentorum; (adeoque ſi area quadrati 9, multiplicetur per latus 3, prodibit numerus 27, quæ eſt magnitudo Cubi, ſeu multitudo pedum cubicorum in in illo cubo contentorum cujus latus eſt tres pedes longum.) Hæc autem invicem comparantes, quoniam figura quæ ex latere in ſeipſum ducto emergit, *Quadratum* dicitur, & quæ emergit ex quadrato in latus ducto *Cubus* dicitur; ideo & productum ex numero in ſeipſum multiplicato numerum *Quadratum* appellabant (qui quadrati Aream quodammodo repræſentat) cujus *Latus* ſive *Radicem* appellabant numerum illum qui ſic erat in ſe multiplicatus; & productum, ex multiplicatione numeri quadratici in ſuum latus ſeu radicem, appellabant numerum *Cubicum*, qui & aream ſeu magnitudinem Cubi quodammodo repræſentat. (Atque hinc factum eſſe, credo, quod *numerum hunc in illum ducere* idem ſignificet ac *numerum hunc in illum*, ſeu per illum, *multiplicare*.)



Quamvis autem animadverterint, Geometrice in *Cubo* ſiſtendum eſſe (utpote qui tres dimenſiones Geometricas habeat, longitudinem, latitudinem, & profunditatem; nec plures ſint in rerum natura poſſibiles) adeoque cubum in ſuum Latus duci non poſſe: attamen, cum nullum ejuſmodi terminum Arithmeticis Multiplicationibus poni viderint, quin ut poſſit Radix ſeu Numerus lateralis in continuos productos quouſque libet multiplicari; ideo & Numeros *Figuratos* (quos vocant) ulterius continuandos putabant, quos quatuor, quinque, ſex, aut etiam plures dimenſiones ſupponunt continere; eoſque *Quadratoquadraticos*, *Surdeſolidos*, *Quadraticubos*, &c. nominabant; appellationibus ſcilicet tanquam ex Geometria mutuatis.

Nonnulli (præſertim Itali) pro *quadrato*, *zenzum* vel *cenſum* dicunt, & *Zenzizenzum*, *Zenzicubum*, &c. pro *quadratiquadrato*, *quadraticubo*, (vel *quadrato cubi*) &c. item, pro *Radice*, *Rem* dicunt; unde & Regulam Algebræ, *Regulam rei & cenſus* (hoc eſt, regulam Radicis & Quadrati, ſeu Zenzi) appellant: item, pro *Re*, *coſam* dicunt (nam *res* Italice *coſa* dicitur, ſicut Gallice *choſe*, *) unde hi numeri Figurati, *Coſſici* vocantur; & regula Algebræ, regula *coſæ*, ſeu *coſſi*, ſeu *coſſica*; ſic *characteres coſſici*, *operationes coſſicæ*, &c. dici ſolent. Alii ſimplicius (& forte melius) pro *Radice*, *Quadrato*, *Cubo*, *Quadratoquadrato*, (ſeu *Biquadrato*,) *Surdeſolido*, *Quadrato Cubi*, *Surdeſolido ſecundo*, *Quadratiquadratiquadrato*, *Cubo cubi*, *Quadrato ſurdeſolidi*, *Surdeſolido tertio*, &c. dicunt *Poteſtatem primam*, *ſecundam*, *tertiam*, *quartam*, &c. pro numero dimenſionum quæ inibi intelliguntur contineri.

*Utrumque à Latinorum cauſa.

Characteres Coſſici.

Sed & hiſce poteſtatibus ſeu numeris figuratis ſuos Characteres aptatos habent, quibus indicentur. Aliqui quatuor initialibus literis R, Q, C, S, innunt *Radicem*, *Quadratum*, *Cubum*, *Surdeſolidum*; vel etiam pro R, ſcribunt N, hoc eſt *Numerum*:

rum: Alii characteribus his utuntur ♎ ♍ ♏ ♐ qui ex literis *r z c ſ* oriuntur, & innuunt *Rem, Zenſum, Cubum, Surdeſolidum.* Alii (ſaltem poſt *Franciſcum de Vieta*, qui Arithmeticam *Specioſam*, ut loquuntur, vel primus omnium introduxit, vel ſaltem admodum auxit) pro *Radice* quamlibet ad placitum Alphabeti literam adhibent, ut A, ejuſque reliquas poteſtates adjunctis literis *q* & *c* innuunt ut Aq, Ac, Aqq, &c. pro *Quadrato, Cubo, Quadratiquadrato*, &c. ex radice A: Atque hac notatione utitur D. *Oughtredus*, Anglus, in ipſius *Clavi Mathematicæ*, quam (aliquandiu antea conſcriptam) Anno 1631 primo edidit, & deinceps aliquoties iteravit. Poſt eum (vel eodem circiter tempore) D. *Harriotus* item Anglus, Mathematicus eximius, in ipſius *Artis Analyticæ praxi*, quam poſt ipſius obitum edidit D. *Warnerus*, egregius & ipſe Mathematicus, anno item 1631) literis alphabeticis ad placitum aſſumptis, & toties iteratis, quoties poteſtas indicata poſtulaverit, deſignat, puta *a, aa, aaa, aaaa*, &c. pro Radice, Quadrato, Cubo, Biquadrato, &c. Denique D. *des Cartes*, & poſt illum alii, literarum ſæpe iterandarum tædium timentes, radicem, ut prius, qualibet Alphabeti litera deſignant, & ipſius reliquas poteſtates ſuſpenſis notis numericis (pro numero Gradus ſeu Poteſtatis) deſignant, ut a, a^2, a^3, a^4, &c. Quorum ſpecimen in ſubjuncto Schemate intuendum expoſui.

Nomina.	*Characteres.*					*Poteſtas ſeu gradus.*
Radix	♎	R	A	*a*	*a*	1
Quadratum	♍	Q	Aq	*aa*	a^2	2
Cubus	♏	C	Ac	*aaa*	a^3	3
Quad. quadratum	♍♍	QQ	Aqq	*aaaa*	a^4	4
Surdeſolidum	♐	S	Aqc	&c.	a^5	5
Quad. Cubi.	♍♏	QC	Acc		a^6	6
2m Surdeſolidum.	B♐	bS	Aqqc		a^7	7
Quad. quad. quad.	♍♍♍	QQQ	Aqcc		a^8	8
Cubi cubus	♏♏	CC	Accc		a^9	9
Quad. Surdeſol.	♍♐	QS	Aqqcc		a^{10}	10
3m Surdeſolidum	C♐	cS	Aqccc		a^{11}	11
Quad. quad. cubi	♍♍♏	QQC	Acccc		a^{12}	12
4m Surdeſolidum	D♐	dS	Aqqccc		a^{13}	13
Quad. 2i Surdeſol.	♍B♐	QbS	Aqcccc		a^{14}	14
Cubus Surdeſol.	♏♐	CS	Accccc		a^{15}	15
Quad.quad.quad.quad. &c.	♍♍♍♍	QQQQ	Aqqcccc		a^{16}	16

Notandum autem eſt, quod in grandioribus poteſtatibus (quæ nempe quartam ſequuntur) non eodem apud omnes modo appellationes aptantur. Nam v. g. *Quadratocubus* apud non paucos ſignificat *Quadrati cubum*, ſeu *Cubi quadratum*, adeoque *poteſtatem ſextam*, (quæ ex cubo in ſeipſum ducto emergit, vel ex quadrato cubice multiplicato, hoc eſt, in ſeipſum bis ducto;) atque in hac ſignificatione appellationes quas in Schemate appoſui intelligendæ ſunt, atque huic congruunt prima & ſecunda characterum ſeries: At *Vietæus* (& qui illum hac in re ſequuntur, ut & ex veteribus Diophantus,) per *Quadrato-cubum* intelligunt poteſtatem quintam, quæ ex Quadrato in Cubum ducto emergit; adeoque veterum *Surdeſolidos* (primos) ille Quadrato-cubos vocat; (& eadem analogia reliquarum poteſtatum nomina format, adeoque ſurdeſolidorum appellationem omittit;) cui etiam nomenclaturæ conveniunt ipſius characteres, (qui in characterum tertia ſerie habentur) *Carteſius* (& qui illum imitantur) veterum potius nomenclaturam reſumit; ipſius vero characteres (quinta ſerie poſiti) utrivis æque conveniunt, cum ſolummodo poteſtatum ordinem, ſeu numerum dimenſionum innuant, adeoque minus dubiæ ſignificationis, & errori minus obnoxii. Quibus conformes ſunt (Carteſianis priores) *Harrioti* characteres, quarta ſerie poſiti.

Poteſtates Algebricæ melius per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimenſiones, explicantur.

Quod autem alii per varias dimenſiones Geometricas explicarunt, ego potius per gradus Arithmeticos explicandum exiſtimo, adeoque extra campum Arithmeticum non excedendum. Idem igitur nobis eſt *Gradus aſcendens primus, ſecundus, tertius*, &c. quod illis *Radix, Quadratum, Cubus*, &c. Prout enim, apud illos, quoties in

in Radice continetur Unitas, toties in Quadrato Radix, totieſque in Cubo Quadratum ſupponitur contineri: ſic & nobis, quoties in *Gradu Aſcendente primo* continetur unitas, toties in ſecundo primus, & in tertio ſecundus; & ſic deinceps. Quod autem de gradibus ſupra unitatem Aſcendentibus dictum eſt, etiam de gradibus infra Unitatem Deſcendentibus eſt intelligendum. Sicut enim, ubi Radix eſt unitate major, ſingulæ poteſtates gradatim Aſcendunt: ita ubi Radix eſt unitate minor, gradatim Deſcendunt. Si vero ipſa Unitas ſit Radix, neque Aſcendunt neque Deſcendunt, ſed & poteſtas unaquæque eſt etiam Unitas; nam Unitas in Unitatem quotieſcunque Multiplicata, manet Unitas. Mallem autem per varios Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimenſiones, rem explicare his de cauſis.

1° Quia univerſa Algebra eſt vere Arithmetica, non Geometrica; ideoque potius Arithmeticis quam Geometricis principiis explicanda. Quamvis enim Geometrica multa Algebricis principiis vel inveniantur vel elucidentur, non tamen inde ſequitur Algebram eſſe Geometricam, aut quidem Geometricis principiis nixam, (prout, qui ſic procedunt, videntur imaginari,) ſed ob intimam Arithmeticæ Geometriæque affinitatem illud evenit, aut potius quoniam Geometria ſit Arithmeticæ quaſi ſubordinata, adeoque univerſalia Arithmetices effata rebus ſuis ſpecialiter applicet. Nam, ſiquis lineam tripedalem bipedali additam, lineam quinque pedes longam, conſtituere affirmet eo quod numerus binarius & ternarius additi efficiant quinarium; non eapropter calculus ille Geometricus eſt, ſed plane Arithmeticus, quanquam Geometricæ menſuræ ſubſerviat: eſt enim aſſertio illa, de æqualitate numeri quinarii, cum numeris binario & ternario conjunctis, aſſertio generalis, quibuſcunque aliis rebus non minus quam Geometricis applicabilis; nam & Angeli duo & tres, ſint Angeli quinque. Atque eadem omnino ratio eſt operationum omnium ſive Arithmeticarum ſive ſpeciatim Algebricarum; quæ ex principiis magis generalibus procedunt quam ut Geometricis menſurationibus reſtringantur.

2° Quia Poteſtates Algebricæ non raro altius aſcendunt quam Geometricæ dimenſiones. Cum enim Geometria non plures quam tres admittat dimenſiones, Longitudinem, Latitudinem & Altitudinem ſeu profunditatem, adeoque nec ultra corpus ſolidum, ſeu cubum, aſcendit: Algebra interim ad Quadratoquadratam ſeu ſurdeſolidam, aliaſque ad libitum ſuperiores poteſtates procedit. Commodius ergo per gradus Arithmeticos, qui indefinite quouſque libet extendi poſſunt, quam per Geometricas Dimenſiones, quæ vel omnino tantum tres ſunt, vel, ſi plures ſupponantur, imaginariæ tantum ſunt & plane impoſſibiles.

3° Quia etiamſi Geometria poſſet tot dimenſiones ſuppeditare, quot Arithmetica gradus; tamen nec ſic quadrarent operationibus Algebricis. Sæpiſſime enim contingit æquationes fieri inter varias poteſtates non ejuſdem altitudinis; quod quamvis ſatis conveniat Gradibus Arithmeticis, Geometricis tamen dimenſionibus neutiquam convenit. Verbi gratia Poſito pro Radice, ternario; hujuſmodi poſſunt æquationes occurrere $2Q=6R$ vel $2C=6Q$; hoc eſt, Duo Quadrata æquari ſex Radicibus; vel duos Cubos, ſex Quadratis. At quis non videt, Quadrata & Cubos, vel Quadrata & Latera, cum ſint quantitates heterogeneæ, non poſſe comparari? Nec enim Cubus conſtituitur ex Quadratis, (quamvis illis terminetur) nec Quadratum ex Lateribus. Omnes enim quantitatum comparationes quoad æqualitatem, inter Homogeneas tantum ſunt faciendæ. Sic Solidum Solido æquale eſt aut inæquale, & Planum Plano, & Linea Lineæ; At Solidum Plano nec æquale, nec inæquale ſed quid Heterogeneum. Sic ſolidum ſolido addi vel auferri dicitur, & planum plano, lineæque linea: at nec ſolidum plano, nec utrivis linea. Verum, ſi Arithmetice loqui libeat, optime dici poteſt, centurias duas æquari viginti decadibus, aut duo millia centuriis viginti; hoc eſt, numeros aliquot unius gradus ſimul ſumptos, æquari aliquot numeris alterius gradus ſimul ſumptis: Sic & duas trientum triades æquari ſex trientibus, hoc eſt, (ſi 3 ſit radix) duo quadrata æquari ſex radicibus. Cum enim numeri omnes (proprie dicti) ex unitatibus conſtituantur (vel ſaltem ad unitatem vere rationem habeant) ſunt vere Homogeneæ (licet fortaſſe, ſi de numeris ſurdis etiam loqui velimus, ſint Incommenſurabiles) ideoque vel æquales vel inæquales, majores aut minores, alii aliis dici poſſunt, poſſuntque invicem addi vel auferri: Quæ omnia in Geometricis magnitudinibus, niſi homogeneis, fieri non poſſunt.

Siquis dicat Æquationes Algebricas, ubi Cubi, Quadrata, & Latera comparantur,

tur, non de Cubis, Quadratis & Lateribus Geometricis inſtitui; ſed de Numeris Cubicis, Quadraticis, & Lateralibus; poſſe autem Numeros Quadraticos cubicis aliquot æquales eſſe; Fateor quidem hoc verum eſſe: Sed jam de Numeris res erit, (quod nos contendimus,) non de magnitudinibus; eritque conſideratio plane Arithmetica, non Geometrica. Eſtque numerus Lateralis, Quadraticus, Cubicus, cæterique, nihil aliud quam denominationes graduum (ſive Aſcendentium ſive Deſcendentium) primi, ſecundi, tertii, &c. in certa aliqua proportione. Sic in proportione tripla, gradus aſcendentes exhibent Triades, Ternionum triades, Ternionum triades triplicatas &c. hoc eſt, Radices, Quadrata, Cubos &c. Si enim *Ternio* radix conſtituatur; *ternionum trias* erit numerus quadraticus, nempe numerus ternarius in ſe ductus; & *ternionum trias triplicata* numerus cubicus, nempe ternarius in ſui quadratum ductus; Et ſic de cæteris.

Atque has rationes dediſſe ſufficiat, cur credam poteſtates Algebricas melius per Gradus Arithmeticos, ſeu numeros continue proportionales, quam per dimenſiones Geometricas Heterogeneas, explicari.

Poteſtates Algebricas, cur antiquis nominibus adhuc appellandas duxerim.

Verum cum jamdiu recepta fuerint vocabula, quibus poteſtates Algebricæ vulgo exprimuntur; eadem & mihi non incommode adhibenda cenſeo: cum vocabula artium ſemel recepta, quamvis forte minus exacte rebus aptata, raro poſſint citra gravius incommodum immutari. Præterquam enim, quod ſi frequentes hujuſmodi pro cujuſvis arbitrio fierent immutationes, non modo pluribus quam neceſſe eſt vocabulis oneranda eſſet memoria, cum & antiqua & nova ſint addiſcenda & recordanda, ut varii authores varia nomenclatura utentes intelligantur; illud interim gravius eſt, quod eadem vocabula, vario ſenſu à variis uſurpata, confuſionem non raro haud exiguam inducant. Sufficiat ſaltem monuiſſe, varias Poteſtates Algebricas, quocunque appellentur nomine, nil aliud eſſe quam Numeros ſive Lineas ſive alias etiam quantitates invicem homogeneas, continue proportionales.

Notatio Algebrica ulterius traditur.

Ut autem numerationem Algebricam plenius abſolvam; ſciendum eſt hujuſmodi ſive poteſtates ſive gradus (cum non ita commode poſſint ac numeri ſimplices decupla proportione diſpoſiti, ipſis tantum locis deſignari) appoſitis ſuis quibus indicentur characteribus diſtingui ſolere; quales nempe ſupra oſtendimus.

Cum autem hujuſmodi poteſtates plures ſimul conjunguntur, fit hoc non ſimpliciter unam alteri immediate poſtponendo, (prout in vulgaribus notis numeralibus fieri ſolet;) ſed peculiaribus *ſignis* hunc in finem inventis colligantur: ſuntque ea præſertim hæc duo + & —, quorum illud Additionis, hoc Ablationis indicium eſt; ſive illud Affirmativum, hoc Negativum; vel illud Poſitivum, hoc Ablativum; ſive (ut vulgo efferuntur) *Plus* & *Minus*. Ego hoc tertium (cum *Oughtredo*) adjungendum exiſtimo, ×, quod ſit Multiplicationis indicium. Item = vel ∞ quæ ſit Æqualitatis nota. Sic numerus (ſupra memoratus) 27, ratione decupla conſideratus erit 2 ♎ + 7 vel 2 R + 7 vel 2 A + 7, Hoc eſt, duæ radices ſeu decades & ſeptem unitates: In proportione quadrupla, erit 1 ♃ + 2 ♎ + 3, vel Q + 2 R + 3, vel A q + 2 A + 3, vel $a^2 + 2a + 3$; hoc eſt unum quadratum (ſeu quaternionum quaternio) & duæ radices (ſeu quaterniones) & tres unitates: In proportione tripla, erit 1 ♑ vel 1 C vel 1 A c vel 1 a^3; hoc eſt, unus cubus, ſeu ternionum trias tripla. Vel etiam in proportione decupla idem numerus 27 erit 3 ♎ — 3, vel 3 R — 3, vel 3 A — 3; hoc eſt, tres Radices (ſeu decades) demptis tribus unitatibus: In quadrupla, 1 ♃ + 3 ♎ — 1, vel 1 Q + 3 R — 1, vel 1 A q + 3 A — 1, vel $1\ a^2 + 3\ a - 1$: hoc eſt, unum quadratum (ſeu quaternionum quaternio) & tres Radices (ſeu quaterniones) dempta unitate: Et pariter in aliis. Atque hujuſmodi ſunt illæ formulæ locutionis ordinariæ, cum, pro *Novendecim*, dicimus *Undeviginti*; pro *Octodecim*, *Duodeviginti* &c. hoc eſt, *viginti dempto uno*, *viginti demptis duobus &c.* Tale quid innuitur, cum pro 4. 9. 19. &c. ſcribitur IV. IX. XIX. hoc eſt, 5 — 1. 10 — 1. 10 + 10 — 1. Item 40. 90. 99. &c. XL. XC. XCIX. hoc eſt, 50 — 10. 100 — 10. 100 — 10 + 10 — 1. &c. Eſtque hæc notatio Algebrica, ſeu numerorum Coſſicorum.

Algebra Veterum & Recentiorum, quomodo differunt. Utriuſque uſus.

Notandum eſt autem inter Algebram Veterum, & Recentiorum hoc præſertim diſcrimen intercedere; quod Veteres ſolebant numeros tantum adhuc ignotos & inveſtigandos characteribus Coſſicis exprimere; at Recentiores Algebriſtæ, tam notos quam ignotos ſic ſolent exprimere. Ut ſuo loco poſt patebit.

Interrogabit forſan aliquis; Quorſum hæc nova ſigna ſeu ſymbola adhibeantur numeris exprimendis, potius quam vulgares numerorum Notæ?

Reſpondeo; Triplici de cauſa hoc factum eſſe; partim Neceſſitatis, partim Brevitatis, partim Perſpicuitatis (atque adeo Utilitatis,) gratia.

Primo, inquam, Neceſſitatis cauſa: cum, pro numero aliquo adhuc ignoto, ſubſtituitur ſymbolum ſeu character eo uſque dum innoteſcit.

2° Brevitatis & facilitatis cauſa, cum illud non raro citius peragatur per ſymbola ſeu *ſpecies*, quam per ipſos numeros.

3° Perſpicuitatis adeoque majoris Utilitatis gratia: ubi enim per ſymbola ſeu ſpecies procedit inquiſitio; tota operationum ſeries ſic peracta evidentius in ipſa tandem quantitate proveniente patet; quod ſi operationes ipſis numeris peragerentur, quamvis eadem tandem provenire poſſet quantitas quæſita, nulla tamen iplarum operationum veſtigia ſupereſſent. Ea vero quæ provenit quæſtionis ſolutio in hujuſmodi ſymbolico operationum progreſſu, univerſalem oſtendit methodum, qua non modo propoſita difficultas ſpeciatim ſolvatur; ſed & infinitæ aliæ quæſtiones conjunctæ eadem opera ſolutionem accipiant, ſi generalis nempe ſolutio proveniens ſpeciatim applicetur prout quæſtionis hypotheſis variata poſtulat.

Exemplo oſtenditur. Res tota exemplo melius patebit. Operæ pretium igitur exiſtimo problema quoddam non difficile breviter ſubjungere, quo melius perſpiciatur quid ea velint quæ diximus. (Ubi tamen veniam me facile conſequuturum ſpero, ſi nonnulla de Additione, Subductione, Multiplicatione, & Diviſione tanquam jam cognita aſſumam, quæ ſunt poſt tradenda: aut ſaltem ſiquis mihi hanc veniam non ſit conceſſurus, poterit ille hujuſce problematis ſolutionem eouſque differre, donec ea fuerint tradita: non enim ego illam hic loci ὑποδεικτικῶς propono, ſed tantum ἐνεργητικῶς.) Eſto igitur hoc Problema propoſitum.

"Acceſſit virgo quædam tres ſucceſſive Divos, puta Jovem, Apollinem, Palla-
"dem; Oravit Jovem, ut quos ipſa ſecum attulerat nummos ille duplos efficeret;
"quo præſtito, reddidit illa Jovi gratitudinis ergo tres aſſes; Apollo deinde ſimili
"oratione compellatus duplavit virginis nummos reſiduos; cui & illa tres ſtatim
"aſſes pependit; reliquos autem ad Palladem attulit quos ipſa geminavit; cui &
"virgo tres item aſſes donarii loco obtulit; Quibus peractis, unicus tandem aſſis
"virgini relictus erat quem ſecum auferret. Quæritur; Quot primum attulerat?

Acceſſit virgo tres, ſupplex, ordine Divos;
Et tulit accedens aſſes, quot neſcio, ſecum.
Jupiter oratus, duplavit virginis aſſes;
Protinus illa Jovi tres aſſes grata pependit.
Quotque ſuperfuerant duplavit Phœbus Apollo:
Grata itidem Phœbo tres virgo reddidit aſſes.
Pallas tunc reliquos geminavit Virginis aſſes:
Aſſibus & tandem tribus eſt donata Minerva.
Unicus & ſupereſt, quem ſecum rettulit, aſſis.
Dic mihi, quot fuerant, quos primo Virgo ferebat.

Hoc ego ut ſolvam problema; Primo juxta Veterum Algebram pro numeris adhuc ignotis Characteres coſſicos ſubſtituam, notos autem notis ſuis characteribus deſignabo: Deinde vero, juxta Recentiorum methodum, pro numeris tam notis quam ignotis ſymbola ſubſtituam uſque dum ad ſolutionem pervenero: Ut hoc pacto utriuſque methodi exemplum præſtem.

Primo. Pro ignoto aſſium allatorum numero, ſubſtituo 1 ☉: hic autem numerus (quantuſcunque fuerit) à Jove duplatus fit 2 ☉: hinc demptis tribus aſſibus Jovi ſolutis, reſtant 2 ☉ — 3. hoc reſiduum cum geminaverat Apollo, fiunt 4 ☉ — 6: hinc cum tres adhuc aſſes ablati fuerint, Apollini tradendi, manebunt 4 ☉ — 9. hoc reſiduum Pallas duplando efficit 8 ☉ — 18: unde cum tres inſuper aſſes ſint adhuc auferendi qui Palladi tribuantur, manebunt tandem 8 R — 21. At in quæſtione propoſita unicus aſſis ſupereſſe dicitur. Ergo ſtatuendum eſt 8 R — 21 tantundem eſſe ac 1. Hoc invento; Quoniam 8 R — 21 = 1, (additis utrinque 21) erunt 8 R = 22. Ergo 4 R = 11. Et 2 R = $5\frac{1}{2}$. Et denique 1 R = $2\frac{3}{4}$. At 1 R ponitur numerus aſſium allatorum; erant ergo aſſes allati $2\frac{3}{4}$. Totus quippe operationis progreſſus ſic ſimul conſpiciendus eſt.

Patet hinc Characterem Coſſicum 1 ☉, vel 1 R, neceſſitatis cauſa primo fu-

iſſe poſitum; quia tunc ipſius valor nondum innotuerat, ſed quærendus erat. Non tamen adeo abſolute neceſſarium erat (in præſente problemate) hoc pacto procedere, acſi nulla alia methodo quæſtioni reſponderi potuerit: Nam, quamvis illud fortaſſe in difficilioribus Problematis non raro accidat, non tamen adeo difficilis eſt præſentis quæſtionis ſolutio, quin ut poſſit citra opem Algebræ inveſtigari. Nempe hoc pacto. Si reſiduo 1, reſtituantur 3 (qui nuperrime Palladi ſolvebantur) fiunt 4, (tot ergo Pallade duplante provenerant) horum ſemiſſis 2, eſt numerus aſſium ad Palladem allatorum; quibus ſi adjiciantur 3 (qui nuper ſoluti fuerant Apollini) fiunt 5, (tot ergo Apolline duplante provenerant:) horum ergo ſemiſſem $2\frac{1}{2}$ ad Apollinem attulerat; quibus ſi adjiciantur 3 (qui nuper detracti erant ſolvendi Jovi) fiunt $5\frac{1}{2}$, qui duplante Jove provenerant; horum ergo ſemiſſis $2\frac{3}{4}$ eſt numerus aſſium ad Jovem allatorum; qui eſt numerus quæſitus.

1 ☉	1 R
1 ☉	1 R
2 ☉	2 R
— 3	— 3
2 ☉ — 3	2 R — 3
2 ☉ — 3	2 R — 3
4 ☉ — 6	4 R — 6
— 3	— 3
4 ☉ — 9	4 R — 9
4 ☉ — 9	4 R — 9
8 ☉ — 18	8 R — 18
— 3	— 3
8 ☉ — 21 = 1.	8 R — 21 = 1.
8 ☉ = 22	8 R = 22
4 ☉ = 11	4 R = 11
2 ☉ = $5\frac{1}{2}$	2 R = $5\frac{1}{2}$
1 ☉ = $2\frac{3}{4}$	1 R = $2\frac{3}{4}$

Quamvis autem in hujuſmodi minoris difficultatis Quæſtionibus non ſit abſolute neceſſarium ut Methodo Algebrica ſeu Analytica procedatur: Hoc tamen utilitatis utcunque emergit, ut ſolutio ſemel inveſtigata poſſit etiam aliis hypotheſibus applicari; nec opus ſit pro ſingulis quæſtionis variationibus totam operationum ſeriem de novo ordiri. Verbi gratia. Si, cæteris ut prius manentibus, dicamus 3 aſſes tandem ſupereſſe; eſſent igitur 8 R — 21 = 3: ideoque 8 R = 24 & R = 3. Si ſupereſſent 5 aſſes, eſſent 8 R — 21 = 5; ideoque 8 R = 26, & R = $3\frac{1}{4}$. Et pariter faciendum erit ſi plures aut pauciores aſſes ſupereſſe dicatur. Ut

8 R — 21 = 3	8 R — 21 = 5	8 R — 21 = 7
8 R = 24	8 R = 26	8 R = 28
1 R = 3	1 R = $3\frac{1}{4}$	1 R = $3\frac{1}{2}$

8 R — 21 = 9	8 R — 21 = 11	
8 R = 30	8 R = 32	&c.
1 R = $3\frac{3}{4}$	1 R = 4	

Secundo. Juxta Algebram ſive Analyticen Recentiorum, qui non modo pro numeris ignoratis, ſed & pro numeris datis, ſymbola ſubſtituunt, ſolutio proveniet magis adhuc univerſalis. Verbi gratia. Pro numero quæſito, ſubſtituatur A; pro binario (quia nempe fit aliquoties numerorum duplicatio) B, & deinde pro ternario (quia nempe 3 aliquoties auferuntur) C, & denique pro numero reſiduo (qui hic eſt 1) D: progreſſus erit hujuſmodi

A
BA — C
BqA — BC — C
BcA — BqC — BC — C = D

Hæc autem ſymbola pariter præſtabunt quæſitum, ſive quemlibet Divorum allatos nummos duplare, triplare, quadruplare, &c. dixeris; (nempe interpretando B, pro 2, 3, aut 4 &c.) item ſive tres, quatuor, aut quinque &c. aſſes ſingulis traditos, (nempe interpretando C de 3, 4, 5, &c.) & denique ſive unum, duos, tres, &c. (nempe interpretando D, de 1, 2, 3, &c.) aſſes tandem ſupereſſe dixeris.

Si enim quemlibet Deorum nummos duplaſſe dixeris, erit B = 2, Bq = 4, Bc = 8; Si triplaſſe dixeris, erit B = 3; Bq = 9, Bc = 27, &c. Deinde ſi cuivis tres aſſes redditos dixeris, erit C = 3; ſi quatuor erit C = 4, &c. Denique ſi unum ſupereſſe dixeris, erit D = 1; ſi duos, erit D = 2, &c. Adeoque pro variata hypotheſi varianda erit ſolutionis interpretatio.

$$\begin{aligned} &Bc\,A - Bq\,C - BC - C = D\\ &8\,A - 4\,C - 2\,C - C = 1\\ &8\,A - 12 - 6 - 3 = 1\\ &8\,A = 22\\ &A = 2\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Bc\,A - Bq\,C - BC - C = D\\ &27\,A - 9\,C - 3\,C - C = 2\\ &27\,A - 36 - 12 - 4 = 2\\ &27\,A = 54\\ &A = 2 \end{aligned}$$

Et ſimiliter faciendum eſſet quicunque eſſent alii numeri in quæſtione poſiti.

Atque hactenus, Notationem Algebricam, Coſſicam, Symbolicam ſive Specioſam, quantum opus eſt explicavi.

CAP. XII.

Fractionum ſive Minutiarum Notatio. Fractionis Denominator, & Numerator. Minutiæ minutiarum; Fractio propria, impropria. Numerationis Epilogus.

Fractionum Notatio. UNicum adhuc ſupereſt quo univerſam numerorum Notationem abſolvamus: nempe Notatio *Fractionum*, ſive *Minutiarum*, quos *Numeros Fractos* appellare ſolent. Quamvis enim Fractionum natura perfectius infra intelligetur, poſtquam Rationum ſive Proportionum naturam explicaverimus, operæ tamen pretium eſſe exiſtimo, ea de re nonnulla hic adjungere, ne cui manca videatur Notationis traditio, ſi illud hic loci prorſus negligeretur.

Fractionum Origo. Sunt autem *Fractiones*, ſeu *Numeri Fracti*, non tam numeri, quam *Unitatis fragmenta*. Quanquam enim, ut ſupra dictum eſt, *Unitas* ſit Numerorum minimus; (cum paucius quam Unum eſſe non poſſit, neque aliquid rarius quam ſemel:) attamen *Unum* illud ſupponi ſolet (ut quid continuum) in membra partiri ſive plura, ſive pauciora, (prout res poſtulaverit) æqualia tamen.

Fractionis Denominator. Prout autem membra illa æqualia, ſive partes æquales, alio atque alio numero eſſe poſſunt, ita & aliam atque aliam Denominationem ſubeunt. Ita ſiquid unum in duas partes æquales partiri ſupponatur, illarum utraque Semiſſis dicitur; ſi in tres, appellantur Trientes; ſi in quatuor, Quadrantes; ſi in ſex, Sextantes; ſi in octo, Octantes; ſic ſi in decem partes dividatur, quælibet earum dicetur pars decima; & ſic in aliis: Græci dicunt τεκτημόριον, τεταρτημόριον, πεμπτημόριον, ἑκτημόριον, δεκατημόριον, &c. Hæc autem *denominatio*, in ſcribendis Fractionibus, exprimitur figura analoga lineolæ ſubſcripta.

Fractionis Numerator. Quot autem harum partium aſſumptas eſſe ſupponitur, alia figura eidem lineolæ ſupraſcripta innuitur. Sic $\frac{2}{3}$ *duos trientes* ſignificat, $\frac{1}{10}$ *unam partem decimam*, ſeu δεκατημόριον, $\frac{3}{4}$ *tres quadrantes*, $\frac{5}{12}$ *quincuncem*, ſeu *quinque partes duodecimas*, ſic $\frac{13}{100}$ *tredecim partes centeſimas* ſeu ἑκατοστημόρια, $\frac{11}{20}$ *undecim partes viceſimas*, ſeu εἰκοσημόρια ſignificant. Et pariter de ſimilibus dicendum eſt.

Duobus igitur numeris Fractio ſcribitur; quorum inferior *Denominator* appellatur, ſuperior *Numerator*: Quoniam ille partes *Denominat*, & ποσημόριον ſeu *quota pars* ſit numerandarum quælibet determinat; hic vero partes illas *Numerat*, & *quot partes* ejuſmodi ſint aſſumendæ oſtendit.

Minutiæ Minutiarum. Si vero *partium particulæ* notandæ occurrant, ſeu (ut appellantur) *Minutiæ minutiarum*; puta *unius quadrantis dimidium*, vel *duorum quintantum tres quadrantes*, aliæque ejuſmodi: illæ ſi opus eſt, ſic ſcribi conſueverunt, $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$, nempe lineola in priori parte omiſſa; vel ſic etiam $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{5}$, majoris perſpicuitatis gratia: Sed & ſic ſcribi nonnunquam poſſunt $\frac{0\,\frac{1}{2}}{4}$ &c. Mallem ego ſic

ſcribere

ſcribere $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{5}$, vel $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$; hoc eſt, *ſemiſſis in quadrantem ductus* & *tres quadrantes in duos quintantes ducti*. Eſt enim Quadrantis dimidium, nihil aliud quam quadrans per ſemiſſem multiplicatus; & duorum quintantum quadrantes tres, idem valent ac quintantes duo in tres quadrantes ducti: ut poſtea, cum de multiplicatione dicendum erit, patebit.

Sciendum autem eſt, in Fractione proprie dicta, Numeratorem Denominatore ſemper minorem eſſe; quia proprie dicta Fractio, eſt quid Unitate minus. *Fractio Propria.*

Si quando vero Numerator Denominatore major ſit, vel illi æqualis; dicitur illa *Fractio impropria*, ſive improprie dicta. Si nempe Numerator & Denominator ſint æquales, idem valent atque unitas; Nam $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, duo ſemiſſes, ſeu tres trientes, quatuorve quadrantes, tantundem ſunt atque unum integrum. Si vero Numerator Denominatore major ſit, aliquid unitate majus innuitur; nempe vel plures unitates; vel unitas una pluresve cum fractione annexa: ſic $\frac{4}{2}$ quatuor ſemiſſes, idem valent ac duo integra; $\frac{4}{3}$ quatuor trientes, idem ac $1\frac{1}{3}$ unum integrum uno triente auctum; ſic $\frac{5}{2}$ eſt $2\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3}$ eſt $3\frac{2}{3}$. Et ſic in ſimilibus. *Fractio impropria.*

Quod autem de fractionibus ſive propriis ſive impropriis, vulgaribus figuris numeralibus deſcriptis, dictum eſt; pariter intelligendum eſt ubi alia quævis ſymbola, ſeu poteſtatum characteres, figurarum vice ponuntur. Sic $\frac{A}{2}$ eſt $\frac{1}{2}$ A, ſemiſſis quantitatis A; & $\frac{A}{E}$ innuit quantitatem A per quantitatem E diviſam; & $\frac{2\mathcal{C}}{2}$ eſt radicis ſemis; $\frac{\mathcal{Z}\mathcal{B}}{3}$ quadrati triens; $\frac{3}{2\mathcal{C}}$ numerus ternarius per radicem diviſus; ſic $\frac{2\mathcal{Z}\mathcal{B}+3\,2\mathcal{C}}{2\,2\mathcal{C}}$ vel $\frac{1\mathcal{Z}\mathcal{B}+\frac{3}{2}2\mathcal{C}}{2\mathcal{C}}$ vel $\frac{2\,2\mathcal{C}+3}{2}$ vel $1\,2\mathcal{C}+\frac{3}{2}$ vel $1\,2\mathcal{C}+1\frac{1}{2}$. Ita $\frac{Aq+Bq}{E}$ eſt aggregatum ex Aq & Bq diviſum per E. Atque ita in ſimilibus. Verum hæc multo melius percipientur, poſtquam Diviſionis naturam expoſuerimus; Fractio enim eſt quaſi Diviſionis indicium; innuit nempe Numeratorem per Denominatorem dividendum eſſe. Interim hæc de fractionum Notatione hic loci dixiſſe ſufficiat.

Adeoque totum illud Notationis negotium expedivimus; eaque omnia quæ ſub *Numerationis* nomine Arithmetici Practici vulgo comprehendunt; quæ numeros apte ſcribendo & ſcriptos interpretando præcipue verſatur. Monendum autem eſt *Numerationis* vocabulum aliter hic loci ab Arithmeticis Practicis uſurpari, quam ubi ſupra Arithmeticam diximus ſcientiam bene *Numerandi*: Illic enim *Numerare*, eſt in univerſum Proprietates & uſum numerorum interpretari & exercere; hic autem per Numerationem, ſpeciatim intelligunt, ſimpliciora Arithmeticæ rudimenta, de Numerorum compoſitione, Notatione, aliiſque quaſi Prolegomenis ad commodam Numerorum tractationem prærequiſitis.

Atque hæc quidem omnia quaſi Præmiſſarum loco ſunt habenda, ad eas quæ ſequuntur Operationes Arithmeticas, puta Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, aliaſque quæ ex hiſce componuntur operationes. Hucuſque enim quæ tradidimus, potius ad placitum poſita ſunt, quam demonſtrata; docentque quid ſibi volunt Arithmetici per eas quas expoſuimus Appellationes & Characterum diſpoſitiones, quas ad libitum ſibi aſſumpſerunt Arithmetici quo melius ſequentes operationes perficere valerent. Et eo quidem loco ſunt habenda quo Definitiones & Terminorum explicationes, à quibus rerum Mathematicarum ſcriptores ordiri ſolent. Vel, ſi cum Logicis loqui libeat, Objectum ſcientiæ expoſuimus; ſequitur ut ipſius Affectiones inquiramus & demonſtremus.

CAP. XIII.

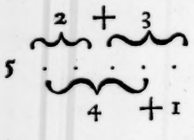
Additio, quid? Axiomata aliquot, ſive communes notiones. Additionis ſumma ſeu aggregatum. Additionis praxis, in numeris ſimplicibus. Additionis & Subductionis tabella; ejuſque demonſtratio. Additionis praxis in numeris compoſitis: ejuſque demonſtratio. Operationis compendium. Additionis praxis in fractionibus Decimalibus. Additionis praxis in variis Denominationibus.

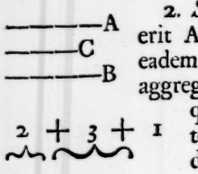
POſt abſolutam, in ſuperioribus, Numerorum *Notationem*, ad eorum Additionem accedendum eſt.

Additio qui? Eſt autem Additio, *Numerorum plurium in unam Summam collectio.* Vel Addere, eſt, *Datis numeris quotlibet, unum aliquem illis omnibus ſimul ſumptis æqualem invenire.* Aut etiam, ſi latius libeat, quam ad ſolos numeros, Additionis appellationem extendere, erit Additio, *Quantitatum plurium Homogenearum in unum Aggregatum collectio.* Nam revera eadem omnino eſt *Additionis* notio, ſive in Continua ſive in Diſcreta quantitate.

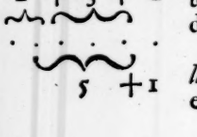
Axiomata, ſive communes Notiones. Quo melius autem in ſequentibus procedamus, ſciendum eſt, in Arithmetica, perinde ac in Geometria reliquiſque diſciplinis omnibus, Principia quædam per ſe nota neceſſario concedenda eſſe, unde alia probentur; quæ tamen Principia talia ſunt ut ea nemo ſanæ mentis negare, aut quidem de iis (modo ſenſum verborum intelligat) dubitare poſſit. Hujuſmodi ſunt *Axiomata* illa, ſeu *Communes notiones*, quæ Elementis Euclideis præmittuntur; Quorum pleraque non magis Geometriæ quam Arithmeticæ conveniunt; Neque ab Euclide proponuntur quaſi ſolis Magnitudinibus corporeis congruant, ſed quæ quibuſvis quantitatibus, prout opus erit, applicari poſſint. Ego ex illis ea ſeligam quæ præſenti negotio conveniunt, ſuntque hæc quæ ſequuntur.

1. *Quæ eidem ſunt æqualia, ſunt & inter ſe æqualia.* Ut ſi tam linea A, quam linea C, ſit æqualis lineæ B; erunt ipſæ A C lineæ æquales inter ſe. Atque de hoc nemo merito dubitare poteſt, ſenſu verborum ſemel intellecto: Cum enim, vi vocis, Æqualia ea ſint quorum quantitas eſt eadem, ſeu, quorum hoc tantundem eſt atque illud: ſitque quantitas tam lineæ A, quam lineæ C, ea quæ eſt lineæ B; erit linearum A & C eadem quantitas, (ea nempe utriuſque quæ eſt lineæ B,) ipſæque igitur æquales. Similiter in numeris, ſi 2+3=5=4+1 erit 2+3=4+1, hoc eſt, ſi tam aggregatum 2+3 quam aggregatum 4+1 æquetur numero 5, erunt ipſa aggregata 2+3 & 4+1 inter ſe æqualia; eorum enim quantitas eſt eadem; ea nempe utriuſque quæ eſt numeri quinarii. Atque idem omnino obtinet in Superficiebus, Solidis, Angulis, Ponderibus, rebuſque aliis omnibus quæ quovis modo vel menſurantur vel numerantur.





2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.* Ut ſi A=B erit A+C=B+C; hoc eſt, ſi æqualibus rectis A B addatur vel eadem vel æquales quantitates C, erit aggregatum A+C, æquale aggregato B+C. Sic ſi 2+3=5 erit 2+3+1=5+1. Neque de hujus propoſitionis veritate quiſpiam ſanus dubitare poterit magis quam de veritate præcedentis; cum utraque dependeat ex eadem Æqualitatis notione.



3. *Si ab æqualibus æqualia ſubducantur, reliqua ſunt æqualia.* Puta ſi A=B erit A−C=B−C: vel ſi A+C=B+C erit A=B. Sic ſi 2+3=5 erit 2+3−1=5−1, aut ſi

si 2 + 3 + 1 = 5 + 1, erit 2 + 3 = 5. Estque hujus propositionis veritas satis evidens; aut, siquis assensum negaret, cogi poterit ex præcedente. Suntque hæc tria axiomata, præsertim in Æquationibus Analyticis, perpetui usus. Sed & quæ sequuntur non minus sunt indubitata.

4. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.*

5. *Si inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.* Sunt autem hæc duo duarum præcedentium consectaria; atque exinde vel ostendi vel saltem cogi possent.

6. *Quæ ejusdem sunt duplicia sunt inter se æqualia.* Sequitur hoc ex secundo; nam 2 A nihil aliud sunt quam A + A.

7. *Quæ ejusdem sunt dimidia, sunt æqualia inter se.* Hoc ex præcedente si opus sit, cogi potest. Sed & hæc duo axiomata pariter etiam valent in triplis, quadruplis, &c. item in trientibus, quadrantibus, &c. atque in duplis, & dimidiis.

8. *Totum est majus sua parte.* Addo.

9. *Totum æquatur partibus suis omnibus simul sumptis.* Cum enim Totum sit suarum partium omnium aggregatum, nemo dubitare poterit quin ipsum tantundem sit atque illæ omnes simul sumptæ.



Hæc autem omnia & siqua sunt similia, adeo sunt per se perspicua, ut nulli dubitationi sint obnoxia; quique hujusmodi quid negat, non sperandum est ut ullis argumentis teneri velit. Reliqua Euclidis ἀξιώματα & αἰτήματα potius Geometrica sunt, adeoque non hujus loci. Ex his autem quæ jam tradidimus, ea quæ post sequentur, tam de Additione quam reliquis operationibus Arithmeticis, demonstranda erunt.

Additionis summa sive aggregatum.

Additionis nota, quæ nunc dierum passim obtinet, est +. Adeoque si quantitates A B simul sint addendæ, aggregatum est A + B; sic si 2 & 3 sint simul addendæ, aggregatum est 2 + 3. Hæc enim + additionis sive affirmationis nota, indicat 3 vel B numerum seu quantitatem cui præfigitur, præcedenti 2 vel A additam seu adjunctam esse, vel (si libet) addendam vel adjungendam.

Additionis praxis

Verum illud ulterius quærit practicus Arithmeticus, annon (verbi gratia) illud aggregatum 2 + 3 possit alia forma notari quæ tantundem valeat atque interim magis sit commoda, suumque valorem melius intellectui repræsentet: adeoque cum sit 2 + 3 = 5, loco aggregati 2 + 3 substituit unicum numerum 5 qui aggregato illi æqualis est, & tantundem valet. Atque in hoc totum versatur Arithmetici practici negotium (non in Additione solummodo, sed in aliis operationibus Arithmeticis, quod semel monuisse sufficit) ut quantitates utcunque propositas seu quæsitas commodissima forma describere possit, atque intellectui exhibere. Atque hoc quo pacto in Additione præstari possit, primum quidem in notis Figuris numeralibus, deinde etiam in aliis Speciebus (ut loquuntur) sive Symbolis, jam traditurus sum.

Numeri autem addendi, sunt vel simplices sive monadici, quales sunt 1, 2, 3, reliquique decade minores, qui unica figura scribi solent; vel compositi, quales sunt 10, 11, 13, 20, 234, aliique in infinitum, qui conjunctis characteribus scribuntur. (Illud enim per *numerum compositum* hic loci intelligo, quamvis illud alias alio sensu occurrere possit.) Vulgo, qui uno charactere scribuntur, *Digiti* appellari solent; qui circello seu ciphra terminantur *Articuli*; reliqui, *Compositi*.

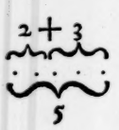
Simplicium numerorum additionem quod attinet, ea natura potius vel exercitatione, quam præceptis, est discenda: Puta *Unum Uni* additum constituere *Duo*; item *Duo* & *Tria* conjuncta valere *Quinque*: & sic in reliquis. Atque hæc sunt adeo pueris nota, ut non sit opus ea fusius tradere. Si quis tamen postulet ut (pro more) omnia demonstrentur; aut etiam siquis de majorum additione dubitare possit: Subjecta tabella simplicium omnium additionem exhibebit.

Tabella

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Si enim numerorum addendorum alter ſumatur in ſummitate ſeriei erectæ, alter in principio ſeriei tranſverſæ, communis ſerierum concurſus oſtendet eorum aggregatum. Exempli gratia ſi ſumatur in vertice 2, ad latus 3, communis concurſus exhibet 5, qui æqualis eſt aggregato 2 + 3.



Si quis denique veritatem hujus tabellæ demonſtrandam poſtulet; illud hoc modo fiet. Verbi gratia. 2 + 3 = 5 ſic demonſtratur. Ponantur primum duo puncta, & deinde tria, quæ omnia ſi numerentur reperientur quinque. Vel ſic. Quoniam notum eſt ex ipſa numerorum procreatione (quam Cap. 5. tradidimus) quod ſit 1 + 1 = 2. 2 + 1 = 3. 3 + 1 = 4. 4 + 1 = 5. 5 + 1 = 6. 6 + 1 = 7. 7 + 1 = 8. 8 + 1 = 9. 9 + 1 = 10. 10 + 1 = 11. Erunt etiam (per axiomata ſuperius in hoc capite tradita) 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 4 = 5. Ergo 2 + 3 = 5. Vel 2 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 = 4 + 1 = 5. Atque eodem modo tota tabella demonſtrari poteſt.

Si quis autem Tabellam illam abbreviandam cupiat, poterit illa quidem fieri fere duplo minor. Cum enim ſit, verbi gratia 4 + 3 = 3 + 4, ſufficiat horum ſummam ſemel poni, eo modo quo hic oſtenditur: ubi duorum numerorum addendorum major ſemper in fronte tabellæ, minor ad latus quæratur, aggregatum in area.

Additionis Tabella Contractior.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	6	7	8	9	10	11	12		
4	8	9	10	11	12	13			
5	10	11	12	13	14				
6	12	13	14	15					
7	14	15	16						
8	16	17							
9	18								

In Numeris compoſitis.

In numerorum compoſitorum additione major eſt difficultas, quæ tamen tota ex ſimplicium additione dependet. Hoc autem quo commodius fiat, numeri addendi ita ſcribendi ſunt ut unus alteri directe ſubſit, ita nempe ut Monades unius Monadibus alterius ſubſint, & decades decadibus, reliquique loci inferioris iiſdem reſpective ſuperioris locis ſubſcribantur: quod faciendum eſt ſive duo ſive plures quotvis numeri addendi ſint: atque deinde, ducta ſubtus lineola, aggregatum monadum monadibus ſubſcribendum, decadum decadibus, centuriarum centuriis, atque ſic deinceps. Exempli gratia. Addantur 25634 + 63152. Numeris igitur

rite ſcriptis, & lineola ducta; in columna ſeu columella monadum, pro 4+2 ſubſcribo 6: in columella decadum pro 3+5 ſubſcribo 8: quia ſcilicet (per tabellam præcedentem) 4+2=6. 3+5=8. atque eodem modo in reliquis columellis reperio 6+1=7. 5+3=8. 2+6=8. adeoque cum ſubſcripta ſummula cujuſque ſeriei, ejuſdem ſeriei particulis æquetur; (puta 6 monades =4+2 monadibus, 8 decades =3+5 decadibus, 7 centuriæ =6+1 centuriis &c.) erunt omnium ſummulæ ſimul ſumptæ (debita locorum ratione habita) 88786, omnium particulis ſimul ſumptis æquales. Atque eodem modo 103605 +430120+315032=848757.

25634	103605
63152	430120
88786	315032
	848757

Non raro autem accidit, particularium ſerierum ſummulas tantas eſſe, ut unica figura ſuæ ſeriei ſubſcribi non poſſint, (quoties nempe ſummula numerum novenarium excedit) quo caſu, ultima ſummulæ figuræ ſuo loco ſubſcribenda erit, reliqua autem loco proxime ſuperiori, (aut, ſi plures ſint, proximis quot opus eſt locis,) adeoque ſingulæ (ſi libet) ſummulæ diſtinctis lineis ſcribi poſſunt; ut in exemplis ſubjectis primo & ſecundo; vel etiam contractius, ut in tertio & quarto; illud autem ſemper cavendum, nequa figura debito loco extrudatur, ſed duæ potius eidem ſeriei ſubſcribendæ ſunt: illæ autem ſummulæ, in unam deinde ſummam (eodem artificio) collectæ, numerorum addendorum ſummam integram, ſive aggregatum exhibent. Non autem omnino refert ſive à dextra ſive à ſiniſtra operatio ordiatur: Neque etiam refert quis addendorum numerus ſupremus ſit, quis ſecundus, &c. (modo illud ſemper caveatur ut monades monadibus, decades decadibus, &c. directe ſubſint, ut vitetur confuſio locorum,) Additio enim non addendorum ordinem inquirit, ſed aggregatum. Patet hoc ex ſubjectis exemplis, ubi eadem ſumma, diverſo tamen ordine, emerget.

98697	87998	95588	67590
87998	98697	98697	87998
95588	67590	87998	98697
67590	95588	67590	95588
23	32 millium decad.	327553	22323
35	27 millia.	2232	32755
25	25 centuriæ.	349873	349873
27	35 decades.		
32	23 monades.		
349873	349873		

In his omnibus exemplis, ſummula monadum (ſive infimæ ſeriei) eſt 23; ſubſcripta igitur ſuo loco figura 3 (pro tribus unitatibus) reliqua figura 2 loco proxime aſcendente ſcribenda, quam ſive 20 unitates ſive 2 decades ſignificare dicamus, perinde eſt. Sic ſummula decadum eſt 35; ſubſcripta igitur 5 in decadum ſerie, reliqua 3 ſcribenda eſt in ſerie proxime aſcendente, ut 30 decades, ſeu (quod idem eſt) 3 centurias ſignificet. Et pariter in reliquis. Omnes autem ſummulæ collectæ, exhibent 349873 ſummam integram.

Additionis demonſtratio.

Totius proceſſus demonſtratio dependet ex illo axiomate (ſæpius applicato) *Si æqualia æqualibus addantur tota ſunt æqualia.* Puta ſi pro tota monadum ſerie ſubſtituantur monades 23=7+8+8+0, tantundem exhibetur; deinde ſi pro decadum ſerie ſubſtituantur decades 35=9+9+8+9, tantundem adhuc exhibetur; item ſi in reliquis ſeriebus ſubſtituantur 25=6+9+5+5, & 27=8+7+5+7, & 32=9+8+9+6, tantundem adhuc exhibetur; adeoque ſummulæ inventæ æquantur numeris propoſitis: & (eadem ratione) ſummularum ſumma æquabitur ipſis propoſitis numeris.

Operationis compendium.

Hic autem proceſſus (quem perſpicuitatis gratia diſtincte proponendum duximus ut operationis ratio perſpiciatur) poteſt aliquantulum (præſertim exercitatis) abbreviari, ſi nempe (a gradibus infimis ſemper incipiendo) cum gradus unius ſummula inventa eſt, ultima ipſius figura ſtatim ſuo loco ſubſcribatur, & reliqua (ſi qua ſit) memoria reſervetur (aut ſi libet, duabus lineolis, ne memoria excidat, interpoſita) ſequenti ſtatim ſeriei annumeretur. Hoc pacto.

98697	98697
95588	95588
87998	87998
67590	67590
349873	2232
	349873

Quoniam in ſerie monadum, eſt $7+8=15$. $15+8=23$. $23+0=23$. ſubſcripta figura 3, reliqua 2 (memoria reſervata, vel lineolis interſcripta) ſtatim ſequenti ſeriei adjungitur hoc modo: $2+9=11$. $11+8=19$. $19+9=28$. $28+9=37$; ſubſcripta figura 7, reliqua 3 transferatur in ſequentem ſeriem ſic, $3+6=9$. $9+5=14$. $14+9=23$. $23+5=28$. ſubſcripta 8, transferatur 2; adeoque $2+8=10$. $10+5=15$. $15+7=22$. $22+7=29$. ſubſcripta 9, transferatur 2; eritque $2+9=11$. $11+9=20$. $20+8=28$. $28+6=34$. Subſcribatur 4, & in ſequente ſerie (quia nihil ulterius addendum reſtat) 3. eritque ſumma totalis ut prius, 349873.

Cur autem figuras ſequenti ſeriei annumerandas, non memoria tantum reſervari, ſed & duabus lineolis interſcribi poſſe dixerim; ratio eſt, quia non raro expedit in grandioribus numeris, præſertim tironibus & parum exercitatis, illud ſic fieri; eo ſcilicet fine, ut, ſiquando operatio de errore ſuſpecta ſit, cujuſvis ſeriei ſummula commode poſſit ſeorſim examinari, errorque ſiquis ſit, facilius detegi; quod quidem non adeo commode peragi poterit, ſi, peracta operatione, nullum veſtigium remaneat numeri ab alia ſerie illuc tranſlati, ſed plurium ſerierum operatio iteranda erit ut unius error detegatur.

Additio Fractionum Decimalium. Si quando numeri addendi fractiones decimales (ut loquuntur) annexas habeant, ſeu (quod idem eſt) gradus aliquot infra unitatem deſcendentes, operatio eodem omnino modo peragenda eſt, quo in numeris integris ſive abſolutis, & iiſdem principiis demonſtranda: Illud autem caute proſpiciendum eſt, ne gradus confundantur: Adeoque non ſemper ultima figura unius numeri ultimæ alterius eſt ſubſcribenda, ſed graduum ratio ſic habenda eſt, ut monades monadibus, decades decadibus, &c. in eadem ſerie ſubſcribantur; adeoque linea ſeparatrix (ſive illud quod ſeparatricis munus obit) in omnibus numeris apte conveniat ut in exemplo adjuncto videre eſt: nempe $17\frac{25}{5}+3\frac{5}{5}+0\frac{005}{755}+16=36\frac{755}{755}$. Neque ulla hic nova difficultas occurrit.

17.25
3.5
0.005
16.
36.755

Additio plurium Denominationum Si quantitates addendæ ex pluribus conſtent Denominationibus (ut loquuntur) prout in addendis Monetis, Ponderibus, Menſuris, Motibus, &c. contingere ſolet: curandum, ut quoties inferioris alicujus Denominationis ſummula eouſque excreſcit, ut unitatem proxime ſuperioris denominationis vel æquet vel excedat, (aut etiam duas aut plures unitates,) ſubſcribendus eſt ſuo loco exceſſus (ſiquis ſit, vel ſi nullus ſit, ciphra) & reliquum ſuperiori ſeriei adjungendum eſt. Illud igitur curandum eſt, ut ſciatur quot unitates Denominationis inferioris unitatem ſuperioris Denominationis adæquent.

lib.	*ſ.*	*d.*
07.	19.	04.
16.	08.	06.
08.	13.	07.
2	1	
33.	01.	05.

Exempli gratia. In addendis monetis Anglicanis: 12 Denarii conſtituunt unum Solidum; & 20 Solidi unam Libram Anglicam (*Sterling* vocant.) Ideoque in exemplo appoſito cum numerus denariorum ſit $17=12+5$, in Denariorum loco ſubſcribo 5; &, pro reliquis 12, adjungo 1 ſolidum proximæ ſeriei: Deinde, cum ſumma ſolidorum (ſimul cum 1 tranſmiſſo) ſit $41=40+1$; ſub ſerie ſolidorum ſcribo 1, & pro reliquis 40 adjungo 2 libras proximæ ſeriei: Denique librarum ſummulam (cum 2 tranſmiſſis) reperio 33. Adeoque omnium addendorum ſumma reperitur 33 libræ, 1 Solidus, & 5 denarii.

ſig.	*grad.*	′	″
1.	3.	16.	30
0.	12.	23.	15
2.	5.	47.	45
4.	23.	51.	00
1	2	1	
8.	15.	18.	30

Eodem modo in Fractionibus Aſtronomicis (ut vocantur) addendis procedendum eſt: Ubi diviſo (verbi gratia) Zodiaco in 12 ſigna, & quolibet ſigno in 30 gradus, quolibet gradu in 60 minuta prima, & quolibet horum in 60 ſecunda, & ſic deinceps; Pro 60 ſecundis ſubſtituendum 1 minutum primum; pro 60 primis, 1 gradus; pro 30 gradibus, 1 ſignum. Ut in appoſito exemplo videre eſt.

Atque eodem prorſus modo in aliis ejuſmodi Additionibus procedendum erit, ubi denominationum pluralitas occurrit. Nec quicquam intereſt diſcriminis, niſi quod nunc plures nunc pauciores unitates in gradu inferiori, adæquent Unitatem gradus proxime ſuperioris. Adeo ut non ſit opus exempla plura ſubjicere.

Addi-

Additionis praxis in ſpeciebus (ut loquuntur) ſive ſymbolis, & in poteſtatibus Algebricis, inferius, poſt explicatam Numerorum ſubductionem, tradetur.

CAP. XIV.

Subductio Additioni contraria. Subductio quid? Subductionis praxis: in Numeris Simplicibus: In numeris Compoſitis. Praxeos demonſtratio. Praxis in partibus Decimalibus: in variis Denominationibus. Subductio majoris ex minore, impoſſibilis. Quantitates negativæ ſeu Ablatitiæ; non abſurde ſupponuntur; quid innuant. Subductio majoris ex minore, quatenus ſupponitur præſtanda.

Subductio Additioni contraria.

POſt Additionis traditionem, ad Subductionem ſeu Subtractionem deveniendum eſt; quæ Additioni contraria eſt: Ut enim Additio Numerum numero, vel ſaltem Quantitatem quantitati, adjungit; Subductio è contra Numerum numero, vel Quantitatem quantitati, aufert: Adeoque quod Additio componit id Subductio diſſolvit. In praxi Additionis, datis partibus inveſtigatur Totum; in praxi Subductionis, Dato Toto cum parte una, quæritur Reſiduum ſeu pars reliqua.

Subductio quid?

Eſt igitur *Subducere, Numerum a numero, vel potius Quantitatem a quantitate, auferendo, Reſiduum exhibere.* Subductionis autem ſive Ablationis nota, hæc eſſe ſolet —. Adeoque ſi ex 5 auferamus 3, reſtabit 5 — 3. Si ex quantitate A auferatur quantitas B, manebit A — B. Illud autem Arithmetici practici, in praxi ſubductionis, munus eſt, ut Reſiduum quam fieri poteſt commode notis exprimat, ejuſq; valorem intellectui exhibeat. Quod quo pacto fieri poſſit, nunc traditurі ſumus.

In numerorum ſubductione, numeri duo dantur, quorum alter ab altero auferendus eſt, & tertius quæritur. Numerum illum à quo alter eſt auferendus, *Numerum Minuendum* appello; auferendum vero *Minutorem*; tertium autem quem quærimus, *Reſiduum* voco. Sic ſi ex numero quinario auferendus ſit ternarius 3; Numerus Minuendus eſt 5, Minutor 3, qui reſtat autem 5 — 3 = 2 Reſiduus eſt. Vel univerſim (quoniam alias etiam quantitates ſubducendas eſſe non raro accidit) dici poſſunt Quantitas *Minuenda*, quantitas *Minuens*, & quantitas *Reſidua*, vel *Totum*, *Ablatum*, *Reſiduum*,

Subductionis praxis in numeris ſimplicibus.

Numerorum ſimplicium ſubductionem nemo ſupponitur ignorare, ſed vel natura vel uſu quotidiano didiciſſe; ut ſi ex 5 auferantur 3, reſtare 2. Aut ſaltem, ſi illud docere ſit neceſſe; poſitis tot punctis quot eſt numerus minuendus, puta 5, ſi tot deleantur, quot eſt numerus minuens . . . ſeu auferendus, puta 3, reſtare deprehendemus 2. Vel denique

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

ex tabella quam ſupra poſuimus, illud depromi poteſt. Si nempe numerus minuens vel auferendus in ſummitate ſumatur, puta 3, atque inferius in eadem columna

quæratur numerus minuendus, puta 5, habebitur ad ſiniſtram numerus reſiduus 2. Atque eodem modo in aliis ſimplicium ſubductionibus peragendum erit. Demonſtratio ſatis patet ex iis quæ de Additione ſupra diximus.

Subductionis praxis in numeris compoſitis.

Ubi autem numerorum compoſitorum unus ab altero eſt auferendus (vel quidem ſimplex à compoſito qui numerum 18 excedit) Minutorem ſolemus Minuendo ita ſubſcribere, ut ſinguli inferioris numeri gradus iiſdem ſuperioris gradibus directe ſubſint, (puta Unitates unitatibus, Decades decadibus, Centuriæ centuriis &c.) Deinde à dextra inchoando, ſingulis figuris ſeu notis numeri ſubducendi, ab ejuſdem gradus nota in numero minuendo, ſigillatim ſubductis, particulares numeros reſiduos ſuis locis ſubſcribimus, quorum omnium aggregatum eſt totius ſubductionis peractæ Reſiduum. Sic ſi ex

1755898	*Minuendus*
650467	*Minutor*
1105431	*Reſiduus*

1755898, ſubducendus ſit numerus 650467: numeris his ita ſcriptis ut minutoris loci primus, ſecundus, tertius, &c. (à dextra ſive gradu infimo inchoando) iiſdem numeri Minuendi locis ſubſint: primo, ex 8 unitatibus, ſubductis unitatibus 7, manet unitas 1, (nam $8-7=1$) ſubſcribenda igitur (infra lineolam ductam) nota 1, deinde ex decadibus 9, ſubductis 6, manent decades 3, (nam $9-6=3$) ſubſcribenda igitur decadum loco nota 3: &, eadem ratione, centuriarum loco, ſubſcribenda 4, quia $8-4=4$: & ſic deinceps $5-0=5$: $5-5=0$: $7-6=1$: denique cum ex 1 in loco ſupremo nulla nota ſubducenda reſtat, ſubſcribenda 1; nempe $1-0=1$. Adeoque totus Reſiduus eſt $1105431=1755898-650467$.

Vel etiam Reſiduus ſuperne notari poteſt, deletis ſucceſſive notis tam Minuendi quam Minutoris. Sic quia $8-7=1$, deletis 8 & 7 repono 1: item quia $9-6=3$, deletis 9 & 6 repono 3: ſic pro $8-4$, repono 4: & quia $5-0=5$, figuram 5 intactam relinquo, vel deletam reſtituo: pro $5-5$, repono 0; pro $7-6$, repono 1, denique 1 (quia nihil inſuper inde ſubducendum eſt) intactam relinquo; Reſiduus eſt idem qui prius, 1105431. Ut in exemplo appoſito videre eſt.

1 1 0 5 4 3 1	
1 7 5 5 8 9 8	
6 5 0 4 6 7	

Quoties autem contingit notam aliquam numeri ſubducendi nota ſibi ſuprapoſita majorem eſſe; augenda eſt nota ſuprapoſita mutuata 1 ex loco proxime ſuperiori, quæ in loco præſenti valebit 10, adeoque ſat grandem numerum efficiet ut inde nota ſubſcripta auferri poſſit: adeoque nota Minuendi in loco ſequente ſupponenda eſt unitate minor jam facta quam prius erat; vel (quod tantundem valet) nota inde auferenda ſupponenda erit unitate aucta: Unitas autem illa mutuata (ſi libet) poteſt duabus lineolis (memoriæ gratia) interponi. Sic ſi ex 730582 auferendus ſit numerus 51368; numeris rite ſcriptis, ex unitatibus 2 auferendæ occurrunt 8, quod cum fieri non poſſit, mutuata ex ſequentibus 1 decade (quæ valet 10 unitates,) fiunt unitates 12, unde ſubductis 8, reſtant 4.

730582	
51368	
11 1	
679214	

Deinde in loco ſequente, ex decadibus 8, ſubductis $7=1+6$ (nam una jam inde deſumpta in unitates reſoluta priori loco annumerata eſt, & 6 inſuper jam occurrunt ſubducendæ) reſtat 1: tum è millibus 5, ſubductis 3, reſtant 2: deinde in gradu ſequente, ſubducto 1, ex $10=10+0$ (mutuatis nempe 10, ut fieri poſſit ſubductio) reſtant 9: item ſubductis $6=1+5$ (propter 1 jam ſubductum, & 5 jam ſubducenda) ex $13=10+3$ (mutuatis nempe 10 ut fieri poſſit ſubductio) reſtant 7: & denique $7-1$ (propter 1 inde jam mutuatum) $=6$. Adeoque totus numerus reſiduus eſt $679214=730582-51368$.

Atque jam ratio patet, cur, in ſubductionis praxi, à dextra ſive gradu infimo inchoandum eſſe dixi: Ut nempe numerorum ex gradu ſuperiori ad inferiorem transferendorum (ut fieri poſſit ſubductio) ratio habeatur, quod non adeo commode fieri poteſt ſi à ſiniſtra praxin ordiamur.

Si tamen libeat à ſiniſtra inchoare, poteſt etiam illud fieri, duplici ſaltem modo. Poſſumus enim Reſiduum vel Superius ſcribere vel Inferius, deletis ſucceſſive notis numeri Minuendi (atque etiam, ſi libet, Minutoris) eorum loco Reſidui notis ſubſtitutis, quæ & ipſæ aliquoties etiam delendæ ſive emendandæ erunt. Ita ſi ex 735806 auferendus ſit numerus 650467: Scriptis ut prius numeris; à ſiniſtra ordiendo, ex 7 ſubductis 6 reſtat 1, (hoc eſt revera propter locorum rationem ex 700000 ſubductis 600000 reſtat 100000; ſeu ex 7 millium centuriis ſubductis

ſubductis 6 millium centuriis reſtat 1 millium centuria;) deletis igitur 7 & 6, eorum loco ſuperne ſcribatur 1 (=7—6:) deinde ſubductis 5 ex 13 (quoniam ex 3 ſubduci non poſſunt) reſtant 8=13—5; deletis igitur 13 & 5, ſcribatur ſuperne 8: tum quia 5—0=5, figuram 5 intactam relinquo (vel, ſi placeat, ipſa deleta aliam figuram 5 ſuperne collocare licebit) tum, quia 8—4=4, deletis 8 & 4 ſuperne pono 4: deinde ſubductis 6 ex 40 (quoniam ex 0 fieri non poteſt) reſtant 34, deletis itaque 6 & 40, ſuperne ſcribo 34: denique 46—7=39, deletis igitur 7 & 46 repono ſuperne 39. Adeoque numerus Reſiduus ſuperne repertus eſt 85339=735806—650467.

33
x8 44 8 *Reſiduus.*
735806 *Minuendus.*
650467 *Minutor.*

Vel etiam reſiduus inferne notari poteſt, hoc modo.

735806 *Minuendus.*
650467 *Minutor.*
x85449 *Reſiduus.*
0 33

Totius proceſſus demonſtratio (ſive à ſiniſtra ſive à dextra ordiamur) dependet ex noto illo axiomate, *Totum æquatur partibus omnibus ſimul ſumptis*; adeoque ſubductio omnium *particularium* æquivalet ſubductioni *totius* ſubducendi. *Praxeos demonſtratio.*

Si fractiones decimales ſint integris numeris adjunctæ, operatio nihilominus eodem procedit modo: id tamen ſemper cavendum eſt, ut quilibet gradus numeri inferioris pari gradui numeri ſuperioris ſubſit. Exemplum hoc eſto. *Subductio Partium Decimalium.*

703.865
2.7136
701.1514

Si ſubductio inſtituenda ſit in quantitatibus plurium (ut loquuntur) Denominationum: eadem tamen eſt proceſſus ratio quæ prius. Illud tantum curandum erit, ut quoties ex claſſe ſeu ſerie ſuperiori (majoris ſcilicet denominationis) mutuanda eſt Unitas, pro illa in ſerie inferiori (ſive denominationis proxime minoris) tot numerentur unitates quot ſerierum ad invicem ratio poſtulat. Sic in ſubductione Monetæ Anglicanæ, pro 1 libra ſubſtituendi erunt 20 ſolidi, pro 1 ſolido 12 denarii. In Fractionibus Aſtronomicis pro 1 ſigno, reponendi erunt 30 gradus; pro 1 gradu, 60 minuta prima; pro 1 minuto primo, 60 ſecunda &c. ut in exemplis adjunctis videre eſt. *Subductionis praxis in variis Denominationibus.*

lib.	*ſ.*	*d.*	*ſig.*	*gr.*	′	″
4.	3.	5.	8.	15.	3.	10.
2.	17.	6.	3.	5.	18.	11.
	1	1		1	1	
1.	5.	11.	5.	9.	44.	59.

Denique ſi quando plures fuerint numeri ſubducendi, vel ex uno aliquo propoſito vel ex pluribus ſimul ſumptis; priuſquam ſubductio inſtituatur, tam numeri ſubducendi colligendi ſunt in unam ſummam ſeu aggregatum, quam numeri illi ex quibus ſunt ſubducendi: & tum demum, ex aggregato hoc, ſubducendum erit aggregatum illud, ut Reſiduum habeatur. (Atque idem omnino faciendum erit non modo in Numerorum ſed & in aliarum quarumlibet quantitatum ſubductione.) Ut in exemplo appoſito videre licet. *Subductionis praxis ubi varii numeri ſunt ſubducendi.*

5369
9572 } 23301 *Minuendus.*
8360

39 1
5603 } 10775 *Minutor.*
1211

12526 *Reſiduus.*

Vel etiam ubi plures numeri, vel ex uno, vel ex plurium aggregato ſunt ſubducendi; poſſunt plures ſubductiones ſucceſſive fieri hoc modo.

23301
—3961
19340
—5603
13737
—1211
12526

In omni autem Subductione actualiter præſtanda, notandum eſt, Quantitatem ſubducendam minorem eſſe debere (ſaltem non majorem) quantitate illa ex qua eſt ſubducenda: Impoſſibile enim eſt ut quantitas major ex minore deſumi poſſit, (cum pars ſuo toto major eſſe nequeat:) Adeoque ſiquando illud præſtandum proponatur, Propoſitum eſt impoſſibile. Verbi gratia, Impoſſibile eſt ut ex 5 ſubducantur 8, cum numerus hic ſit illo major. *Subductio Majoris ex Minore, impoſſibilis.*

Nihilominus, quanquam hoc ſit reapſe impoſſibile; non raro tamen apud Arithmeticos, præſertim Algebriſtas, tanquam eſſet poſſibile, præſtari jubetur: Suppo-nunt enim (præter reales quantitates) quantitates quaſdam imaginarias, quæ mi- *Quantitates Negativæ.*

nores sint quam nihil, quas quantitates Negativas, sive Ablatitias appellant: Et prout (distinctionis gratia, ubi opus est,) quantitatibus veris (quas positivas vel affirmativas appellant) notam hanc + Additionis seu Affirmationis vel Positionis indicium præfigunt; ita quantitatibus imaginariis, negativis, sive ablatitiis, præfigunt notam hanc —, Subductionis vel Ablationis sive Negationis aut Defectus indicium. Adeoque si ex 5 auferenda sint 8, manere dicunt — 3, hoc est, quantitatem quæ sit, numero ternario, minor quam nihil.

Non absurde supponuntur. Hujusmodi autem (quæ supponuntur) quantitates Negativæ, quanquam videri possint non sine absurdo supponi, suos tamen habent usus eximios, neque sine magno commodo ab Arithmeticis (Geometris item, aliisque Mathematicis) introducuntur: ut suo loco aliquando patebit. Hic autem sufficiet ostendere eam suppositionem nihil absurdi supponere. Dum enim dicunt $5 - 8 = -3$: idem est ac si dicerent, *Qui supponit* 8 *ex* 5 *demi, supponit ille aliquid ternario numero minus quam nihil*; (qui enim supponit 8, hoc est $5 + 3$, ex 5 subduci, supponit ille totum quinarium sublatum esse atque insuper 3 plus quam totum, adeoque restare tanto minus quam nihil.) Atque hoc quidem non magis incommode dicitur, quam hoc, *Qui supponit Hircocervum, supponit ille animal quoddam ex Hirco & Cervo conflatum*; quæ propositio vere enunciari potest quanquam neque *Hircocervus*, neque *Animal ita conflatum* existat, aut quidem existere possit: Potest enim Propositio vera esse, quamvis neque Prædicatum neque Subjectum actu existat, aut quidem sit possibile. Ita quamvis neque sit possibilis quantitas -3, neque $5 - 8$, tamen verum est has quantitates (supposititias licet) æquales esse, atque qui alteram supponit reliquam etiam supponere. Et quidem qui dicit $5 - 8 = -3$, non modo dicit subductionem illam $5 - 8$ impossibilem esse, sed ostendit mensuram impossibilitatis; nempe, numerum 8 tanto majorem esse quam ut possit ex numero 5 subduci quantus est numerus 3. Sic qui *habet* 5, sed *debet* 8; *habere* dicitur (computatis computandis) — 3; hoc est 3 minus quam nihil; seu (quod tantundem est) *debere* 3.

Subductio Majoris ex minore, quatenus præstanda supponitur. Quando autem hujusmodi subductio requiritur, (nempe ut major ex minore auferatur,) illa utcunque sic præstanda est; operatione scilicet præscriptæ contraria. Numerus qui ut Minuendus proponitur subducendus est ex eo qui proponitur ut Minutor, & Reliquo præponenda est nota negationis. Ut ubi requiritur subductio numeri 8 ex numero 5; subductis contra 5 ex 8, residuo 3 præponenda est nota —: Adeoque ut $+8 - 5 = +3$; sic $+5 - 8 = -3$. Atque eadem ratione, erit $546 - 987 = -441$: Nam subductis 6 ex 7 restat 1; subductis 4 ex 8 restant 4; subductis 5 ex 9 restant 4; & (quia operatio peracta est imperatæ contraria) præfigenda est nota —.

$$\begin{array}{r} +546 \\ -987 \\ \hline -441 \end{array}$$

Atque hæc de Subductionis Numerosæ praxi dicta sufficiant. De praxi tam Additionis, quam Subductionis Speciosæ sive Symbolicæ, proxime dicendum est.

CAP. XV.

Additio & Subductio Algebrica & Specioſa. Utriusque Regulæ & Praxis.

Additio & subductio Algebrica seu Specioſa. IN additione & subductione Algebrica, vel Specioſa, (de quibus jam dicendum est,) sive Veterum notis Cossicis sive Recentiorum Speciebus seu Symbolis perficiantur, (de quibus Cap. XI. diximus,) duo potissimum consideranda occurrunt; nempe, præter ipsas Species seu quantitatum Notas, *Signorum* etiam (uti vocari solent) habenda est ratio.

Signa + & — quid indicant. Sunt autem Signa ea (quæ nempe Additioni & Subductioni inserviunt) hæc duo, + & —. Quorum illud quidem + *Affirmativum* est, sive *Positivum*, & notat quantitatem cui præfigitur affirmari sive adesse; (quod quidem ubique intelligendum est ubi nullum signum præfigitur:) Hoc autem — Negativum seu Ablativum, denotans eam cui præfigitur quantitatem negari, sive deesse; & symbola

bola vel ſpecies ſic inſignita non tam quantitatem, quam quantitatis abſentiam ſeu defectum indicant.

Et propterea Species quæcunque ſeu Symbolum quodvis, cui ſignum — negativum præfigitur, ſemper interpretandum eſt ſenſu contrario iſti de qua quæritur quantitati, ejuſmodi ſymbolo vel abſoluto, vel (quod tantundem valet) ſigno affirmativo inſignitæ. Verbi gratia, Si de Lucro quæratur, quod nota B vel + B denotetur, erit — B (ſenſu contrario interpretandum) tantundem Damni. Sic, ſi C vel + C indicet exceſſum; — C indicabit defectum. Item, ſi *a* vel + *a* ſit augmentum, erit — *a* decrementum. Si 2 vel + 2 ſolem tot gradibus ſupra horizontem elevatum indicet, — 2 eundem denotabit totidem ſub horizonte gradibus depreſſum. Et contra. Et quidem univerſaliter quicquid ſit illud quantitatis quod ſigno Affirmativo deſignatur, ejuſdem contrarium ſigno Negativo deſignari intelligendum eſt. Puta

Si ſignum Affirmativum indicet, *Affirmationem, poſitionem, augmentum, lucrum, acceſſum, aſcenſum, ſupra, ultra, plus, gravius, calidius, adjici, elevari, &c.*

Signum Negativum indicabit, *Negationem, ablationem, decrementum, damnum, receſſum, deſcenſum, infra, citra, minus, levius, frigidius, auferri, deprimi, &c.*

Et contra, ubi hæc ſigno affirmativo, illa ſigno negativo intelligenda erunt.

His intellectis, de ipſa Additionis & Subductionis praxi agendum; ubi hæ obſervandæ ſunt regulæ.

De Speciebus, regula.

Si vel in Additione vel in Subductione plures occurrant ſpecies ſeu ſymbola, quantitates illæ quæ iiſdem Symbolis deſignantur ſunt invicem vel addendæ vel ſubducendæ (prout res poſtulaverit,) ut earum vel ſumma vel differentia intelligatur, ſeorſim notanda: quæ vero diſtinctis ſymbolis ſive ſpeciebus deſignantur, non ita invicem comparandæ ſed ſigillatim conſiderandæ & notandæ ſunt. Cauſa eſt, quia dum diſtinctis ſymbolis denotantur, quorum ad invicem ratio vel ignoratur, vel ſaltem nondum conſideratur, non poſſunt ſine confuſione conjungi. Puta ſi 2 ſolidi & 1 denarius, addendi ſint, non dicendum eſt ſummam eſſe 3; ſed 2 ſolidos & 1 denarium.

Ubi autem ſymbolorum utut diſtinctorum ratio ad invicem innoteſcit & actu conſideratur, poſſumus, interpretando, etiam diverſa ſymbola in unum colligere; nempe, pro quantitate eorum altero deſignanda, ipſi æqualem ſubſtituendo quæ ſymbolo altero indicetur, mutatis interim mutandis prout ſymbolorum ratio ad invicem poſtulat. Ut, ſi 1 ½ ſolidis, addendi ſint 6 denarii, dicimus fieri 2 ſolidos; quia nempe, ubi innoteſcit unum ſolidum tantundem valere atque 12 denarios, & proinde ½ ſol. = 6 den. poſſumus pro 6 denariis ſubſtituere, ſemiſſem ſolidi; & deinde 1 ½ ſol. + 6 den. hoc eſt, 1 ½ ſol. + ½ ſol. erunt 2 ſolidi. Et ſimiliter in aliis. Atque hoc quidem indifferenter ſive in Additione ſive in Subductione intelligendum eſt.

De ſignis + & —, Regulæ. In Additione.

De ſignis autem + & —, aliæ Additioni aliæ Subductioni inſerviunt regulæ. Quarum quæ Additioni inſerviunt hæ ſunt.

1. *In Quantitatibus addendis, ſi ſigna ſint Similia, ſubſcribenda eſt quantitatum ſumma cum communi ſigno.* Puta pro + 2 + 3 ponendum + 5; quia utraque quantitas ponenda intelligitur. Item, pro — 2 — 3 ponendum — 5; quia utraque auferri intelligitur.

2. *Si ſint autem ſigna Diſſimilia, ſubſcribenda eſt quantitatum Differentia, cum ſigno majoris quantitatis.* Puta pro + 3 — 2 ponendum + 1; quia nempe ubi intelligitur, poni tria, & deinde illorum duo auferri, unicum eorum poſitum manet: item pro — 3 + 2 ponendum — 1; quia nempe uno plus aufertur quam quod reſtituitur. Et ſimiliter in aliis.

Oughtredus utramque regulam ſic breviter conjungit, *Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas, ſervatis ſignis.*

His intellectis, praxis non erit difficilis. Exemplum eſto,

Addenda $\begin{cases} +3\mathcal{C}+1\mathcal{Q}-2\mathcal{R}+3 \\ -1\mathcal{C}+2\mathcal{Q}-3\mathcal{R}-4 \end{cases}$ vel $\begin{array}{r} +3C+1Q-2R+3 \\ -1C+2Q-3R-4 \end{array}$

Aggregatum $+2\mathcal{C}+3\mathcal{Q}-5\mathcal{R}-1$ $+2C+3Q-5R-1$

Vel $\begin{array}{r} 3\,Ac+1Aq-2A+3 \\ -Ac+2Aq-3A-4 \end{array}$ vel $\begin{array}{r} 3\,aaa+aa-2a+3 \\ -aaa+2aa-3a-4 \end{array}$ vel $\begin{array}{r} 3\,a^3+a^2-2a+3 \\ -a^3+2a^2-3a-4 \end{array}$

$2\,Ac+3Aq-5A-1$ $2\,aaa+3aa-5a-1$ $2\,a^3+3a^2-5a-1$

Nempe

Nempe si addantur $3\,\mathcal{C}$, & $-1\,\mathcal{C}$ hoc est, si intelligantur poni 3 Cubi, & (propter signum — contrario sensu exponendum) auferri 1 Cubus, tantundem est atque si ponantur 2 Cubi, (quia $3-1=2$.) ita si addantur $+1\,\mathcal{Q}$ & $+2\,\mathcal{Q}$, cum utrumque affirmetur, aggregatum est $+3\,\mathcal{Q}$. Item $-2\,\mathcal{C}$ & $-3\,\mathcal{C}$, cum utrumque negetur, erit $-5\,\mathcal{C}$, (qui enim tollit $2\,\mathcal{C}$, & tollit insuper $3\,\mathcal{C}$, tollit omnino $5\,\mathcal{C}$, quia $2+3=5$.) denique $+3$ & -4, sunt -1; nempe uno plus tollitur quam apponitur. Et propterea aggregatum duorum additorum (ex singulis summulis collectum) est $+2\,\mathcal{C}+3\,\mathcal{Q}-5\,\mathcal{C}-1$.

Sic in exemplis sequentibus, si addantur $A+B-C$, & $-2B+2C-D$ & $A-C+E$, (quæcunque demum sint quantitates symbolis illis A, B, C, &c. designatæ) aggregatum omnium erit $2A-B-D+E$. Et pariter in reliquis.

$$\begin{array}{r} A+B-C \\ -2B+2C-D \\ A\quad -C\quad +E \\ \hline 2A-B\quad -D+E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5b^4-2b^3-b^2+4b \\ +b^3\quad +b-3 \\ -b^4-5b^3-b^2\quad +4 \\ \hline 4b^4-6b^3-2b^2+5b+1 \end{array}$$

Verbi gratia, si supponamus A, B, C, D, E, significare 1, 2, 3, 4, 5. Item b, b^2, b^3, b^4, significare 3, 9, 27, 81. tantundem valebunt ista atque hæc.

$$\begin{array}{r} 1+2-3 = 0 \\ -4+6-4=-2 \\ 1\quad -3+5=+3 \\ \hline 2-2\pm 0-4+5=1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 405-54-9+12 = 354 \\ +27\quad +3-3= 27 \\ -81-135-9\quad +4=-221 \\ \hline 324-162-18+15+1= 160 \end{array}$$

In subductione hæ observandæ sunt Regulæ.

In Subductione. 1. *Si signa sint Dissimilia, subscribenda est quantitatum summa, cum signo superioris, nempe quantitatis minuendæ seu illius unde facienda est subductio.* Puta si ex -3 auferamus $+2$, residuum erit -5. Nempe si supponantur jam deesse 3, & ulterius auferantur 2, tandem deerunt $5=3+2$. Item si ex $+3$ auferantur -2, residuum erit $+5$. Nempe si jam adsint 3 & insuper tollatur, (hoc est, suppleatur) defectus duorum, sive restituantur 2, jam tandem aderunt $5=3+2$.

2. *Si signa sint Similia, subscribenda est quantitatum Differentia; cum signo communi, ubi quantitas auferenda minor est; sed cum signo contrario, ubi quantitas auferenda est major.* Puta, si ex $+3$ auferantur $+2$, manebit $+1$, quia $3-2=1$; Si vero ex $+3$ auferantur $+4$, manebit -1, quia $3-4=-1$, supponitur nempe 1 deesse. Item si ex -3 auferamus -2, manebit -1; quia nempe si intelligantur deesse 3, & auferantur -2 sive suppleatur defectus duorum, hoc est, si restituantur 2, tandem deerit non nisi 1: Si vero ex -3 auferamus -4, manebit $+1$; nempe ubi deerant 3, si restituantur 4, aderit 1. Et pariter in aliis.

Oughtredus utramque conjunctim sic effert, *Subductio specioſa conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus signis quantitatis subducendæ.*

His explicatis exempla sequentia non difficulter percipientur. Nempe, si

$$\begin{array}{lr} \text{Ex.} & +3\,\mathcal{C}-2\,\mathcal{Q}+3\,\mathcal{C}-5 \\ \text{auser.} & +2\,\mathcal{C}-1\,\mathcal{Q}-2\,\mathcal{C}+3 \\ \text{restat.} & +1\,\mathcal{C}-1\,\mathcal{Q}+5\,\mathcal{C}-8 \end{array} \qquad \text{vel} \quad \begin{array}{r} 3C-2Q+3R-5 \\ 2C-1Q-2R+3 \\ \hline 1C-1Q+5R-8 \end{array}$$

$$\text{vel} \quad \begin{array}{r} 3Ac-2Aq+3A-5 \\ 2Ac-\ Aq-2A+3 \\ \hline Ac-\ Aq+5A-8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3a^3-2a^2+3a-5 \\ 2a^3-\ a^2-2a+3 \\ \hline a^3-\ a^2+5a-8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3aaa-2aa+3a-5 \\ 2aaa-\ aa-2a+3 \\ \hline aaa-\ aa+5a-8 \end{array}$$

ex $3\,\mathcal{C}$ auferantur $2\,\mathcal{C}$, manebit $1\,\mathcal{C}$; quia $3-2=1$. Item, si ex $-2\,\mathcal{Q}$ auferamus $-1\,\mathcal{Q}$, manebit $-1\,\mathcal{Q}$; quoniam, si ubi deerant quadrata 2, auferatur vel suppleatur defectus unius, hoc est, restituatur 1, deerit adhuc quadratum unum sive $1\,\mathcal{Q}$. Item, si ex $3R$ auferamus $-2R$ superſunt $+5R$; nempe si ubi adsunt 3 radices, restituantur adhuc 2 radices, aderunt omnino 5 radices. Denique si ex -5 auferantur $+3$ residuum erit -8: nempe cum jam desint 5, si adhuc

adhuc auferantur 3, deerunt omnino 8. Si igitur reſidua iſtæc omnia particularia in unum colligantur, erit illud $1\,\mathcal{Q} - 1\,\mathcal{Z} + 5\,\mathcal{Q} - 8$.

Similiter in exemplis ſubſequentibus. Si ex $A+2B-3C+D$. auferantur, $2B-2D+E$, manebit $A-3C+3D-E$. Et pariter in aliis.

$A+2B-3C+D$	$3a^3+3a^2-2a-2$
$+2B\quad -2D+E$	$2a^3+3a^2+2a-10$
$A\quad -3C+3D-E$	$+a^3\quad -4a+8$

☞ Quod ſi ſupponamus A, B, C, D, E, ſignificare 1, 2, 3, 4, 5. Et a, a^2, a^3, ſignificare 2, 4, 8. tantundem valebunt illa atque hæc.

$1+4-9+4\ =\ 0$	$24+12-4-2=30$
$+4\quad -8+5=+1$	$16+12+4-10=22$
$1\pm0-9+12-5=-1$	$8-\ 0-8+\ 8=\ 8$

Atque hæc quidem, de Additione & Subductione Algebrica & Specioſa, dicta ſufficiant.

Quod autem ſuperius de Additione monuimus, illud etiam de utriſque Additione & Subductione (ſive Numeroſis ſive Specioſis) intelligendum eſt; Nempe *Quando plures quantitates ſunt continue vel addendæ vel ſubducendæ, vel partim addendæ partim ſubducendæ, perinde eſt quo ordine inſtituantur operationes, modo omnes continue peragantur.* Non enim de ordine ſeu ſitu quantitatum quæritur ſed de earum magnitudine; (nempe quantum illud ſit quod emergit, quocunque tandem ordine diſponantur.) Nempe $6+3-4=6-4+3=3+6-4=3-4+6=-4+6+3=-4+3+6=5$. Item $A+B-C=B+A-C=A-C+B=B-C+A=-C+A+B=-C+B+A$. Et ſimiliter in aliis.

CAP. XVI.

Additionis & Subductionis, per contrarias operationes, probatio. Objectionibus Rami reſpondetur. Quæſtiunculæ aliquot familiares ſolvuntur. Probatio novenaria. Utut lubrica ſit, non tamen contemnenda. Quomodo reddi poteſt certa.

POſt traditam Additionis & Subductionis praxin; annectendum videtur aliquid de utriuſque Probatione ſive Examine. Cum enim in Arithmetices praxi, tironibus præſertim & parum exercitatis, error calculi facillime poſſit irrepere: ſolent hic Arithmeticæ Practicæ Magiſtri methodos tradere operationem jam peractam examinandi, quo melius perſpectum ſit numquis error ſubſit. Quam ego rem in hunc locum diſtuli, quod Additionis & Subductionis examinationem ſimul tradendam eſſe duxerim; partim quod eadem fere ſit utriuſque methodus; partim etiam quod neutra ſeorſim tam commode tradi poſſit, cum altera alterius probationem præſtet.

Examinatio ſive Probatio Additionis.

Additionem peractam ſolenne eſt per Subductionem (operationem ipſi contrariam) examinare. Cum enim duo numeri ſimul additi ſunt, ſi ex ſumma ſubducatur eorum alteruter, reſtabit reliquus. Ut ſi $2+3=5$; erunt $5-2=3$, & $5-3=2$. Hoc eſt, ſi 2 & 3 addita conſtituant 5; tum, ſi ex 5 auferantur 2, manebunt 3; ſi auferantur 3 manebunt 2. Atque idem patebit, ſi in tot punctis res peragatur. Si enim puncta bina & terna conſtituant quina; deletis 3 manebunt 2;

$+2$	2	
$+3$	3	
5	5	
-2	-3	...|..
3	2	

vel deletis 2 manebunt 3. Demonstratio dependet ex illo axiomate, *Si æqualia æqualibus auferantur, reliqua erunt æqualia.* Ideoque si sint $3+2=5$ deletis utrinq; $3 \quad 3$ manebunt $2 \quad 2$

Si igitur, ubi ex Additionis summa additorum alterum auferatur, quod restat æquatur additorum reliquo, operatio rite peracta est; si autem Residuum subductionis, reliquo addendorum non congruat; indicium est erroris. Atque idem in grandioribus numeris accidit. Ut in appositio exemplo.

378569 } addendi.	
482586 }	
861155	Summa.
482586	Subducendus.
378569	Residuus.

Si autem plures numeri addantur; Subductionis opus sæpius erit iterandum. Ut in exemplo appositio.

38925 }	
19634 } addendi.	
82703 }	
98516 }	
239778	Summa.
38925	Subducendus.
200853	Residuus.
19634	Subducendus.
181219	Residuus.
82703	Subducendus.
98516	Residuus.

Verum cum hoc pacto examinandi labor evadat ipsa primaria operatione major: Satius fortasse videbitur ipsam potius Additionis operationem repetere: præsertim si ordine retrogrado vel aliquo alio modo inverso procedatur: verbi gratia, Si prius singulas series à nota suprema deorsum processimus (ut in exemplo ultimo, $5+4=9$. $9+3=12$. $12+6=18$) in repetita operatione ab infima nota incipientes procedamus sursum, (ut $6+3=9$. $9+4=13$. $13+5=18$,) ut eo minus sit periculi in eundem errorem, si quis prius commissus fuerit, denuo incidendi.

Quod autem de Additionis probatione in addendis numeris absolutis dictum est; pariter etiam in additione Algebrica & Speciosa locum habet; ut & in addendis quantitatibus plurium denominationum. Nam & hic eadem omnino ratio obtinet quæ superius, ut non sit opus alia demonstratione. Exemplo sunto.

	lib.	*unc.*	*drach.*	*scr.*	*gr.*		
Adde	13	9	5	1	18	$2Q+1R+3$	Additio.
	2′	6	2	2	6	$3Q-2R-1$	
Summæ	16	4	0	1	4	$5Q-1R+2$	
Subduc.	2′	6	2	2	6	$3Q-2R-1$	Subduct.
Restat.	13	9	5	1	18	$2Q+1R+3$	

Additio	$A+3B-C+2D$	b^3+3b^2-5b-1	
	$3A+2C-D$	$2b^3-b^2+4b+6$	addit.
	$4A+3B+C+D$	$3b^3+2b^2-b+5$	
Subduc.	$3A+2C-D$	$2b^3-b^2+4b+6$	subduc.
	$A+3B-C+2D$	b^3+3b^2-5b-1	

Probatio Subductionis. In Subductionis probatione, eadem fere methodo incedendum est, qua in probatione additionis: sed vice versa. Ut enim subducendo examinatur additio, ita addendo examinanda est subductio. Nempe, si quantitas Ablata & Residua simul additæ constituant quantitatem primo Propositam (unde nempe altera auferenda erat) indicium est operationem rite processisse; sin secus, erratum est. Nam *Ablatum & Residuum simul æquantur Integro* (quippe Totum suis Partibus simul sumptis;) ideoque *si Residuo restituatur Ablatum, redibit Integrum.* Exempli gratia. Si ex numero quinario, auferatur binarius, & ternarius superesse dicatur, patet operationem probe peractam esse, quia numeri binarius & ternarius (ablatus & residuus) simul additi constituunt quinarium. Quod itidem in totidem punctis ostendetur; nam si punctorum quinque deletis duobus, tria dicantur supersesse; verum illud esse liquet, quoniam si tribus illis residuis restituantur duo ablata, redibit punctorum numerus quinarius primo positus. Vel denique si sint

5	$5-2=3$
2	$5=3+2$
3	
2	.. | ...
5	

$5-2=3$, additis utrinque 2, aggregata erunt æqualia $5=3+2$; & contra ſi æqualibus $5=3+2$, auferantur æqualia puta 2, manebunt æqualia $5-2=3$.

$$\left.\begin{array}{r} 5-2=3 \\ 2=2 \\ \hline 5\quad =3+2 \end{array}\right\}\text{Addit.}$$

Atque idem prorſus, iiſdem de cauſis, in numeris majoribus non minus valebit; ut & in ſubductionibus Algebricis & Specioſis ſive ſymbolicis; aut etiam in Quantitatibus plurium denominationum. Ubique enim & univerſaliter obtinebit illud, *Sublatum & Reſiduum æquantur Toti.* Exempla aliquot ſubjicimus.

$$\left.\begin{array}{r} 3+2=5 \\ 2=2 \\ \hline 3\quad =5-2 \end{array}\right\}\text{Subduct.}$$

Ex.	$3\mathcal{C}+2\mathcal{Z}-1\mathcal{Q}$	$5Ac-4Aq+A-1$
tolle	$1\mathcal{C}-1\mathcal{Z}+3\mathcal{Q}$	$3Ac+2Aq-2A+3$
Reſid.	$2\mathcal{C}+3\mathcal{Z}-4\mathcal{Q}$	$2Ac-6Aq+3A-4$
Summa	$3\mathcal{C}+2\mathcal{Z}-1\mathcal{Q}$	$5Ac-4Aq+A-1$

	dies.	horæ.	minuta.
$2A-3B+C$	45.	12.	56.
$A+B-C$	13.	18.	7.
$A-4B+2C$	31.	54.	49.
$2A-3B+C$	45.	12.	56.

Atque hactenus quidem oſtendiſſe ſufficiat mutuam tam Additionis quam Subductionis examen ſive probationem per operationem contrariam.

Non ignoro interim Ramum, & poſt illum alios, cenſores forte plus ſatis rigidos, hujuſmodi Additionis & Subductionis mutuas ſive demonſtrationes ſive probationes rejicere; non quidem ut falſas aut fallaces, ſed ut ſuperfluas: quippe cum veritas operationis ſive in addendo ſive in ſubducendo ex ipſo progreſſu ſatis appareat, (ſi nempe rite procedat uti regulis docetur,) ideoque demonſtrationem aliunde fruſtra petendam eſſe. *Objectio Rami.*

Ego autem rationem illam Rami vix commode applicatam arbitror, aut rei, quæ jam agitur, rite accommodatam. Vix enim quiſquam (uti credo) eſt, qui conceſſa firmitate regulæ, & exempli pariter cum illa regula conformitate, dubitabit adhuc de veritate operationis; (ſiquis enim ejuſmodi reperiatur, fateor illum ſub Rami cenſura merito cadere, ut qui, conceſſis præmiſſis, ipſaque ſyllogiſmi forma, de concluſione interim dubitat:) Verum conceſſa Regulæ certitudine, de præſentis operationis cum data regula conformitate, merito fortaſſe nonnunquam dubitabitur; hujuſmodi autem dubitationes his probationibus tollendas docent. Cum autem doceat Ramus hæcce dubia, ſiqua ſint, tollenda eſſe repetendo totam operationem peractam, eamque ad regulam exigendo: quanquam non negem rem ita peractam ſatis feliciter ſuccedere poſſe, tamen (pace tanti viri) facilius eundem errorem calculi recurrere poſſe judico eodem opere iterato, quam opere aliquantum variato: (quod & facile conceſſuros arbitror qui vel leviter calculo exercitati ſunt;) adeoque melius per operationem contrariam, quam eandem repetendo, examen faciendum.

Sed & alia me movet ratio cur nolui reciprocas has examinationes ſive probationes exterminare; Nempe quod, hoc pacto exercitati, utriuſque operationis, Additionis ſcilicet & Subductionis, comparatas vires perſentiſcent tirones Arithmetici: nimirum hanc reſolvere quod illa componit. Eſt enim Additio iſtius quaſi γένεσις, cujus Subductio eſt ἀνάλυσις. Ea vero quæ συνθετικῶς conſtruuntur, ἀναλυτικῶς examinare, nec Arithmeticum dedecet, nec Geometram.

Iiſdem item quæ jam tradidimus principiis ſolvuntur hujuſmodi Quæſtiones (quibus ſe exercere tirones non incommode poterunt.)

Quis numerus ille, unde ſi demantur 4, reſtabunt 3? Additis nempe 4 & 3 (ſublato & reſiduo) prodibunt 7, numerus quæſitus. Item *A quo numero tollenda 7, ut reſtent 4?* Additis ſcilicet 7 & 4 prodibunt 11; hoc eſt, numerus ablatus & numerus reſiduus ſimul additi dabunt numerum minuendum. Ita in numeris gran-

$$\left.\begin{array}{r} 4 \\ 3 \end{array}\right\}\text{additio}\left\{\begin{array}{l} 7 \\ 4 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 7 \\ 4 \\ \hline 3 \end{array}\right\}\text{ſubductio}\left\{\begin{array}{l} 11 \\ 7 \\ \hline 4 \end{array}\right.$$

dioribus;

dioribus; *Qui, ære alieno obstrictus, jam solvit libras* 2436, *& etiamnum debet libras* 1563, *quanto primitus debito obstringebatur*? Seu (quod perinde est) à quo numero tollenda sunt 2436, ut restent 1563? Additis numeris 2436, & 1563 prodibit quæsitus 3999. Hos autem numeros ita repertos eos ipsos esse qui quærebantur, inde liquet, quod, si subductiones fiant prout quæstiones propositæ postulant, numeri residui iidem erunt quos quæstiones postulabant. Ut patet.

2436 } additio.
1563 }
3999
2436 } subductio.
1563

Contra vero, si quæratur *Quis numerus ille sit cui si addantur* 6 *prodibunt* 10? Ex additionis summa 10, auferatur numerorum additorum alter (cognitus) 6, & prodibit reliquus (quæsitus) 4. Item *cui numero addenda sunt* 356 *ut fiant* 783? Subductione facta, prodibunt 427. Hos autem sic inventos numeros eos ipsos esse qui quærebantur, patebit, si additiones juxta quæstionum præscriptum peragantur, prodibunt enim summæ indicatæ.

10 } subductio { 783
6 } { 356
4 } additio { 427
10 } { 783

Eodem modo si quæratur *Quis numerus sit qui, a quinario, binario differt*? Quoniam differentia potest esse, vel in excessu vel in defectu; patet ejusmodi numeros duos esse, majorem nempe & minorem: illum addendo, hunc subducendo inveniemus. Est enim septenarius binario major, & ternarius binario minor, quam est quinarius. Sic 3758 est differentia numeri 5371 à duobus numeris nempe 9129 majore, & 1613 minore, quorum ille addendo, hic subducendo investigatur.

5 } additio { 5371
2 } { 3758
7 } { 9129

5 } subd. { 5371
2 } { 3758
3 } { 1613

Possunt autem hæc omnia etiam per *Regulam Algebræ* (ut loquuntur) vel Analyticen, aut Arithmeticam Speciosam pariter ostendi. Verbi gratia. Si quæratur *Cui numero addenda* 7, *ut fiant* 20? Numerus quæsitus dicatur 1 2ℓ; ergo 1 2ℓ + 7 = 20; auferantur utrinque 7; & restat 1 2ℓ = 13, numerus quæsitus. Ita, *A quo numero auferenda* 325 *ut restent* 243? Numerus quæsitus dicatur A; erit ergo A − 325 = 243. Et (additis utrinque 325) A = 568. Item *Quis numerus est cujus differentia a* 261, est 141? Numerus quæsitus dicatur E; ergo erit 261 ± 141 = E = { 402. / 120. } numerus quæsitus. Et similiter in aliis.

1 2ℓ + 7 = 20
7 = 7
1 2ℓ = 13 } Subductio

A − 325 = 243
325 = 325
A = 568 } Additio.

Summa 402 = E
261
141
Residua 120 = E

Siquis autem inquirat verbi gratia, *Quinam addendi sint numeri, ut summa sit* 7; vel *Quinam ex quibus subducendi, ut restent* 7; Hujusmodi quæstiones essent plane ludicræ & nugaces; cum ex datis propositis in quæstione nihil certi elicitur; quippe modis innumeris responderi poterit. Puta 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 3 + 1, 5 + 1 + 1, 8 − 1, 10 − 3, 20 − 13, 5 + 6 − 4, 12 − 3 − 2, &c. Nam ex solo Aggregato, vel Residuo, de particulis additis aut subductis nil certi constabit.

Subductionis alia probatio. Notandum autem & hic est, aliam esse consimilem subductionis probationem, eidem prorsus fundamento innixam. Nempe (in operatione legitime peracta) *Si numerus residuus a numero primum posito auferatur restabit numerus prius ablatus.* Puta si ex 583 auferendo 291 deprehendero primum 312. Quod an recte probaturus, ex 583 (numero proposito) subduco 312 (residuum inventum,) ut videam num sic proveniet 291 numerus prius ablatus: invenio autem jam residuum esse non illum sed 271, ipso minorem; unde deprehendo errorem calculi alicubi irrepsisse; quem repetito opere in decadum serie commissum intelligo,

583 } subductio mendosa { 583
291 } { 312
312 } { 271

583 } subductio emendata { 583
291 } { 292
292 } { 291

dum decadas 31 pro 29 posuerim ; & verum residuum esse 292. Fundamentum hujus probationis hoc est, quoniam cum ablatus & residuus æquentur toti, utrovis eorum ablato reliquus manebit. Adeoque si toti 583 æquentur duo simul 291 & 292, sicut sublato 291 manebit 292, ita sublato numero 292 manere necesse est alterum 291.

Probatio Novenaria.

Supereſt adhuc alius tam Additionem quam Subductionem probandi ſive examinandi modus ; quam *probationem Novenariam* appellant. Eaque ſic inſtituitur.

In Additione.

In Additione, Numerorum addendorum ſingulis figuris indiſcriminatim , nulla locorum conſideratione habita, ſimul additis ; & 9 quoties fieri poteſt abjectis, reſiduum numero novenario minus obſervetur : atque idem etiam in additorum ſumma fiat. Quo facto, ſi duo iſta reſidua ſint invicem æqualia , operationem illam rite peractam eſſe conjicimus ; ſin ſecus, certum eſt alicubi errorem incidiſſe. Sic in appoſito exemplo : 3, 5, 8, ſimul addita conſtituunt 16, unde abjectis 9 reſtant 7, (ſeu, quod eodem recidet, 1+6=7;) huic numero 7 addantur inſuper 1, & 2, ut fiant 10, unde demptis 9 reſtat 1 : huic additis 3 & 5 fiunt 9, quæ abjiciantur ; tum 6, 1, & 3, ſunt 10, unde abjectis 9 reſtat 1 ; hoc reſiduum ſeorſim (memoriæ cauſa) noto. Deinde & in ſumma id ipſum faciendum eſt ; ubi 1+1+9=11. Et 11−9=2. tum 2+4+4=10. denique 10−9=1. Quod etiam reſiduum ſeorſim noto. Cum reſidua (poſt 9 quoties fieri poteſt abjecta) ſint æqualia (utrobique 1) conjicio operationem illam rite peractam eſſe. Si autem reſidua iſta fuiſſent inæqualia, certum eſſet errorem alicubi admiſſum eſſe.

3581
2350
6013
11944

1 X 1

Quo fundamento nititur.

Quo fundamento nititur hæc probatio, neſcio an quiſquam tradiderit ; ego certe non memini me uſpiam legiſſe. Verum, uti in aliis ſolet, ita hic mihi incumbere judico operationis fundamentum tradere, ut inde diſcant qui velint non rem tantum, ſed & rei rationem ; præſertim cum in diſciplinis Mathematicis non ſit adeo congruum ἀναπόδειϰτως effata pronunciare. Fundamentum igitur iſtius operationis (ſive unde primitus originem ſumpſerit, ſive ſaltem unde demonſtrari poſſit ;) hoc eſt. Cum numerorum loci aſcendant (uti ſuperius traditum eſt) proportione decupla, pro ſingulis decadibus unius gradus ponendæ ſunt (in gradu ſuperiori) totidem unitates : at idem omnino eſt à 10 abjicere 9, atque pro 10 ſubſtituere 1 : & eadem ratione, pro 11 ſubſtituere 2 (nempe pro 10 unam, pro 1 alteram unitatem) atque ab 11 abjicere 9. Et ſic in cæteris. Atque hinc fit, ut ubi poſthabita locorum diſtinctione ſinguli characteres indiſcriminatim conſiderantur , decem & unum eodem charactere notantur, hoc ſcilicet 1 utrumque. Atque hinc factum eſt quod 10 & 1 perinde habentur, hoc eſt, ex ſingulis decadibus ejiciuntur novem.

Quam ſit lubrica.

Non diffiteor tamen probationem hanc lubricam eſſe. Quanquam enim reſiduorum diſſenſus certum ſit erroris indicium, non tamen eorum conſenſus certum eſt indicium veritatis. Nam, verbi gratia, in exemplo præcedente , ſive dicamus additionis ſummam eſſe 11944 (quod verum eſt) ſive 19144, ſive 11044, ſive 11080 ; ſive denique (ne plures memorem) 10000, utcunque poſt novenariorum quoties fieri poteſt abjectionem remanebit 1 ; adeoque probatio iſta errorem non detegeret. Non eſt igitur cur huic probationi nimium fidamus , quaſi , ubi illa nullum detegit, operatio plane eſſet erroris immunis.

Non tamen rejiciendа.

Neque tamen ſuadeo ut penitus rejiciatur hæc examinandi methodus ; quia non ita magno labore peragitur, & errorem nihilominus non raro detegit, (licet non ſemper,) imo rariſſime fallit : Niſi enim quis data opera illud agat, ut numeros falſos pro veris ſubſtituat, & ſponte erret, vix unquam tam felici ſucceſſu (ſeu potius infelici) errabitur, quin ſe prodet error. Cum enim vel mediocriter cauti vix pluſquam una aut altera unitate (in eadem ſerie) peccent ; non autem latere poſſit error, niſi vel multiplex ſit (ita ut unus alterum celet) vel novem præciſe unitatibus (aut forſan 18, 27, &c.) in eadem ſerie erratum fuerit ; rariſſimo certe caſu eveniet, ut error, ſiquis ſit, lateat, & vel lubricam hanc probationem effugiat.

Quomodo fieri poteſt certa.

Sed addo , probationem hanc tanta cautione (neque labore interim multum aucto) adhiberi poſſe , ut non minus certa ſit & infallibilis , quam alii probandi modi. Ut autem hoc fiat , operæ pretium erit decadas in Superiores ordines tranſmiſſas continuo notare (ut ſupra oſtendimus) intra duas lineolas : Atque examinare deinde ſingulas ſeorſim ſeries, puta unitatum, decadum, centuriarum, &c. Quo facto, ſi quoties ex omnibus ejuſdem ſeriei numeris

ris simul additis abjiciantur 9, toties præcise ex ejusdem seriei summula abjici etiam possit, cum eodem utrobique residuo, certum est indicium operationem illam neutiquam mendosam esse. Exemplum esto operatio apposita. Ubi in unitatum serie occurrunt numeri 6, 8, 7, 6, 9. in quibus addendis, postquam 9 quater abjecta sunt, nihil supereſt, (nempe 6+8=14. 14−9=5. 5+7=12. 12−9=3. 3+6=9. 9−9=0. 0+9=9. 9−9=0.) sed & in 36 (ejusdem seriei summula) 9 præcise quater continentur, sine ullo residuo. In sequenti decadum serie; in addendis 9, 7, 6, 5, 7, 3, postquam quater abjecta sunt 9, restat 1: sed & ita in 37. In serie centuriarum 8, 9, 8, 7, 7, 3, cum 9 quater ejecta sunt, 6 supersunt: atque ita in 42. In serie millium, tam in addendis 7, 9, 9, 8, 8, 4, quam in summula 45, cum 9 quinquies abjiciuntur nihil supereſt. In serie denique suprema, tam in particulis 9, 8, 5, 7, 8, 4, quam in earum summula 41, abjectis 9 quater supersunt 5. Certum est igitur & singularum serierum summulas, & omnium etiam aggregatum, vera esse, adeoque totam operationem rite processisse. Nec secus eveniet in aliis ejusmodi additionibus probandis. Hac autem si incedamus via, non novenarius magis quam quilibet alius numerus adhiberi possit, ut patet. Quod monuisse sufficiat.

97896
89978
59867
78756
88779
4433
415276

Subductionis probatio novenaria. In novenaria Subductionis probatione, eadem omnino est incedendum via, quam in Additionis probatione ostendimus: cum hoc solo discrimine, nempe quod in Additione numeri addendi cum summa conferuntur; in Subductione, ablatus & residuus (simul sumpti) conferuntur cum numero minuendo. Ratio est, quoniam ut in Additione, summa est quid integrum cujus partes sunt numeri addendi; sic in subductione numerus minuendus rationem habet Totius, cujus partes sunt ablatus & residuus. Exemplum esto illud quod apponitur. Ubi in figuris numeri minuendi simul indiscriminatim addendis, nempe 7, 3, 9, 8, 1, abjectis 9 quoties fieri potest, restabit 1: Sed & idem restabit in addendis 5, 2, 3, 0, 4, 2, 1, 6, 7, 7, figuris nempe ablati & residui: Unde operationem illam minime vitiosam esse conjicio; quod si diversa fuissent residua, certum esset operationem alicubi fuisse mendosam.

73981
52304
21677

1 X 1

Quæ vero superius dicta sunt de Additionis probatione, nempe lubricam illam esse, nec tamen plane contemnendam: etiam de hac Subductionis probatione non minus intelligenda erunt, ut non sit opus ea denuo repetere.

Hæc autem sive Additionis sive Subductionis probatio novenaria, in additionibus & subductionibus Algebricis & Speciosis locum non habet: Sed neque ubi variæ sunt numerorum addendorum aut subtrahendorum denominationes (quod in monetis, ponderibus, aliisque similibus numerandis plerumque evenit) nisi saltem cum levi aliqua correctione, quam tamen vel mediocriter exercitati, ubi operæ pretium videbitur, facile adhibebunt.

Atque hæc, quæ dicta sunt, de toto & Additionis & Subductionis negotio tradidisse sufficiat. Alia minutiora quæ vel inter operandum se sponte offerent, vel in Arithmeticorum practicorum libris passim occurrunt, consulto omisi, ut quæ vel levioris sunt momenti, vel ex jam traditis satis intelligi poterunt. Libet autem, priusquam hanc rem penitus dimittam, utriusque exercitium aliquod, in re Chronologica, exhibere: ut intelligant saltem tirones quomodo universalia quæ tradidimus præcepta, sint (prout res postulat) in usum reducenda. Quod capite sequente fiet.

CAP.

CAP. XVII.

Additionis & Subductionis exercitium, in Chronologia, &c. De nativitate Arphaxadi & Abrahami; & Promissione facta. Gen. 15. *& Gal.* 3. *comparantur. De Israelitarum mora in Ægypto. De duræ servitutis initio. De Obstetricum responsione. Numerus descendentium in Ægyptum. Gen.* 46. *& Act.* 7. *comparantur. Immensum eorum incrementum.*

CUm harum rerum lectores, præsertim tirones, existimem, non tam nudis præceptis delectari, quam si eadem videant, ad usus communes applicata, unde & ipsi forsan impræsentiarum aliquid delectationis persentiscant, & discant interim similiter eadem ubi opus est in usum proferre: Non ingratum fore judicavi hujusmodi specimen in re Chronologica exhibere.

De Annis Mundi.

A Mundo Condito ad Diluvii initium, numerantur anni 1656. Annos autem qui ibi numerantur completos esse, patet ex vita Methusalæ, juxta illam quam habemus computationem Gen. 5. cujus ultimus annus concurrit cum anno Mundi 1656, uti illa computatione liquet. A diluvio autem inchoato ad Arphaxad natum numerat Helvicus annos 2, atque inde ad Tharam annos 220, inde autem ad Abrahamum natum, annos 70, quem annorum numerum colligit ex ea supputatione quæ habetur, Gen. cap. 11. Inde autem ad Promissionem datam (cujus mentio facta est Gen. 12.) numerat annos 75. propter Gen. cap. 12. v. 4. saltem annos completos 74. Hinc autem ad Exitum ex Ægypto numerat annos 430. juxta quod habetur Galat. 3. ver. 17. & Exod. 12. ver. 41. Ab exitu autem ad Templum Salomonis numerat itidem annos 480. Inde autem ad Christum natum numerat annos completos 1015. Unde etiam ad initium Æræ Christianæ vulgaris sive Dionysianæ annos adhuc 2 elapsos autumat. Atque inde ad annum præsentem (quo hæc scripta fuerant) completum numeramus 1655. Adeoque, numeris omnibus simul additis, fuerunt juxta Chronologiam Helvici (qui in plerisque cum Calvisio & Scaligero consentit) ab Orbe condito ad annum præsentem (inclusive) anni 5604, uti ex calculo adjuncto patet.

A Mundo Condito,	Anni.
Ad Diluvium.	1656
Inde ad Arphaxad.	2
Inde ad Tharam.	220
Inde ad Abrahamum.	70
Inde ad Promissionem.	74
Inde ad Exitum ex Ægypto.	430
Inde ad Templum.	480
Inde ad Christum natum	1015
Inde ad Æram Dionys.	2
Inde ad annum præsentem.	1655
Millia	3
Centuriæ	22
Decades	38
Unitates	24
Summa	5604

Verum, ni fallor, calculus ille Helvici est aliquot in locis emendandus, ut cum veritate historica melius consentiat. Ego pauca tantum, circa Abrahami præsertim tempora, leviter attingam, exercitii gratia; (non enim expectandum est ut totam Chronologiam in transitu emendandam suscipiam.)

De Nativitate Axphaxad.

Incepit diluvium (uti ex *Gen. cap.* 5. constat) anno mundi completo 1656, currente vero 1657. (mense secundo) Annos enim qui *Gen. cap.* 5. numerantur completos esse, patet ex vita Methusalæ, quæ, si secus esset, ultra diluvii initium proroganda esset; incidit enim ejusdem annus ultimus in annum mundi 1656. Adeoque ille mensis secundus in quo incipit, est anni mundi 1657 currentis & anni vitæ Noachi 601 currentis. Duravit autem diluvium per annum integrum, & quod excurrit, adeoque finitum est post annum Mundi completum 1657, sive anno mundi currente 1658. Deinde natus dicitur Arphaxad *biennio post diluvium*

Gen.

Gen. cap. 11. *v.* 10. cujus nativitatem incidiſſe putat Helvicus (aliique fere omnes) anno mundi completo 1658, hoc eſt, biennio poſt diluvium inchoatum. Quod ſi *biennio poſt diluvium* intelligatur de biennio poſt diluvium finitum, tum naſci dicendus erit Arphaxad anno mundi 1659 completo, ſive anno 1660 currente ; nempe uno anno ſerius quam vult Helvicus. Fateor interim voces illas *biennium poſt diluvium*, quanquam prima fronte potius diluvii finem quam initium ſpectare videantur, non tamen neceſſario eo trahendas eſſe ; præſertim cum phraſis eadem aliter interpretanda videtur *Gen. cap.* 9. *v.* 28. *vixit autem Noachus poſt diluvium annos* 350 ; nempe, *poſt diluvium inchoatum* ; ut patet ex collatis *Gen. cap.* 7. *v.* 6. & *cap.* 9. *v.* 28, 29. Adeoque ſi de Arphaxad, *biennio poſt diluvium* nato, biennium illud rectius à diluvii initio inchoandum, quam ab ipſius fine judicaverint Viri docti, non ego repugno ; quanquam etiam non deſint qui & alterum ſenſerint.

De Nativitate Abrahami.

Deinde, poſt natum Arphaxad, ad Tharam uſque, tranſierunt (ut conſtat ex *Gen. cap.* 11.) anni 220. Tharam vero 70 annos natum reputat ille (cum Euſebio & Scaligero) cum genuerit Abrahamum ; quia nempe dictum eſt, *Gen. cap.* 11. *v.* 26. *Vixit Tharah* 70 *annos & genuit Abrahamum, Nachorem, & Haranem.* At vero non inde certo concludimus *Abrahamum* (quamvis primo nominatum) aut natu maximum fuiſſe, aut eo anno natum, ſed eorum ſaltem alterum tunc fuiſſe natum. Et quidem Haranem, licet ordine ultimum, aliunde colligimus fuiſſe natu primum, utpote cujus duæ filiæ Milcah & Iſcah (quam eandem & Saram dictam eſſe colligitur ex comparatis *Gen. cap.* 11. *v.* 29, 30. & *cap.* 20. *v.* 12. quam etiam eodem ſenſu ſororem vocat *Abrahamus* quo & *Lotem* fratrem, *Gen. c.* 13. *v.* 8. & *c.* 14. *v.* 12, 14. unde etiam videtur Harani atque Abrahamo licet eundem patrem Tharam, non tamen eandem fuiſſe matrem ;) Nachori & Abrahamo nuptæ fuerint ; & quidem Sarah ſive Iſca nonniſi 10 annis Abrahamo natu minor, ut patet *Gen. cap.* 17. *v.* 17. Quot autem annos natus Thara Abrahamum genuerit, ſic colligimus. Thara ex Ure Chaldæorum cum Abrahamo profectus Harane (ſive Charris) mortuus eſt, natus annos 205, *Gen. c.* 11. *v.* 31, 32. Unde mortuo Thara deceſſit Abrahamus tunc annos natus 75, *Gen. c.* 12. *v.* 4. Si igitur Abrahami annus 75 coincidat cum Tharæ anno 205 (aut ſaltem hunc annum non præceſſerit,) fuit Thara ſaltem annorum 130 quum Abrahamum genuerit ; adeoque 60 annis integris ſerius quam vult Helvicus &c. Qui plura hac de re quærit, videre poterit, totam hanc quæſtionem ſatis prolixe agitatam apud D. *Gualterum Raukigh* Equitem Anglum, in ipſius *Hiſtoria mundi*, Anglice edita.

De Promiſſione facta.

Tum demum ſupponit Helvicus (ut & *Euſebius, Scaliger, Calviſius &c.*) Abrahamo 75 annos nato promiſſionem factam eſſe, tot enim annos natus dicitur Abrahamus quum Charris exceſſerit *Gen. c.* 12. *v.* 4. At vero non ab *Abrahami* deceſſu ex Charane reputanda eſt Epocha promiſſionis datæ, ſed altius omnino repetenda eſt dum adhuc eſſet Ure Chaldæorum, ut liquet ex Actor. *cap.* 7. *v.* 2, 3. priuſquam Charanem omnino advenerat. Adeoque & promiſſionis recenſio *Gen. cap.* 12. *v.* 1, 2, 3. facta, quanquam in ordine hiſtoriæ poſterior ſit, quam profectionis prius memoratæ *cap.* 11. *v.* 31. tamen ordine temporis promiſſio illa hanc profectionem præceſſit ; eaque ὑστερολογία juſtum rerum ordinem turbare non debet, cum ſit tantum αἰτιολογία profectionis prius per prolepſin memoratæ. Abrahamum vero poſtquam Ure Chaldæorum exceſſerat Charane aliquamdiu commoratum fuiſſe ſatis innui videtur in ipſa hiſtoria, quæ recenſetur *Gen. c.* 12. præſertim *v.* 5. quanto autem tempore iſtic permanſerit, non ἐντῶς ibidem affirmatur, ſed ex circumſtantiis colligitur fuiſſe per ſpatium circiter quinque annorum ; ſaltem à promiſſione data in Ure Chaldæorum, ad Abrahami ex Charris deceſſum annos elapſos eſſe quinque. Quod confirmatur ex collatis, *Gen. cap.* 15. *v.* 13. & *Act. cap.* 7. *v.* 6. cum *Exod. cap.* 12. 40, 41. & *Gal. cap.* 3. 17. Quæ loca, quamvis primo aſpectu inter ſe pugnare videantur, cum in illis mentio facta annorum tantum 400, in his autem annorum 430 : tamen, ſi penitius introſpiciamus, optime conveniunt ; & ſimul nodum illum quem præ manibus habemus, de Abrahami mora in Charris, feliciter ſolvunt. In illis *Gen. cap.* 15. & *Act. cap.* 7. dicitur Abrahami ſemen, ſive poſteros, peregrinos fore in aliena terra per annos 400 : In his autem annorum præciſe 430 mentio facta eſt ; Nempe *Exod.* 12. *v.* 40, 41. dicitur, Iſraelitas ſive filios Iſrael, exactis annis 430, eodem ipſo die, Ægypto exiiſſe : & *Gal. c.* 3. *v.* 17. legem, 430 annis poſt promiſſionem datam, fuiſſe promulgatam. Sed notandum eſt, annos illos

illos 400, de Abrahami ſemine, ſive poſteris, (non de ipſo Abrahamo,) ſignanter dictos; adeoque ab Iſaaco nato, (nam de Iſmaele, ejuſque poſteris non agitur;) cum Abrahamus annum jam centeſimum compleverat, numerandos eſſe: At ubi annorum 430 mentio facta eſt, ad ipſam promiſſionem factam, ipſamque Abrahami profectionem primam reſpiciendum eſt, (uti ex locis ipſis patet;) quæ propterea annis 30 præceſſit nativitatem Iſaaci, adeoque Abrahami anno 70 completo facta eſt, 5 annis priuſquam Charane exceſſit. Adeoque & hic emendandus erit calculus Helvici, &c. abjectione annorum 5, vel ſaltem annorum 4, propter annos tantum 74 completos ab ipſo Helvico numeratos. Alia ſiqua ſint animadvertenda, intacta prætereo; cum non ſit mihi animus omnes Chronologiæ difficultates excutere. Sufficit ſpecimen aliquod exercitii gratia exhibuiſſe, paucas has emendationes innuendo; juxta quas ſi corrigatur calculus Helvici, annum præſentem, annum ab Orbe Condito 5661, exhibebit; vel ſaltem, (ſi omittatur adjectitius ille ad Arphaxadi natales annus) annum 5660.

	Anni
Ad Diluvium.	1656
Ad Arphaxad.	2 + 1
Ad Tharam.	220
Ad Abrahamum.	70 + 60
Ad Promiſſionem.	74 — 4
Ad Exitum.	430
Ad Templum.	480
Ad Chriſtum.	1015
Ad Æram vulgarem	2
Ad annum præſentem	1655
	5604 + 61 — 4
	5661

Priuſquam autem rem hanc dimittam, prout annum mundi addendo inveſtigavi, libet etiam tempus, quo Iſraelitæ Ægypto permanſerint, ſubducendo inquirere.

De Iſraelitarum mora in Ægypto.

Præmittendum autem, verba illa Exod. cap. 12. ver. 40. ומושב בני ישראל אשר ישבו במצרים שלשים שנה וארבע מאת שנה *Et incolatus Iſraelitarum* (ſive, *filiorum Iſrael,*) *qui commorati ſunt in Ægypto, fuit quadringentorum & triginta annorum: &c.* caute interpretanda eſſe. Non enim id volunt, quod Iſraelis poſteri per totos 430 annos in Ægypto permanſerint: ſed quod Familia iſta, (ex Abrahamo nempe ejuſque poſteris conſtans, quam Deus ex aliis omnibus ſibi ſpeciali modo ſelegerat;) quæ nunc paſſim *Iſraelitarum,* ſive *filiorum Iſrael,* nomine celebratur, (quæque jam aliquandiu in Ægypto fuerant inquilini, & duram ſervierant ſervitutem;) ex quo primum patriam ſuam Dei juſſu reliquerunt, inquilini erant (in aliena terra) per annos 430. *Exactis autem annis illis* 430, *eodem ipſo die egreſſi ſunt, &c.*

Cum igitur conſtet, totam eorum peregrinationem, (ab Abrahami prima profectione ex Ure Chaldæorum, ad Iſraelitarum exitum ex Ægypto computandam,) fuiſſe annorum 430. Quærendum reſtat quot ex illis annis ante Jacobi deſcenſum in Ægyptum tranſierant; ut conſtet quantam moram ipſius familia in Ægypto fecerint.

Dicimus igitur, A promiſſione data ad natum Iſaacum elapſos eſſe annos 30, (uti ex jam dictis patet:) Iſaacus autem annos 40 natus duxit Rebeccam; ex qua poſt annos adhuc alios 20, ſuſcepit Jacobum, uti patet *Gen. cap.* 25. *v.* 20, 26. Jacobus autem natus annos 130 cum familia ſua in Ægyptum deſcendit, ut patet *Gen. cap.* 47. *v.* 9. Quibus omnibus ex annis 430 ſubductis reſidui ſunt anni 210 quibus in Ægypto commorati ſunt. Neque tamen toto hoc tempore in ſervitutem redacti ſunt; ſed quamdiu vel Joſephus ipſe vixit (nempe per annos adhuc 71) aut etiam ipſius σύγχρονοι qui ipſum noverant, (quibus fortaſſe anni adhuc circiter 30 concedendi,) proſpere vixerunt; uti patet *Exod. cap.* 1. *v.* 6, 7, 8. adeoque ſuperſunt anni circiter 110 intra quos duram illam ſervitutem perpeſſi ſunt: num autem per totum hoc annorum 110 ſpacium male habiti ſint non certum eſt, (quia de præciſo initio iſtius malæ tractationis non conſtat) at per eorum longe majorem partem duraſſe perpeſſiones liquido conſtat. Nam Moſes annos 80 compleverat, quando coram Pharaone comparuit eorum dimiſſionem poſtulans, ut dictum eſt *Exod. cap.* 7. *ver.* 7. qui tamen ipſe natus eſt poſt inceptam illam ſervitutem, & quidem flagrante perſecutione, ut liquet *Exod.* 2. Non igitur ſtatim ab ipſo initio ſervitutis, nam multa prius tentata ſunt priuſquam eo deventum eſt. Nempe primo dura ſervitute conati ſunt Ægyptii Iſraelitarum animos domare, experturi num hac ratione eorum forte numerus minui poſſet, ut

	430
	30
	40
	20
	130
	220
	210

De duræ ſervitutis initio.

liquet *Exod.* 1. *v.* 10. &c. Cum vero hoc neutiquam ex animo ſucceſſit, quin adhuc etiam auctis oneribus eo magis multiplicati ſint: Obſtetricibus (clam, ut videtur) in mandatis datum eſt ut filios eorum in ipſo partu ſtrangularent, filiabus interim ſalvis: adeoque ſecreta fraude parentibus interim ipſis vix advertentibus,& nihil forſan mali ſuſpicantibus, filios etiam ab ipſo partu eriperent. Hoc autem ipſis obſtetricibus clanculum in mandatis datum, & quidem clam perpetrandum eſſe, ideo præſertim ſuſpicor,(licet illud totidem verbis non affirmetur;) quoniam ſi aperte vellent, & palam profeſſi, infanticidium illud aggredi,potuiſſet aliis quibuſvis Rex illud in mandatis dediſſe non minus quam obſtetricibus; & forte melius, cum mulieri tale quid aggredienti facile poſſet vel viribus reſiſti; quid quod & ea quam poſtea in ipſarum defenſionem obtendunt excuſatio, nullius eſſet momenti; ſive enim priuſquam ſive poſtquam ipſæ venerint naſceretur infans, quid hoc impedire poſſet, ne, ſi illud palam profiteri vellent, ipſum ſtrangularent; aut, ſi vi fuiſſent impeditæ ne illud facerent, hanc ipſam vim potius cauſatæ eſſent cur regis mandato minus fuiſſent obſequentes. Videtur igitur infanticidium illud, quod palam profiteri puderet, obſtetricum curæ commiſſum fuiſſe, ut quæ clanculum nec obſervatæ nec quidem ſuſpectæ illud ſecreto poſſent in ipſo partu aſſequi. Illæ vero inhumanum illud facinus deteſtatæ, cum non auſæ eſſent regis mandato palam contraire, aut diſertis verbis renunciare, tamen rem diſſimulandam putarunt, quod & fecerunt, infantes etiam maſculos in vivis conſervantes. Cauſatæ interim (fortaſſis) ſe ſatis fideliter quantum in ipſis erat negotium illud curaſſe, & quidem infantium non paucos reapſe mortuos eſſe (vix enim credibile eſt, etiam Hebræorum fœminas nunquam feciſſe abortum, aut infantes nunquam in partu periiſſe;) quod ſuæ deberi curæ credi poſſet; verum quod illud non ſemper fieret ipſis non dandum eſſe vitio; cum Hebrææ mulieres vegetæ eſſent, & quidem ipſis Ægyptiis multo vegetiores (quod & ipſum non eſt improbabile, ſed certum potius putandum; cum partim dura earum ſervitus etiam huc facere poſſet, nemo enim neſcit laboratrices mulieres mollibus & delicatulis vegetiores eſſe, & quidem in ipſo partu minus non raro vel difficultatis vel periculi ſubire; partim etiam divinæ benedictioni inſigni id deberetur,) adeo quidem ut obſtetricis ope vix indigerent, & non raro antequam ipſa advocari poſſet peperiſſent, unde deeſſet opportunitas etiam maxime volentibus illud quod à rege in mandatis acceperant exequendi. Atque hanc poſteriorem excuſationis etiam partem eas obtendiſſe, ſatis conſtat, cum illud diſertis verbis affirmetur, & quidem vix dubitandum eſt quin & reliquam obtenderint. Quam quidem excuſationem, quamvis non ſola cauſa fuerit (uti liquet ex elogio quod ipſis largitur Deus) non tamen plane fictam arbitror, aut eas hac in re, quantum ego video, mendacii reas; quod tamen non paucos video, quaſi in confeſſo eſſet, non plane quidem approbantes, ſed ſaltem temperare ſatagentes. Cum vero neque hoc ſecundum conſilium ſucceſſum quem voluit obtinuerit, quin Hebræorum numerus adhuc creverit, tum tandem re non diutius diſſimulata, quod prius clandeſtina fraude & perfidia rex aggreſſus erat, palam atque ex profeſſo denunciavit, publico edicto toti populo imperans ut Hebræorum infantes maſculi mergerentur flumine, ſolis femellis ſalvis. Quantum autem temporis inſumpſerit, duobus illis prioribus experimentis, (quæ certe aliquot annorum moram poſtulabant priuſquam conſtare poſſet quem eſſent exitum habitura,) non conſtat. At certe tertium illud facinus jam erat ſuſceptum, & (uti videtur) aliquandiu obtinuerat (licet quamdiu non conſtet) priuſquam natus erat Moſes. Unde certum eſt non primo ſtatim initio durioris iſtius ſervitutis, ſed poſt annos potius aliquammultos natus dicendus eſt. Et propterea probabili ſatis conjectura judicare poſſumus per centum plus minus annos rigidam illam duraſſe ſervitutem; ſaltem vix pauciores quam 90 aut plures quam 110.

Numerus deſcendentium in Ægyptum.

Quamvis autem, uti dictum eſt, durioris iſtius ſervitutis duratio non ita accurate determinari poſſit; attamen (ut ſuperius oſtenſum eſt,) tota Iſraelitarum in Ægypto mora, ex quo Jacobus cum ipſius familia in Ægyptum deſcendit, ſatis conſtat; nempe annorum 210. In hoc autem 210 annorum ſpacio (quod mirum eſt dictu) 70 perſonæ tam ſtupendo augmento in tam immenſum numerum creverunt, ut omnem fere expectationem ſuperaverit. *Septuaginta perſonæ*, inquam. Tantus enim erat totus Iſraelitarum numerus cum Jacobus in Ægyptum deſcendit, computatis interim tam ipſo Jacobo, quam Joſepho ejuſque liberis qui jam in Ægypto prius erant: prout viritim nominantur *Gen. cap.* 46. Nempe ex

liberis Leæ recenſentur nominatim 34, quorum cum duo (Er & Onan) jam antea mortui fuerint, (ut dictum eſt v. 12.) reliqui 32 cum ipſo Jacobo, ſunt 33, quem numerum habemus v. 15. Tum ex liberis Zilphæ recenſentur nominatim 16. (ut v. 19.) Ex liberis Rachelis, inter quos Joſephus ejuſque duo filii, numerantur 14 (ut v. 22.) Ex liberis denique Bilhæ, 7, (ut v. 25.) Adeoque totus omnium numerus, puta Jacobus ejuſque poſteri ex eo nati quotquot tunc in vivis erant, ſunt (33 + 16 + 14 + 7 =) 70, ut dictum eſt v. 27. atque iterum Exod. c. 1. v. 5. Deut. cap. 10. v. 22. Non ignoro quidem LXX Interpretes in locis illis habere ἑβδομήκοντα πέντε, ſed manifeſto, ut videtur, errore. Quem tamen lapſum ſequutus eſt Stephanus in ipſius oratione ad populum, uti illam habemus Act. 7. v. 15. Cum enim res eſſet levioris momenti, ipſique tunc temporis incubuerit ſumma brevitate uti, ſatius ipſi videbatur in re hiſtorica, (obiter tantum attingenda,) juxta receptam apud eos verſionem (quæ paſſim obtinuit) eandem repetere, quam ad importunam emendationem (quæ ad rem præſentem vix quicquam conferret) in illis temporis anguſtiis citra neceſſitatem divertere. Lucæ vero, qui hanc ipſius orationem, ſive potius ipſius ſummam recenſet, neutiquam incubuit narrationem illam (ſiquid inibi erratum eſſet) emendare, ſed ſatis ſuas egiſſe partes cenſendus eſt ſi orationem illam prout habebatur, fideliter recenſuerit. Neque enim expectandum eſt, ut, quotieſcunque in N. T. textus aliquis ex V. T. citatur, (juxta eam quæ tunc obtinuit verſionem,) ſinguli verſionis apices, re quæ præ manibus erat omiſſa, critice diſcutiantur. Satis eſt, ſi quem citant textum, quatenus ad præſens negotium applicatur, cum authentico textu Hebraico quoad ſenſum conveniat; quanquam fortaſſis in nonnullis apicibus non tam accurate ſuas partes egiſſent qui citantur interpretes. Qua de re videantur, ſi libet commentatores in locum.

In quam immenſam autem 70 illæ perſonæ multitudinem eruperint intra 210 annorum ſpacium, ſatis liquet ex ea quam habemus populi Iſraelitici recenſione, quando Ægypto exierunt. Nam Numeror. cap. 1. v. 46. Iſraelitis tributim computatis, reperti ſunt 603550 viri adulti, ad bellandum idonei, qui annum ætatis viceſimum compleverant; præter decrepitos ſenes, mulieres item, & infantes ſive etiam adoleſcentes, (quippe qui annum viceſimum nondum compleverant,) tota interim tribu Levi non numerata. Si vero numerus juniorum, qui nondum 20 annos nati, ſimul cum ſenibus ad bellandum ineptis, bellatorum numerum æquaſſe putemus (quod non iniquum eſt poſtulatum, cum ejuſmodi ni fallor, proportio in aliis etiam gentibus ſoleat occurrere; vix enim ſolet adultorum numerus, numerum ſimul puerorum, adoleſcentium, & ſenum, ſuperare,) atque horum numerus reliquis adjiciatur; reperietur numerus 1207100. His inſuper ſi adjiciatur totius numeri pars decima, pro tribu Levi, (quæ in priori catalogo recenſita non eſt,) exurgit omnium maſculorum numerus 1327810 circiter. Denique ſi fœminas judicemus maribus non fuiſſe pauciores, (quæ forte & multo plures eſſe poſſent, partim quod viri ſinguli non raro plures habuerint uxores, partim etiam quod eorum miranda multiplicatio & incrementum id ipſum ſuadeat, præſertim cum certum ſit ex infantibus maſculis non paucos flumine fuiſſe ſubmerſos,) earumque numerus numero marium adjungatur, emerget numerus omnium 2655620. Nempe *bis millena millia, ſexcenta quinquaginta & quinque millia, cum ſexcentis & viginti*; ſeu potius juxta ſtilum veterum Romanorum, (qui centena millia ſolebant numerare,) *vicies & ſexies centena millia, quinquaginta inſuper & quinque millia, cum ſexcentis adhuc & viginti.* Cumque hi omnes fuerint ſimul ſuperſtites; ſi illis ulterius annumerentur omnes qui interea temporis demortui fuerint, numerus in immenſum eſſet ampliandus. Hos autem omnes ex 70 (uti dictum eſt) perſonis intra 210 (aut ad ſummum 220) annorum ſpacium deſcendiſſe, tam incredibile prope, & ſtupendum plane eſt incrementum, ut nulla iſtius vel probabilis cauſa aſſignari poſſit, præter inſignem illam benedictionem Abrahamo divinitus promiſſam, Gen. cap. 15. v. 5. *Intuere verſus cœlum, & numera ſtellas ejus, ſi poſſis eas numerare*; *nempe ſic*, inquit, *erit ſemen tuum.* Quod & mirifice adimpletum eſt: Quicquid enim ſit de arenulis ad maris littora poſitis, certe numerum ſtellarum, quas Abrahamus in firmamento ſimul intueri poſſet, longe ſuperat ipſius poſterorum multitudo. Cum enim numerus ſtellarum, quas

603550
603550
1207100
120710
1327810
1327810
2655620

facile notare poteſt oculus intuentis, ultra unum mille non multum excedat, (numerari ſiquidem ſolent 1022, in tabulis Aſtronomicis,) quarum etiam non niſi pars media, uno ſcilicet hemiſphærio contentæ, ſimul intuendæ patent; unius Jacobi poſteri (Iſmaelis interim & Eſavi poſteris, utut numeroſis, ne quidem nominatis, nec qui à Ketura deſcenderunt,) qui uno atque eodem hoc tempore vixerunt (omiſſis interim iis qui vel antea fuerant demortui, vel etiam per omnia deinceps ſecula naſcituri) numerum illum plus quam bis millies ſuperavit.

Non diſſimulandum interim eſt, hanc ſupputationem ſupra memoratam, non immediate poſt exitum ex Ægypto factam fuiſſe, ſed poſt integrum annum, ineunte ſcilicet anno ſecundo, (die primo menſis ſecundi) uti conſtat *Num.* cap. 1. v. 1. Verum hoc non adeo magni momenti eſſe judico, cum eorum numerum eo anno non admodum auctum fuiſſe cenſendum erit; partim propter inſignem illam cladem quam interim paſſi ſunt, (Exod. cap. 32. v. 28, & 35.) ob vitulum aureum; partim etiam quod eundem circiter numerum habemus Exod. c. 12. v. 37. licet non accurate ſupputatum; dicitur enim ibidem Ægypto eadem nocte exiiſſe, ex Iſraelitis, viros adultos circiter 600000; numerantur autem (ut diximus) anno ſequenti præciſe, 603550.

Atque hæc quidem obiter dixiſſe ſufficiat, quo anſam arriperem Additionis atque Subductionis praxin in exercitium revocandi.

CAP. XVIII.

De multiplicatione, Quid ſit. Quid, Multiplicandus, Multiplicator, Factus. Quid Multiplum, Pars, Partes, Aliquota pars, Aliquanta pars. Multiplicatio ſenſu ſtricto, & ſenſu laxo ſumpta. Non ſemper numerum auget. Multiplicatio eſt multiplex additio. Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici poteſt. Multiplicationis praxis: in numeris ſimplicibus; in numeris compoſitis; in partibus decimalibus. De Indice numeri Facti.

POſt abſolutam in prioribus Numerorum Additionem & Subductionem, eorundem *Multiplicationem* tradendam aggredior.

Multiplicatio quid? Eſt autem Multiplicare, *Numerum invenire, qui numerum datum toties contineat quoties requiritur.* Sive *Numerum invenire qui datam rationem (ſive proportionem) habeat ad numerum datum.* Puta, ſi quæratur numerus qui ſit numeri cujuſvis dati *duplus, triplus, quadruplus, decuplus, vigecuplus, centuplus, millecuplus,* aut quavis alia ratione ſeu proportione datum numerum ſuperet: vel (quod perinde eſt) qui numerum datum *bis, ter, quater, decies, vicies, centies, millies,* aut quotieſcunque contineat: Multiplicatio docet quæſitum numerum invenire. Vel etiam (ſi ulterius libeat quam ad ſolos numeros multiplicationis vocem extendere) *multiplicare* eſt, *datum quantitatem in data ratione augere,* ſive *Quantitatem deſignare, quæ datam toties contineat, quoties requiritur*: aut etiam univerſalius *Datæ alicui quantitati aliam in data ratione exhibere.*

Multiplicandus. Numerus datus ille, cui in data proportione quæritur alius, (puta cujus duplus, triplus, quadruplus, &c. quæritur,) dicitur *Multiplicandus,* πολλαπλασιαζόμενος.

Multiplicator. Numerus ille qui datam proportionem exprimit, (puta qui dicit quotuplus futurus ſit quæſitus numeri dati, ſive quoties, aut quot vicibus illum continere debeat,) πολλαπλασιάζων dicitur, hoc eſt *Multiplicans* ſive *Multiplicator,*

Factus. Numerus denique quæſitus dicitur γινόμενος, numerus *Factus,* ſive multiplicatione *Productus.*

Multiplicationis ſignum. Multiplicationis autem *Signum,* ſive *Nota,* ſive *Character,* hoc eſto ×. Nempe ut

1 10+2

10 + 2 Additionem innuit, sive numerum denarium binario auctum; & 10 — 2 Ablationem, sive Subductionem, nempe numerum denarium binario mulctatum, sive diminutum; sic 10 x 2 significat numerum denarium binario multiplicatum sive bis positum. Si itaque quæratur numerus qui numerum denarium *bis* in se contineat, hoc est, qui sit denarii *duplus*, seu qui in dupla proportione denarium superet: numerus Denarius dicetur *Multiplicandus*; numerus *Binarius* (qui datam proportionem exprimit) dicetur *Multiplicator*; numerus denique quæsitus (puta vicenarius) qui numerum denarium bis continet, *Factus* dicetur, seu *Productus*. Hoc est, si sit 10 x 2 = 20, erit 10 Multiplicandus, 2 Multiplicator, & 20 Factus, seu Productus.

His appellationibus intellectis, non erit difficile aliorum quas afferunt Multiplicationis definitiones intelligere; quales sunt hæ quæ sequuntur.

Multiplicare, est *numerum invenire, qui toties contineat Multiplicandum, quoties Multiplicans continet Unitatem.*

Item, Multiplicare, est *numerum invenire, qui eadem sit ratione ad Multiplicandum qua Multiplicans ad Unitatem.*

Has autem definitiones, aliasque ejusmodi, licet non ut falsas rejiciam, cum revera rem prout est exprimant; vix tamen usque adeo accommodas autumo. Cum enim Definitio sit definiti explicatio, debet ea per notiora procedere. Quid autem sit numerus *Multiplicandus*, *Multiplicans*, & *Multiplicatione factus*, non minus est ignotum quam quid sit ipsum *Multiplicare*. Qua etiam de causa non admittendam censui (in definitione nostra posteriori) ipsam *rationis* sive *proportionis* vocem, nisi & ipsam simul explicuissem; utpote quam nondum in præcedentibus ex professo exposueram.

Fateor interim ipsum Euclidem multiplicationem sic explicuisse, 15 *d* 7. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συγκεῖται ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γίνηταί τις. *Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso unitates, toties componitur* (numerus) *qui multiplicatur, atque* (ita) *factus aliquis emergit.* Verum hîc (si rite attendatur Euclidis scopus) non tam *Multiplicationem* definit, aut docet quid sit Multiplicare; sed exponit quid sibi velit apud illum phrasis illa cum dicitur *numerus numerum multiplicare*, (cujus quidem voces singulæ supponuntur prius fuisse cognitæ;) atque hoc quidem postquam exposuisset quid sit *ratio*, & speciatim quid sit πολλαπλάσιον seu *multiplum*, adeoque & quid significet πολλαπλασιάζειν notum est.

At meum est, non tam aliorum definitiones reprehendere, quam res ipsas explicare: adeoque mihi sufficit si vel ex eorum vel ex meis verbis res eadem quam & ego & illi volunt percipiatur: neque enim mihi lubitum est de verbis litem movere, ubi de re convenit, licet interim & verborum delectum adhibendum esse non diffiteor.

Multiplicatio stricte sumpta, quomodo intelligenda.

Notandum autem est, ubi in explicatione definitionis nostræ dictum est, quod numerus multiplicatione quæsitus, sive etiam inventus, (*Factus* nempe) numerum datum (quem *Multiplicandum* diximus,) *bis, ter, &c. contineat*, vel in data ratione *superet*: non hoc temere dictum est: Quoniam in primaria vocis notione illud tantum intelligitur. Atque hoc quidem ipsa voce satis innuitur, nam *Multiplicare* sive πολλαπλασιάζειν, est numerum dati *multiplum* seu πολλαπλάσιον invenire. Quid autem sit πολλαπλάσιον seu *multiplum*, ut & è contra, quid sit μέρος sive *pars*, (seu, ut vulgo dicimus, *aliquota pars*,) definit Euclides 1 & 2 *d d* 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor metitur majorem: Multiplex autem est major minoris, quando minor metitur majorem*: uti Commandinus & Clavius exponunt. Vel (aliquanto forsan explicatius, neque minus κατὰ τὸ ἐφικτόν,) *Magnitudo minor Magnitudinis majoris Pars est* (aliquota) *quando majorem metitur*, (mensurat, seu potius permetitur, permensurat, nempe quando aliquoties sumpta majori fiet accurate æqualis:) *Major autem minoris Multiplex est quando a minori* (sic) *mensuratur.* (Quod autem de Magnitudinibus hîc dicitur, id ipsum totidem verbis de Numeris habetur, 3 & 5 *d d* 7. Et quidem de quantitate qualibet perinde intelligi debet.) Nempe *Partis* vox non de qualibet totius particula seu membro dicitur, (uti cum ax. 9. dicitur *Totum esse majus sua parte*,) sed definita sive determinata significatione restringitur ad ejusmodi partem, quæ nunc dici solet *aliquota pars* (puta *pars tertia*,

Quid sit Pars & Multiplum.

tia, pars quarta, pars centesima, &c.) quæ nempe aliquoties sumpta toti fiet æqualis: si autem non poterit ita aliquoties repetita toti fieri æqualis, (sed semper vel major, vel minor,) non ipsius μέρος, seu *pars* (aliquota) dicetur, (hoc sensu,) sed potius *partes* μέρη, uti dicitur 4 d 7, μέρη δ' ὅταν μὴ καταμετρῇ: (Quam tamen definitionem de magnitudinibus non interposuit *lib.* 5. quoniam hoc de illis universaliter enunciari non posset; fieri enim potest ut magnitudo minor majoris neque *pars* sit, neque *partes*, quoties nempe toti est incommensurabilis: quod cum de numeris, proprie dictis, nimirum integris, de quibus solis hic agit Euclides, contingere non possit, ut qui sint omnes commensurabiles, cum saltem unitas eas omnes metiatur, necesse est ut numerus minor sit majoris vel *pars*, vel *partes*, hoc est partis aliquotæ aliquoties repetitæ aggregatum.) Sic verbi gratia, 2 est numeri 6 aliquota *pars* (puta triens, sive pars tertia,) quia $2+2+2=6$, hoc est numerus 2 ter repetitus æquatur numero 6; sed numerus idem 2 numeri 5 *pars* (aliquota) non est, quia si bis (aut rarius) ponatur est minor quam 5, si autem ter (aut sæpius) major erit quam 5; nam $2+2=4$ minor quam 5; $2+2+2=6$ major quam 5; adeoque numerus 2 numeri 5 non *pars* (aliquota) dicetur, sed *partes*, *puta* $\frac{2}{5}$ seu *duæ quintæ*; vel etiam, uti jam loqui solemus, *aliquanta pars* dici potest, sed non *aliquota pars*. Et similiter de *Multiplici* sive *multiplo* judicandum erit. Cum enim pars & multiplum sint relata, ex uno cognito cognoscetur reliquum: est enim Pars, multipli pars; & Multiplum, est partis multiplum; quod propterea partem aliquoties præcise continere debet, puta bis, ter, quater, aut sæpius.

Multiplicatio laxiori sensu accepta.

Quoties igitur multiplicatio per unitatem, aut numeros fractos, aut etiam surdos, puta per 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\sqrt{3}$. &c. occurrit: *Multiplicationis* vox latiori sensu intelligenda erit, & καταχρηστικῶς· neque alio sensu illud dici potest quam quo 1, aut etiam $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\sqrt{3}$, &c. numeri aut multitudines dici possunt.

Qui enim quantitatem quamlibet per unum multiplicat, hoc est, semel (præcise) ponit; non proprie multiplicare dicendus est, seu multoties ponere, sed eandem simpliciter quantitatem retinet; neque quod hac multiplicatione producitur est proprie expositæ quantitatis Multiplum, sed potius ea ipsa; (nisi & Æquale, eo sensu Multiplum esse dicatur, quo Unum supra contendimus esse Numerum; quod si dicatur, ego non repugno.) Atque hinc est quod dici solet, *Unitatem neque multiplicare neque dividere*; quia nempe sive multiplicemus sive dividamus per unum, quantitas ea multiplicatione aut divisione non mutatur, sed eadem quæ prius manet: non minus quam in Additione aut Subductione, ciphra seu 0, nihil mutat. Nam ut $2+0=2$, & $2-0=2$, sic $2\times 1=2$, & $\frac{2}{1}=2$. Estque potius multiplicationis aut divisionis negatio, quam multiplicatio aut divisio.

Qui autem, per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicare supponitur, non tam revera multiplicare dicendus est quam dividere (ut infra melius patebit, ubi Divisionis naturam exposuerimus,) nam sicut qui multiplicat per 2, 3, 4, &c. datæ quantitatis quærit duplum, triplum, quadruplum, &c. sive expositam quantitatem bis, ter, quater, &c. ponit: sic qui per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicat, non nisi datæ semissem, trientem, quadrantem, &c. quærit; neque ipsam quantitatem, nedum ipsius multiplum, sed ipsius saltem semissem, trientem, quadrantem, &c. exhibere putandus est, hoc est revera dividere per 2, 3, 4, &c. Adeoque ut qui quantitatem negativam supponitur Addere, (puta qui numero 4 adjungit -2,) reapse Tollit; (minuit enim, non auget; est enim $4-2$, minus quam 4; & tantundem est atque tollere 2:) ita qui per $\frac{1}{2}$ (aut aliam quamlibet aliquotam partem) supponitur Multiplicare, reapse Dividit; tantundem enim est atque per 2 dividere. Ut enim Additioni Subductio, sic Multiplicationi Divisio est contraria.

Tandem; qui per $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. multiplicare supponitur, partim multiplicat, partim dividit; nempe multiplicat per 2, 3, &c. (numeratores,) & per 3, 4, &c. (denominatores) dividit: Sicut qui addere supponitur $4-2$, partim addit, partim aufert; nempe addit 4 & aufert 2. Ut & qui multiplicare supponitur per $\sqrt{3}$, duo facit, nempe quadratum multiplicat per 3, & radicem quadraticam educit. Verum hæc omnia rectius percipientur ubi de numeris Fractis, & Surdis dictum fuerit: at interim hæc expedit subinnuisse, ut intelligatur quid per *Multiplicationem* strictissimo sensu sumptam, & quid sensu laxiori intelligi debeat. Ut autem Multiplicationis nomen, sic & Definitio nostra utrique ut opus est accommodari potest.

Non semper auget numerum.

Et propterea Multiplicatione, laxiore sensu sumpta, non semper augetur numerus, aut

aut multiplum producitur, (quanquam illud vi vocis perhiberi videatur, impoſito nempe nomine, à famoſiori ſignificato.) Cum enim in multiplicatione ſupponitur numerus Multiplicandus toties poni, quoties innuit Multiplicator; ſive (quod tantundem valet) numerus multiplicatione Factus toties contineat Multiplicandum quoties Multiplicator continet Unitatem: Prout Multiplicator major ſit aut minor quam Unitas, aut etiam ipſi æqualis; ita numerus Productus ſive Factus major eſt aut minor quam multiplicandus, aut ipſi æqualis. Nam qui quantitatem præciſe ſemel ponit (hoc eſt, multiplicat per 1,) eandem neque auget neque minuit; qui autem pluſquam ſemel ponit (ubi nempe multiplicator eſt major quam 1,) ille auget; qui autem minus quam ſemel ponit (ſive qui multiplicat per quid minus quam 1) ille ſic multiplicando minuit.

Patet autem, ex jam traditis, Multiplicationem (ſaltem ſtricte ſumptam) vix aliud eſſe quam multiplicem additionem, ſive additionis compendium. Idem enim eſt triplicare aut per 3 multiplicare, atque quantitatem ter ponere; adeoque Factum iſtius multiplicationis tantundem erit, atque hujus additionis Aggregatum; & ſimiliter in aliis. Puta $2\times2=2+2$. $2\times3=2+2+2$. $2\times4=2+2+2+2$. &c. ut patet. Ubi etiam obiter notetur, numerum binarium ſive ſui adjectione, ſive in ſeipſum multiplicatione, tantundem augeri; nempe $2+2=2\times2$: quod in ſolo numero binario contingit. *Multiplicatio eſt multiplex Additio.*

Porro, in numerorum multiplicatione, uti ex dictis item patet, duos numeros notos eſſe, ſive datos, conſtat, nempe *multiplicandum* & *multiplicantem* (ſive multiplicatorem;) tertium quæſitum eſſe, quem *Factum* ſive *Productum* diximus. Sciendum tamen eſt, perinde omnino eſſe ſive hunc ſive illum ex datis multiplicandum aut multiplicantem dicamus; idem enim omnino prodibit Factus, utervis datorum dicatur multiplicandus. Tantundem enim eſt ſive velimus Quatuor Ter ponenda, ſive Tria Quater, utrobique enim exurgunt Duodecim. Hoc eſt $4\times3=3\times4$. Et ſimiliter in aliis. Quod quidem totidem punctis, eo quem hic videas ordine poſitis, ſatis demonſtrari poterit: ſive enim ſeriebus tranſverſis numeremus ter quatuor, ſive ſeriebus erectis quater tria, idem erit utrovis modo punctorum omnium numerus: ut patet. Atque hoc ipſum Euclides oſtendit 16 *e* 7. *Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici poteſt.*

. . . .
. . . .
. . . .

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζοντες ἀλλήλους, ποιῶσί τινες, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται. *Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes aliquos effecerint, numeri ſic facti, erunt inter ſe æquales.* Hoc eſt, ſi numerus A multiplicet B, ut fiat $B\times A$; & vice verſa numerus B multiplicet A, ut fiat $A\times B$; numeri ſic facti, erunt invicem æquales, nempe $B\times A=A\times B$. Cujus ulteriorem demonſtrationem, ſi noſtra non ſufficiat, videat cui libet apud Euclidem loco citato.

Quum igitur Arithmeticæ practicæ magiſtri non raro docent ex numeris datis, Majorem dicendum eſſe Multiplicandum, & præponendum eſſe: Minorem vero Multiplicantem, & ſubſcribendum eſſe: non tamen illud putandum eſt aut ſemper aut neceſſario faciendum eſſe, ſed prout ſibi commodius putaverit calculator: quamvis enim nonnunquam expedire videatur, nulla tamen neceſſitate imperatur.

Denique monendum inſuper eſt, duos illos numeros datos, quos *Multiplicandum* & *Multiplicantem* diximus, non raro apud Arithmeticos uno nomine *Factores* dici, ſicut qui multiplicatione producitur dicitur *Factus*. Item Factores illi *invicem duci* ſive *Multiplicari* dicuntur. Idem enim omnino eſt *numerum in numerum ducere*, atque *numerum per numerum multiplicare*. Item numerus multiplicatione productus ſive factus, non raro dicitur *Rectangulum*, vel *Planum*, vel etiam *numerus planus*; Metaphora nempe ex Geometricis ducta, ubi ex ductu longitudinis in latitudinem habetur planum ſive area Rectanguli vel Parallelogrammi.

Atque hactenus multiplicationis naturam ſatis videar expoſuiſſe, ſeu quid ſit Multiplicatio: ſupereſt ut ipſius etiam Praxin oſtendam, ſive quomodo ſit multiplicandum.

Monendum autem & hic eſt de Multiplicatione, quod de Additione & Subductione ſupra monuimus; eam nempe vel in numeris ſimplicibus (unius tantum figuræ) vel in numeris Compoſitis (figurarum plurium) exerceri. *Multiplicationis praxis.*

Quod ad numerorum ſimplicium multiplicationem attinet, ea vel ex memoria petenda eſt, vel ex Additionis principiis repetenda, uſque dum uſus & exercitatio eam familiarem reddiderint. Ita ſiquis neſciat quot ſint ter tria, vel ſepties octo; poterit ille tres numeros ternarios, vel ſeptem octonarios ſimul, addere; & pariter in *Simplicium numerorum multiplicatio.*

in aliis. Sunt enim, ut jam oſtendimus $3+3+3=3\times3$, & $8+8+8+8+8+8+8+8=8\times7$. Et ſic in cæteris.

Ne autem ejuſmodi additiones ſæpius ſint à tironibus repetendæ, Tabellam quandam ſolent huic rei accommodatam compingere, unde ſingulas ſimplicium numerorum multiplicationes velut ex promptuario petere licet, qualem hic ſubjecimus. Cujus quidem Tabellæ demonſtratio quoad ſingulos iſtius numeros, ex Additionis fundamentis petenda eſt, ut modo oſtendimus.

Tabella Multiplicationis & Diviſionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In hac Tabella, numerorum invicem multiplicandorum altero in ſummitate ſeriei erectæ, altero in principio ſeriei tranſverſæ, reperto; locus ille in area tabellæ qui utrique ſeriei communis eſt numerum exhibet ex eorum multiplicatione factum. Puta ſi quæratur, quis numerus factus erit ex ductu 8 in 7; (ſeu multiplicatione 8 per 7:) in fronte tabellæ quæratur 8, & ad latus 7, (vel contra, numerus hic in fronte, ille ad latus,) & in communi ſerierum concurſu habebitur $56=8\times7$. & ſimiliter in aliis quibuſcunque.

Cum autem, uti ſuperius oſtendimus, perinde ſit utrumvis ex Factoribus *Multiplicandum* dicamus, idem enim utrovis modo prodibit; puta $8\times7=7\times8=56$. adeoque perinde etiam ſit utrumvis in fronte quæramus: poterit tabella ipſa in formam duplo fere minorem redigi, uti hic videtur. Ubi duorum numerorum invicem ducendorum major ſemper in fronte, minor ad latus quærendus ſit; & in utriuſque ſeriei concurſu habebitur, ut prius, numerus factus.

Tabella Contractior.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	9	12	15	18	21	24	27
		4	16	20	24	28	32	36
			5	25	30	35	40	45
				6	36	42	48	54
					7	49	56	63
						8	64	72
							9	81

Numerorum compoſitorum multiplicatio.

Ubi autem de ſimplicium numerorum multiplicatione conſtat, non erit difficilis ad compoſitorum multiplicationem progreſſus, ut quæ ex ſimplicium multiplicatione ſæpius iterata tota dependet; uti inductione patebit.

Ubi multiplicator eſt numerus ſimplex.

Sit igitur numerus 3421 duplandus, ſive per numerum 2 multiplicandus. Numero igitur multiplicando 3421, ſubſcribatur Multiplicans 2, & (ducta lineola) cuilibet figuræ numeri multiplicandi, ſubſcribatur ipſius duplum (quia nempe multiplicator eſt 2) eodem ſemper gradu cum illo cujus eſt duplum. Ita nempe

3421
2
6842

duplum unius unitatis ſunt unitates duæ; duplum duarum decadum ſunt decades quatuor; duplum quatuor centuriarum ſunt centuriæ octo; duplum trium millium ſunt millia ſex: qui quidem numeri in unam ſummam collecti, nempe 6842, ſunt totius numeri multiplicandi 3421 duplum.

duplum. Cum enim omnes partes ſimul æquentur toti; erunt etiam omnes partes bis ſumptæ, æquales toti bis ſumpto; hoc eſt, duplum partium omnium æquabitur duplo totius. Quæ quidem demonſtratio (mutatis mutandis) de triplo, quadruplo, quintuplo, aut quovis alio multiplo pariter valebit.

Si vero, in hujuſmodi proceſſu numerus cujuſvis loci ſeu gradus novenarium excedat, adeoque non ſit unica figura exprimendus; ultima iſtius figura ſuo loco ponenda eſt, ſuperiori interim in locum proxime aſcendentem protruſa, cum figura iſtius loci deinceps numeranda. Exempli gratia, ſi numerus idem 3421 per 8 multiplicandus ſit, ſingulæ figuræ numeri multiplicandi octuplandæ ſunt; earumque octupla ſuis quæque locis ſubſcribenda, & in unam deinde ſummam (habito locorum reſpectu) colligenda. Nempe Unitas 1 octuplata dat unitates 8, decades 2 octuplatæ dant decades 16, centuriæ 4 octuplatæ ſunt centuriæ 32, & 3 millia octuplata ſunt 24 millia. Quibus in unam ſummam Additione collectis, emergit totius numeri multiplicandi octuplum 27368 = 3421 x 8. ut patet.

```
3421
   8
------
   8
  16
  32
 24
------
27368
```

Poſſunt autem illa particularia ſingulorum locorum multipla, vel totidem diſtinctis lineis collocari, ut modo; vel potius in duas omnino lineas cogi ad hanc formam. Dummodo enim illud utrobique curetur, ut quælibet figura debito ſuo loco ſeu gradu collocetur, perinde eſt ſive illud duabus ſive pluribus lineis fiat; eadem ſiquidem additionis ſumma emerget.

```
3421
   8
------
3108
2426
------
27368
```

Verum & adhuc, ad commodius operationis compendium, poterit iſthæc additionis ſumma etiam currente multiplicationis opere colligi, (quamvis, perſpicuitatis gratia, diſtincte potius utramque operationem prima vice exponendam putaverim:) Nempe quoties figura quævis in ſuperiorem locum ſit transferenda, ea memoria retineatur, uſque dum nota quicum addenda ſit innoteſcat, ut utriuſque loco earum aggregatum ſcribatur. Ita, in ſuperiori exemplo, poſtquam in unitatum loco ponatur 8 (nempe figuræ 1 octuplum;) ſequuntur 16 decades (nempe duarum octuplum) quarum 6 decadum loco repoſitis, pro reliquis decem reſervo 1 centuriam: deinde 4 centuriarum octuplum ſunt centuriæ 32, quibus adjungenda eſt 1 (nuper reſervata) ut fiant centuriæ 33; quarum 3 centuriarum ſede poſitis, pro reliquis centuriis 30 reſervo 3 millia: His autem 3 millibus, ſi adjungantur millia 24, (nempe octuplum 3 millium in numero multiplicando repertorum,) emergunt millia 27, ſuis locis ponenda, ut in exemplo appoſito.

Adeoque ſatis declaratum eſt quomodo in multiplicandis etiam numeris compoſitis procedendum eſt, ſi modo multiplicator ſit numerus ſimplex, una figura ſcribendus.

```
3421
   8
------
27368
```

Si vero non modo numerus multiplicandus, ſed & Multiplicator ſit numerus compoſitus, duabus aut pluribus figuris ſcribendus; eadem quæ prius operatio toties repetenda erit, quot ſunt Multiplicantis figuræ; numerique ſic inventi (debita locorum ratione habita) in unam ſummam additione colligendi. Exempli gratia, ſi numerus idem 3421 per 28 multiplicandus ſit: poſtquam ſubſcripſerim totius octuplum (modo ſuperius tradito inventum) 27368; ſubſcribendum eſt inſuper ejuſdem duplum, ſeu potius vigecuplum. Nempe ipſius duplum (ut ſupra docetur inventum) 6842, ſi ciphram adjectam habeat (puta 68420) ſive, quod tantundem valet, uno gradu aſcendendo promoveatur, (ita nempe ut ipſius figura ultima ponatur loco decadum, penultima loco centuriarum &c.) habebitur iſtius dupli decuplum, (quælibet nempe figura uno gradu promota decuplum iſtius valoris habet quem prius obtinebat,) hoc eſt, expoſiti numeri vigecuplum. Si itaque octuplum & vigecuplum ſimul addantur, habebitur viginti-octuplum: ut patet. Nempe 95788 = 3421 x 28. Similiter in aliis faciendum erit quotcunque demum in multiplicatore figuræ reperiantur.

Ubi multiplicator eſt numerus compoſitus.

```
3421
  28
------
27368
6842
------
95788
```

Ita ſiquis quærat, *Quot horas contineat annus integer*? Cum notum ſit diem quemlibet horas continere 24, erit numerus horarum viginti-quadruplus numeri dierum. Adeoque cum Annus integer contineat dies 365, atque inſuper 6 horas,

```
  365
   24
 ----
 1460
 730
 ----
 8760
    6
 ----
 8766
```

si dierum numerus 365 multiplicetur per 24, habebitur numerus horarum quæ in diebus integris unius anni continentur, $8760 = 365 \times 24$. quibus si addantur reliquæ 6 horæ, erit omnium numerus $365 \times 24 + 6 = 8760 + 6 = 8766$. tot igitur horæ in uno anno integro continentur.

Si quis insuper quærat *Quot horæ fuerint elapsæ a nato Christo ad finem annorum inde subsequentium Mille sexcentorum quinquaginta & sex.* Si ducatur vel 8766 numerus horarum unius anni in 1656 numerum annorum; vel (quod eodem recidit) numerus annorum 1656, in 8766 numerum horarum cujusque anni, habebitur numerus horarum omnium $14516496 = 8766 \times 1656 = 1656 \times 8766$. ut in operationibus appositis patet.

```
  8766
  1656
 -----
 52596
 43830
 52596
 8766
 -----
 14516496
```

```
  1656
  8766
 -----
 9936
 9936
 11592
 13248
 -----
 14516496
```

De Ciphris Multiplicatori intermistis.

Siquando numeris invicem multiplicandis, saltem multiplicatori, Ciphræ immiscentur; quanquam ipsæ ex se nihil significent, inserviunt tamen locis supplendis, adeoque aliarum figurarum valorem augendo, & propterea neutiquam sunt negligendæ. Exempli gratia, si numerus 2361 ducendus sit in 20104. Subscripto primum multiplicandi quadruplo 9444; cum deinde occurrat in multiplicatore ciphra, si illa in totum multiplicandum ducatur prodibit adhuc nihil (nam nullies 1 est nihil, & sic in reliquis,) adeoque nullies 2361 erit 0000. Deinde $2361 \times 1 = 2361$. Item $2361 \times 0 = 0000$. Denique $2361 \times 2 = 4722$. His igitur omnibus, eo quo hic locantur modo dispositis, in unam summam collectis, habebitur numerus $47465544 = 2361 \times 20104$. Ubi notandum est duas ciphrarum series, utut ex se nihil significent, tamen cum multiplorum particularium quodlibet uno semper ad sinistram loco ultra quam præcedens protruditur, ciphrarum series illud faciunt ut reliquæ suis singulæ sedibus collocentur.

```
  2361
 20104
 -----
  9444
  0000
 2361
 0000
 4722
 -----
 47465544
```

Cum autem illud solum præstent interpositæ ciphrarum series, ut reliquæ debitas suas sedes occupent, neque ulterius ex se quicquam valoris habeant; possunt quidem illæ non incommode penitus omitti, modo interim caveatur ut reliquæ series significativæ easdem sedes occupent acsi ipsæ (non-significantes) adessent: ut in eodem exemplo hic repetito (omissis tantum seriebus ciphrarum, reliquisque suas sedes retinentibus) videre est. Idem enim & hic & illic numerus Factus prodit.

```
  2361
 20104
 -----
  9444
 2361
 4722
 -----
 47465544
```

Ut autem suus cuique locus rite assignetur, curandum est ut hæc observetur regula; nempe, ut *cujuslibet particularis multipli ultima figura eodem gradu collocetur cum suo respective multiplicatore*, (reliquis proximos continue locos occupantibus.) Ut in eodem exemplo, multiplicandi (2361) quadruplum 9444, ultimam ipsius figuram habet in Unitatum loco positam, quia ipsius multiplicator 4, totidem unitates indicat. Item ejusdem multiplicandi simplum 2361, ultimam figuram in centuriarum loco positam habet, quoniam ipsius multiplicator 1, unam centuriam indicat. Denique ejusdem duplum 4722, ultimam suam figuram habet in decies-millium loco, quoniam ipsius multiplicator 2, duas millium decades significat. Et similiter in aliis quibusvis multiplicationibus faciendum erit. Atque hoc quidem si curetur, ciphrarum series quotlibet (siquando multiplicatori ciphræ immiscentur) penitus omitti possunt.

```
  40851 00
  23004 0
 ---------
   163404
 122553
 81702
 ---------
 939736404000
```

De ciphris finalibus.

Denique, *si e Factoribus* (sive numeris invicem multiplicandis) *vel alter vel uterque in ciphris* (sive una sive pluribus) *terminetur; sepositis illis ciphris finalibus, peragatur tota multiplicatio acsi non adessent; & numero tandem ita producto tot subjungantur ciphræ quot erant illæ omnes sepositæ.* Ita si numerus 4085100 ducendus

sit

ſit in numerum 230040; ſepoſitis tribus ciphris finalibus (multiplicandi nempe duabus & multiplicatoris una) habebitur $939736404 = 40851 \times 23004$; cui numero Facto ſi reſtituantur tres illæ ciphræ ſepoſitæ, prodibit $939736404000 = 40851{00} \times 230040$. Et pariter in aliis.

Ratio operationis ſatis eſt evidens. Si enim, verbi gratia, 300 per 20 multiplicare oporteat; &, ſepoſitis ciphris, ducantur 3 in 2 habebitur $6 = 3 \times 2$. Et, reſtitutis ciphris, $6000 = 300 \times 20$. Nam, ſi bis 3, ſint 6; erunt bis 30 decies 6, hoc eſt, 60; & bis 300 decies 60, hoc eſt, 600; & denique ſi bis 300 ſint 600, erunt vicies 300 (ſive bis decies 300) decies 600, hoc eſt, 6000. Quælibet enim adjecta ciphra numerum cui adjicitur decuplum facit. Et pariter in aliis ejuſmodi multiplicationibus quibuſcunque.

300
20
6000

Atque hinc liquet, tantundem prorſus valere ſive 2 ducantur in 3000, ſive 20 in 300, ſive 200 in 30, ſive denique 2000 in 3; quippe in ſingulis emergit numerus 6000. ut patet. Et pariter in ſimilibus.

3000	300	30	3
2	20	200	2000
6000	6000	6000	6000

Atque hactenus quidem de numeris integris invicem multiplicandis dixiſſe ſufficiat.

Partium decimalium multiplicatio.

Siquando numeris integris annecti contigerit partes aliquot decimales, ſive (quod idem eſt) loci aliquot infra unitatis locum deſcendentes; eadem omnino erit operationis methodus atque in numeris integris: cum hoc ſolo diſcrimine, quod poſtquam numerus productus eodem plane modo invenitur acſi eſſent numeri omnino integri, tandem tot loci in numero facto linea ſeparatrice ſunt abſcindendi, ut partes decimales, quot erant in utroque ſimul Factore ſic abſciſſi.

Exempli gratia, Si numerus $365|25$ ducendus eſſet in $3|5$. Poſtquam (quaſi eſſent plane integri) invenerim productum $1278375 = 36525 \times 35$; tandem, quia in factoribus video tres locos partium decimalium (duos nempe in multiplicando, & unum in multiplicatore,) tres ultimas producti figuras linea ſeparatrice abſcindo ut partes decimales: adeoque habeo $1278|375 = 365|25 \times 3|5$. Atque idem in aliis partium decimalium multiplicationibus obſervandum erit.

$365\|25$
$3\|5$
182,625
1095,75
$1278\|375$

Ratio hujus operationis hæc eſt. Quoniam, ut numerus quilibet, adjectione ciphræ in fine, decuplo augetur; promota nempe qualibet figura in locum proxime ſuperiorem, ut quæ prius unitates ſignificabat, jam ſignificet decades, & ſic de reliquis: ita figuræ finalis abſciſſione linea ſeparatrice, numerus decuplo minuitur; detruſa nempe figura qualibet in locum proxime inferiorem, ut quæ prius decades ſignificabat, jam ſignificet unitates, & ſic de reliquis. Puta, ſi numero 35 adjiciatur ciphra, fiet 350 decuplo major; ſin ab eodem 35 abſcindatur linea ſeparatrice figura ultima, erit $3|5$ decuplo minor. Et ſimiliter judicandum erit ubi duæ, tres, aut plures adjiciuntur ciphræ, aut totidem abſcinduntur loci decimales; nempe numerus centuplo, millecuplo, &c. adjectione augetur, vel ablatione minuitur. Adeoque in exemplo propoſito cum $365|25$ ſit centuplo minor quam 36525, erit etiam $365|25 \times 35$ centuplo minor quam 36525×35; cumque etiam $3|5$ ſit decuplo minor quam 35, erit $365|25 \times 3|5$ decuplo minor quam $365|25 \times 35$, adeoque decies-centuplo, hoc eſt millecuplo, minor quam 36525×35. Cum igitur ſit $1278375 = 36525 \times 35$, abſcindendæ ſunt linea ſeparatrice tres ultimæ figuræ ut numerus fiat millecuplo minor, nempe $1278|375 = 365|25 \times 3|5$; adeoque figura 8 quæ prius ſignificabat tot millia, jam ſignificat non niſi totidem Unitates, & ſic de reliquis.

Atque hæc etiam ſufficiant de partibus decimalibus multiplicandis.

De Indice numeri facti.

Tandem & hanc libet (ex Oughtredo) regulam generalem proponere, quæ in ſuos aſſignando numeris multiplicatione factis locos, ſive in numeris integris, ſive etiam partibus decimalibus, dirigat. Cum ſuos cuique loco indices aſſignavimus, ita nempe ut Unitatis locus indicem habeat 0 (ut qui neque aſcendit neque deſcendit) loci autem ſupra illum aſcendentes primus, ſecundus. tertius, &c. indices habeant affirmativos, 1, 2, 3, &c. & contra loci deſcendentes primus, ſecundus, tertius, &c. indices habeant negativos -1, -2, -3, &c. *Index cujuſque particularis Facti in multiplicatione, æquatur indicibus utriuſque Factoris ſimul ſumptis.*

ſumptis. Exempli gratia, ſi multiplicandus ſit numerus 32|1 in 5|34. Multiplico primum 4 in 1 (quorum indices —2 & —1) & factus eſt 4 (=1×4) ponendus loco tertio deſcendente, cujus index eſt —3, æqualis duobus —2 & —1. Tum 4×2 (quorum indices —2 & 0) factus eſt 8, loco ſecundo deſcendente ponendus, cujus index —2=—2+0. Tum 4×3 (quorum indices —2 & +1) factus eſt 12 ponendus (nempe quoad ultimam ipſius figuram 2) loco deſcendente primo cujus index —1=—2+1. Deinde 3×1 (quorum indices —1 & —1) factus 3, indicem habet —2=—1—1, ideoque ponendus loco deſcendente ſecundo. Sic 3×2, factus 6, indicem habet —1 =—1+0, ponendus loco deſcendente primo. Et 3×3, factus 9, cujus index 0=—1+1, ponendus loco Unitatum. Denique 5×1, factus 5, cujus index —1=0—1, ponendus loco deſcendente primo. Et 5×2, factus 10, indicem habet 0=0+0, ideoque ad locum unitatum referendus, nempe ipſius ultima figura 0 illic collocanda, & reliqua 1 in locum proximum transferenda. Et tandem 5×3, factus eſt 15 (cui ſi addatur 1, figura huc tranſmiſſa, fit 16,) cujus index 1=0+1, adeoque ad locum primum aſcendentem ſpectat. Quibus abſolutis, ſi additione colligantur in unam ſummam, habetur totius multiplicationis factus, 171|414, cujus index —3 (quoad ultimam ipſius figuram æſtimandus) æqualis duobus ſimul indicibus —2 & —1, nempe utriuſque factoris 32|1 & 5|34. Et ſimiliter in aliis hujuſmodi multiplicationibus quibuſcunque.

1.0.1.2.
32|1
5|34
1,284
9,63
160,5
171,414

Atque hactenus de multiplicatione tam numerorum integrorum, quam partium decimalium. Multiplicatio Algebrica & Specioſa, ut & quantitatum ex variis denominationibus conſtantium, mox tradetur poſt Diviſionis traditionem; quam ſequente Capite aggredior.

CAP. XIX.

De Diviſione. Quid ſit Diviſio, Dividendus, Diviſor, Quotiens. Diviſio ſenſu ſtricto, & ſenſu lato, ſumpta. Non ſemper numerum diviſum minuit. Diviſio eſt multiplex ſubductio. Diviſionis praxis: per diviſorem ſimplicem; per diviſorem compoſitum. Diviſionis praxis in partibus decimalibus. De Indice Quotientis, ſive numeri orti.

EXpoſita in præcedentibus Multiplicationis tam natura quam praxi; ad *Diviſionem* explicandam accedendum eſt.

Eſt autem Dividere, *Numerum quemvis datum in quotlibet æquales partes dirimere*; ſive *Numerum invenire, qui doceat quoties numerus quivis datus in dato quovis continetur.* Vel (ſi libet non ad ſolos numeros, ſed ad alias etiam Diviſiones vocem extendere) *Dividere*, eſt *datam quamlibet quantitatem in data ratione diminuere*; vel potius *Duarum ad invicem quantitatum homogenearum rationem invenire.* Nam ut Subductione quantitatum homogenearum *Differentiam*, ita Diviſione earundem *Rationem* inveſtigamus.

Sed de Numerorum Diviſione præſertim agendum eſt, quo vocis illa ſignificatio primario refertur, ad alias autem non niſi analogice applicatur.

Dividendus, Diviſor, Quotiens.

In numerorum vero diviſione, duos habemus numeros datos, nempe *Dividendum* qui in partes aliquot æquales dirimendus eſt; & *Diviſorem* ſive Dividentem, qui numerum partium denotat in quas ſupponitur ille dirimendus: quibus datis, tertius quæritur, quem *Ortum* dicunt, ſive *Quotientem*, oſtendit enim quoties diviſor in dividendo continetur, ſive (quod eodem recidit) quoties ex illo auferri poteſt.

Sic si numerus 12 in 3 partes sit dirimendus, numerus *Ortus* sive *Quotiens* (puta 4) ostendit unius trientis valorem: vel etiam ostendit quoties *Divisor* 3, in *Dividendo* 12, continetur. Ita si numerus 20 dividendus sit per (divisorem) 4, sive partiendus sit in 4 partes, vel si 4 dividat 20, vel denique si quæratur quoties in 20 contineatur 4, aut quoties inde auferri possit: Numerus ortus sive quotiens, puta 5, ostendit quanta sit istius numeri pars quarta seu quadrans, hoc est, si supponatur numerus 20 in 4 æquales partes dividi, quanta sit earum quælibet, nempe 5; vel quoties in 20 contineantur 4, aut quoties inde auferri possit, nempe quinquies.

Divisionis autem operationem (sive perfectam, sive perficiendam) solemus sic indicare $\frac{12}{3}$; quod notat numerum 12 per 3 divisum vel dividendum; vel etiam 3) 12 (4; quod notat numerum 12 per 3 divisum, ejusque quotientem esse 4. Et similiter in aliis.

Quod vero tantundem sit inquirere Quoties in 12 contineantur 3? atque Quantus sit numeri 12 pars tertia sive triens? (& pariter in similibus;) hac facili demonstratione ostendatur. Statuantur in totidem Columnis, sive seriebus erectis, tot punctorum triades sive terniones, quot opus est ad complendum numerum 12, (puta 4;)

. . . .
. . . .
. . . .

quo facto, numerus columnarum simul ostendit, quoties in 12 contineantur 3 (toties nempe quot sunt ipsæ columnæ,) atque etiam quot puncta sunt in qualibet serie transversa, hoc est, in quolibet totius numeri triente; (tot enim sunt transversæ series quot sunt cujuslibet erectæ puncta, adeoque quælibet series transversa est totius numeri triens; tot autem sunt cujuslibet transversæ puncta, quot est serierum erectarum numerus, cum harum quælibet transversarum cuilibet unum subministret punctum: ut patet.

Est autem Divisio eodem fere modo Multiplicationi opposita quo Additioni Subductio. Ut enim quæ Additio componit Subductio resolvit; ita quod Multiplicatione componitur, id resolvitur Divisione. Sic, ubi ex additis 3 & 4 fiunt 7; si ex 7 alterutrum auferas, alterum prodibit. Ita, ubi ex multiplicatis 3 in 4 fiunt 12; si 12 per alterutrum dividas alterum prodibit. Utrobique quod componendo ex suis componentibus conflatur, id resolvendo in sua componentia resolvitur. Nempe, quæ in Subductione sunt Ablatum & Residuum, ea in Additione sunt Integri Membra: & quæ in Divisione sunt Divisor & Quotiens, ea in Multiplicatione sunt Factores.

$3+4=7$	$3\times4=12$
$7-3=4$	$3)12(4\ \frac{12}{3}=4$
$7-4=3$	$4)12(3\ \frac{12}{4}=3$

Græce dici solet Μερισμὸς *divisio*, & μερίζειν *dividere*. Apud Euclidem interim passim μέτρον, μετρεῖν, μετρούμενος, idem sunt atque *Divisor*, *dividere*, *divisus* sive *dividendus*, & numerus κατ' ὃν μετρεῖται *quotiens* est. Sic 9 *def* 7 *Numerus pariter par* definitur ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ' ἄρτιον ἀριθμόν. *Qui a numero pari per parem mensuratur.* sive *quem numerus par per parem metitur*; nempe, qui ita per Divisorem parem dividi potest, ut & quotientem parem habeat.

Notandum autem est, apud Euclidem, non numerum quemvis alium quemlibet καταμετρεῖν *dividere* vel *metiri* posse; sicut nec à quovis numero quilibet auferri potest, (puta major ex minore:) Cum enim ille de veris tantum numeris & proprie dictis (integros intellige) verba facit, qui ex Unitatibus componuntur; adeoque Unitatem semper habet pro indivisibili, quodque est, in numeris, minimum quod sic: non raro occurrit numerus qui in imperatas partes dividi non potest. Adeoque numerus ille solus alterum Dividere sive Metiri apud Euclidem dicendus erit, qui est ipsius *aliquota pars*, seu qui aliquoties positus Dividendum æquet; quoties autem ponendus est ut æquet numerum dividendum, id divisione quæritur. Verbi gratia, si dividatur numerus 12 per 3, sive quæratur quoties ponendus numerus 3 ut æquet numerum 12, Quotiens erit 4; quia nempe numerus 3 quater positus æquabit numerum 12. At si proponatur numerus 10 per 3 dividendus; id quidem fieri non potest, cum hic illius non sit aliquota pars, nec aliquoties repetitus ipsum æquabit; nam ter positus ($3\times3=9$) minor est, & quater positus ($3\times4=12$) major est quam 10; atque inter 3 & 4 non alius intercedit numerus, qui sit Quotiens quæsitus. Atque idem continget quotiescunque propositus Divisor non est numeri Dividendi aliquota pars. *Divisio stricte sumpta.*

Atque hoc quidem interest inter Arithmeticas operationes Syntheticas & Analyticas.

ticas. Nempe, in Syntheticis, veris numeris datis verus ſemper numerus emerget; at non ita in Analyticis. Puta, in Additione $5+4=9$, $3+4=7$, &c. Et ſimiliter continget quicunque ſint numeri dati addendi: At in ſubductione, quanquam illud aliquando contingit, ut $5-4=1$, &c; non tamen id ſemper, nam $3-4$ æquabitur nulli vero numero poſſibili, cum majus ex minori auferri non poſſit; ſolemus tamen ejuſmodi ſuppoſititiam ſubductionem utcunque innuere ad hanc formam $3-4$, vel etiam -1. Sic, in multiplicatione, propoſitis quibuſcunque veris numeris invicem multiplicandis, verus ſemper emergit numerus, ut $4\times2=8$, $3\times6=18$, $5\times3=15$, &c. At in Diviſione, licet illud aliquando contingit, ut $2)4(2$; non raro tamen ſecus accidit, ut ſi 3 per 6, aut 5 per 3, dividendi eſſent, ubi quotientes nullis veris numeris (integris) aſſignari poſſunt; ſolemus tamen & hic ſuppoſititios illos quotos utcunque innuere ad hanc formam $\frac{3}{6}$ vel $\frac{1}{2}$, & $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$, &c. Et ſimiliter in Poteſtatibus componendis & reſolvendis, contingit; dati enim cujuſque veri numeri Quadratum, Cubus, &c. veris numeris exhibebitur; at non item dati cujuſque numeri Radix quadratica, cubica, &c. veris numeris exhiberi poterit: ut ſuo loco patebit.

Diviſio laxiori ſenſu accepta.

Verum ut multiplicatio, laxiori ſenſu ſumpta, non ad illam ſolummodo reſtringitur ubi Factus eſt numeri propoſiti Multiplus; ita nec Diviſio ita reſtringi ſolet ut Diviſor neceſſario ſit Dividendi aliquota pars; quanquam iſtiuſmodi & Multiplicationem & Diviſionem voces illæ primaria & maxime propria ſua ſignificatione innuant. Et quo ſenſu numeri fracti pro numeris habentur, eodem & pro Factoribus in Multiplicatione, & in Diviſione pro Diviſore vel Quotiente haberi poſſunt. Itaque & hoc ſenſu, quilibet numerus (ſive integer ſive etiam fractus) numerum quemlibet dividere poterit.

Adeoque, ut rem paucis comprehendam, cum ſenſu ſtrictiori ſumantur, *Multiplicatio quærit numeri dati multiplum*; *diviſio aliquotam partem*: cum ſenſu vero laxiori uſurpantur, dicenda potius eſt *Multiplicatio, quantitati aliam in data ratione exhibere*; ſive *quantitatem, quæ ad datam habeat rationem, inveſtigare*: *Diviſio* vero, *datis duabus quantitatibus homogeneis earum ad invicem rationem inveſtigare*. Neque interim aliquem terreat, quod hoc laxiori ſenſu eadem operatio utrovis ad libitum nomine appellari poſſit, nam illud omnino concedendum eſt, cum perinde ſit omnino Multiplicare per 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. atque dividere per $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{3}{2}$, &c. ut ſuo deinceps loco clarius patebit. Quod eo minus mirandum eſt, cum & idem in aliis oppoſitis operationibus contingat; utpote in Additione & Subductione, cum perinde omnino eſt ſive addamus 2, -3, 4, &c. ſive ſubducamus -2, 3, -4, &c. ut ex ſupra dictis patet.

Diviſio non ſemper numerum minuit.

Interim monendum eſt, quod, ut multiplicatione (laxiori ſenſu ſumpta) non ſemper augetur quantitas multiplicata, ſed aliquando vel eadem manet vel etiam minuitur: ſic diviſione (laxiori item ſenſu ſumpta) non ſemper minuitur quantitas diviſa, ſed vel eadem manet vel etiam augetur. Nempe, quoties Diviſor eſt unitate major, Quotiens erit numero dividendo minor; quoties autem Diviſor eſt unitate minor, Quotiens erit numero dividendo major, ſi denique Diviſor ſit unitas, Quotiens numero dividendo æqualis erit. Ratio manifeſta eſt. Cum enim numerus Dividendus oſtendat quoties ipſe contineat unitatem; Quotiens autem, quoties idem dividendus contineat diviſorem: Si diviſor ſit unitate major, puta 2; manifeſtum eſt quotientem numero dividendo minorem eſſe, cum eodem numero dividendo pauciores continentur binarii (δυάδες) quam unitates: ſin diviſor ſit unitate minor, puta $\frac{1}{2}$; manifeſtum item eſt quotientem numero dividendo futurum majorem, cum numerus dividendus plures contineat ſemiſſes quam integras unitates: ſi denique Diviſor ſit unitas, quotiens erit numero dividendo æqualis; toties enim dividendus diviſorem continebit quoties quotiens continet unitatem.

Atque huc ſpectat quod apud Arithmeticos paſſim occurrit, Dividendum toties continere Diviſorem, quoties Ortus ſeu Quotiens continet Unitatem; vel, eandem eſſe rationem Dividendi ad Diviſorem, quæ eſt Quotientis ad Unitatem: Item, Dividendum toties continere Quotientem, quoties Diviſor continet Unitatem; vel, eandem eſſe rationem Dividendi ad Quotientem, quæ eſt Diviſoris ad Unitatem. Nam & hoc ſciendum eſt, (quod & ex prædictis ſatis patet,) ut in Multiplicatione perinde eſt utrumvis è Factoribus Multiplicandum ſive Multiplicatorem dicamus; adeo ut ſi hic dicatur Multiplicandus, ille erit Multiplicator, & contra; Sic in Diviſione de Diviſore & Quotiente contingit, qui alternatim ſedes mutabunt,

mutabunt, ut si duorum componentium hic sit Divisor erit ille Quotiens, & contra, si ille Divisor hic Quotiens erit. Puta, cum in multiplicatione 3 & 4 invicem ducti constituant 12; si 3 dicatur multiplicandus, erit 4 multiplicator; & contra, si 4 sit multiplicandus, multiplicator erit 3. Si autem idem numerus 12, per 3 dividatur, quotiens erit 4; sin divisor sit 4, quotiens erit 3. Et quidem in omni divisione, si qui prius fuerat Quotiens fiat Divisor, qui fuerat Divisor fiet Quotiens.

$3 \times 4 = 12$ $\quad 3)12(4$ $\quad \frac{12}{3} = 4$

$4 \times 3 = 12$ $\quad 4)12(3$ $\quad \frac{12}{4} = 3$

Divisio est multiplex subductio.

Denique, ut de Multiplicatione monuimus, nempe eam vix aliud esse quam multiplicem Additionem, sive additionis compendium; ita & de Divisione monendum, eam nempe vix aliud esse (saltem cum Divisor est numerus integer) quam multiplicem subductionem, sive subductionis compendium. Qui quærit enim, quoties numerus 12 contineat 3; idem facit ac qui quærit, quoties ex 12 subduci possint 3: Qui igitur continua subductione invenerit, quoties possint 3 ex 12 auferri, ita ut nihil restet; invenit etiam eadem opera quoties 3 in 12 præcise contineantur; quod ipsum est 12 per 3 dividere, ut ex prædictis liquet. Sic si ex 12 punctis appositis 3 quoties fieri possit subducantur, patebit post quatuor subductiones nihil supersse. Quot autem subducta sunt, tot prius aderant; adeoque, cum nihil supersit, manifestum est 3 in 12 præcise quater contineri, (quod ipsum divisione quæritur,) vel etiam trientem numeri 12 esse 4, (ut supra ostensum est;) nempe si 12 per 3 dividatur, quotiens erit 4.

... | ... | ... | ...

Quique hæc satis intelligit, is genuina divisionis fundamenta persentiscit. Cum enim infiniti prope laboris esset in divisionibus majoribus tot subductiones sigillatim peragere, quot numero dividendo grandiori penitus exhauriendo sufficiant; excogitarunt Arithmeticæ practicæ magistri, laboris magni magnum compendium; nempe *pro multiplici Divisoris subductione, subducunt divisoris Multiplum*; quod eodem plane recidit. Sic in exemplo præcedente, ubi numerus 12 per 3 dividendus proponitur; perinde est sive ternionem (τριάδα) quater subducamus, sive ternionis quadruplum, (quia $3+3+3+3 = 3 \times 4$) & utrumvis fiat, nihil restabit. Quod & ipsum fieret si ternarii duplum bis subducamus; aut etiam triplum ternarii semel & semel ipsum ternarium: nempe $3 \times 3 + 3 \times 1 = 3 \times 2 + 3 \times 2 = 3 \times 4 = 3+3+3+3 = 12$.

... | ... | ... | ...

Quo major autem fuerit numerus dividendus, & quotiens, eo magis patebit hujusce compendii utilitas. Si 20 sint per 2 dividenda; pro decem subductionibus numeri 2, substituenda est istius decupli subductio; nam $2 \times 10 = 20$. Si 360 dividenda per 6; pro sexaginta subductionibus numeri 6, semel subducendum erit ipsius sexagecuplum. Et similiter in aliis.

2) 20 (10

6) 360 (60

Divisionis operatio.

Atque hactenus quidem Divisionis naturam satis explicasse videar; ejusque cum Multiplicatione comparationem. Sequitur ipsius praxis exponenda.

Per divisorem simplicem.

Si Divisor simplex sit, una figura scriptus, & dividendus item sit divisoris decuplo minor; ex ipsa memoria petenda est solutio; vel, si opus est, ex ea quam

Tabella Multiplicationis & Divisionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

supra exhibui Multiplicationis & Divisionis Tabella. Nempe, reperto in Tabellæ summitate

ſummitate Diviſore, in eadem columna quæratur numerus dividendus, vel ſaltem numerus qui illic occurrit Dividendo proxime minor, & habebitur ad latus numerus in quotiente ponendus. v. g. Si quæratur quoties in 24 contineantur 3. Repertis in ſummo 3, & infra 24, habebitur ad latus numerus 8, in quotiente ponendus: quippe in 24 octies præciſe continentur 3: nam $3 \times 8 = 24$. Unde patet numerum 3, numeri 24 eſſe partem aliquotam, nempe octavam. Si 26 per 3 dividenda ſint; in columna tertia (ubi in fronte 3,) & ſerie tranſverſa octava, reperiuntur, non 26, ſed 24, binario minor, & ad latus 8; quod indicium eſt Dividendum 26, continere diviſorem 3 octies, atque inſuper 2: vel ex Dividendo 26, octies auferri poſſe diviſorem 3, atque inſuper reſtare 2. Hoc reſiduum, cum ſubjecto ſibi diviſore, & interjecta lineola, invento quotienti 8 poſtpono, ut habeatur perfectus quotiens $8\frac{2}{3}$. Quod etiam indicat numerum 3 numeri 26 aliquotam partem non eſſe, cum hic illum contineat pluſquam octies, & minus quam novies.

3) 24 (8
3) 26 ($8\frac{2}{3}$

Si vero numerus Dividendus non ſit decuplo Diviſoris minor, gradatim procedendum eſt, & varia multipla ſucceſſive ſubducenda; poſito primum Diviſore ſub dividendi gradu ſupremo, ſeu ad ſiniſtram primo, (ſaltem ſi diviſor non ſit major figura Dividendi eo gradu poſita,) & deinceps ſucceſſive in reliquos locos promoto, uſque dum ad locum infimum tandem perveniatur; in ſingulis interim locis ſublato quoties fieri poteſt Diviſore, ſeu, quod idem eſt, ſublato diviſoris multiplo quam fieri poteſt amplo, è numeris dividendi ſuprapoſitis, notato ubique ſi quod ſit reſiduo; numero item ſubductionum in quolibet gradu factarum, ſive multipli ſubducti denominatore, ſeorſim in Quotiente notato; quorum omnium, reſpectu ad ſuos gradus habito, collectio (reſiduo, ſiquid operatione perfecta ſuperſit lineolæ ut dictum eſt ſuprapoſito, cui ſubſcribatur ipſe Diviſor,) integrum quotientem conſtituet: ſicut & multiplorum omnium ſubductorum aggregatum, ſi illa videbitur colligere, (adjecto interim ſiquid in fine ſuperſit reſiduo) reſtituet integrum Dividendum; ſi enim ſingula ſubducta reſtituantur, redibit numerus primo poſitus: Ipſeque numerus Dividendus toties Diviſorem continet quoties indicat Quotiens, ſeu quoties ipſe quotiens continet unitatem, ut & Quotientem toties quoties Diviſor continet unitatem.

Exempli gratia. Si numerus 486 ſit biſecandus, ſive in duas æquales partes dividendus; vel, ſi quæratur quoties in numero 486 contineatur numerus 2; hoc eſt, ſi dividere oporteat 486 per 2: Ponatur Diviſor 2, ſub figura diviſoris ad ſiniſtram prima, nempe ſub 4; & quæratur (vel ex memoria, vel ex tabella ſuprapoſita) quoties in 4 contineantur 2; quod quidem bis fit, nec ſæpius, (nam ipſius triplum, $2 \times 3 = 6$, majus eſt numero 4, adeoque auferri non poteſt) notato igitur in Quotiente numero invento 2, diviſoris duplum (quotuplum nempe indicat Quotiens) nempe $4 = 2 \times 2$, è numero 4 ſuprapoſito auferatur, & cum nihil reſtet utraque figura (2 diviſoris, & 4 dividendi) deleantur, (ut quæ munus ſuum jam præſtiterint;) eſtque hæc operatio prima. Deinde, promoto Diviſore in locum proximum, ſub Dividendi figura 8, eadem operatio (mutatis mutandis) repetenda eſt: nempe quæratur, quoties 2 in 8? & reſponſum 4 ponatur in quotiente (poſt numerum 2 iſtic prius poſitum) & Diviſoris quadruplum, $8 = 2 \times 4$, ex 8 (dividendi numero ſuprapoſito) auferatur, & cum nihil reſtiterit, deletis figuris 2 & 8, perfecta eſt operatio ſecunda. Tandem, promoto in locum proximum diviſore, ad eandem formam præſtanda eſt operatio tertia; quæratur nempe, quoties 2 in 6? reſponſum 3 in quotiente ſcribatur, & Diviſoris triplum $6 = 2 \times 3$, ex numero 6 ſuprapoſito ablatum, nihil relinquit; adeoque, deletis 2 & 6, cum nullæ ſuperſint aliæ Dividendi figuræ, peracta eſt tota diviſio; & repertus eſt Quotiens integer 243; qui propterea ſemiſſis eſt numeri 486; quippe toties in 486 reperitur numerus 2. Si autem plures adhuc ſuperfuiſſent in numero Dividendo loci, plures etiam eadem plane methodo repetendæ eſſent operationes, quot opus eſſet.

2) 4̸86 (2
2
2) 4̸8̸6 (24
2 2
2) 4̸8̸6 (243
2 2 2

Si quis interim objiciat, figuram 4, centuriarum loco poſitam, atque 8 poſitam in loco decadum, non tot ſimpliciter unitates, ſed illam 4 centurias, hanc 8 decades ſignificare, adeoque 2 in 400 non bis ſed ducenties, & in 80 non quater ſed quadragies contineri. Verum quidem illud eſt: ſed & pariter verum eſt figuras 2

& 4 in quotiente positas, quanquam cum primum scriberentur, videri possent tot simpliciter unitates notare, tamen ubi tota perficitur divisio patet illam ducenta, & hanc octoginta, significare; adeoque non dicimus numerum 2 (divisorem) in numero 486 (dividendo) contineri bis & quater & ter, sed ducenties quadragies & ter. Et quidem in operatione prima, si locorum ratio habeatur, non simpliciter bis duo ex 4, sed ducenties duo ex 400, sive bis duas centurias ex quatuor centuriis; & in operatione secunda, non tam quater duo ex 8, quam quadragies duo ex 80, sive quater duas decades ex 8 decadibus, ablata esse dicendum erit. Et similiter in aliis quibuscunque divisionibus.

Eodem modo, si 138240 per 3 dividamus; Divisorem 3 (non quidem sub 1, quia ipso divisore minor est, adeoque 3 in 1 nullies continentur, & propterea in quotiente vel nihil ponendum esset, vel 0 ciphra, quæ hic loci nulli esset usui, cum nondum scriptam habeamus figuram significativam, sed) sub figura proxima 3 subscribo; &, cum 3 in 13 (figuris suprapositis) contineantur quater, scripto in quotiente 4, divisoris quadruplum $12 = 3 \times 4$, ex 13 sublatum, relinquit 1, quod residuum deletis 13 superscribo: Tum deletum etiam eo loci divisorem, in proximum transfero; &, cum 3 in 18 contineantur sexies, in quotiente post 4 subjungo 6, & divisoris sextuplum $18 = 3 \times 6$, ex suprascriptis 18 sublatum, nihil relinquit: Et, deletis tam 3 quam 18, divisorem in loco sequente sub 2 colloco: verum cum 3 in 2 ne semel contineantur, scripta in quotiente ciphra 0, divisorem (istic deletum) in locum adhuc proximum promoveo, sub figura 4: Tum, quia 3 in 24 (figuris suprascriptis) continentur octies, posito in quotiente 8, divisoris octuplum $24 = 3 \times 8$, ex 24 sublatum, nihil relinquit: Deletis igitur 3 & 24, & posito sub 0 divisore 3, invenio 3 in 0 nullies contineri, adeoque & hic in quotiente ciphram colloco; & peracta est tota divisio. Adeoque reperio numeri 138240 trientem esse 46080, sive toties in eo numero dividendo contineri divisorem 3.

x
3) x38240 (46080
3333333

Siquid autem, Divisore quoties fieri potest sublato, aliquid Dividendi adhuc restiterit, (quod ipso divisore semper minus esse necesse est, secus enim posset divisor saltem semel adhuc auferri,) post Quotientis numeros integros jam inventos adjungenda erit fractio, cujus numerator erit Residuum illud, denominator vero ipse Divisor, (vel saltem alia fractio, quæ tantundem valebit, minoribus numeris scribenda,) ut habeatur Quotiens accuratus. *Residui notatio.*

Ita si numerus 2603561 dividatur per 9. Cum 9 in 26 bis contineantur, scripto in quotiente numero 2, & sublatis $18 = 9 \times 2$ ex 26, supersunt 8. Tum, promoto divisore, cum in 80 contineantur 9 octies, scripto in quotiente 8, & sublatis $72 = 9 \times 8$ ex 80 restant superius scribenda 8. Tum, promoto adhuc divisore, cum 9 in 83 contineantur novies, scripto in quotiente 9, & sublatis $81 = 9 \times 9$ ex 83 restant 2. Tum, promoto divisore, cum in 25 reperiantur 9 bis, scripto in quotiente 2, & sublato divisoris duplo $18 = 9 \times 2$ ex 25, supersunt 7. Cumque, promoto divisore, in 76 reperiantur octies novem, posito in quotiente 8, & ex 76 sublatis $72 = 9 \times 8$, restant 4. Denique cum, promoto divisore, 9 in 41 reperiantur quater, posito in quotiente 4, & subducto divisoris quadruplo $36 = 9 \times 4$, ex 41, restabunt superius notanda 5, & peracta est divisio. Cum vero divisione peracta supersint adhuc 5, post quotientis numeros integros 289284 subjungo fractionem $\frac{5}{9}$; adeoque liquet, diviso numero 2603561 per 9, quotientem accuratum esse $289284\frac{5}{9}$; sive numeri 2603561 partem nonam esse $289284\frac{5}{9}$; vel numerum 2603561, continere numerum 9, vicibus 289284, atque insuper $\frac{5}{9}$ (quinque nonas partes) ejusdem numeri 9: ipsum autem numerum $289284\frac{5}{9}$ (quotientem) præcise 9 vicibus contineri in 2603561 numero dividendo. Et similiter in aliis.

88274|5
2603561 (289284$\frac{5}{9}$
999999

Quod autem, in exemplis præmissis, singularum subductionum residua deletis Dividendi notis superposuerim, ipsaque subducta multipla nusquam scripserim; id majoris expeditionis causa factum est. Si cui vero libet omnia explicite contueri, poterit ille ad hanc formam præcedentem operationem peragere. Cum divisor 9 in suprascriptis 26, bis contineatur, posito in quotiente 2, & subscripto divisori 9 ipsius duplo 18; ex 26 subductis 18 manebunt 8, infra lineam ductam notanda: cui residuo adjungendæ dividendi figuræ adhuc intactæ (vel saltem *Alia operationis forma.*

2603561 (2892845/9
9
18
803561
9
72
83561
9
81
2561
9
18
761
9
72
41
9
36
5

Divisionis operatio per divisorem compositum.

earum quot opus est,) & promoto divisore, secunda operatio ad eandem formam instituenda, nempe cum 9 in 80 contineantur octies, posito in quotiente 8, & subscripto octuplo, 72, his ex 80 subductis, manebunt 8, ductæ lineæ subscribenda: Et sic deinceps: usque dum tota operatione peracta, reperientur tandem restare 5. ut videre est.

Atque hactenus de Divisionis praxi, per Divisorem simplicem (unica figura scriptum) peragendæ.

Si Divisor compositus sit, (pluribus notis scriptus,) operationis methodus, quanquam aliquanto magis intricata, iisdem plane principiis nititur quibus præcedens. Nempe, Divisore sub tot quot opus est dividendi figuris ad sinistram proximis subscripto, ejusque multiplo quam fieri potest maximo ex iisdem sublato, (notato interim in quotiente istius multipli denominatore,) promovendus est Divisor in locum proximum, & sic deinceps quoties opus erit: totaque operatio ut prius peragenda.

Exempli gratia. Si 1290208 velim per 32 dividere. Divisorem 32, non sub Dividendi figuris 12 subscribo, quia 32 in 12 ne semel continentur, sed (omissa propterea figura prima) sub duabus sequentibus. Et quæro, quoties in 129 reperiuntur 32? vel, quo commodius illud assequar, per partes inquiro quoties in 12 reperiantur 3? quod cum quater fieri deprehendo (atque interim, in reliquo 9, quater contineri 2,) in quotiente scribo 4, ipsique 32 subscribo ipsius quadruplum 128, quod ubi ex 129 subduxerim restare video 1, cui subjunctis reliquis dividendi figuris nondum tactis, reliquum adhuc video 10208. Tum divisore uno gradu promoto, cum videam 32 in 10 nullies contineri, in quotiente scribo 0, & deleto ibidem divisore, uno adhuc gradu eundem promoveo (immutatis manentibus dividendi figuris 10208, cum inde nihil ablatum fuerit,) & quæro, quoties 32 in 102? sive, quoties 3 in 10? reperiuntur autem 3 in 10 ter, & quod supersit 1 cum sequenti nota 2 facit 12 unde non dubito quin 2 (reliqua divisoris figura) possit saltem ter auferri; adeoque in quotiente scribo 3, & divisori 32 subscribo ipsius triplum 96: quod ubi ex suprapositis 102 subduxerim video restare 6, eique figuræ (alias adhuc intactas) 08 subjungo. Tum, promoto divisore, quæro quoties 32 in 60, vel (per partes) quoties 3 in 6, & invenio bis contineri 3 in 6; at interim cum videam nihil superesse unde reliquam figuram 2 bis auferam, scio totum 32 non nisi semel ex 60 auferri posse; ideoque in quotiente scribo 1. ipsumque divisorem 32 ex 60 semel aufero, & restant 28, quibus 8 (figuram intactam) adjungo: Et, promoto divisore, cum 32 reperiam in 288 novies contineri, scripto in quotiente 9, & divisori, subscripto ipsius nonuplo 288 = 32×9, ubi hoc ex 288 subduxerim invenio nihil restare; adeoque, cum nullæ adhuc supersint Dividendi figuræ, totam operationem peractam esse liquet, & quotientem repertum esse 40319 præcise.

1290208 (40319
32
128
10208
32
32
96
608
32
288
32
288
00

Ita si 6639642 per 978 dividatur. Operatione ut in præcedentibus peracta, reperietur quotiens 6789. ut videre est.

6639642 (6789
978
5868
7716
978
6846
8704
978
7824
8802
978
8802
00

Alia operationis forma.

Vel etiam, si libet, residua superne notari possunt; atque interim singula divisoris multipla seorsim suis locis scribi,

scribi, ipsis Divisoris repetitionibus non intermista: ad hanc quæ videtur formam.

```
        8                          8
       878                        878
      77xØØ                      77xØØ
   66399642 (6789             66399642 (6789
      978                        978 8888
       978                        9777
        978                         ØØ
  ---------                  ----------
   5868                       5868
    6846                       6846
     7824                       7824
      8802                       8802
  ---------                  ----------
   6639642                    6639642
```

Ubi, cum (propter quotientis primam figuram 6) divisoris (978) sextuplum 5868 ex Dividendi numeris supra positis 6639 subductum sit, residuum superius notatum erit 771. Tum ex 7716 subducto divisoris septuplo 6846, residuum (superne notatum) erit 870. Tum ex 8704 subducto divisoris octuplo 7824, residuum erit 8802. Atque hinc denique subducto divisoris noncuplo, 8802, nihil restabit. Adeoque perfecta est tota divisionis operatio, & quotiens est 6789. Si autem, peracta operatione, placeat omnia hæc multipla in unam summam colligere, (simul cum finali residuo siquod fuerit,) erit ea numero dividendo æqualis: nempe, omnia ablata (simul cum residuo siquod fuerit,) simul addita, restituent numerum propositum: ut patet.

Sicui vero nimis operosum videbitur, tam singula divisoris multipla, quam ipsum divisorem toties repetitum scribere: poterit ille horum utrumvis omittere.

Nempe, Si singula divisoris multipla subducenda scribere supervacaneum esse duxerit; poterit ille duas illas operationes, multiplicationem scilicet & subductionem junctim perficere, (quod & plerique Arithmeticæ practicæ magistri faciendum docent,) ad hanc formam. *Alia operationis forma.*

Postquam, Dividendo & Divisore recte collocatis, inveniatur prima Quotientis figura 6; ducatur numerus ille sigillatim in omnes Divisoris figuras, à sinistra inchoando, numerique facti protinus ex Dividendo auferantur, notatis superne residuis. Sic sexies 9 sunt 54; ablatis 5 ex 6 restat 1, & 4 item ex 6 restant 2: deinde sexies 7 sunt 42; ablatis 4 ex 12 restant 8, & 2 ex 3 restat 1: deinde sexies 8 sunt 48, ablatis igitur 4 ex 81 restant 77, & 8 ex 9 restat 1.

```
        7
       87
      xxxx
   66399642 (6
      978
       8
       9
       xØ
      747
      872
      xxxxo
   66399642 (67
      9788
       97
```

Tum promoveatur Divisor uno gradu dextrorsum, & inventa secunda figura Quotientis 7, ducatur ea ut prius in divisorem, & fiat subductio. Nempe septies 9 sunt 63; ablatis 6 ex 7 restat 1, & 3 ex 7 restant 4: deinde septies 7 sunt 42; sublatis 4 ex 4 restat 0, & 9 ex 101 restant 92: deinde septies 8 sunt 56; sublatis 5 ex 92 restant 87, & 6 ex 6 restat 0.

```
       x8
       8Ø
       9Ø
      xØ8
      7478
      8724
      xxxxØo
   66399642 (678
      97888
       977
        9
```

Tertio, promoveatur Divisor uno adhuc gradu, & inventa Quotientis figura tertia 8, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe octies 9 sunt 72; ablatis 7 ex 8 restat 1, & 2 ex 7 restant 5; deinde octies 7 sunt 56, sublatis 5 ex 5 restat 0, & 6 ex 100 restant 94; item octies octo sunt 64, subductis 6 ex 94 restant 88, & 4 ex 4 restat 0:

Denique, promoveatur Divisor adhuc uno gradu in locum infimum, & inventa figura Quotientis ultima 9, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe novies

9 sunt

```
  x8
  8ø
  øøx
 xø37
 7478
 87247
xxxxøø
øø3øø42 (6789
 978888
  9777
    99
```

9 sunt 81; quibus ablatis ex 88 restant 7: deinde novies 7 sunt 63; sublatis 6 ex 7 restat 1, & 3 ex 10 restant 7; item novies 8 sunt 72; quibus ablatis ex 72 nihil restat. Adeoque, tota jam divisione perfecta, habetur quotiens 6789, præcise. Singulas autem operationes seorsim posui, ut eo distinctius appareat quid quaque operatione accedat. Estque hæc methodus dividendi apud plerosque quos vidi Arithmeticos maxime usitata.

Operationis forma alia.

At mallem ego, operatione parum variata, tam multiplicationes quam subductiones particulares, à dextra inchoare, (quamvis divisoris promotionem à sinistra dextrorsum fieri necesse sit;) hoc modo.

Scriptis ut prius Dividendo & Divisore, primaque figura quotientis reperta, 6; ducatur hæc in divisoris singulas figuras à dextra inchoando. Sic sexies 8 sunt 48, quibus subductis ex 49 (mutuatis scil. 4 ex gradu proximo superiori, figuræ 9 præponendis,) restat 1, & 4 transferenda: Tum sexies 7 sunt 42, quibus additis 4 (nuper mutuatis) fiunt 46; quibus demptis ex 53 (mutuatis scil. 5.) restant 7, & 5 transferenda sunt: Tum sexies 9 sunt 54, quæ cum 5 nuper mutuatis fiunt 59, quibus ex 66 subductis restant 7. & perfecta est prima operatio.

```
 771
øø3øø42 (6
 978
```

```
  87
 77x0
øø3øø42 (67
 9788
   97
```

Secundo, promoto Divisore, quæratur secunda Quotientis figura; fiatque multiplicatio & subductio ut prius. Nempe septies 8 sunt 56, quibus sublatis ex 56 (mutuatis scil. 5) restat 0, & transferenda 5: septies 7 sunt 49, quibus additis 5 fiunt 54, quibus subductis ex 61 (mutuatis 6) restant 7, & transmittenda 6: septies 9 sunt 63, & additis 6 fiunt 69, quibus subductis ex 77 restant 8.

Tertio, promoto Divisore, & inventa quotientis figura tertia 8, procedendum ut prius. Nempe octies 8 sunt 64, quibus subductis ex 64 (mutuatis 6,) restat 0, & transmittenda 6: octies 7 sunt 56, & 6 addita constituunt 62, quibus subductis ex 70 (mutuando nempe 7) restant 8, & transmittenda 7; octies 9 sunt 72, quibus additis 7 fiunt 79, eisque ex 87 subductis restant 8.

```
   8
  878
 77x0
øø3øø42 (678
 97888
  977
    9
```

```
   8
  87|80
 77x|ø|ø0
øø3øø42 (6789
 978888
  9777
    99
```

Denique, promoto Divisore, & reperta quotientis figura ultima 9, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe novies 8 sunt 72, quibus subductis ex 72 restat 0 & transmittenda 7: novies 7 sunt 63, & 7 additis fiunt 70, quibus ex 70 subductis, restat 0 & transmittenda 7: item novies 9 sunt 81, quibus additis 7 fiunt 88, eisque ex 88 subductis nihil manet. Totaque divisio est absoluta.

Atque hæc quidem methodus est ea quæ præcessit magis expedita, & quæ tam memoriam quam chartam pauciſſimis figuris onerat, minus item errori obnoxia, & siquis forte aliquando error inciderit, facilius detegitur & emendatur; cum enim, eodem manente divisoris situ, in singulis locis non nisi una fiat subductio, facile erit animadvertere quid in quaque operatione accedat, & quamlibet operationem seorsim examinare si quid erroris suspectum sit; quod quidem methodo præcedente vix aut ne vix fiet.

Siquando

De Ciphris finalibus.

Siquando (vel in hac vel in alia quavis operationis forma) Divisor Ciphris (una vel pluribus) terminetur; ne fiat inanis tot ciphrarum repetitio, rejectis ciphris illis & simul abscissis totidem ex ultimis dividendi figuris, in numeris reliquis fiat divisio: Ita tamen, ut peracto opere, restituantur tam divisori ciphræ abjectæ quam dividendi residuo abscissæ figuræ, ut in exemplo apposito.

```
        1
      234
     7451
20300)6833492 7 (336 14127/20300
     2433300
      2400
        2
```

Operationis forma alia.

Si denique mallet quis Divisoris multipla quam ipsum Divisorem toties describere; quod fortasse (præsertim in Divisionibus majoribus peragendis) non erit incommodum: poterit quidem illud fieri ad hanc formam.

```
      8                 8                 978 1
     878               878                1956 2
    7700              7700                2934 3
978)6633642 (6789 978)6633642 (6789      3912 4
    7000              5868642             4890 5
    5868              6820                5868 6
    6846               788                6846 7
    7824                 8                7824 8
    8802              6639642             8802 9
    6639642
```

Cum enim omnino perinde sit sive Divisorem suo loco sub Dividendi figuris actu scribamus, sive quasi scriptum esset supponamus; licebit ipsum semel tantum loco commodo describere, ejusque deinceps repetitionem omittere; & (inventis successive Quotientis figuris) debita multipla suis locis describere, & descripta subducere. Sic verbi gratia, divisoris sextuplum 5868 ex 6639 subductum relinquit (superne scribendum) 771. Tum divisoris septuplum 6846 ex 7716 subductum, relinquit 870. Et divisoris octuplum 7824 ex 8704 subductum relinquit 880. Denique divisoris noncuplum 8802 ex 8802 subductum nihil relinquit.

Atque in hac operationis forma, præterquam quod parum memoriæ committitur, hæc saltem habet commoda; nempe, siquando eadem figura in Quotiente sæpius occurrere contingit, non opus erit toties multiplicationem exercere, sed multiplum prius inventum tot quot opus erit locis repetere; quod quidem in majoribus divisionibus non parvum aliquando erit compendium. Item, ubi peracta est operatio, licet omnia ista hæc multipla (cum residuo siquod sit) simul addere, quo constet an subductiones recte fuerint peractæ (nempe ex consensu vel dissensu summæ sic inventæ atque propositi numeri dividendi;) atque multiplicationem quamlibet, siquid suspectum sit erroris, sigillatim examinare.

Si sit interim metuendum, nequa confusio oriatur ubi Divisor non sit sua sede conspiciendus; potest isti malo satis caveri, totidem vel punctis vel circellis (si opus sit) divisoris loco collocatis quot ipse continet figuras: puta (in exemplo præmisso) ponantur primum tres circelli sub dividendi figuris 639; & deinde (cum in proximum locum promovendus sit divisor) deleto eorum primo quartus apponatur, ut jam sub figuris 396 tres conspiciantur, & sic deinceps in singulis divisoris promotionibus uno deleto alius subjungatur.

Denique, utile nonnunquam erit, præsertim in Divisionibus grandioribus, (nam in minoribus vix erit operæ pretium) ante inchoatam Divisionis operationem singula Divisoris multipla (decuplo minora) simul descripta habere, (ut in exemplo præmisso exhibuimus,) unde ut opus erit in Divisionis operationem transferri possint; & quidem in quotientis figuris prompte inveniendis auxilio erit, statim enim sine aliis tentamentis inde patebit quod multiplum auferri poterit; ut in exemplo præmisso, statim video numerum 6639, divisoris (978) sextuplo majorem esse & septuplo minorem; adeoque primam Quotientis figuram 6. Et similiter in reliquis.

Atque hactenus præcipuas Divisionis exercendæ formulas exhibui, ut ex omnibus eam sibi quilibet seligat quæ sibi magis accommoda videbitur.

Divisionis operatio in partibus decimalibus. Si partes Decimales numeris integris annexæ sint, (sive in Dividendo, sive in Divisore, sive etiam in utroque,) eadem omnino methodus observanda est ac si essent numeri plane integri: modo illud tantum curetur, ut operatione peracta tot sint partium decimalium loci in numero Dividendo, quot in divisore simul atque quotiente. Adeoque —

1° Si partium decimalium loci (sive loci infra unitatem descendentes) totidem sint in Dividendo quot in Divisore, erit in quotiente nullus: ut 9|78) 66396|42 (6789.

2° Si nullus sit in Divisore, tot erunt in Quotiente quot in Dividendo. ut 978) 66396|42 (67|89.

3° Si pauciores in Divisore quam in Dividendo, tot erunt in Quotiente quot desiderantur in Divisore. ut 97|8) 66396|42 (6789.

4° Si plures fuerint in Divisore quam in Dividendo, tot saltem addendæ sunt ciphræ numero dividendo (post lineam separatricem) ante operationem peractam quot opus est ut ipsius loci descendentes tot sint quot sunt in Divisore; (vel saltem quotienti invento tot subjungendæ sunt ciphræ sine linea separatrice, aut linea separatrix in quotiente, siqua sit, tot locis ad dextram promovebitur;) ut 0|978) 66396|420 (67890. vel 97|8) 6639642|0 (67890.

5° Si post peractam aliquam divisionem (ut supra) superfuerit aliquod residuum; licebit (additis Dividendo, post lineam separatricem, quot opus est ciphris) divisionem ulterius continuare; unde, pro fractionibus ordinariis, provenient partes decimales, lineæ separatrici (in quotiente) postponendis. Sic pro 978) 6640131 (6789$\frac{489}{978}$ prodibit 978) 6640131|0 (6789|5: Et pro 978) 6639805 (6789$\frac{163}{978}$ prodibit 978) 6639805|000 (6789|166 &c.

Et quidem partes decimales |5 tantundem valent atque $\frac{489}{978}$ aut $\frac{1}{2}$; & partes decimales |16666 &c. tantundem valent atque $\frac{163}{978}$, vel $\frac{1}{6}$. Et similiter in aliis.

Ratio hujusmodi processuum in partibus decimalibus, per se satis patet, modo advertatur lineæ separatricis retractionem aut promotionem (singulis gradibus) numerum decuplo vel diminuere vel augere. Adeo ut non sit necesse diutius his immorari.

De Indice Quotientis. Hanc saltem universalem (ex Oughtredo) regulam adjicere liceat, (quæ in numeris Divisione *Ortis* suos assignando locos dirigat,) *Index cujusque particularis figuræ Quotientis invenitur tollendo indicem figuræ dividentis ex indice figuræ divisæ.* Quæ quidem ex iis quæ de Indice numeri Facti in Multiplicatione dicta sunt, satis intelligi poterit, ut prolixa expositione non sit opus.

Divisio specioſa, simul cum specioſa Multiplicatione, mox tradetur.

CAP. XX.

De Multiplicatione & Divisione Algebrica & Specioſa: Et quantitatum ex pluribus denominationibus constantium: Earumque ad unam aliquam reductione.

Multiplicatio & Divisio ſimplicium quantitatum. SIcut Additionis signum + fecimus, & Subductionis —: Ita Multiplicationis signum esto ×; Divisionis autem, lineola inter quantitatem Dividendam & Dividentem (ipsi subjectam) scripta. Adeoque significat V + A quantitati V quantitatem A adjectam esse: V — A quantitati V quantitatem A ablatam esse: V × A quantitatem V in quantitatem A ductam: & $\frac{V}{A}$ quantitatem V quantitate A Divisam, sive ad quantitatem A applicatam.

Nota tamen Multiplicationis signum ×, (præsertim ubi species quælibet unica nota designatur) sæpissime omitti: (cum illud nempe sine ullo incommodo fieri possit:) Sic verbi gratia AB pro A×B, & ABC pro A×B×C, & 2ABC pro 2×A×B×C.

Monen-

Monendum item est (ut de Additione & Subductione, quippe operationibus oppositis, sic etiam) de Multiplicatione & Divisione: Nempe *si plures occurrant vel multiplicationes, vel divisiones, vel partim hæ partim illæ, continue faciendæ, perinde est quo ordine perficiantur, modo omnes continue fiant.* Adeoque $\frac{A \times B}{C} = \frac{B \times A}{C} = \frac{A}{C} \times B = B \times \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \times A = A \times \frac{B}{C}$. Item $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{6}{2} \times 4 = 4 \times \frac{6}{2} = \frac{4}{2} \times 6 = 6 \times \frac{4}{2} = 12$. Et sic in aliis. Eadem nempe de causa qua supra ostendi $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Cum quantitas aliqua componi supponitur ex duarum vel plurium quantitatum continua multiplicatione; dicitur ea tot dimensionum esse quot sunt quantitates illæ componentes. Puta $A \times A$ vel $A \times B$ quantitates sunt duarum dimensionum; $A \times A \times A$, vel $A \times A \times B$ vel $A \times B \times C$, sunt quantitates trium dimensionum. *Dimensionum quantitatis productæ vel Ortæ numerus.*

Si tamen ejusmodi quantitas per quantitatem aliquam dividatur; tot auferri supponuntur dimensiones quot habet quantitas dividens. Sic $\frac{A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times A \times B}{C \times C}$ sunt qnantitates unius dimensionis; $\frac{A \times A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times B \times D}{C}$ sunt quantitates duarum dimensionum.

Et quidem si eadem quantitas sit superne multiplicator, & inferne divisor, se mutuo perimunt; (puta $\frac{AB}{A} = B$:) quod enim multiplicando acquiritur, id æquali divisione destruitur. Sicut, & $B + A - A = B$, ubi quod acquiritur Additione, Subductione tollitur.

Ubi autem species aliquæ ducuntur in figuras numerarias, non solemus ea multiplicatione numerum dimensionum auctum reputare, (saltem nisi cum ipsæ species numeros significant:) adeoque $2A$ vel $2 \times A$ aut $A \times 2$ unius est dimensionis, & $2AB$ vel $2 \times A \times B$ duarum. Quia nempe 2 hic loci non pro alia ejusdem generis dimensione habetur, sed simpliciter pro rationis Duplæ indice; & tantundem valent atque $\frac{2}{1}A$, $\frac{2}{1}AB$. Et in aliis similiter. Estque $\frac{2}{1}A$, alia homogenea quantitas quæ se habet ad A, ut 2 ad 1; sive quæ toties contineat A quoties 2 continet 1.

Quæ quidem ratio etiam aliis characteribus seu symbolis, non minus exprimi poterit quam ipsis figuris numeralibus; ut $\frac{V}{A}B$, quo innuitur alia quantitas (ipsi B homogenea) quæ ipsam B toties contineat quoties V continet A; vel quæ ad B eandem habeat rationem quam habet V ad A.

Et quidem ubi species aliqua per aliam totidem præcise dimensionum dividitur, quantitas nullius dimensionis oritur, sed quæ potius pro *Rationis* indicio habenda est. Adeoque $\frac{A \times B}{C \times D}$ nil aliud indicat quam eam rationem quam habet quantitas $A \times B$ ad quantitatem homogeneam $C \times D$. Nam dividendo quantitatem quamlibet per aliam homogeneam, invenitur Ratio illius ad hanc: uti ex Divisionis natura superius explicata satis patet.

Si vero contingat quantitatis Dividentis dimensiones plures esse quam Divisæ, innuitur quantitas dimensionum pauciorum quam nullius. (Quod eadem ratione supponendum erit, qua supponimus quantitates negativas seu ablatitias, quæ sint minores quam nihil.) Sic $\frac{A}{B \times C}$, $\frac{A}{B \times C \times D}$, &c. erunt quantitates dimensionum -1, -2, &c. Nam $1 - 2 = -1$. $1 - 3 = -2$, &c. Quibus respondent *Gradus* (quos dixi) Descendentes. *Potestatum ejusdem quantitatis indices & characteres.*

Siquando quantitas aliqua in seipsam aliquoties multiplicatur; puta, A, $A \times A$, $A \times A \times A$, $A \times A \times A \times A$, &c. ipsa quantitas A Radix seu Latus dici solet, $A \times A$ vel AA quadratum, $A \times A \times A$ vel AAA Cubus, $A \times A \times A \times A$ vel AAAA Biquadratum ejusdem quantitatis A. Vel ipsius quantitatis A potestas prima, secunda,

cunda, tertia, quarta, &c. Ita nempe ut cujuſque poteſtatis index æqualis ſit numero dimenſionum.

Solent autem Radix, Quadratum, Cubus, Biquadratum, (reliquæque deinceps poteſtates,) ſic notari, 2, ☿, ♁, ☿☿, &c. (ut olim,) vel R, Q, C, QQ, &c. vel etiam A, Aq, Ac, Aqq, &c. vel a, a^2, a^3, a^4, &c. (ut fuſius diximus Cap. XI.) nempe compendii cauſa pro a, aa, aaa, $aaaa$, &c. Et propterea (notas illas in has, ubi opus erit, reſolvendo) $a^2 = aa$. $a^3 = a^2\,a = aaa$. $a^4 = a^3\,a = a^2\,a^2 = aa^3 = aaaa$, &c. Item Aq = AA. Ac = AqA = AAq = AAA. Aqq = AcA = AqAq = AAc = AAAA, &c. Sic 2Aq × 3Ac eſt 2AA × 3AAA. & ☿ × ♁ = ♃ ſeu 2 × 2 in 2 × 2 × 2. Et contra A) Aqq (Ac, hoc eſt A) AAAA (AAA. ☿) ♃ (♁, hoc eſt 2 × 2) 2 × 2 × 2 × 2 × 2 (2 × 2 × 2. Sic a^3) a^5 (a^2 hoc eſt aa) $aaaaa$ (aa. Et ſic in aliis.

De ſignis + & —. Quod autem attinet ad ſigna + & —, in multiplicationis Producto, vel diviſionis Quotiente, ponenda; hæc obſervanda eſt Regula.

In Multiplicatione & Diviſione, ſi datorum ſigna ſint ſimilia, Producti vel Orti ſignum erit + (*affirmativum*:) *ſin diſſimilia*, — (*negativum*.) Nempe + per +, vel — per —, dat +, (ſive multiplicando ſive dividendo;) & + per —, vel — per +, dat —.

Vel etiam (quod tantundem valet) *Si multiplicatoris vel diviſoris ſignum ſit* +, *Multiplicandi vel Dividendi ſignum retinetur*; *ſin* —, *mutatur*. Nempe + per + dat +, & — per + dat —; item + per — dat —, & — per — dat +.

Bach. Diophant. l. 1. def. 9. citat Nonium Alg. part. 2. cap. 4. Ratio ſive demonſtratio hujus, ab ipſa Multiplicationis & Diviſionis natura petenda eſt. (Quales ego malim, ubi fieri poteſt, afferre, quam demonſtrationes à poſteriori.) Quam igitur in ſingulis caſibus oſtendam.

Multiplicatione ſupponitur quantitas Multiplicanda toties poni quoties multiplicator indicat, ut ex ſupra dictis cap. 18. patet. Adeoque qui quantitatem quamlibet (ſive poſitivam ſive ablatitiam) multiplicat per 3 vel + 3, ille eandem quantitatem (ſignis non mutatis) ter ponit; qui per 2 vel + 2, bis ponit; qui per 1 vel + 1, ſemel tantum; qui vero per 0, ne ſemel quidem, ſed nullies ponit, (adeoque quantitas quælibet, per 0 multiplicata, evaneſcit:) qui autem per — 1, — 2, — 3, &c. multiplicat, tot vicibus paucius quam nullies ponit, (cum — 1, — 2, — 3, &c. ſint minus quam nihil, ſeu paucius quam nullum,) hoc eſt revera toties tollit, (per ea quæ diximus Cap. XV. de ſignis + & — contrario ſenſu exponendis;) qui vero tollit, ille tantundem ponit mutato ſigno, (ut ex legibus Subductionis Cap. XV. patet:) Et propterea qui multiplicat per 1, 2, 3, &c. vel alium quemvis multiplicatorem affirmativum, is quantitatem multiplicandam toties ponit ſervato ſigno; qui vero multiplicat per — 1, — 2, — 3, &c. aut alium quemvis multiplicatorem negativum, ille quantitatem multiplicandam toties vel tollit vel (quod tantundem eſt) ſub contrario ſigno ponit. Quod erat oſtendendum. Adeoque A × 2 = 2A, A × — 2 = — 2A, — A × 2 = — 2A, — A × — 2 = + 2A (nempe — A bis tollitur:) Sic A × B = BA, A × — B = — BA, — A × B = — BA, — A × — B = + BA (vel + AB quod tantundem eſt.) Et ſic in reliquis.

In Diviſione, quæritur quoties diviſor, ſeu quantitas dividens, in quantitate Dividenda continetur; vel (quod tantundem eſt) in quam quantitatem ducendus eſt diviſor ut fiat æqualis quantitati Dividendæ; ut patet ex iis quæ de Diviſione tradita ſunt Cap. XIX. Et propterea, ubi quantitatis Dividendæ ſignum eſt + (affirmativum,) ſignum Quotientis idem erit atque diviſoris; ſin quantitatis Dividendæ ſignum ſit — (negativum,) ſignum Quotientis erit ſigno diviſoris contrarium: cum enim diviſoris in quotientem ducti productum futurum eſt æquale quantitati dividendæ; non poteſt illud affirmatum eſſe, niſi factores ſigna habeant ſimilia; nec negativum, niſi diſſimilia: ut ex modo probatis conſtat. Adeoque ſi dividatur + per +, vel — per —, quotiens erit +: ſin + per —, aut — per +, quotiens erit —. Quod erat oſtendendum. Adeoque 2) V ($\frac{V}{2}$, — 2) V ($-\frac{V}{2}$, 2) — V ($-\frac{V}{2}$, — 2) — V ($+\frac{V}{2}$. Item A) V ($\frac{V}{A}$, — A) V ($-\frac{V}{A}$, A) — V ($-\frac{V}{A}$, — A) — V ($+\frac{V}{A}$. Sic A) VA (V. — B) BCD (— CD.

$(-CD.\ -C)\ BCD\ (-BD.\ NA)\ NV\ (\frac{V}{A}.\ A)\ Aq\ (A.\ -A)\ -AcB\ (AqB.$

$Aq)\ -VA\ (-\frac{V}{A}.\ a)\ abc\ (bc.\ ab)\ a^2bc\ (ac.\ 2\mathfrak{Q})\ \mathfrak{C}\ (\frac{1}{2}\mathfrak{z}.\ 3\mathfrak{z})$
$-6\mathfrak{C}\ (-2\mathfrak{Q}.$ Et pariter in aliis.

Atque hactenus de quantitatum ſimplicium Multiplicatione & Diviſione dictum eſt; ſequitur ut de Conjunctis agam; eas intelligo quæ ex variis membris conſtant per ſigna + & — colligata.

Quando quantitates invicem multiplicandæ ex variis membris conſtant, ſingula membra multiplicantis in ſingula membra multiplicandæ (ſignis ut modo dictum eſt obſervatis) ducenda ſunt, Facta deinde in unum aggregatum colligenda. Sive autem à dextra, ſive à ſiniſtra incipiamus, perinde eſt. Exempla ſequuntur. *Multiplicatio quantitatum conjunctarum.*

Exempla Multiplicationis.

$$\begin{array}{r} A+E=Z \\ B \\ \hline BA+BE=BZ \end{array} \qquad \begin{array}{r} A-E=X \\ B \\ \hline BA-BE=BX \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+E-I=L \\ -C \\ \hline -CA-CE+CI=-CL \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2B+3C \\ A-2D \\ \hline 2AB+3AC-4BD-6CD \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+E=Z \\ A+E=Z \\ \hline AA+AE \\ +AE+EE \\ \hline AA+2AE+EE=ZZ \\ Aq+2AE+Eq=Zq \end{array} \qquad \begin{array}{r} A-E=X \\ A-E=X \\ \hline -AE+Eq \\ Aq-AE \\ \hline Aq-2AE+Eq=Xq \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+E=Z \\ A-E=X \\ \hline Aq+AE \\ -AE-Eq \\ \hline Aq-Eq=ZX \end{array} \qquad \begin{array}{r} Z-E=A \\ E \\ \hline ZE-Eq=AE \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Z-A=E \\ A \\ \hline ZA-Aq=AE \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +2\,\mathfrak{z}+3\mathfrak{Q}-4 \\ +1\,\mathfrak{z}-1\mathfrak{Q}-3 \\ \hline -6\,\mathfrak{z}-9\mathfrak{Q}+12 \\ -2\mathfrak{C}-3\,\mathfrak{z}+4\mathfrak{Q} \\ 2\mathfrak{z}\mathfrak{z}+3\mathfrak{C}-4\,\mathfrak{z} \\ \hline 2\mathfrak{z}\mathfrak{z}+1\mathfrak{C}-13\mathfrak{z}-5\mathfrak{Q}+12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3C-1Q+3R-2 \\ -2Q-1R+6 \\ \hline +18C-6Q+18R-12 \\ -3QQ+1C-3Q+2R \\ -6QC+2QQ-6C+4Q \\ \hline -6QC-1QQ+13C-5Q+20R-12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} BP+PC \\ AP \\ \hline AP\times BP+AP\times PC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2Aq+Bq-3A+2 \\ -Cq+2B \\ \hline -2CqAq-CqBq+3CqA-2Cq \\ +4BAq+2Bc-6BA+4B \\ \hline -2Cq\}Aq\ -Cq\}Bq\ +3Cq\}A\ -2Cq \\ +4B\}\quad +2B\}\quad -6B\}\quad +4B \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a^2+3ba-bc \\ 3a^2-2ba-c^2 \\ \hline 6a^4+9ba^3-3bca^2 \\ -4ba^3-6b^2a^2+2b^2ca \\ -2c^2a^2-3bc^2a+bc^3 \\ \hline 6a^4+5ba^3 \begin{matrix} -3bc \\ -6b^2 \\ -2c^2 \end{matrix}\Big\} a^2 \begin{matrix} +2b^2c \\ -3bc^2 \end{matrix}\Big\} a+bc^3 \end{array}$$

Divisio quantitatum conjunctarum.

In dividendis quantitatibus conjunctis, si saltem Divisor sit quantitas simplex, vix quicquam peculiaris difficultatis est præter simplicis divisionis repetitionem; adeoque quotientis per partes inventionem: Et quidem parum refert an à dextra an à sinistra incipiamus.

Exempli gratia. Si quantitas $DC-6BC+8Cq$, dividenda esset per $2C$;

$$\begin{array}{l|l|l} 2C)\ DC & -6BC & +8Cq\ (\tfrac{1}{2}D-3B+4C \\ \hline DC & -6BC & 8Cq \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Primum quæro quænam quantitas ducta in $2C$ faciet DC, & responsum $\frac{1}{2}D$ in quotiente pono, quam quotientem in divisorem ductam ($2C\times\frac{1}{2}D=DC$) ubi ex dividendi parte prima DC subduxerim, nihil restat. Similiter cum videam $2C$ ducendam esse in $-3B$ ut fiat $-6BC$, scribo in quotiente $-3B$, & multiplum ($2C\times-3B=-6BC$) ex $-6BC$ subductum nihil relinquit. Denique cum $2C$ ducenda in $4C$ ut fiat $8Cq$, posito in quotiente $+4C$, & subducto multiplo ($2C\times4C=8CC=8Cq$) nihil manet. Et peracta est divisio, cujus quotiens seu quantitas orta $\frac{1}{2}D-3B+4C$.

Si quid autem, divisione quantum fieri potest continuata, superfuerit, quod per divisorem propositum dividi non possit, vel etiam si ita se habeat Dividendum ut ipsius nulla pars per expositum divisorem dividi possit, (sive simplex sit, sive composita, quantitas dividenda, aut etiam dividens,) residuum illud collocandum est supra divisorem in modum fractionis (sicut in divisione numerosa) & invento quotienti adjungenda. Ut in exemplorum tam præcedentium quam subsequentium aliquot videre est.

$$A)CD\left(\frac{CD}{A}\right.\quad B)BD+Dq-4BE\left(D-4E+\frac{Dq}{B}\right.$$

$$A+B)\ DF\left(\frac{DF}{A+B}\right.$$

$$2z)\ 5zz+4z-2z+1\left(\tfrac{5}{2}z+2z-\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}\right.$$

$$Rq)-ARc+4ABRq+CqFR\left(-AR+4AB+\frac{CqF}{R}\right.$$

$$a)\ 2ba-aa+\frac{da^2}{c}\left(2b-a+\frac{da}{c}\right.$$

Et quidem plerique sive Algebristæ sive Analystæ vix ulterius Divisionis Algebricæ aut Speciosæ traditionem prosequuntur; sed quantitatem dividendam dividenti supraponunt, interjecta lineola; & siquam animadvertant quantitatem quæ utramque communiter multiplicaverit eandem utrobique expungunt: nec ulterius satagunt curiosam Divisionem (præsertim cum divisor ex pluribus partibus constat) exercere.

Verum, etiam cum Divisor ex pluribus partibus constiterit, divisio nonnunquam satis feliciter exerceri potest, eadem plane premendo vestigia quibus in aliis Divisionibus inceditur. Quod (post Cartesium) animadvertit Schootenius (tam in ipsius ad Cartesii Geometriam notis, quam in speciali tractatu quem *Principia Matheseos Universalis* appellat, Arithmeticæ Speciosæ praxin exhibente.) Sed & olim,

olim, juxta Veterum Algebram, ejusmodi divisionis methodum ostendit *Thomas Diggesius*, Anglus, (vir Equestri familia natus, & egregius sui temporis mathematicus, uti ex ipsius editis operibus, sed plerisque lingua Anglicana, satis patet,) in libro qui inscribitur *Stratioticos*, (qui Londini prodiit Anno 1579.) ubi tam Arithmetica vulgaris, quam veterum Algebra succincte traditur.

Idemque præstitit *Robertus Record*, in libro cui titulus, *The Whetstone of Witt* (h. e. *Cos Ingenii*, allusione, ni fallor, facta ad nomen *numerorum Cossicorum*, seu *Regulam Cossæ*,) edito anno 1557, Ubi similem item tradit Radicum extractionem.

Ea vero sic commode præstabitur. Dispositis primo tam multiplicandæ quam multiplicantis partibus, prout negotio magis accommodum videbitur; quæratur quantitas quæ saltem in unum (quod seligere placeat) Divisoris membrum ducta, producat membrum aliquod quantitatis dividendæ: quæ quantitas pro quotiente (particulari) habenda est, & in divisorem totum ducenda, & Factum ex quantitate dividenda auferendum, notato residuo. Atque idem iterandum erit quoties opus est; ut reliqua etiam quotientis membra reperiantur.

Ita si quantitas $ABF+2CDF-3AqB-6ACD$ dividenda sit per $F-3A$. Quoniam $F)ABF(AB$, scribo in quotiente AB, quæ ducta in divisorem $F-3A$

$$\begin{array}{l} F-3A)\,ABF+2CDF-3AqB-6ACD\,(AB+2CD \\ \quad ABF\qquad\quad -3AqB \\ \hline \qquad +2CDF-6ACD \\ \qquad +2CDF-6ACD \\ \hline \qquad\quad \infty\qquad\quad \infty \end{array}$$

facit $ABF-3AqB$, quibus ex dividendo subductis, restare video $2CDF-6ACD$. Deinde, eandem operationem iterando, cum sit $F)2CDF(+2CD$, subjungo quotienti priori $+2CD$, & ducto $2CD$ in $F-3A$, fit $2CDF-6ACD$, quod ubi subductum est, nihil restat; totaque operatio est absoluta.

Item si dividendum sit $Ac-Ec$ per $A-E$: cum sit $A)Ac(Aq$. Ducendo quotientem Aq in divisorem $A-E$ fit $Ac-AqE$, & facta subductione restat $AqE-Ec$. Tum quia $A)AqE(AE$, quotiens AE in divisorem $A-E$ ductus,

$$\begin{array}{l} A-E)\,Ac-Ec\,(Aq+AE+Eq \\ \quad Ac-AqE \\ \hline +AqE-Ec \\ \quad AqE-AEq \\ \hline +AEq-Ec \\ +AEq-Ec \\ \hline \quad\infty\qquad\infty \end{array}$$

dat $AqE-AEq$; & facta subductione, restat $AEq-Ec$. Tandem, cum $A)AEq(Eq$; & Eq in $A-E$ sit $AEq-Ec$; subductione facta, nihil restat; adeoque absoluta est operatio, & quotiens $Aq+AE+Eq$.

Atque idem proveniet si à dextra incipiamus. Cum enim sit $-e)-e^3(e^2$, erit quotiens e^2, & e^2 in $a-e$, erit ae^2-e^3; & facta subductione, residuum a^3-ae^2. Tum $-e)-ae^2(+ae$; & ae in $a-e$ est a^2e-ae^2; & subductione facta, residuum est a^2-a^2e. Denique $-e)-a^2e(a^2$; & a^2 in $a-e$ est a^3-a^2e; &, facta subductione, restat nihil. Quotiens autem est ut prius, nisi quod qui tunc ultimus nunc primus est terminus.

$$\begin{array}{l} a-e)\,a^3-e^3\,(e^2+ae+a^2 \\ \quad ae^2-e^3 \\ \hline \quad a^3-ae^2 \\ \quad a^2e-ae^2 \\ \hline \quad a^3-a^2e \\ \quad a^3-a^2e \\ \hline \quad\infty\qquad\infty \end{array}$$

Ad eandem formam; si dividenda esset eadem quantitas a^3-e^3 per $a+e$. Cum sit $a)a^3(a^2$; & a^2 in $a+e$ sit a^3+a^2e; facta subductione, residuum erit $-a^2e$

$$a+e)\,a^3-e^3\,(a^2-ae+e^2-\frac{2e^3}{a+e}$$

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2e & \\ \hline -a^2e-e^3 & (a^2-ae-e^2+\frac{2ae^2}{a+e} \\ -a^2e-ae^2 & \\ \hline +ae^2-e^3 & +ae^2-e^3 \\ +ae^2+e^3 & -ae^2-e^3 \\ \hline -2e^3 & 2ae^2 \end{array}$$

$-a^2e-e^3$. Tum cum $a)-a^2e\,(-ae$; & $-ae$ in $a+e$ fit $-a^2e-ae^2$; facta ſubductione, reſtabit $+ae^2-e^3$. Denique cum ſit $a)\,ae^2\,(e^2$, & e^2 in $a+e$ fit ae^2+e^3; facta ſubductione, reſtabit $-2e^3$: Et quotiens eſt $a^2-ae+e^2-\frac{2e^3}{a+e}$.

Vel, ſi in ultima operatione, pro quotiente $+e^2\,(=\frac{ae^2}{a})$ ſumeretur quotiens $-e^2$, quia nempe $+e)-e^3\,(-e^2$; $-e^2$ in $a+e$, fuiſſet $-ae^2-e^3$; &, ſubductione facta, reſtaret $2ae^2$, adeoque quotiens $a^2-ae-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$. Quod tantundem valet: Nam $+e^2-\frac{2e^3}{a+e}=-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$ hoc eſt $\frac{ae^2+e^3-2e^3}{a+e}=\frac{-ae^2-e^3+2ae^2}{a+e}$.

Sed idem fere eveniret ſi præcedens operatio (ubi reſiduum eſt $-2e^3$) ulterius continuetur; & ſumatur quotiens $\frac{-2e^3}{+e}=-2e^2$: nam $-2e^2$ in $a+e$ eſt $-2ae^2-2e^3$; quod, ex $-2e^3$ ſubductum relinquit $+2ae^2$, adeoque erit $a^2-ae+e^2-2e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$.

Quod ideo moneo, ut appareat, (præſertim ubi neceſſario fractione terminetur) quotientem poſſe variis formis exhiberi (nam & multis adhuc modis variari poteſt) ſed qui tantundem valeant; ut quilibet eam quæ ſibi magis accommoda videatur ſeligat; & quidem nunc hanc nunc illam ut præſens negotium poſtulaverit.

Poſſet interim eadem operatio peragi eodem plane ſucceſſu, ſi à dextra incipiamus, Nempe $e)-e^3\,(-e^2$; & $-e^2$ in $a+e$ facit $-ae^2-e^3$; & (ſubductione facta) reſiduum a^3+ae^2. Tum $e)+ae^2\,(+ae$: & ae in $a+e$ facit a^2e+ae^2: ergo reſiduum a^3-a^2e. Denique $e)-a^2e\,(-a^2$; & $-a^2$ in $a+e$ facit $-a^3-a^2e$: & reſiduum $2a^3$. Adeoque quotiens $-e^2+ae-a^2+\frac{2a^3}{a+e}$.

$$a+e)\,a^3-e^3\,(-e^2+ae-a^2+\frac{2a^3}{a+e}$$

$$\begin{array}{r|l} -ae^2-e^3 & \\ \hline a^3+ae^2 & \\ +a^2e+ae^2 & (-e^2+ae+a^2-\frac{2a^2e}{a+e} \\ \hline a^3-a^2e & a^3-a^2e \\ -a^3-a^2e & a^3+a^2e \\ \hline 2a^3 & -2a^2e \end{array}$$

Vel, ſi in ultima operatione ſumatur quotiens $+a^2\,(=\frac{a^3}{a})$ erit reſiduum $-2a^2e$ & quotiens $-e^2+ae+a^2-\frac{2a^2e}{a+e}$. Sed utrovis horum modorum procedatur, quotiens tantundem valet atque prius.

Ubi

Ubi autem tanta oritur varietas, judicio opus est ut quis eam seligat quotientis formam quæ præsenti negotio magis sit accommoda: vel etiam, sine alia divisione, ad instar fractionis exhibeat, $\frac{a^3 - e^3}{a + e}$.

Aliud libet exemplum ex *Diggesio* (supra citato) afferre, & simul huic negotio

$$\begin{array}{r|l} 6\,z + 8\,2 & 60\,s + 80\,z\,z + 72\,1 + 96\,z \;(\; 10\,1 + 12\,2 \\ \cline{2-2} & 60\,s + 80\,z\,z \\ \hline & 72\,1 + 96\,z \\ & 72\,1 + 96\,z \\ \hline & 00 \qquad 00 \end{array}$$

finem imponere. Nempe quantitatem $60\,s + 80\,z\,z + 72\,1 + 96\,z$ per $6\,z + 8\,2$ sic dividit. Quoniam $6\,z) 60\,s (\; 10\,1$; quotientem inventum ducit in divisorem, & productum $60\,s + 80\,z\,z$ ex dividendo subducit; & restant $72\,1 + 96\,z$. Tum quia $6\,z) 72\,1 (\; 12\,2$; quotienti priori adjungit $+ 12\,2$: & ducto hoc quotiente in divisorem, productum aufert ex dividendo & nihil restat. Adeoque quotiens est $10\,1 + 12\,2$.

Sed & apud Clavium in *Algebra* operationem non absimilem reperio: quem, si libet, consule.

Atque hactenus Multiplicationem & Divisionem Algebricam & Speciosam absolvimus.

Multiplicatio quantitatis plurium denominationum.

Multiplicatio & Divisio quantitatum ex pluribus Denominationibus aggregatarum, vix aliud est quam Multiplicatio & Divisio Speciosa. In hoc saltem differunt, quod harum denominationum ad invicem ratio supponitur cognita, ut fieri possit ab una ad aliam reductio; Specierum autem seu Symbolorum (in Arithmetica Speciosa) ratio ad invicem vel ignoratur, vel ita acsi esset ignorata tractatur.

Cum autem ejusmodi quantitas plurium denominationum per aliam unius tantum denominationis multiplicanda occurrit, incipienda est operatio ab infima sive minima denominatione, & sic ad majores ascendendum: transmissio semper in superiores quantum opus est. Exempli gratia. *Si quis singulis diebus expendit* 14 *libras* 10 *solidos &* 8 *denarios monetæ Anglicanæ, quantum expendit ille singulis septimanis*? Respondebitur, Expensam hebdomadis septuplam esse expensæ diurnæ (cum quælibet hebdomas contineat septem dies.) Adeoque expensa diurna multiplicanda est per 7. Nempe denarii $8 \times 7 = 56$. cum autem 12 *den*. $:= 1$ *sol.* erunt $56\,d = 4\,s + 8\,d$. ideoque subscriptis 8 *d*, reservo 4 *sol*: reliquis solidis mox annumerandos. Tum solidi $10 \times 7 = 70$, quibus additis 4 huc transmissis fiunt 74: sunt autem 20 *sol*. $:= 1$ *lib*. ergo 74 *sol*. $:= 3$ *lib*. $+ 14$ *sol*. Ergo subscriptis 14 *sol*. reservo 3 *libras* mox reliquis adjungendas. Denique libræ $14 \times 7 = 98$ quibus additis 3 fiunt 101 *libr*: quibus subscriptis, patet expensam hebdomadis esse 101 *lib*. 14 *sol*. 8 *den*.

$14^{\text{lib.}}$	10^{s}.	8^{d}
	.	7.
3	4	
101.	14 .	8

Reductio plurium denominationum ad unam.

Si autem vel Multiplicator sit numerus grandior, vel etiam ex pluribus denominationibus constet: expedit plerumque (aut etiam aliquando prope necessarium erit,) quantitates illas plurium denominationum ad quantitates unius denominationis reducere, & tum demum multiplicationem perficere, & peracta tandem multiplicatione, pristinas eas (si opus erit) denominationes restituere.

Exempli gratia, *Si viris aliquot singulis debentur* 28 *libræ*, 13 *solidi*, & 9 *denarii*; quantum *debebitur eorum* 283 *viris*? Priusquam multiplicationem propositam aggrediar, commodum erit totam monetæ propositæ summam ad unam *denariorum* denominationem reducere: quod ipsum multiplicatione peragitur, hoc modo. Quoniam singulæ libræ (monetæ Anglicanæ) continent 20 solidos; numerum librarum expositum multiplico per 20, ut habeam numerum solidorum in illis 28 libris contentorum, quibus adjungendi 13 solidi (in quæstione expositi) ut habeatur numerus omnium solidorum; nempe 573. Deinde, quoniam singuli solidi continent 12 denarios, numerum illum solidorum (573,) multi-

28 *lib.* 13 *s* 9 *d*
20
560
13
573 *sol.*
12
1146
573
9
6885 *den:*
283
20655
55080
13770
1948455

plico per 12, ut habeam numerum denariorum inibi contentorum: quibus adjungendi adhuc denarii 9 (in quæstione expositi) ut habeatur numerus omnium denariorum, nempe 6885*d*: = 28 *lib.* 13*s.* 9*d.*

Et tum demum, post hanc reductionem factam, multiplico 6885 (numerum denariorum) per multiplicatorem propositum 283; & producuntur denarii 1948455.

Denique, si velim intelligere quot libræ & solidi in hoc denariorum numero continentur; restituentur illæ denominationes dividendo. Nempe quia 12*d*=1*s.* denariorum numerum 1948455 divido per 12, & prodeunt solidi 162371, atque insuper 3 denarii post peractam divisionem residui. Deinde, cum 20*s* = 1 *lib*: numerum solidorum 162371 divido per

7248 | 3*d*
12) 194848 | 3 (162371*s.* 3*d.*
12 36
72 84
24 12

2 | 15
20) 162371 | 11 (8118*lib.* 11*s.* 3*d.*
12120

20, & prodeunt libræ 8118, atque insuper 11 solidi residui. Adeoque 1948455*d* = 8118*lib.* 11*s.* 3*d.* summa quæsita.

34 *lib.* 7 *unc.* | 26 *d.* 15 *h.*
12 | 24
68 | 104
34 | 52
7 | 15
415 *unc.* | 639 *horæ.*

Item. Si ex scaturigine quadam singulis horis effluant aquarum pondo 34 cum unciis 7. quæritur quantum effluet 26 diebus & horis 15? Reduco primum aquæ quantitatem assignatam ad Uncias, multiplicando 34 (numerum librarum seu pondo) per 12 (quia nempe 1 *lib.* = 12 *unc.*) & adjungo uncias 7. Item tempus assignatum in horas reduco, multiplicando 26 numerum dierum per 24 (quia 1 *dies* = 24 *hor.*) & adjungo horas 15. Et, peracta reductione, multiplico 415 numerum unciarum singulis horis

415 *unc.*
639 *hor.*
3735
1245
2490
265185 *unciæ.*

unc.
22229 *lib. unc.*
12) 265185 (22098. 9.
24
24
108
96

effluentium, per 639 numerum horarum in tempore proposito; & producitur 265185 numerus unciarum toto isto tempore effluentium. Quem denique unciarum numerum divido per 12 (tot enim unciæ continentur in una libra) & prodeunt 22098 *lib.* 9 *unciæ*, quæsita quantitas aquæ toto isto tempore effluentis.

Divisio quantitatis pluribus denominationum.

Quæ autem de quantitatum ex pluribus denominationibus constantium Multiplicatione dicta sunt, ea fere & de earundem Divisione intelligenda erunt. Nisi quod hic potius à denominatione suprema incipiendum sit, & quod illic superest ad proxime inferiorem reducendum.

Exempli

Exempli gratia; ſi defuncti facultates, 183 *lib.* 10 *ſol.* 9 *den.* inter quatuor ipſius liberos ſint æqualiter partiendæ; quæritur quantum cuique cedet. Primo dividantur libræ 183 per 4, & habebitur quotus 45, cum reſiduis 3 libris. Secundo, pro 3 libris, ſubſtitutis 60 ſolidis, (quia 1 *lib.* = 20 *ſol.* adeoque 3 *lib.* = 60 *ſol.*) & adjunctis 10 ſolidis (in quæſtione expoſitis) habentur 70 ſolidi, qui per 4 diviſi, quotum præbent 17, & ſuperſunt 2. Denique, cum 2 *ſol.* valeant 24 denarios; qui, adjunctis 9 in quæſtione expoſitis, fiunt 33; hi per 4 diviſi quotum exhibent 8; cui, propter 1 reſiduum (cum jam ad infimam denominationem perveniatur) adjungo fractionem $\frac{1}{4}$. Adeoque quotiens perfectus, ex omnibus aggregatus, eſt 45 *lib.* 17 *ſ.* $8\frac{1}{4}$ *d.* Cedent igitur unicuique ex liberis, libræ 45, ſolidi 17, & denarii 8 cum quadrante.

	lib.	*ſ.*	*d*	*l.*	*ſ.*	*d.*
4)	183	10	9	(45	17	$8\frac{1}{4}$.

3		2
20	4) 70 (17	12
60		24
10		9
70		33

4) 33 ($8\frac{1}{4}$

Vel etiam, reducto primum tam Dividendo quam Diviſore ad unam denominationem, operatio poſtea inſtituatur more ſuperius tradito. Verbi gratia. Si quæratur, *In Annis Julianis* 24, *diebus* 34, *horis* 2, *& 32 minutis*; *quot ſint Menſes Synodici, ſeu Lunationes.* Quoniam Annus Julianus conſtat diebus 365 & 6 horis, hoc eſt (multiplicando 365 per 24 & addendo 6) horis 8766; Anni 24 conſtabunt horis 210384, (ut multiplicando patebit:) quibus ſi addantur dies 34, horæ 2, & 32 minuta; hoc eſt 818 horæ & 32 minuta: habentur horæ 211202 & 32 minuta: hoc eſt (multiplicando 211202 per 60 & addendo 32) minuta 12672152: quæ tantundem valent atque Anni Juliani 24, 34 *d*, 2*h*, 32′. Deinde Menſis Synodicus, (puta à Novilunio ad Novilunium) ſtatuitur, dierum 29, cum 12 horis & 44 minutis, hoc eſt, (ut ex adjuncto calculo patet,) minutorum 42524. Quod quæritur igitur, hoc eſt, Quoties in minutis 12672152, (tempore propoſito,) continentur minuta 42524, (tempus unius menſis Synodici.) Numero igitur illo per hunc diviſo, habetur Quotiens 298 præciſe. Tot igitur menſes Synodici expoſito tempore continentur. Quod erat inveſtigandum.

d	h	
365.	6.	
24		
1460		
730		
6		
8766	h.	
24		
35064		
17532		
210384	h.	
818.	32′	
211202.	32	
60.		
12672120		
32		
12672152	m.	

d	h		
34.	2.	32′.	
24			
136			
68			
2			
818.	32′		
d	h		
29.	12.	44.	
24			
116			
58			
12			
708	h.		
60			
42480			
44			
42524	m.		

42524) 12672152 (298
85048
382176
340192

Atque

Atque ad hujuſmodi formas præſtandæ ſunt multiplicationis & diviſionis operationes, ubi quantitates ex pluribus denominationibus conflantur. Ubi interim judicio opus erit, ut præparatoriæ reductiones ita inſtituantur ut præſenti negotio maxime ſit accommodum, & res tota quam fieri poteſt minimo labore peragatur. Quod quidem frequente exercitio ediſcetur, & uſu fiet familiare.

Multiplicationes & Diviſiones continuæ.

De Multiplicatione autem & Diviſione notandum eſt univerſim (cui ſimile de Additione & Subductione ſuperius tradidimus,) *ubi plures occurrunt numerorum Multiplicationes, vel Diviſiones, vel ſimul utræque, continue faciendæ, perinde eſt quo ordine inſtituantur, modo omnes continue fiant*; tantundem enim utcunque prodibit. Exempli gratia. $2\times3\times4=2\times4\times3=3\times2\times4=3\times4\times2=4\times2\times3=4\times3\times2=24$. Item ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA. Et $\frac{4\times3}{2}=\frac{3\times4}{2}=\frac{4}{2}\times3=\frac{3}{2}\times4=\frac{1}{2}\times4\times3=6$. Item $\frac{AB}{CD}=\frac{BA}{CD}=\frac{BA}{DC}=\frac{A}{C}\times\frac{B}{D}=A\times\frac{B}{CD}=\frac{A}{CD}\times B=\frac{C)AB}{D}=\frac{D)BA}{C}=D)\frac{AB}{C}=C)\frac{BA}{D}=C)\frac{B}{D}\times A=C)\frac{A\times B}{D}$. Item, *Perinde eſt ſive per duos pluresve diviſores continue fiant diviſiones, ſive per productum ex diviſoribus illis invicem multiplicatis*; puta $C)\frac{B}{D}=\frac{B}{CD}$. $3)\frac{24}{2}=\frac{24}{2\times3}=\frac{24}{6}=4$. &c. At interim *Cavendum eſt, nequis ex Diviſoribus* (aut quod ab illis fit) *alium quam diviſorem multiplicet*: Si enim vel multiplicatorem vel quotum multiplicet diviſor, eo ipſo ex diviſore fit multiplicator & totius operationis proceſſum immutat. Nam omnino aliud eſt $C)\frac{B}{D}=\frac{B}{D\times C}$ atque $\frac{B}{D}\times C=\frac{B\times C}{D}$. Sic aliud eſt $2)\frac{12}{3}=\frac{12}{3\times2}=2$, atque $\frac{12}{3}\times2=\frac{12\times2}{3}=8$. Quorum omnium demonſtrationes ex ſuperius traditis Multiplicationis & Diviſionis principiis facile eſt colligere.

Atque hactenus de Multiplicationis & Diviſionis praxi dictum eſto. Sequitur, ut de utriuſque Examine ſeu Probatione verba faciamus.

CAP. XXI.

De Multiplicationis & Diviſionis Probationibus; earumque Probationum fundamentis. Familiares aliquot quæſtiunculæ ſolvuntur.

QUæ de Additionis & Subductionis probationibus ſuperius dicta ſunt, non pauca & hic locum obtinent. Nempe non adhibentur illæ tanquam demonſtrationes certitudinis regularum juxta quas proceditur; nam de illis ſatis conſtat ex principiis eis quibus innituntur: ſed ad explorandum numquis error ſubrepſerit in exercitio, quo à regulis deviatum ſit. Non igitur ad probandas regulas, ſed ad explorandum num operatio præſtita regulis ſit conformis, inſtituuntur hæ probationes. Et quanquam poſſet etiam examen inſtitui repetendo ipſam operationem, & ad regulam ubique exigendo; tamen illud felicius ut plurimum inſtituitur operationis forma mutata; quippe hoc pacto minus eſt periculi in eundem errorem iterum incidendi.

Multiplicationis per Diviſionem Probatio.

Sicut Additio per Subductionem (operationem ſibi contrariam;) ſic Multiplicatio per (huic oppoſitam) Diviſionem examinare ſive probare ſolent. Quod enim Multiplicatione conficitur id Diviſione diſſolvitur. *Ubi enim duorum numerorum invicem multiplicatione, alius producitur; ſi hic per eorum alterutrum dividatur, reliquus prodit.* Puta, ſi quantitas A ducta in B ſit AB; hæc ipſa AB diviſa per B fiet A. (nempe $\frac{AB}{B}=A$.) Ratio eſt, quia ſubſequens diviſio per B

deſtruit

destruit id quod præcedente multiplicatione per eandem quantitatem B efficiebatur, adeoque ipsa quantitas A quæ prius fuerat, jam iterum quasi ex postliminio redit. Eodem modo si eadem AB dividatur per A prodibit B; (nempe $\frac{AB}{A}=B$:) quia scilicet tam ex ductu A in B, quam ex ductu B in A, eadem prodibit quantitas, puta AB = BA. sic $\frac{6=3\times2}{2}=3$, & $\frac{6=2\times3}{3}=2$.

Atque idem in grandioribus numeris similiter obtinet. Si enim ex ductu 283 in 546, vel (quod tantundem est) ex ductu 546 in 283, proveniat 154518. Ut explorem num rite peracta sit operatio, hunc productum divido per multiplicatorum utrumvis, & si reliquum divisione provenientem comperio, argumento est operationem rite peractam fuisse; sin minus, certum est alicubi fuisse erratum. Et similiter in aliis quibusvis multiplicationibus, veritatem peractæ operationis examinare licet.

```
  283                  x6
  546                 4333
 1698          546) x3453x8 (283
 1132                x692
 1415                43638
154518                 x638

  546                  x6
  283                 x3099
 1638          283) x3453x8 (546
 4368                x4x53
 1092                xxx32
154518                 x698
```

Ut autem per Divisionem Multiplicatio, sic per Multiplicationem Divisio examinabitur. Nam *si Quotiens in Divisorem ducatur* (*vel hic in illum*) *prodibit numerus pridem Dividendus.* Nam quod Dividendo fuerat dissolutum, multiplicando (per eundem numerum) iterum restituitur. Puta, si A) AB (B, hoc est $\frac{AB}{A}=B$, multiplicando B in A, prodibit AB. Ita, si 3) 12 (4, hoc est $\frac{12=3\times4}{3}=4$; ducto 3 in 4 (Divisore in Quotientem) prodibit, $3\times4=12$. Et similiter in numeris grandioribus; si dividendo 154518 per 546 prodeat 283, vel eundem numerum 154518 dividendo per 283 proveniat 546; vice versa, multiplicando 546 in 283, vel hunc in illum, restituetur numerus pridem dividendus 154518. Ut in calculo mox ante appositio videre est. *Divisionis examen per Multiplicationem.*

Si autem, post peractam Divisionem, aliquod superfuerit Residuum; curandum est ut in probatione per multiplicationem instituenda, hoc etiam Residuum addatur: Secus enim non prodibit Dividendus integer, sed mancus. Nam, verbi gratia, si numerus 387 per 24 divisus exhibeat quotientem 16, & superfint 3; hoc residuum indicat, quod in dividendo illo contineatur divisor vicibus 16, (vel quotiens vicibus 24,) atque insuper numerus 3. Adeoque, præter Divisorem (vel Quotientem) toties positum (quod multiplicando præstatur) adjungendus erit numerus ille 3.

```
   x4|3
24) 387 ( 16
    24    24
    x44   64
          32
          __3
          387
```

Ratio totius processus (si illa ex jam dictis nondum satis intelligatur) sic reddi poterit. Cum numerus multiplicandus toties in Producto contineatur, quoties Unitas in Multiplicatore, (nam toties est ille ponendus quoties jubet multiplicator;) si Divisione quæratur, quoties in Producto contineatur Multiplicandus? prodire debet (si operatio recte peracta fuerit) pro divisionis Quotiente,

tiente, numerus idem qui prius fuerat multiplicator. Et contra, cum Divisionis Quotiens ostendat, quoties in Dividendo contineatur Divisor, (vel præcise, vel quanto cum residuo;) si Divisor ille toties (multiplicando) ponatur, (&, siquod erat, adjiciatur residuum,) emergere debet numerus Dividendus; quippe ille in quo Divisor toties ut dictum est continetur.

Multiplicationis per Multiplicationem probatio.

Præter has autem Multiplicationis & Divisionis probationes, per operationem contrariam instituendas; potest utraque per eandem operationem probari. Cum enim (ut ex superius traditis patet) duorum numerorum invicem multiplicatorum, perinde est uter dicatur Multiplicator; (puta, perinde est, in exemplis nuper appositis, sive 283 per 546, sive numerus hic per illum, multiplicetur:) *Ubi peracta est operatio, si de ἀκριβείᾳ dubitetur; qui prius erat numerus multiplicandus, jam fiat multiplicator, & vice versa*; Et, si idem utrobique sit numerus Productus, argumento erit processum fuisse legitimum; sin minus, erroneum. Sic ductis 283 in 546, vel 546 in 283, prodibit utrobique 154518, ut supra patet.

Examen Divisionis per Divisionem.

Pariter in Divisione; Cum non minus ostendat Divisor, quoties in Dividendo contineatur Quotiens; quam Quotiens, quoties in eodem Dividendo contineatur Divisor; (quippe qui ita se habent ad Dividendum, ut Factores in multiplicatione ad Factum;) Si de peracta divisione occurrat dubium; *qui prius prodiit Quotiens jam fiat Divisor*, & si jam prodeat pro Quotiente numerus ille qui tum fuerat Divisor, argumento est operationem rite peractam esse; sin secus, erratum esse. Verbi gratia; si dividatur 154518 per 546 prodibit quotiens 283; de quo si dubitetur, numerus idem 154518 dividatur per quotientem 283, & prodibit numerus 546, qui prius fuerat divisor, (ut supra patet,) unde liquet operationem rite peractam esse. *Residuum autem, si quod est, idem esse debet utrobique.* Puta, cum diviso numero 387 per 24, quotiens sit 16, & residuum 3; si 387 dividantur per 16, quotiens erit 24, & residuum item 3: ut ex adjuncto calculo patet.

```
  6|3
16) 3 8 7 (24
    3 2
      6 4
```

Atque hæ quidem sive Multiplicationis sive Divisionis probationes, huc usque traditæ, in quacunque Multiplicatione aut Divisione locum habent; sive in numeris integris, sive in Fractionibus Decimalibus, aliisve; sive in operationibus Algebricis & Symbolicis vel Speciosis; sive item una, sive plures sint denominationes. Quippe idem est in omnibus processus fundamentum.

Probationes minus certæ.

Quod autem de Probationibus Additionis & Subductionis superius monuimus; idem de Multiplicationis & Divisionis Probationibus pariter sciendum est: Eas nempe non omnes ejusdem esse generis; quippe aliæ certiores sunt, & fallaciæ minus obnoxiæ, (quales sunt, quas jam exposuimus,) sed laboriosæ magis, (& quæ quidem tantundem operis in examinandis quantum in peragendis operationibus postulant,) aliæ vero magis expeditæ, sed quæ nonnunquam fortasse fallant.

Divisionis per Additionem probatio lubrica.

Atque huc quidem referri potest ea methodus examinandi Divisionis operationem, per additionem multiplorum omnium subductorum, quæ (cum residuo si quod sit) restituent numerum Dividendum. Puta, si (in priori exemplo) dividamus 154518 per 283, unde quotiens emergit 546; si omnia multipla (infra dividendum subscripta) simul addantur, prodibit numerus Dividendus; quod ni fiat, erroris indicium est. Est autem hæc probatio admodum lubrica; quippe quæ solas subductiones examinat non item multiplicationes; & siquis prius, Divisorem in singulas quotientis notas ducendo, error irrepserit, idem adhuc intactus manet, neque hac probatione omnino detegitur, quippe quæ multiplicationes illas, sine examine, pro veris habet.

```
      2 8 3
    5 6 6
  8 4 9
1 1 3 2
1 4 1 5
1 6 9 8
-------
1 5 4 5 1 8
```

Probatio Novenaria.

Sicui autem nimis laboriosum videbitur, probationibus superius traditis uti; adeoque tantundem operis insumere in operis examinatione seu probatione, quantum in ipsa operatione: Poterit breviorem illam probationem adhibere, quam *Novenariam* vocant, (qualem supra ostendimus in probatione Additionis & Subductionis;) quæ sic instituitur.

In Multiplicatione.

Numeri Multiplicandi notis omnibus indiscriminatim additis (neglecta locorum consideratione,) indeque, quoties fieri possit, abjectis 9, residuum si quod sit seorsim notetur (vel, si nihil supersit, ciphra;) Deinde & Multiplicantis notis omnibus

omnibus similiter additis, & abjectis novenis omnibus, residuum item notetur: Hæc duo residua invicem ducantur, & abjectis inde 9 quoties fieri potest, Residuum, siquod sit, notetur: Denique si hoc residuum idem sit atque Residuum quod proveniet ex omnibus numeri Producti seu Facti notis, ita ut prius additis, abjectis novenis omnibus, indicium est (saltem probabile) operationem rite peractam esse; sin secus, certissimum est alicubi erratum esse. Exempli gratia: In Multiplicatione apposita, Multiplicandi notæ addantur $2+8=10$, $10-9=1$, $1+3=4$. Hoc residuum scribatur ad crucis sinistram. Deinde in Multiplicatore, $5+4=9$, quibus abjectis, reliqua nota 6, scribatur ad crucis dextram. His Residuis invicem ductis, est $4\times6=24$, unde bis abjectis 9, restant 6, (vel $2+4=6$:) Hoc Residuum superne scribatur. Deinde numeri producti notæ sic addantur, $1+5=6$, $6+4=10$, $10-9=1$, (vel $1+0=1$,) $1+5=6$, $6+1=7$, $7+8=15$, $15-9=6$ (vel $1+5=6$.) atque hoc Residuum inferne scribatur. Denique quoniam duo Residua, superne & inferne notata, deprehenduntur eadem; conjicio operationem rite peractam; sin fuissent diversa, certum esset admissum esse errorem.

283	6
546	4 X 6
1698	6
1132	
1415	
154518	

In Divisione, pari modo procedendum est. Addantur indiscriminatim notæ Divisoris, &, abjectis novenis omnibus, notetur residuum. Quotientis item notæ addantur, &, abjectis novenis, notetur Residuum. His residuis invicem ductis, (& facto additis, siquod fuerit, Residui Divisionis notis,) &, abjectis novenis, notetur & hoc Residuum. Denique, facta simili notarum Dividendi additione, & novenorum abjectione, quod tandem restat æquabitur (si operatio rite sit peracta) Residuo proxime notato: Sin minus, erratum est. Sic in appositа divisione. Divisoris notæ $1+6=7$, (quod notetur ad sinistram.) Quotientis notæ $2+4=6$, (quod notetur ad dextram.) Factum ex his $7\times6=42$, unde quater abjectis 9, restant 6, (vel $4+2=6$.) tum (quia post peractam divisionem restabant 3,) $6+3=9$: quibus abjectis manet 0, quod superne noto. Denique in Dividendo $3+8+7=18$, unde bis abjectis 9, manet 0, (vel $1+8=9$, $9-9=0$) quod cum idem sit atque Residuum superne notatum, conjicio operationem fuisse rite peractam.

In Divisione.

613	0
16)3877(24	7 X 6
32	0
64	

Quod autem de Residuo Divisionis dictum est; nempe ipsius notas addendas esse facto ex residuis Divisoris & Quotientis; pariter obtinet & in multiplicatione, si præter puram Multiplicationem accedat aliquod additamentum. Puta si 16 per 24 multiplicanda sint, & simul addenda 3, ut habeatur facti additique aggregatum 387: Ex multiplicandi notis emergit 7, ex multiplicantis 6, quorum factum $7\times6=42$, hoc est $4+2=6$, & (propter additamentum 3) $6+3=9$: & $9-9=0$; Sed & $3+8+7=18$, & $18-9-9=0$. unde conjicitur operationem rite peractam esse.

16	0
24	7 X 6
64	0
32	
3	
387	

Fundamentum quo nititur hæc probatio, idem est quod supra docuimus de consimili Probatione Additionis & Subductionis. Nempe quod, ubi nulla locorum habetur ratio, tantundem valent 1 & 10, item 2 & 20, & pariter in similibus: At idem est substituere 1 pro 10, atque abjicere 9; item substituere 2 pro 20, atque abjicere bis 9; & sic in in reliquis.

Monendum autem est (quod & de Additionis & Subductionis simili probatione monuimus) probationem hanc nonnunquam fallacem esse, neque errorem semper detegere, (præsertim si is ob neglectam debitam locorum considerationem obtingat, quem frustra quis putet hinc detectum iri, cum nulla hic locorum habeatur ratio:) Quamvis enim, ubi numeri non conveniunt, certum sit erratum esse; non tamen certum est operationem recte procedere ubi conveniunt. *Lubrica.*

Nec tamen prorsus contemnenda.

At interim (ne penitus abjiciendam putemus hanc probationem) probabile est (utut non certum) errorem siquis sit (præterquam qui ex indebito notarum situ oritur) hinc detectum iri, saltem nisi data industria fraus instituatur ; raro enim (& quidem rarius quam quis putet) Errores siqui sunt tam feliciter (vel potius infeliciter) conspirant ut se mutuo tegant. Et propterea cum hæc probatio non adeo magno constet labore, non inutiliter adhiberi poterit.

Et quidem in prolixis præsertim Divisionibus, operæ pretium esse potest eam sæpius in ipso operationis curriculo adhibere (quod quidem fieri potest post quamlibet Divisoris promotionem) ne error in principio operis totum insecuturum laborem plane frustraneum reddat.

Minus universalis est.

Sed & minus universalis est hujusmodi Probatio Novenaria; quippe quæ solis numerosis operationibus convenit, non item Speciosis sive Symbolicis, aut Algebricis ; ut nec (nisi correctiones aliquoties adhibeantur) ubi plurium denominationum quantitates occurrunt. Cum enim ortum ducat hæc probatio ex graduum sive locorum dispositione in continua proportione decupla ; ubi hæc dispositio non est, neque locus est huic probationi. Si vero Arithmeticis placuisset primitus, pro decupla, aliam quamvis proportionem adhibuisse ; potuissent etiam & illi, quæcunque fuerit, hujusmodi probationem aptasse : Non quidem abjiciendo singula novena, uti jam ; sed eum numerum, quoties fieri possit, abjiciendo, qui unitate minor sit quam Exponens istius qua proceditur continuæ proportionis : Puta, si (pro decupla) adhibuissent noncuplam, abjicienda essent (non novena, sed) octona omnia ; si octuplam, septena; si septuplam, sena ; si sextuplam, quina ; & similiter de quavis alia.

Atque hactenus de Probationibus tum Multiplicationis tum Divisionis dixisse sufficiat : in quibus vel utendis vel negligendis suo quilibet utatur arbitrio.

Quæstiunculæ familiares solvuntur.

Iisdem autem, cum his probationibus, principiis nituntur hujusmodi quæstionum solutiones ; (quibus se exercendo tirones Multiplicationis & Divisionis naturam & consensum mutuum melius persentiscent.)

4
3 4) 12 (3
12

Quis numerus est, qui per 4 *divisus, quotientem dabit* 3. Nempe 4 & 3 (Divisore & Quotiente) invicem ductis, prodibit 12, numerus quæsitus Dividendus. Vel, quod eodem recidit, si numerus quæsitus, Dividendus, dicatur A ; quoniam (juxta quæstionis tenorem) $\frac{A}{4}=3$;

$\frac{A}{4}=3.$

$A=3\times4=12.$

si pars utraque multiplicetur per 4, erit $A=3\times4=12$.

235 3) 705 (235
3
705

Item *Cujus numeri triens est* 235. Hoc est, Quis numerus per 3 divisus, quotientem dabit 235. Eadem methodo, ductis invicem 235 & 3, prodibit numerus quæsitus 705 ; qui nempe per 3 divisus quotientem imperatum exhibebit. Vel etiam quia $\frac{705}{3}=235$

$\frac{A}{3}=235$

$A=235\times3=705$

3) A (235, erit $A=235\times3=705$.

Item (in numeris grandioribus) *Quot aurei distribuendi sunt inter milites* 2646, *ut quisque habeat* 283 ? Hoc est, Quis numerus dividendus est per 2646, ut prodeat 283 ; vel, per 283, ut prodeat quotiens 2646 ? Ductis invicem 2646 & 283, prodibit numerus quæsitus 748818.

2646
283
7938
21168
5292
748818

2646) 748818 (283

283) 748818 (2646

$\frac{748818}{2646}=283$

$\frac{748818}{283}=2646$

Contra

Contra vero, si quæratur *Quis numerus est qui in* 4 *ductus faciet* 12? Factum 12 dividatur per 4 (alterum ex factoribus) & prodibit reliquus Factor quæsitus 3. Vel, si numerus quæsitus dicatur A; cum sit (juxta quæstionis tenorem) $A\times4=12$, dividendo utramque æquationis partem per 4, erit $A=\frac{12}{4}=3$.

4) 12 (3 $\quad 3\times4=12$

$A\times4=12 \quad A=\frac{12}{4}=3.$

Item *Cujus numeri triplum est* 705? Hoc est, Quis numerus in 3 ductus faciet 705? Si numerus factus 705 dividatur per factorem datum seu cognitum 3, prodibit Factor quæsitus 235. Vel quia $A\times3=705$, erit $A=\frac{705}{3}=235$.

xx
3) 7ø5 (235
3ǯǯ — 3
705.

$A\times3=705.$

$A=\frac{705}{3}=235.$

Item, *Inter quot milites distribuendi sunt* 748818 *aurei, ut quilibet habeat* 283. Divisis 748818 per 283, prodibit militum numerus quæsitus. Et pariter in similibus.

x
xȝ6
x82ø9
283) 748818 (2646
ȝ66 283
x69 8 7938
xxȝ2 21168
x6ø8 5292
748818

Si autem quæratur, Verbi gratia, *Quinam numeri sint invicem ducendi ut factus sit* 24? Vel *Quis per quem dividendus, ut quotiens sit* 24? Hujusmodi quæstiones nugaces essent; quippe ex datis in quæstione nihil certi elicitur: posset enim modis innumeris responderi: puta 1×24, 2×12, 3×8, 4×6, $2\times2\times6$, $4\times2\times3$, $2\times8\times1\frac{1}{2}, \frac{48}{2}, \frac{72}{3}, 3)\frac{144}{2}, 2)\frac{24}{3}\times6$, &c. Nam ex solo facto in multiplicatione, de Factoribus neutiquam constabit; ut nec, in Divisione, ex solo Quotiente constabit de Dividendo aut Divisore. Sed de his hactenus.

Atque hactenus quidem de quatuor Arithmetices (ut vocantur) Speciebus, seu potius Partibus, Additione, Subductione, Multiplicatione, & Divisione, dicta sufficiant. Multa autem quæ de his operationibus apud Arithmeticæ practicæ magistros passim occurrunt, & speciatim operationum aliquot in nonnullis compendia, varioque modos has operationes peculiaribus subjectis applicandi, (puta, in re nummaria, de fœnore, de mercatura; in re astronomica, de tempore, de motu, eorumque reductionibus, &c.) sciens prætereo. Quippe infiniti esset laboris, & quidem supervacanei, ea omnia quæ id genus dici possent sigillatim prosequi. Nec quidem id nostri operis est; sed potius operationum fundamenta tradere, ipsosque fontes aperire, unde scientifice & demonstrative possint veræ procedendi rationes intelligi. Quas qui rite intelligit, non modo majori fructu & voluptate ipsas operationes exercebit, easque in usum proferet, quam si cæco ductu incedat, & quasi Andabatarum more pugnet; sed & multo firmius quæ novit memoria retinebit. Quas enim sæpius audimus querelæ, Rerum Mathematicarum cognitionem, Arithmetices præsertim, citissime deperditum iri nisi assidua exercitatione retineatur; non aliunde oriuntur, quam quod plerique Arithmetices praxin, sive operandi methodum, memoriter tantum edocti, ipsas operandi rationes penitus ignorent; quas quidem vulgares Arithmeticæ practicæ Magistri plerumque vel ipsi nesciunt, vel saltem plus satis reticent; eisque edocti Mechanicam potius (regulas minime intellectas persequendo) exercent, quam Arithmeticam. Qui autem ipsius praxeos rationem satis persentiscunt, (nec tantum cæco itinere, regularum memoriter cognitarum ductum implicita fide secuti, incedunt,) judicio magis quam memoria ducti, difficilius ea quæ intimis hauserunt medullis evulsum iri patientur.

CAP. XXII.

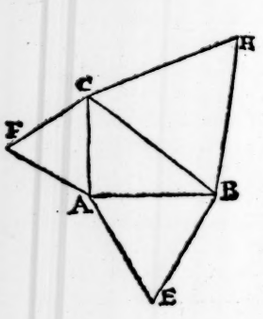
Multiplicationis exercitium in Parallelogrammis Rectangulis menſurandis, & invicem comparandis. Diviſionis in Parallelogrammis Rectangulis exercitium.

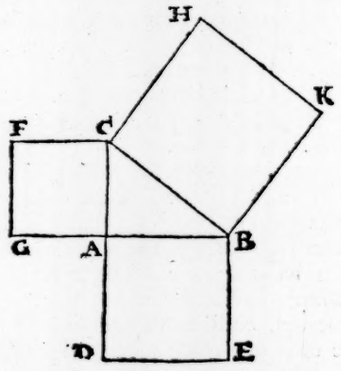
PRiuſquam Multiplicationis & Diviſionis (quarum praxis ſuperius oſtenſa eſt) negotium dimittam; nec inutile forſan erit, nec injucundum, pauca ſubtexere quibus utriuſque utilitas innoteſcat, atque interim Geometriæ cum Arithmetica ſumma conjunctio percipiatur. Quamvis enim Arithmetica, quæ de Numeris agit, Geometricas menſuras per ſe non attingat; ſed, propriis principiis nixa, neque Geometriæ auxilio indigens, regulas abſtractas tradit, omni numerabili pariter applicabiles; (objectum quippe ſimplicius & latius nacta quam Geometria:) cum tamen objectum Geometriæ, viz. menſura, intra objecti Arithmetices terminos cadat, (quippe cujus partes numerantur;) non abs re erit, Arithmetices exercitium in re Geometrica paucis oſtendere.

Hoc autem, dum de Additione & Subductione verba fecimus, parcius egimus, quia non magni forſan res videri poſſit, lineam lineæ adjungere, vel etiam demere, dum utraque data ſit. Puta, ſi lineæ datæ A B adjungere oporteat lineam datam B C; vel datæ A C datam B C auferre. Cui tamen operi perficiendo aptata videmus tria ſucceſſive problemata; nempe Prop. 1. 2. 3. primi Euclidis. Illæ autem propoſitiones, cum ſint pure Geometricæ, poſſunt in traditione Arithmetica tuto omitti.

A B C

Quod autem de Angulorum, Superficierum, aut Solidorum, Additione vel Subductione dici poſſit; Vel erit penitus Geometricum, neque ad calculum omnino ſpectans; nempe ſi Anguli, ſuperficies, aut corpora, non mutata adjungantur; ut, ſi dato Quadrato A B E D, vel A C F G, addendum eſſet Triangulum A B C; ubi nihil requiritur aliud, quam ipſorum in dato ſitu fabricam Geometricam: Vel, ſicubi calculo opus ſit, non ſolum Additione aut Subductione opus erit, ſed





ut plurimum Multiplicatione item vel Diviſione: ubi nempe proportionum ratio habenda eſt. Ut, ſi quæratur Quadratum B C H K, æquale quadratis A B E D & A C F G ſimul ſumptis; vel Triangulum B C H, æquale ſimilibus A B E, A C F, ſimul ſumptis: aut ſi quæratur Quadratum A B E D, æquale quadrato B C H K dempto quadrato A C F G; vel Triangulum A B E, æquale triangulo B C H dempto triangulo A C F; ubi præter figurarum additionem & ablationem, earum item aggregati vel reſidui transformatio requiritur. Ideoque de hujuſmodi Additionibus vel Ablationibus, priuſquam de Multiplicatione & Diviſione dixeramus, non ita opportunum erat verba facere.

Ut

Ut vero quæ de Multiplicatione & Diviſione jam tradidimus, Geometricis menſuris applicentur, præmittenda ſunt è Geometria quædam ad terminorum explicationem neceſſaria. Et quoniam ex menſura Parallelogrammi Rectanguli (quod, brevitatis gratia, ſimpliciter Rectangulum dici ſolet) reliquarum figurarum dimenſiones deduci ſolent; de Parallelogrammo præmittendæ ſunt quædam Definitiones, hoc eſt, Terminorum explicationes.

Definitiones aliquot Geometricæ.

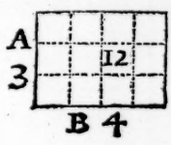
Parallelogrammum appellant figuram planam quadrilateram, cujus oppoſita latera, ſeu laterales lineæ, ſunt rectæ parallelæ, hoc eſt, *æquidiſtantes, ſive æqualem ubique habentes inter ſe diſtantiam.* Quales ſunt quæ in Schematis mox apponendis conſpiciuntur.

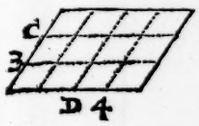
Parallelogrammum vero tunc *Rectangulum* dicitur, *quando ipſius omnes anguli ſunt recti.* (Vel etiam *Cujus angulus aliquis eſt rectus*: Nam ſi Parallelogrammum habeat vel unum angulum rectum, reliquos item omnes rectos eſſe facile eſt demonſtratu.)

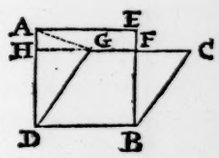
Angulus autem *Rectus* tunc eſſe dicitur, *quando linea recta in rectam angulum faciens ita recte incidit ut neutro magis inclinet.* Ut in figura præcedenti, recta CA in rectam GAB ita recte incidens ut non magis hac quam illac inclinet, facit angulos CAB, CAG, rectos. Et ſimiliter anguli ad F, G, H, &c. recti ſunt.

Si qua vero inclinet magis, angulum *obliquum* facit: Nempe *Acutum* (quippe *angulo recto minorem*) *ea qua propendet* ſeu magis inclinat; vel *Obtuſum* (*angulo recto majorem*) *ea unde reclinat* ſive divergit magis. Puta, ſi recta CA, quæ jam erecta eſt, ſupponatur verſus AB nutare ſeu propendere, adeoque ab AG reclinari, pro duobus angulis jam rectis, fierent duo obliqui, CAB acutus, & CAG obtuſus; qui tamen ſimul ſumpti duobus illis rectis ſunt æquales; nam quanto unus propter inclinationem minuitur, tanto alter propter reclinationem augetur; quodque huic accedit, illi aufertur. Similiter, angulus ABC acutus eſt, quippe recto minor; ABK obtuſus, quippe recto major. Et ſimiliter alias.

Parallelogrammum autem *Rectangulum, ſi latera habeat omnia invicem æqualia, Quadratum dicitur*; quale eſt, in ſubjecta figura tertia, ADBE: *Sin minus Oblongum*; quale eſt figura prima AB.







Parallelogrammum vero *Obliquangulum* (hoc eſt, *cujus anguli ſunt obliqui*) *ſi latera habeat omnia invicem æqualia, Rhombus dicitur*; ut in figura tertia, GDBC: *Sin ſecus, Rhomboeides*; ut figura ſecunda CD.

Contineri vero vel *comprehendi* dicitur *Parallelogrammum Rectangulum* (ſive quadratum ſit, ſive oblongum,) *duabus rectis lineis quæ rectum comprehendunt angulum.* Definiente Euclide 1 *d* 2. Non quidem eo ſenſu quo ipſe alibi negat, *duabus rectis lineis ſpacium comprehendi*; (non enim duabus ſed quatuor rectis hoc ſenſu parallelogrammum continetur, hoc eſt, ambitur ſive undiquaque concluditur;) ſed quia duabus illis parallelogrammi rectanguli ſpatium ſive area determinatur, quippe altera longitudinem, altera latitudinem determinat. At in Parallelogrammis Obliquangulis, ſecus eſt: non duabus rectis circa angulorum obliquorum quodvis poſitis determinabitur iſtius parallelogrammi magnitudo; ſed major, minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit; adeoque præter rectarum longitudinem, anguli etiam ſive obliquitatis determinatione opus erit, ut determinetur Parallelogrammi magnitudo. Et propterea, neque in hac definitione, nec (quantum memini) apud Euclidem alibi, Parallelogrammum Obliquangulum duabus ejuſmodi circa ipſius quodvis angulum poſitis contineri dicitur. Si cui vero ſic libeat loqui, anguli præterea mentionem facere oportebit ut magnitudinem determinet.

Parallelogrammi Rectanguli menſuratio.

His præmiſſis, *Ad Parallelogrammi Rectanguli aream ſive magnitudinem inveniendum, nil aliud requiritur quam ut duarum rectarum quibus contineri dicitur, altera in alteram ducatur, ſive multiplicetur.* Exemplo res evadet perſpicua.

Sint expoſiti Parallelogrammi Rectanguli latera circa rectorum angulorum quodlibet,

libet, duæ rectæ, quarum altera sit trium, altera quatuor pedum, (vel palmorum, calamorum, orgyiarum, spithamarum, aut quarumlibet aliarum mensurarum æqualium.) Rectanguli magnitudo sive area reperitur ductu linearum unius in alteram, longitudinis puta in latitudinem, vel contra: eodem plane modo quo totidem numerorum series essent computandæ. Si enim, verbi gratia, tot puncta, vel (si libet) tot milites ordinatim digesti, ea lege disponantur,

. . . . ut, in qualibet serie transversa, quaterni, in qualibet directa,
. . . . terni conspiciantur: manifestum est ter quaternos, vel quater
. . . . ternos, ita esse dispositos. Multiplicatis igitur 4 per 3, vel 3 per 4, emerget omnium numerus $12 = 3 \times 4$. Et pariter in simili quavis cujusvis numeri dispositione faciendum erit.

Eodem modo Parallelogrammum 3 pedes latum, & 4 pedes longum, ex ductu latitudinis in longitudinem, reperietur pedum quadraticorum $12 = 3 \times 4$. Cujus quidem rei ratio sic facile percipietur. Si enim parallelogrammi istius tam altitudo sive latitudo A, pedum trium, quam basis sive longitudo, pedum 4, dividi intelligantur in suos respective pedes; atque à cujusque pedis termino ducantur rectæ lateribus parallelæ, quibus tota figura in particulas quadratas dirimatur, quarum quælibet sit tam longa quam lata pedem unum, (hoc est, quælibet contineat pedem quadratum;) manifestum erit, ex ipso Schematis inspectu, in qualibet serie transversa (propter longitudinem quatuor pedum) quatuor quadraticos pedes contineri, ipsasque series (propter altitudinem trium pedum) numero tres esse; adeoque pedes quadraticos omnes esse ter quaternos, hoc est $12 = 4 \times 3$. Et quidem, pari ratione, manifestum erit (propter $A = 3$) singulis seriebus erectis tres pedes quadraticos contineri, ipsasque series (propter $B = 4$) numero quatuor; adeoque pedes quadraticos omnes esse quater ternos, hoc est $12 = 3 \times 4$. Et similiter in aliis quibusvis Parallelogrammis rectangulis mensurandis (sive quadrata sint sive oblonga) ex ductu longitudinis in latitudinem, (sive quod tantundem valet) basis in altitudinem (vel hujus in illam,) habetur area.



Atque hinc colligere licet, *Pedem quadraticum unum, continere Digitos sive Uncias*, 144. Cum enim longitudo Pedis unius sit unciarum 12; Et propterea Pedis quadratici tam longitudo quam latitudo sit 12 unc. ex ductu hujus in illam emergit area $12 \times 12 = 144$ unciarum quadraticarum. Adeoque, utut pes linealis contineat non nisi 12 uncias lineales; pes tamen quadraticus continet uncias quadraticas 144. Eodem modo cum apud nos *communis Virga mensoria officinarum* (*a Tard* dicta) *contineat longitudine pedes tres*; *eadem mensura quadratica continebit pedes quadraticos* $9 = 3 \times 3$.

$A = 3$
$B = 4$
$AB = 12$

Hæc si per symbola libeat explicare; pro latitudine seu altitudine ponatur A, pro longitudine seu basi B; erit igitur Area seu magnitudo AB, sive $A \times B$. Ergo si $A = 3$, & $B = 4$, erit $AB = 3 \times 4 = 12$. In quadratis autem, ubi longitudo latitudini est æqualis, erit $AB = AA = Aq$. Adeoque, cum longitudo pedis unius sit 12 unciarum; & propterea

$$A = P = 12\,U$$
$$B = P = 12\,U$$
$$AB = PP = Pq = 144\,UU = 144\,Uq.$$

pedis quadratici tam basis quam altitudo 12 unc: ideoque $AB = PP = Pq = 12\,U \times 12\,U = 144\,UU = 144\,Uq$. Hoc est, $Pq = 144\,Uq$, vel unus Pes quadraticus æqualis 144 Unciis quadraticis. Et eodem modo, in Virga quadratica, cum tam basis quam altitudo sit pedum 3, erit area $Vq = 9\,Pq$. Et similiter alibi.

$A = V = 3\,P$
$B = V = 3\,P$
$AB = Vq = 9\,Pq$

Hac methodo, *In mensurandis*, verbi gratia, *Asserculis ligneis*; si Asseris unius latitudo A sit duum pedum, longitudo B pedum 20; erit area sive magnitudo $AB = 40\,Pq$; hoc est pedum quadraticorum quadraginta.

$A = 2\,P$
$B = 20\,P$
$AB = 40\,Pq$

Similiter, *Si Camera mensuranda* sit longa pedes 18, lata pedes 12, erit totius area seu magnitudo, pedum quadraticorum $216 = 12 \times 18$.

$A = 12\,P$
$B = 18\,P$
$AB = 216\,Pq$

Pariter,

Pariter, cum *terræ Jugerum Anglicanum* (*Acra*, vulgo dicta) *ſtatuta lege cenſeatur inſtar Parallelogrammi Rectanguli, Perticas* 4 *lati, longi vero* 40 : *continebit area Perticas quadraticas* 160 = 4 × 40. Vel etiam, cum Perticæ longitudo ſit pedum $16\frac{1}{2}$; adeoque 4 Perticæ ſint pedes 66 ; & perticæ 40, pedes 660 : Idem terræ Jugerum ſive *Acra valebit pedes quadraticos* 43560 = 66 × 660.

A = 4 Pert.
B = 40 P.
AB = 160 P q.

A = 66 Ped.
B = 660 P.
AB = 43560 P q.

Hinc etiam patet, *varia eſſe poſſe parallelogramma, quorum magnitudo ſit æqualis, ambitus autem admodum inæqualis ; & contra*, ambitus æqualis, at magnitudo inæqualis ; & quidem couſque ut *quorum ambitus major eſt, eorum area ſeu magnitudo ſit minor.* Exempli gratia. *De Parallelogrammis Rectangulis invicem comparatis.*

Sit Rectanguli primi latus quodlibet ſex pedum ; erit area, pedum 36 = 6 × 6. Secundi latitudo, pedum 4, longitudo pedum 9; erit area, pedum 36 = 4 × 9. Tertii latitudo pedum 3, longitudo 12 ; erit area 36 = 3 × 12. Quarti latitudo pedum 2, longitudo 18 ; erit area 36 = 2 × 18. Quinti denique latitudo 1, longitudo 36 ; erit area item 36 = 1 × 36. Eſt igitur eadem ſingulorum area ſeu magnitudo ; nempe pedum quadraticorum 36 ; at eorum ambitus longe diverſi ; quippe primi, pedum 24 = 6 + 6 + 6 + 6 ; ſecundi, 26 = 4 + 9 + 4 + 9 ; tertii, 30 = 3 + 12 + 3 + 12 ; quarti, 40 = 2 + 18 + 2 + 18 ; quinti, 74 = 1 + 36 + 1 + 36, nempe plus quam triplo major quam primi.

Deinde, ſit Rectangulum primum (ut prius) longum & latum pedes 6 : Secundum, latum pedes 5, longum pedes 7 : Tertium, latum 4, longum 8 : Quartum, latum 3, longum 9 : Quintum, latum 2, longum 10 : Sextum, latum 1, longum 11. Erunt hæc omnia Iſoperimetra ; quippe perimeter, ſive ambitus ubique pedum 24 = 6 + 6 + 6 + 6 = 5 + 7 + 5 + 7 = 4 + 8 + 4 + 8 = 3 + 9 + 3 + 9 = 2 + 10 + 2 + 10 = 1 + 11 + 1 + 11. At magnitudines longe diverſæ : quippe primum eſt pedum quadraticorum 36 = 6 × 6 ; ſecundum, 35 = 5 × 7 ; tertium, 32 = 4 × 8 ; quartum, 27 = 3 × 9 ; quintum, 20 = 2 × 10 ; ſextum denique 11 = 1 × 11, plus triplo minus quam erat primum.

Denique ſit expoſitum Parallelogrammum rectangulum, cujus latitudo ſit pedis 1, longitudo, 11 ; adeoque ambitus 24 = 1 + 11 + 1 + 11, area vero pedum quadraticorum 11 = 1 × 11. Ad quod comparentur alia quatuor, quorum primum ſit latum pedes 2, longum 9 ; ſecundum, latum 3, longum 8 ; tertium, latum 4, longum 7 ; quartum latum 5, longum 6. Erit ſingulorum ambitus minor quam parallelogrammi expoſiti, (quippe pedum 22, cum illius fuerit pedum 24 :) area vero major ; nempe primi, pedum quadraticorum 18, ſecundi 24, tertii 28, quarti 30, expoſiti vero non niſi 11.

Ex quibus omnibus abunde patet, *quam lubricum ſit figurarum magnitudinem ex ſolo ambitu æſtimare.*

Porro ; Hinc liquet etiam, *ex Parallelogrammis Rectangulis Iſoperimetris* (hoc eſt, quorum ambitus ſunt invicem æquales,) *Quadratum eſſe omnium maximum ; Oblongorum vero illud majus eſt quod propius ad Quadratum accedit*, hoc eſt, cujus laterum differentia minor eſt. Quod ſic probatur. *Rectangulorum Iſoperimetrorum, quodnam eſt maximum.*

Sit quadrati cujuſvis latus A ; erit ipſius quadrati area A × A = A q. Deinde fiat Rectangulum oblongum, quadrato illi iſoperimetrum : Quod ut fiat, tantundem addendum eſt longitudini, quantum latitudini aufertur ; illud autem quantumcunque ſit dicatur C ; fietque longitudo A + C, latitudo A − C ; adeoque Rectangulum Quadrato Iſoperimetrum, quippe utriuſvis ambitus 4 A, ut laterum utrobique additione patet. Erit Oblongi hujus area (ductu longitudinis in latitudinem

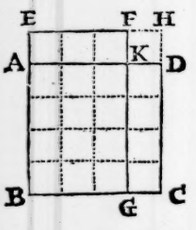
A	A + C	A + C	A
+ A	+ A − C	in : A − C	× A
+ A	+ A + C	Aq + AC	A q
+ A	+ A − C	− AC − Cq	
4 A	4 A ∓ 0	Aq − Cq	

	A + C
min :	A − C
differ :	2 C

tudinem inventa) Aq — Cq, (ut multiplicando patet;) adeoque minor quam area quadrati, Aq; quod erat primo probandum. Sed & tanto minor est quantum est quadratum quantitatis C, (ut patet;) hoc est, quadratum semidifferentiæ laterum, (nam si ex A + C, auferatur A — C, residuum sive differentia est 2C, ut subducendo patet:) & propterea quo majus est Cq, eo plus ab Aq deficit oblongum, & proinde minus est; & contra: quod erat secundo probandum.

Potest quidem hoc ipsum Geometrice demonstrari; at ego demonstrationem Arithmeticam hanc ideo adhibui, quod ea præsenti negotio magis sit accommoda, (dum Arithmetices usum in rebus Geometricis ostendo,) & quidem per se magis universalis. Geometricam vero demonstrationem siquis postulet, hanc habeat.

Sit quadratum quodvis ABCD, (puta longum & latum 4 pedes,) eique isoperimetrum Rectangulum oblongum BEFG, (puta longum pedes 5, latum 3,) tanto nempe magis longum quanto est minus latum quam est Quadratum illud. Est autem rectangulum AKGB utrique illorum commune; cui si addatur rectangulum KC, absolvitur Quadratum AC; sin addatur rectangulum KE, absolvitur oblongum GE. At Additamentum KC majus est additamento KE, (ut mox probabitur,) adeoque (propter commune AG) quadratum AC majus oblongo GE, (quia si æqualibus addantur inæqualia, aggregata erunt inæqualia, illud autem majus ubi plus additur.) Quod autem KC majus est, & quanto majus, quam KE, sic ostenditur.



Rectangulum KC æquatur toti ED (quia longitudines AD, DC, æquales sunt, quippe latera quadrati, & latitudines KF, KD, æquales item ex hypothesi, quippe tantundem additur quadrati longitudini quantum latitudini aufertur; & anguli utrobique recti,) majus igitur est KC quam KE, (quippe æquale toti ED = KE + KH,) eorumque differentia est KH quadratum (propter KF, KD, rectas æquales,) hoc est, quadratum rectæ KF, vel KD, semidifferentiæ laterum. Et propterea, in rectangulis Parallelogrammis Isoperimetris, cujus laterum differentia minor est, illud est majus: & cujus laterum differentia nulla est (nempe quadratum) id omnium maximum. Quod erat demonstrandum.

Divisionis exercitium in Parallelogrammis rectangulis.

Verum ut Multiplicationis ope, quæ jam tradidimus, peracta sunt omnia, ita & Divisione pariter similia fere problemata absolvi possunt. Verbi gratia.

8) 144 (18
A) AB (B

18) 144 (8
B) AB (A.

Cum supra ostensum est, pedem quadraticum valere 144 uncias quadraticas, (quippe 12 × 12 = 144.) Si *asserculus ligneus* sit 8 uncias latus; quæritur quam longus sit oportet, ut habeatur pes quadraticus. Dividendo 144 (aream datam) per 8 (datam latitudinem) habetur longitudo quæsita $18 = \frac{144}{8}$. Quippe area AB per latitudinem A divisa exhibet longitudinem quæsitam B. Sin data esset longitudo 18, area 144 per eam divisa exhiberet latitudinem $8 = \frac{144}{18}$. Vel B) AB (A.

8) 160 (20
20) 160 (8

A) AB (B
B) AB (A

Eodem modo. Cum *Jugerum Anglicanum* (ut supra dictum est) contineat Perticas quadratas 160 = 4 × 40. In agro (parallelogrammo) cujus latitudo est perticarum 8, quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut habeatur Jugerum terræ? Dividendo 160 per 8, habetur longitudo quæsita $20 = \frac{160}{8}$. Vel, data longitudine 20, dividendo habetur latitudo 8. Hoc est A) AB (B. & B) AB (A.

12
20
2) 240 (120

24
8
6) 192 (32

Pari modo, Si *Planities Cameræ* pedes 12 lata, longa vero 20; tegenda sit asserculis ligneis latis pedes 2: quanta sumenda est asserculorum (conjunctorum omnium) longitudo, ut operi sufficiant? Primo, ducta latitudine 12, in longitudinem 20, habetur area pedum quadraticorum 240 = 12 × 20. Deinde, dividendo aream 240, per asserculorum latitudinem 2, habetur longitudo quæsita 120.

Item. Si tapeti *holoserici* longæ pedes 24, latæ 8; inducendus sit à tergo pannus vilior latitudinem habens pedum 6: quæritur quanta longitudo requiritur ut operi sufficiat? Primo,

Primo, ducendo 24 in 8 habetur area tota $192 = 24 \times 8$. Deinde aream totam 192 per 6 latitudinem panni dividendo, habetur longitudo quæsita, $32 = 19\frac{2}{3}$. Et similiter alibi.

Atque hactenus tum Multiplicationis tum Divisionis exercitium, in mensurandis Parallelogrammis Rectangulis quantum opus est, ostendimus.

CAP. XXIII.

Euclidis Elementum Secundum Arithmetice demonstratur.

EAdem qua supra methodo; ex solo parallelogrammi rectanguli calculo, totum fere Elementum secundum Euclidis facile demonstratur Arithmetice. Exempli gratia,

1 e 2. *Si sint duæ rectæ* (puta R, B,) *quarum altera* (B) *secetur in quotcunque partes* (puta M, N, O,) *rectangulum duabus illis rectis comprehensum* ($R \times B = RB$,) *æquale est iis rectangulis quæ recta insecta* (R) *& singulis sectæ segmentis comprehenduntur.* Hoc est, Si $B = M + N + O$, est $RB = RM + RN + RO$. Quod ex multiplicationis calculo patet. Vel, si ponantur R,B,M,N,O, æquales numeris 4, 10, 5, 3, 2. erit $4 \times 10 = 4 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2$. ut ex calculo item patet.

M N O	$B = M + N + O$	$10 = 5 + 3 + 2$
R | RM | RN | RO |	R R	4 4
B	$RB = RM + RN + RO$	$40 = 20 + 12 + 8$

2 e 2. *Si recta linea* (Z) *secetur utcunque* (in A & E,) *rectangula quæ tota & utroque segmento comprehenduntur* (ZA + ZE) *æquantur quadrato totius,* (Zq.) Hoc est, si $Z = A + E$, est $Zq = ZA + ZE$. Vel si tota sit 5, segmenta 3, 2: erit $5 \times 5 = 5 \times 3 + 5 \times 2$.

Z	$Z = A + E$	$5 = 3 + 2$
Z | ZA | ZE |	Z Z	5 5
A E	$Zq = ZA + ZE$	$25 = 15 + 10$

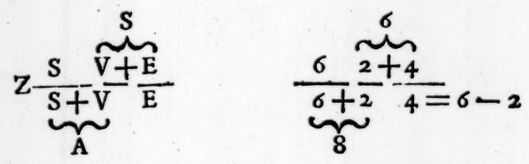
3 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunque* (in A, E,) *Rectangulum tota & uno segmentorum comprehensum* (ZA,) *æquatur rectangulo segmentis comprehenso* (AE) *una cum prædicti segmenti quadrato* (Aq.) Hoc est, Si $Z = A + E$; erit $ZA = AE + Aq$: vel (in numeris) si $5 = 3 + 2$, erit $5 \times 3 = 3 \times 3 + 2 \times 3$.

Z	$Z = A + E$	$5 = 3 + 2$
A | Aq | Æ |	A A	3 3
A E	$ZA = Aq + AE$	$15 = 9 + 6$

4 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunque* (in A, E:) *Quadratum totius* (Zq) *æquale est quadratis segmentorum* (Aq + Eq) *una cum rectangulo segmentis comprehenso, bis sumpto,* (2AE.) Hoc est, Si $Z = A + E$; est $Zq = Aq + Eq + 2AE$. vel (in numeris,) si $5 = 3 + 2$. erit $5 \times 5 = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$.

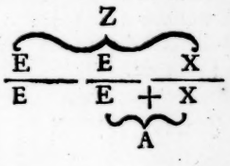
A E	$Z = A + E$	$5 = 3 + 2$
A | Aq | Æ |	Z A + E	5 3 + 2
E | Æ | Eq |	$Aq + AE$	$9 + 6$
Z	$+ AE + Eq$	$+ 6 + 4$
	$Zq = Aq + 2AE + Eq$	$25 = 9 + 12 + 4$

5 e 2. *Si recta* (Z) *secetur in segmenta æqualia* (S, S,) *& inæqualia* (A, E, vel S+V, S−V,) *rectangulum segmentis totius inæqualibus comprehensum,* (AE,) *una cum quadrato rectæ inter puncta sectionum* (Vq;) *æquatur quadrato dimidiæ.* (Sq.) Hoc est, Si Z=2S=A+E, sitque S+V=A, S−V=E, (adeoque A−S=V=S−E.) Erit AE+Vq=Sq. Vel (in numeris) si 12=6+6=8+4; adeoque 8−6=2=6−4. Erit 8×4+2×2=6×6.



S+V =A	6+ 2= 8
S −V =E	6− 2= 4
Sq+SV	36+12
−SV−Vq	−12− 4
Sq−Vq=AE	36− 4=32
Sq=AE+Vq	36=32+ 4

6 e 2. *Si recta* (2E) *bifariam secetur; eique adjiciatur in directum recta quædam* (X:) *Rectangulum quod tota cum adjecta* (2E+X quæ dicatur Z) *& ipsa adjecta* (X) *comprehenditur* (ZX;) *simul cum quadrato dimidiæ* (Eq:) *æquatur* (Aq) *quadrato compositæ ex dimidia & adjecta;* (E+X, quæ dicatur A.) Hoc est, si E+E+X=Z, & E+X=A: erit ZX+Eq=Aq. Vel (in numeris) si 3+3+4=10, & 3+4=7: erit 10×4+3×3=7×7.



Z=2E +X	E+X=A	
×X ×X	E+X=A	
ZX=2EX+Xq	Eq+EX	A
+Eq +Eq	+EX+Xq	×A
ZX+Eq= Eq+2EX+Xq	=Eq+2EX+Xq	=Aq



10=6+4	3+4=7	
×4 ×4	3+4=7	
40=24+16	9+12	7
+9 +9	+12+16	×7
40+9=9+24+16	=9+24+16	=49

Sed & hæc cum præcedente sic conjunctim efferri potest. *Si ab assignato in eadem recta* (*utcunque continuata*) *puncto* M, *sumantur tum æquales utrinque rectæ* ML, MN, *tum punctum* D *ubivis: rectangulum* LDN *æquabitur differentiæ quadratorum rectarum* MD, ML *vel* MD, MN. Quod sic ostenditur.

ML=MN dicatur S; MD dicatur V. Duarum igitur DL, DN, (ubicunque sumatur D) altera erit S+V (summa duarum S, V,) altera S∞V) differentia duarum S, V,) ut schematis inspectu patet. Ideoque

$$\begin{array}{ccccccc} & & L & M & N & & \\ \ldots & \overline{\qquad\qquad\qquad} & & & & & \ldots \\ D & & D & D & & D & \end{array}$$

$$LD \times DN = \left\{ \begin{matrix} S+V \\ \text{in} \\ S \sim V \end{matrix} \right\} = Sq \sim Vq = MLq \sim MDq.$$

Ubi notandum eſt $S \sim V$ interpretandum eſſe nunc per $S - V$, nunc per $V - S$, prout S vel V major fuerit, (hoc eſt, prout D vel intra vel extra puncta L, N, fuerit aſſignatum,) & proinde $Sq \sim Vq$ illic erit $Sq - Vq$, hic $Vq - Sq$. Ut multiplicando patebit.

$$\begin{array}{l} S+V \\ S-V \\ \hline Sq+SV \\ \quad -SV-Vq \\ \hline Sq-Vq \\ MLq-DMq \end{array} \qquad \begin{array}{l} V+S \\ V-S \\ \hline Vq+VS \\ \quad -VS-Sq \\ \hline Vq-Sq \\ MDq-MLq. \end{array}$$

7 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur utcunque* (puta, in A, E:) *quadrata totius* (Zq) *& unius ex ſegmentis* (puta Aq) *ſimul ſumpta,* (Zq+Aq,) *æquantur rectangulo bis comprehenſo a tota & dicto ſegmento* (2ZA) *una cum quadrato reliqui ſegmenti* (Eq.) Hoc eſt, ſi $Z = A+E$, erit $Zq+Aq = 2ZA+Eq$; Item $Zq+Eq = 2ZE+Aq$. Et ſimiliter in numeris, quod experienti patebit.

$$\begin{array}{l} Z = A+E \\ \times Z = A+E \\ \hline Zq = Aq+2AE+Eq \\ \quad +Aq \quad +Aq \\ \hline Zq+Aq = 2Aq+2AE+Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+E=Z \\ 2A \quad 2A \\ \hline 2Aq+2AE=2ZA \\ \quad +Eq \quad +Eq \\ \hline = 2Aq+2AE+Eq = 2ZA+Eq \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Z = A+E \\ \times Z = A+E \\ \hline Zq = Aq+2AE+Eq \\ \quad +Eq \quad +Eq \\ \hline Zq+Eq = Aq+2AE+2Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+E=Z \\ \times 2E \quad \times 2E \\ \hline 2AE+2Eq=2ZE \\ \quad +Aq \quad +Aq \\ \hline = Aq+2AE+2Eq = 2ZE+Aq \end{array}$$

8 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur utcunque* (in A, E,) *rectangulum quater comprehenſum a tota & uno ex ſegmentis* (puta 4ZA) *una cum quadrato reliqui ſegmenti* (Eq) *æquatur quadrato compoſitæ a tota & prædicto ſegmento* (Q:Z+A.) Hoc eſt, Si $Z = A+E$; erit $4ZA+Eq = Q:Z+A := Zq+2ZA+Aq$. Et (eadem ratione) $4ZE+Aq = Q:Z+E$. Et in numeris pariter.

$$\begin{array}{l} Z = A+E \\ \times 4A \quad \times 4A \\ \hline 4ZA = 4Aq+4AE \\ \quad +Eq \quad +Eq \\ \hline 4ZA+Eq = 4Aq+4AE+Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2A+E=Z+A \\ 2A+E=Z+A \\ \hline 4Aq+2AE \\ \quad +2AE+Eq \\ \hline = 4Aq+4AE+Eq = Q:Z+A. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Z = A+E \\ \times 4E \quad \times 4E \\ \hline 4ZE = 4AE+4Eq \\ \quad +Aq \quad +Aq \\ \hline Aq+4ZE = Aq+4AE+4Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+2E=Z+E \\ A+2E=Z+E \\ \hline Aq+2AE \\ \quad +2AE+4Eq \\ \hline = Aq+4AE+4Eq = Q:Z+E. \end{array}$$

9 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur tum in ſegmenta æqualia* (S, S,) *tum inæqualia* ($A = S+V$, $E = S-V$;) *quadrata inæqualium ſegmentorum* (Aq+Eq) *ſunt dupla quadratorum e dimidia & e recta inter puncta ſectionum,* (2Sq+2Vq.)

Hoc eſt, Si Z=S+S=A+E. & A=S+V, E=S−V. erit Aq+Eq=2Sq+2Vq.

Aq=Q:S+V:=Sq+2SV+Vq
Eq=Q:S−V:=Sq−2SV+Vq
Aq+Eq===2Sq+2Vq

10 e 2. *Si recta* (2E) *ſecetur bifariam, eique recta quædam* (X) *indirectum adjiciatur*; *quadratum compoſitæ ex tota & adjecta* (Q:2E+X:=Zq) *& quadratum adjectæ* (Xq) *ſimul ſumpta, ſunt dupla quadratorum dimidiæ* (2Eq) *& compoſitæ ex dimidia & adjecta,* (2Q: E+X:=2 Aq.) Hoc eſt, Si 2E+X=Z, & E+X=A; erit Zq+Xq=2Eq+2Aq.

Zq=Q:2E+X:=4Eq+4EX+Xq Q:E+X:=Eq+2EX+Xq=Aq
+Xq +Xq +Eq +Eq
Zq+Xq= 4Eq+4EX+2Xq dupl: 2Eq+2EX+Xq=Aq+Eq:

Sed & hanc cum præcedente ſic conjunctim efferre licet. *Si ab aſſignato, in eadem recta* (*utcunque continuata*) *puncto* M, *ſumantur tum utrinque æquales rectæ* LM, MN, *tum punctum* D *ubivis*: *duo ſimul quadrata rectarum* LD, DN, *dupla ſunt duorum ſimul quadratorum rectarum* DM, MN, *vel* DM, ML. Hoc eſt DLq+DNq=2MDq+2MNq=2MDq+2MLq. Quod ſic oſtenditur. ML=MN dicatur S. MD dicatur V. Duarum igitur DL, DN, (ubicunque ſumatur D) altera erit S+V (ſumma duarum S, V,) altera S∞V (differentia duarum S, V.) ut ſchematis inſpectu patet. Ideoque

L M N Q:S+V:=Sq+2SV+Vq
D D D D +Q:S∞V:=Sq−2SV+Vq
DLq+DNq=2Sq+2Vq=2MLq+2MDq.

Ubi notandum eſt S∞V interpretandum eſſe nunc per S−V, nunc per V−S, prout S vel V major fuerit, hoc eſt, prout D fuerit intra vel extra puncta L, N. Sed quadratum utrobique tantundem erit, ut multiplicando patet.

S−V V−S
S−V V−S
Sq−SV Vq−SV
−SV+Vq −SV+Sq
Sq−2SV+Vq=Vq−2SV+Sq

Atque hactenus decem primores propoſitiones ſecundi Elementi Euclidis demonſtravimus Arithmetice. Reliquæ quæ ſuperſunt quatuor, Arithmetice item demonſtrari poſſunt, ſed aſſumptis in auxilium aliis quam quæ adhuc expoſuimus principiis Geometricis, quibus itaque impræſentiarum ſuperſedendum duxi. Sed & aliæ paſſim apud Euclidem (alioſque) propoſitiones occurrunt Geometricæ, quæ hujuſmodi calculo Arithmetico facillime demonſtrantur. Sufficit autem præſenti noſtro inſtituto ſpecimen in paucis exhibuiſſe.

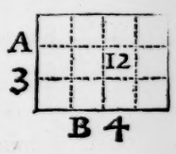
CAP.

CAP. XXIV.

Geodæsia Parallelogrammi Rectanguli; Obliquanguli; cujusvis. Mensuratio Trianguli Rectanguli; Obliquanguli; cujusvis. Mensuratio cujusvis figuræ rectilineæ. Mensuratio figuræ regularis. Mensuratio circuli, ejusque portionum, sectorum, & segmentorum. De circuli quadratura, & ratione perimetri ad diametrum. De figuris mistis. De figurarum metamorphosi.

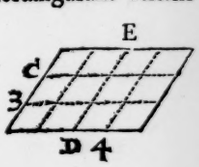
De Geodæsia Parallelogrammi Rectanguli.

OStendimus (in Capite 22) methodum Parallelogramma Rectangula mensurandi, & inter se comparandi. Nempe *Parallelogrammi Rectanguli cujusvis area, æqualis est quantitati quæ ex duarum rectarum circa angulum rectum, invicem ductu emergit.* Ut, si latitudo A=3 ducatur in longitudinem B=4, emergit area AB=12. Adeoque, verbi gratia, Rectangulum latum 3 pedes, & longum 4, continet pedes quadratos 12. Quod etiam liquet in Parallelogrammo appositio in 12 spacia quadrata divisio, quorum singula latera sint (puta) pedalia.



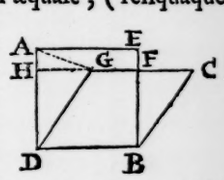
De Parallelogrammis Obliquangulis.

At interrogabitur forsan, Cur hoc ad Parallelogrammum Rectangulum restringatur; cum idem videatur dicendum de Obliquangulo. Puta, si lineæ C, D, circa angulum acutum, (vel etiam C, E, circa angulum obtusum,) invicem multiplicentur, quarum altera sit 3, altera 4 pedes longa; emergit numerus 12: ipsumque Parallelogrammum Obliquangulum in totidem spatia dividitur æqualia, quorum item latera singula contineant (puta) pedem unum; non minus quam si esset parallelogrammum Rectangulum.



Respondeo; *Posse quidem Parallelogrammum, etiam Obliquangulum, in totidem spatia æqualia & similia dividi, quot indicat mutua multiplicatio laterum duorum circa ipsius quemvis angulum constitutorum; eorumque spatiorum latera esse æqualia, (puta unius pedis singula) non minus quam si parallelogrammum fuisset Rectangulum. Sed nego spatia illa esse pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, utut quatuor lineis pedalibus terminentur singula. Rhombi* nempe sunt, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, cum quadrata omnia (ex definitione) sint rectangula. Sed & *quadratis minora* sunt, propter eandem obliquitatem: quod ipsum evenit in aliis parallelogrammis omnibus, sive æquilatera sint, sive inæquilatera, hoc est, sive sint Rhombi sive Rhomboidea; minora nempe sunt quam si essent rectangula, quamvis iisdem lineis terminata. Quod sic demonstro Geometrice: (quippe cum de solo situ agitur, qui ad Geometriam peculiariter attinet, demonstratio Arithmetica vix locum habet.)

Sit parallelogrammum Rectangulum AB, eique Isoperimetrum Obliquangulum DC, ita ut latus DB sit utrique commune, & DG ipsi DA æquale, (reliquaque latera sibi oppositis parallela & æqualia.) Quamvis autem latera BC, DG, parallelogrammi obliquanguli, sint sigillatim æqualia lateribus BE, DA, parallelogrammi Rectanguli, (& reliqua reliquis;) est tamen ipsum parallelogrammum Obliquangulum DC, minus Rectangulo AB, æquale quippe Rectangulo HB. Producatur enim latus CG ad H: eritque GH=CF, (quia tam CG quam FH æquatur ipsi BD, opposito lateri in utroque parallelogrammo; &, eadem ratione, HD=FB,) & DG=BC, (sed & anguli ad B, C, F, æquales angulis ad D, G, H,) æquale est igitur triangulum DHG, triangulo BFC, (eique congruit;) quorum priori



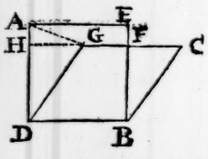
priori si addatur commune segmentum B D F G, fit parallelogrammum rectangulum H B; sin posteriori, fit obliquangulum C D, quod igitur ipsi H B æquale est, & propterea minus quam A B, quod erat demonstrandum. Et similiter procederet demonstratio in parallelogrammo quovis obliquangulo.

Patet igitur 12 Rhombos Parallelogrammi propositi Obliquanguli D C, minores esse totidem Quadratis Rectanguli, A B, utut tam hæc quam illi quaternis lineis pedalibus terminentur.

Si quæratur insuper, Quid impediat quo minus mensuras exprimere liceat per Rhombos æque ac Quadrata? Respondeo, Magnitudines explicandas esse per mensuras certas, (secus enim de magnitudine non constabit,) ideoque per Quadrata potius quam per Rhombos. Cum enim Quadratorum omnium anguli recti sint, adeoque invicem æquales, dato illic latere de magnitudine constabit; Rhomborum autem anguli cum possint majus minusve obliqui esse, dato latere non tamen de magnitudine constabit, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit. Non igitur Rhombis sed Quadratis potius determinandæ sunt figurarum magnitudines.

Addo tamen, si non de Rhombis utcunque sumptis, sed de Rhombis in certo quovis obliquationis angulo, agatur; non minus certa est Rhombi mensura quam Quadrati. Verbi gratia, in oblongo C D obliquangulo non minus certum est tot pedales Rhombos, in eodem, cum ipso oblongo, inclinationis angulo, contineri, quot in oblongo Rectangulo A B continentur Quadrata pedalia; (propter latera utrobique figillatim æqualia.) Et quidem propositiones illæ omnes quæ superius (ex Euclide) demonstrantur de Quadratis & Rectangulis, non minus valent de Rhombis & Rhomboidibus in eodem quocunque inclinationis angulo. Quod quidem notare magno esse potest usui Geometris.

Parallelogrammi Obliquanguli Geodæsia.



Patet autem, ex jam dictis, methodus mensurandi Parallelogramma Obliquangula. Non quidem ex ductu D B in B C, sed D B in B F vel in D H. Cum enim, ut modo demonstratum est, Parallelogrammum Obliquangulum C D, æquale sit Rectangulo H B; eadem erit utriusque area seu magnitudo. At ex ductu D B in B F, vel in D H, habetur area rectanguli H B (per ea quæ dicta sunt Cap. XXII.) ergo & Obliquanguli C D.

Parallelogrammi cujusvis Geodæsia.

Hoc est, *Si in Parallelogrammo quolibet, (sive Rectangulo sive Obliquangulo,) a latere quovis ad oppositum ducatur perpendicularis, eaque in eorum utrumvis multiplicetur, prodibit Parallelogrammi area.*

Atque hujus quidem operationis ratio, præterquam quod jam fuerit demonstrata, hinc satis intelligi potest, si advertamus, quod, si in parallelogrammo quovis (puta G B) unum aliquod ex lateribus pro longitudine habeatur (puta D B,) ejusdem latitudo æstimanda erit non ex linea utcunque transversim ducta (ita enim latitudo esset plane incerta, & modo major modo minor dicenda, prout illius transversæ lineæ ad arbitrium sumptæ minor majorve fuerit obliquitas) sed ex linea directe sive perpendiculariter transeunte; puta non ex linea inclinata D G vel B C, sed B F vel D H. Et quidem si supponatur asserculus, in illa forma constitutus, longitudinem habere D B quantamcunque, ejus latitudo non æstimanda erit (ne quidem usu communi) quanta est D G, sed quanta est B F, aliave ejusmodi recta perpendiculariter ducta. Quæ quidem ut transeuntium omnium est brevissima, ita sola certa est; cum quæ oblique transeunt, pro variata obliquitate, variant etiam longitudinem.

Atque hæc de magnitudine parallelogrammi dixisse sufficiat. Nempe, si *Parallelogrammum comparare libeat (non præcise ad quadratum, sed) ad Quadrangulum æquilaterum, (sive quadratum fuerit, sive Rhombus,) quod expositio Parallelogrammo sit æquiangulum, hoc est, pariter inclinatum; ducenda sunt invicem duo latera ad eundem quemlibet angulum constituta: Si vero Parallelogrammum, utcunque inclinatum, ad solum Quadratum comparare placeat; ducendum est latus quodvis in rectam ab eo latere ad latus oppositum perpendiculariter ductam.* Qui quidem duo rectarum invicem ductus, in parallelogrammo Rectangulo, tantundem valent; in Obliquangulo, non item.

Quæ autem de Multiplicatione jam dicta sunt, & de Divisione (mutatis mutandis) intelligenda sunt. Quippe *quod Multiplicatione conficitur, id Divisione dissolvitur.*

dissolvitur. Ut igitur ex datis longitudine & latitudine, (sive in Parallelogrammo rectangulo, sive obliquangulo,) habetur area multiplicando: sic ex data area cum longitudine, habetur latitudo; vel ex data area cum latitudine, habetur longitudo, dividendo. Atque de Parallelogrammis hactenus.

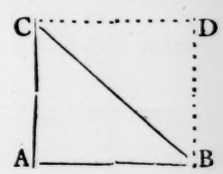
Cum autem Geodæsiam jam sim aggressus, hoc est, mensurationem Planorum; operæ pretium erit etiam alia breviter attexere quæ eo spectant, ut totum illud plana mensurandi negotium, saltem prout præsentis instituti ratio postulat, absolvam. Illud vero, quantum supereſt, mensuratione Trianguli fere totum perficitur.

Mensuratio Trianguli.

Est autem *Triangulum* (intellige *figuram planam tribus rectis terminatam*) vel *Rectangulum, cujus alter angulus est rectus* (nam plures esse recti non possunt;) vel *Obliquangulum, cujus omnes anguli sunt obliqui*: Hoc autem, vel *Obtusangulum, cujus unus aliquis angulus* (quippe plures non possunt) *obtusus est*; vel *Acutangulum, cujus anguli omnes sunt acuti*.

Trianguli Rectanguli.

Aggrediar primo, Triangulum Rectangulum. Est autem *omne Triangulum Rectangulum, Parallelogrammi Rectanguli dimidium*. Si enim Parallelogrammum Rectangulum quodvis (puta A D) diagonali linea (C B) secetur, dividitur illud in duo triangula (A B C, B C D,) ut patet; quorum utrumque est Rectangulum, (propter angulos ad A & D rectos;) sed & invicem æqualia, (propter angulos æquales rectos ad A & B, & latera respective æqualia;) & proterea utrumlibet parallelogrammi dimidium. Et contra, si Triangulum Rectangulum quodlibet (puta A B C) duplicetur, ita nempe ut latera



secundi circa angulum rectum sint homologis lateribus prioris parallela, & latus reliquum utrique triangulo commune, fiet rectangulum parallelogrammum. Si enim sumatur latus C D æquale & parallelum lateri A B, & similiter B D lateri A C, (quæ propterea convenient in angulo recto ad D,) habebitur triangulum exposito simile & æquale, complens parallelogrammum rectangulum.

His positis; cum ex jam dictis innotescat area parallelogrammi A D, innotescet etiam area trianguli A B C, quod nempe istius est dimidium. Est autem area parallelogrammi A D, quantitas producta ex ductu lateris A B in A C, puta A C × A B; adeoque area trianguli (quippe illius semissis) $\frac{1}{2}$ A C × A B. Vel, si altitudo A C dicatur A, & basis A B dicatur B, erit area Parallelogrammi A B, area Trianguli $\frac{1}{2}$ A B. Ideoque

In Triangulo Rectangulo, si laterum circa angulum rectum, ducatur alterum in alterius dimidium, emergit area Trianguli. Quippe dimidium areæ parallelogrammi. Atque hinc quidem *ex datis trianguli rectanguli lateribus circa angulum rectum constitutis* (quarum alterum Basin, alterum Altitudinem exhibet,) *multiplicando cognoscitur ejusdem area.*

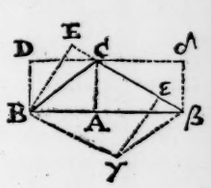
A
B
2) A B.

Contra vero; *Ex cognitis area & laterum eorum uno, innotescit alterum, dividendo.* Nempe, si duplum areæ (A B) per altitudinem dividatur, habetur Basis; sin per basin, habetur altitudo. Puta A) A B (B. B) A B (A. Atque de Triangulo Rectangulo hactenus.

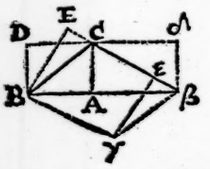
A) A B (B
B) A B (A

Trianguli Obliquanguli.

Trianguli Obliquanguli (sive Acutangulum sit, sive Obtusangulum,) calculus à Trianguli Rectanguli calculo dependet. Demissa enim ab angulo quovis in latus oppositum perpendiculari emergunt duo Triangula Rectangula; ex quorum calculo cognoscitur area Trianguli expositi. Exempli gratia, In triangulo B β C, ab angulo C demissa perpendiculari C A, (unde fiunt ad A anguli utrinque recti) emergunt triangula rectangula C A B, C A β. Si igitur C A dicatur A, A B dicatur b, A β dicatur β, & B β dicatur B = b + β: erit (per modo demonstrata) $\frac{1}{2}$ A b area trianguli C A B, $\frac{1}{2}$ A β area trianguli C A β, ideoque $\frac{1}{2}$ A b + $\frac{1}{2}$ A β = $\frac{1}{2}$ A B area totius C B β = C A B + C A β. Hoc est,



Si trianguli cujusvis Altitudo (sive perpendicularis a vertice ab basin) ducatur in semissem Basis, (vel Basis in semissem altitudinis,) emergit area trianguli.



$$\begin{array}{c} b+\beta=B \\ \frac{1}{2}A \qquad \frac{1}{2}A \\ \hline \frac{1}{2}Ab+\frac{1}{2}A\beta=\frac{1}{2}AB \end{array}$$

Notandum autem est, *quod in triangulo Obtusangulo, si ab utrovis acutorum angulorum demittatur perpendicularis* (ut nempe angulus ille acutus, puta B, habeatur pro vertice trianguli, & laterum breviorum alterum, Cβ, pro basi,) *perpendicularis illa* (puta BE) *cadet extra expositum triangulum in basin productam*; (quod Geometrice, si opus sit, facile est probatu :) invariata tamen præcedentis regulæ veritate ; quæ quidem hic Subductione colligitur, sicut in præcedente exemplo Additione. Quod sic ostenditur.

Trianguli BEβ rectanguli (propter angulum rectum ad E, demissa perpendiculari factum,) area habetur ex ductu altitudinis BE in $\frac{1}{2}$Eβ, semissem basis ; Trianguli vero BEC (pari de causa) ex ductu ejusdem altitudinis BE in $\frac{1}{2}$EC semissem basis suæ ; Horum itaque triangulorum differentia, quod est ipsum triangulum BCβ expositum, est $\frac{1}{2}$Eβ×BE − $\frac{1}{2}$EC×BE, quod tantundem est atque $\frac{1}{2}$Eβ − $\frac{1}{2}$EC (hoc est $\frac{1}{2}$Cβ) in BE. (Nam Eβ − EC = Cβ, ideoque $\frac{1}{2}$Eβ − $\frac{1}{2}$EC = $\frac{1}{2}$Cβ, vel $\frac{E\beta - EC}{2} = \frac{C\beta}{2}$.) Itáque & hoc pacto emerget area æqualis semissi altitudinis in basin ductæ.

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}E\beta - \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}C\beta \\ \times BE \\ \hline \frac{1}{2}E\beta\times BE - \frac{1}{2}EC\times BE = \frac{1}{2}C\beta\times BE \end{array}$$

Sed & idem aliter ostenditur ; (Atque eadem opera, non modo Triangulum rectangulum, quod modo dictum est, sed & *Triangulum quodvis rectilineum esse Parallelogrammi dimidium.*) Si Triangulum expositum BCβ (sive Rectangulum, sive acutangulum, sive obtusangulum) super basi Bβ constitutum (ita nempe ut perpendicularis à vertice cadat intra Triangulum) inscribatur Parallelogrammo Rectangulo super eadem base, eandem item altitudinem habenti cum ipso triangulo, nempe Dβ. Cum enim triangula rectangula CAB, CAβ, sint sigillatim æqualia semissibus parallelogrammorum AD, Aδ; erit & aggregatum illorum, hoc est, Triangulum BCβ, semissi totius Dβ parallelogrammi (ex duobus AD, Aδ, aggregati) æquale.

Sin extra triangulum cadat perpendicularis (quod in triangulo Obtusangulo fieri posse diximus) illud idem ostenditur hoc pacto. Completo parallelogrammo BCβγ (ductis nempe Bγ, βγ, lateribus trianguli BC, βC, parallelis) erunt duo triangula BCβ, βγB, invicem similia & æqualia, & propterea utrumvis, parallelogrammi semissis : At parallelogrammum illud æquatur rectangulo, altitudine BE vel γε, & basi Cβ vel Bγ, comprehenso (ut supra ostensum est,) ergo Triangulum ejusdem semissi æquatur: nempe semissi quantitatis factæ ex ductu basis Cβ in altitudinem BE, vel quantitati factæ ex ductu semissis basis in totam altitudinem, vel semissis altitudinis in totam basin ; quæ omnia tantundem valent ; quippe

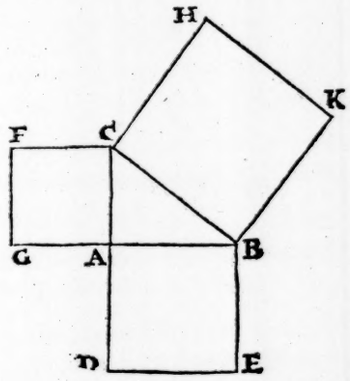
Trianguli cujusvis. $\frac{C\beta\times BE}{2} = \frac{1}{2}C\beta\times BE = C\beta\times\frac{1}{2}BE.$

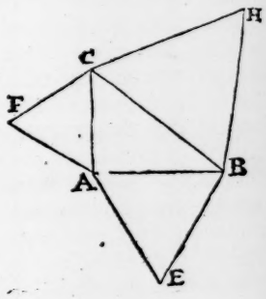
Patet igitur universim methodus mensurandi *Triangulum quodvis* (sive Rectangulum sive Obtusangulum sive Acutangulum.) Nempe, *a quovis ipsius angulo demissa in latus oppositum* (productum, si opus,) *perpendiculari*; *harum rectarum* (scil. perpendicularis, & dicti lateris,) *si altera in alterius semissem ducatur, prodibit area Trianguli.* Contra vero ; *Si areæ duplum per earum rectarum alteram dividatur, habetur reliqua* : puta si per basin, habetur perpendicularis sive altitudo; si per altitudinem, habetur basis. Atque de Triangulis mensurandis hactenus.

Mensuratio figuræ cujusvis rectilineæ. Expolita jam methodo mensurandi quodvis sive Parallelogrammum sive Triangulum ; eadem opera & figuras alias rectilineas quascunque mensurare docuimus : saltem si illud addatur *Figuram quamvis rectilineam vel in Parallelogramma dividi posse, vel saltem in Triangula* : Ex quorum igitur calculo, propositæ figuræ calculus statim innotescit.

Exempli

Exempli gratia. Figurarum appositarum altera in tria Quadrata & unum Triangulum dividitur; Altera, in quatuor Triangula. Quæ si seorsim mensurentur; illorum aggregatum priori, horum posteriori figuræ æquatur. Atque eodem prorsus modo faciendum erit in figuris quibusvis multangulis, præsertim irregula-



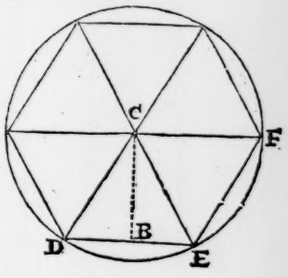


ribus; resoluta scilicet figura multangula in tot parallelogramma vel triangula quot figuræ ratio postulat, & prout Calculo magis videbitur expedire; quod cujusque prudentiæ permittendum erit.

Mensuratio figuræ regularis.

Si vero figura mensuranda, quotcunque demum habuerit latera, Regularis sit; hoc est, *quæ tum omnia latera invicem æqualia, tum omnes angulos item æquales habeat*: calculus sic commode poterit institui. *Invento figuræ regularis centro,* (quod & circuli sive inscripti sive circumscripti centrum est, ut ex principiis Geometricis liquet, & à singulis lateribus æqualiter distans;) *recta a centro in latus quodvis perpendicularis, si in semiperimetrum multiplicetur, figuræ regularis aream exhibebit.*

Exempli gratia. Sit Sexangulum regulare (puta æquilaterum & æquiangulum) circulo inscriptum. A centro C ad latus quodvis DE agatur perpendicularis CB; hæc ducta in semissem perimetri sexanguli, vel hujus semissis in perimetrum, exhibet totius aream. Nam, ductis cruribus CD, CE, formatur triangulum CDE, cujus area est $CB \times \frac{1}{2} DE$, vel $\frac{1}{2} CB \times DE$, (ut ex calculo trianguli superius tradito liquet.) Item, ductis insuper ab eodem centro C ad reliquos sexanguli angulos totidem rectis, constituentur tot triangula quot sunt figuræ latera; eruntque ea singula triangulo CDE æqualia per 4 & 8 e. 1. (propter tum æquales rectas à centro, quippe quæ sunt radii circuli ambientis, tum æquales item rectas in ambitu figuræ, ut quæ supponitur æquilatera:) toties itaque repetenda erit præcedens mensuratio, quot sunt figuræ latera, quia tot erunt triangula invicem æqualia; puta CDE = CEF, &c. figuram integram complentia. Hoc est, in exposita figura sexangulari, area trianguli CDE sexies repetita, exhibet totius aream, puta $6\,CB \times \frac{1}{2} DE$ vel $\frac{1}{2} CB \times 6\,DE$, vel $CB \times 3\,DE$; ducto nempe $\frac{1}{2} CB$ semisse perpendiculi, in perimetrum $6\,DE$; vel perpendiculari CB in semissem perimetri $3\,DE$. Atque similiter faciendum erit in alia quavis figura regulari sive plurium sive pauciorum laterum.

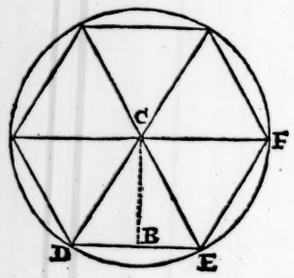


Mensuratio circuli, ejusque portionem.

Quod autem de figura regulari rectilinea dictum est, idem & de circulo dicendum est. Est enim *circulus figurarum planarum omnium maxime regularis*; omnes enim à centro ad circumferentiam lineæ quorsumcunque ductæ æquales sunt, & æquales ad circumferentiam constituunt angulos. *Omnes-*

que figuræ regulares, quo plura habent latera, eo propius ad circulum accedunt; (ut, in appoſito ſchemate, Octogonum magis quam Tetragonum; & pariter in aliis.) Quod ſi figura regularis ſupponatur laterum numero infinitorum, circulus erit. *Perinde enim eſt ſive Peripheriam circuli unica linea curva conſtare dicamus, ſive rectis numero infinitis.*

Si itaque circulum conſideremus tanquam figuram planam maxime regularem, laterum numero infinitorum; omneſque angulos, linea à centro ad peripheriam ducta factos, utrinque æquales conſtitui, ideoque rectos, (ut nos alibi, ubi *Angulum Contactus & Semicirculi* tractamus oſtendimus,) rectamque a centro ductam perimetro perpendicularem: *Quantitas producta ſive ex ductu radii in ſemicircumferentiam, ſive ſemiradii in circumferentiam, erit area circuli.* Puta $\frac{1}{2}$CD×DEFD, vel CD×$\frac{1}{2}$DEFD.



Sectorum. Cognita autem methodo menſurandi circulum integrum, innoteſcit etiam methodus menſurandi portionem circuli (arcu & recta una pluribuſve comprehenſam.) Nempe, ut $\frac{1}{2}$CD in totam perimetrum DEFD dat aream totius circuli; ſic eadem $\frac{1}{2}$CD in DE, perimetri ſextantem, dat aream ſextantis circuli; puta Sectoris DCE; eademque $\frac{1}{2}$CD in DF, perimetri trientem, exhibet aream trientis circuli, puta ſectoris DCF. Et ſimiliter de Sectoribus aliis, qui arcu quovis & rectis duabus in centro C coeuntibus terminantur, judicandum erit.

Segmentum. Sin menſurandum eſſet ſegmentum DEB, arcu DE rectaque DBE comprehenſum. Cognita menſura Sectoris DCE, ſi inde auferatur area trianguli DEC, quod reſtat eſt area ſegmenti minoris DEB. Atque hoc quidem ſegmentum minus, ſi ex integro circulo auferatur, relinquet majoris ſegmenti aream EFDB.

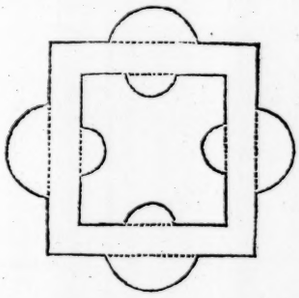
Denique, Si alia quæcunque circuli portio arcu & rectis utcunque poſitis contenta, menſuranda proponatur: id fiet, Sectori, ſuper arcum illum conſtituto, addendo vel auferendo triangulum unum aut plura, prout res poſtulaverit. Puta ſi quod rectis ED, DC, CF, & arcu FE continetur, menſurandum ſit; Sectori ECF, addendum erit triangulum EDC. Et ſimiliter alibi.

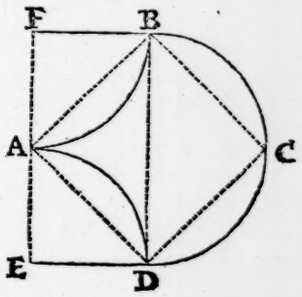
De Circuli quadratura. Quod autem de circuli menſura jam dicitur, aut ſegmentorum, non ita intellectum velim, acſi jam diu quæſitam circuli quadraturam hic doceam. Utut enim Mathematice verum ſit, Aream Circuli parallelogrammo quod ſemidiametro & ſemicircumferentia continetur æqualem eſſe, (quod ab Archimede demonſtratis convenit:) Ratio tamen Radii ad Perimetrum circuli, ita ut uno cognito alterum innoteſcat, nondum reperta eſt numeris explicabilis, ne quidem irrationalibus, (fortaſſe nec reperienda, de quo alibi à nobis fuſius dictum eſt, in noſtra *Arithmetica Infinitorum*:) neque etiam Geometrice Regula & Circino exhibenda. Quod cum ſe inveniſſe putaverint, poſt alios, *Joſephus Scaliger*, *Severinus Longomontanus*, & nuperrime *Thomas Hobbes*, immortales ſibi inde ſinguli laudes deberi ſomniantes, mire hallucinati ſunt. Quæ autem vulgo recepta eſt proportio ſeu ratio perimetri circularis ad ſuam diametrum, quæque à vera non multum abeſt, eſt tripla ſequiſeptima, ſive ut 22 ad 7, aut $3\frac{1}{7}$ ad 1; quod ab Archimede jam olim demonſtratum eſt, (nempe minorem eſſe quam $3\frac{1}{7}$, majorem vero quam $3\frac{10}{71}$.) Eſtque hæc ratio ſatis accurata quæ vulgaribus menſurationibus applicetur. Siquis autem accuratiorem quærat, poterit ille à *Ludovico van Culen*, *Willebrordo Snellio*, aliiſque qui rem illam tractarunt, petere; vel, ſi malit, ſuo calculo inveſtigare, ut proportionem habeat quamlibet accuratam, modo non Mathematice exactam. Sed de circulo ejuſque portionibus hactenus.

Ratio perimetri circularis ad diatrum.

Menſuratio figuræ miſtæ. Siquando figura menſuranda occurrat mixta, ſive variis lineis circularibus, vel etiam circularibus ſimul & rectis, terminata; inveſtigabitur ipſius area, eandem in figuras ſimpliciores dividendo, & per partes menſurando. Ut, in ſchemate appoſito; ut habeatur area figuræ exterioris, areæ quadrati, addendæ ſunt quatuor ſemicirculorum areæ; Figuræ item interioris area, totidem ſemicirculis ex area quadrati ſubductis inveſtigatur.

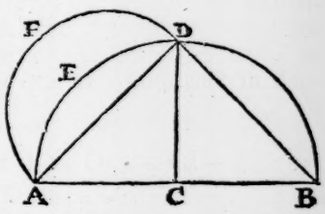
Nonnun-





Nonnunquam vero ſola figurarum Metamorphoſi res erit facilitanda. Ut, ſi menſuranda ſit figura *Pelicoides* dicta (linea ſemicirculari concava BCD, & duabus quadrantalibus convexis, AB, AD, terminata,) æquabitur illius area vel areæ quadrati ABCD, vel Parallelogrammi BDEF. Tantundem enim ſive Quadrato ſive Parallelogrammo ex una parte accedit, quantum ex altera parte aufertur. *De figurarum Metamorphoſi.*

Et ſimiliter, Lunula AEDF quæ arcu quadrantali AED majoris, & ſemicirculari AFD minoris circuli continetur, æquatur triangulo, ADC quadranti inſcripto. Ut ex Hippocratis Chii *quadratura Lunulæ* notum eſt: & appoſito ſchemate exhibetur. Nam propter ABq = (ADq + DBq =) 2ADq, adeoque ſemicirculum majorem minoris duplum; erit ADF ſemicirculus æqualis quadranti ACDE; demptoque communi ſegmento ADE, reſidua lunula AEDF reſiduo triangulo ADC æqualis.



Et ſimiliter alias non raro faciendum erit. Quod breviter inſinuaſſe ſufficiat.

Atque hoc quidem omnino utile eſt in figuris maxime irregularibus, quorum ambitus neque rectis neque circularibus lineis terminatur. Sufficit quippe practico Geometræ, ſi quam fieri poteſt proxime, hic addendo, illic tantundem detrahendo, ad huic æqualem rectilineam reducat. Quod quo fiat, conſilium in arena capiendum.

Atque hactenus quidem univerſæ prope planorum Geodæſiæ fundamenta breviter tradidi. Quo, tum Multiplicationis tum Diviſionis exercitium oſtenderem; tum Arithmetices in Geometricis utilitatem, & utriuſque ſimul ſcientiæ affinitatem patefacerem.

CAP. XXV.

Numerorum invicem comparatio. Aliarum item quantitatum: ſed nonniſi invicem homogenearum. Comparantur tum quoad Differentiam, tum quoad Rationem. Harum comparationum ab invicem diſcrimen. Differentia ſubductione inveſtigatur: Ratio, Diviſione; ſed ea tantum quæ eſt quantitatum homogenearum. Quantitatum ad heterogeneas Applicatio, quatenus ad Diviſionem referenda ſit. Rationes omnes invicem homogeneæ: non item omnes Differentiæ, Ratio an ad quantitatem, an potius ad Qualitatem pertineat. Πηλικότης, quid. Progreſſio Arithmetica & Geometrica: Continua, & Diſjuncta. Proportionalium notatio. Proportio Harmonica.

TRadidimus, in Præcedentibus, celebres illas Arithmeticæ Practicæ ſive Species, ſive potius Partes; *Additionem*, *Subductionem*, *Multiplicationem*, & *Diviſionem*: quibus, ut inſtrumentis, quæ deinceps tradentur ſunt peragenda.

Numerorum invicem comparatio. Hinc autem oritur duplex Numerorum (vel etiam aliarum quarumlibet quantitatum homogenearum) invicem comparatio. Altera secundum *Differentiam*, altera secundum *Rationem* sive *Proportionem*. Illa Additionis & Subductionis, Hæc Multiplicationis & Divisionis naturæ maxime est affinis.

Aliarum item quantitatum. Quo autem has numerorum invicem comparationes rectius instituamus, sciendum est Primo; tum quæ nos de Numerorum invicem comparatione jam sumus tradituri, tum quæ Euclides per totum librum quintum de Magnitudinum ad invicem ratione tradit; non Numeris solum aut Magnitudinibus competunt, sed & aliis quibusvis quantitatibus. Quicquid scilicet vel per se vel per accidens quantitatis aut mensurationis capax est, eatenus etiam ad alia sibi homogenea comparari potest, tum quoad differentiam, tum quoad rationem; quippe quibus æquale esse potest aut inæquale.

Sed tantum homogenearum. Sciendum secundo; res invicem comparandas esse secundum commune quiddam quod utrisque comparandis inest, aut quidem inesse supponitur; non autem juxta quicquam quod illis vel alteris vel utrisque est alienum. Et propterea quantitates non nisi *homogeneas* comparandas esse, & quidem prout sunt homogeneæ. Sic lineas lineis comparamus, & superficies superficiebus, corpora item corporibus, & numeros numeris, ponderaque ponderibus, aliasque quantitates non nisi quantitatibus sibi homogeneis. Siquis autem contrarium fecerit, puta datæ lineæ ad datam superficiem, vel temporis ad lineam, &c. rationem sive proportionem inquirens, vel etiam unius super alterum excessum: idem hoc erit ac si quæsiverit quot lineæ constituant superficiem, vel quantum temporis æquetur lineæ, sive quot longitudines efficiant latitudinem; quod non minus absurdum esset quam si quæratur; quot Colores constituant Sonum, & quot Soni constituant Gravitatem. Hoc ipsum tamen sciscitari videntur nonnulli de rebus hujusmodi parum intelligenter philosophantes, dum lineas ex punctis constare somniant, & ex lineis superficies: Nescientes interim se idem agere atque si numeros omnes ex ciphris, sive nullitatibus, componi affirmarent: quippe punctum nihil habet longitudinis, nec latitudinis linea.

Tum quoad Differentiam tum quoad Rationem. Sciendum porro, Res homogeneas, & comparationis invicem capaces, comparari posse (juxta illam qua homogeneæ sunt mensuram) dupliciter. Vel enim simpliciter de Differentia sive excessu quæritur; scilicet, Num inter se differant & Quantum differunt; An & Quanto alterum altero majus est aut minus: Vel de Ratione; puta quotuplum vel quantuplum sit hoc illius; num hoc illud contineat semel, bis, ter, &c. aut semel cum semisse, bis cum triente, &c. Utrovis modo comparatorum, alterum *Antecedens* dici solet, alterum *Consequens*: quorum quidem illud Relatum est, hoc Correlatum: Nempe illud, cujus ad alterum relatio exponitur; hoc, cui illud sic relatum perhibetur. Puta si A ad B comparatur; A dicetur Antecedens, B Consequens, dum scilicet A dicitur majus esse quam B, vel minus, vel æquale; aut etiam A ipsius B duplum, triplum, semissis, &c.

Earum comparationum ab invicem discrimen. Priori quæsito satisfit, si ostendatur res comparatas æquales esse; vel, si inæquales, quanto hæc illam excedit, vel hanc illa. Verbi gratia, Linea bipedalis est bipedali æqualis; & numerus binarius binario; ejusdem item rei (vel etiam æqualium) semisses sunt invicem æquales; & pariter in aliis. Contra vero; numerus octonarius senarium, & hic itidem quaternarium, duabus unitatibus superat; linea tripedalis bipedali est uno pede longior; quadripondium quam tripondium est uno pondo gravius; atque in aliis pariter.

Secundo quæsito satisfit, ubi ostenditur Quotuplum seu Quantuplum sit hoc ad illud comparatum, sive quam rationem (ut dici solet) vel proportionem habeant inter se. Hoc modo dicimus, quadripondium bipondii duplum esse; numerum senarium binarii triplum; lineam tripedalem bipedalis sesquialteram; unitatem binarii semissem esse, aut subduplam, aut etiam dimidium; binarium item binario æqualem esse, vel in ratione aut proportione simpla; & pariter alibi.

In priori, ubi de Differentia sive Excessu quæritur, Rationis sive Proportionis nulla ratio habetur: In posteriori, de Ratione sive Proportione quæritur, Differentia interim minime considerata. Sic quaternarius ternarium, & ternarius binarium, eodem Excessu superant; sed non in eadem Ratione: excessus enim utrobique est Unitas; at ratio illic Sesquitertia, hic Sesquialtera. Contra vero, quaternarius binarium, & binarius unitatem, eadem Proportione superant; sed non eodem Excessu. Est enim proportio sive ratio utrobique Dupla; at excessus istic quidem Duarum unitatum, hic autem Unius.

Prio-

Prioris quæſiti ſolutio, Subductione inveſtigatur. Si ſubducatur enim numerus ex numero, quod reſtat eſt Exceſſus ſive differentia. Ita ſi ex 12 auferantur 10, reſtant 2; duabus itaque unitatibus, hoc ille major eſt, hic illo minor numerus. Si ex tripondio bipondium auferatur, exceſſus reperitur eſſe Unius pondo. Nempe, ſi peracta ſubductione nihil vel ſuperſit vel deficiat, Æquales ſunt illæ quantitates: ſin ſecus, inæquales; quippe Major illa, ubi aliquid redundat; Minor, cui aliquid deeſt, quo minus alteri ſit æqualis. *Differentia Subductione inveſtigatur.*

Poſterioris ſolutio Dividendo inveſtigatur. Diviſionis nempe quotiens oſtendit rationem Dividui ad Diviſorem. Sic ſi 12 per 6 dividantur, prodibit Quotiens 2; cui cognominis ratio *Dupla*, illa eſt quam habet numerus 12 ad 6. Item quadripondium eſt bipondii duplum; quia ſi 4 pondo per 2 pondo dividantur, prodibit quotiens 2: quippe toties hoc illo pondus continetur. Et propterea, *Ubi quotientes invicem æquantur, ibi & quantitates ſunt in eadem ratione conſtitutæ.* Quippe *Ratio* ex *Quoto* æſtimatur; adeoque & ex horum æqualitate æqualitas earum. *Ratio inveſtigatur Diviſione.*

Verum interim notandum eſt; de illa tantum Diviſione jam agi, qua quantitas per aliam quantitatem ſibi homogeneam dividitur: (quippe homogenearum tantum quantitatum eſt ad invicem ratio.) Qua Quotiens ſemper ſit numerus, vel quid numero homogeneum, quod quæſtioni *Quot* vel *Quoties* reſpondeat. Sic ratio 4 A ad A (ſive ſint illæ duæ lineæ, vel duæ ſuperficies, vel duo pondera, vel duæ aliæ quæcunque quantitates homogeneæ,) eſt quadrupla, quia A) 4 A (4; nempe quantitas 4 A, quantitatem A, continet quater. Sic ratio 3 A ad 2 A eſt ſeſquialtera, ea nempe quæ eſt 3 ad 2, quia 2 A) 3 A ($\frac{3}{2}$; nempe major minorem continet $\frac{3}{2}$ vicibus, ſive ſemel cum ſemiſſe, ſive toties quoties 3 continet 2. Sic ratio rectanguli V B ad A B eſt $\frac{V}{A}$, quia A B) V B ($\frac{V}{A}$; nempe rectangulum V B toties continet rectangulum A B, quoties recta V continet rectam A. Sic ratio 6 ad 2 eſt tripla, quia 2) 6 (3. Ratio 6 ad 4 eſt ſeſquialtera, ſive ea quæ 3 ad 2, quia 4) 6 ($\frac{3}{2}$ = 1 $\frac{1}{2}$. Sic 3) 2 ($\frac{2}{3}$. A) V ($\frac{V}{A}$. Et in aliis ſimiliter. *Sed ea tantum quæ eſt quantitatum homogenearum.*

Atque hinc eſt, quod ratio alterna non ubique obtineat; ſed ſolum in quatuor proportionalibus homogeneis. (Quod notant interpretes ad 16 e 5.) Puta, ſi ſit pondus A ad pondus B, ut linea α ad lineam β: non tamen dici poteſt, pondus A ad lineam α, ut pondus B ad lineam β. Ob cauſam jam aſſignatam. Ideoque quotieſcunque de proportione alterna, ſeu permutata agitur, (aliave quæ hanc involvit;) hæc ſemper ſubintelligenda eſt cautio, etiam ſi non diſertis verbis adjuncta fuerit. Qua de re plura dicentur ubi propoſitionem illam Euclidis 16 e 5 tractabimus.

Ea vero Diviſio ſive Applicatio, qua, verbi gratia, rectangulum A B applicari dicitur ad latus vel altitudinem A ut proveniat baſis B, vel contra; nempe A) AB (B, vel B) A B (A; vel etiam qua ſolidum A B C applicatur ad planum B C ut proveniat latus A, vel ad rectam A ut proveniat planum B C; nempe B C) A B C (A, vel A) A B C (B C; aliæque hujuſmodi; nonniſi καταχρηστικῶς Diviſiones vocantur: nec præſenti negotio ſunt accommodæ. Quod enim prodit, *Quotiens* proprie non eſt, nec quæſtioni *quot* aut *quoties* reſpondet. Quippe quæ de *numero* quærit (aut quod numero eſt homogeneum) non de magnitudine, aliave quantitate numero heterogenea. Nec quidem Applicationes illæ, ad Diviſionem, alio nomine videntur referendæ, quam prout quantitates illæ ſingulæ ad inſtar numerorum conſiderantur. Non enim quæritur, quoties linea A in ſuperficie rectangula A B continetur; aut quoties vel A linea, vel B C planum, continet in ſolido A B C: (quippe hoc omnino eſſet incongruum.) Sed, quoties *numerus* puta quadratorum in area parallelogrammi A B, contineat *numerum* longitudinum in latere A, ut proveniat *numerus* longitudinum in latere reliquo B. Item, quoties *numerus* cuborum in ſolido A B C contineat, vel *numerum* longitudinum in recta A, ut habeatur *numerus* quadratorum in baſi B C; vel *numerum* quadratorum in baſi B C, ut habeatur *numerus* longitudinum in recta A. *De quantitatum ad heterogeneas Applicatione, quid ſentiendum.*

Sed & ubi magnitudo aliqua numero dividitur, puta 2) A ($\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ A, non tam diviſio eſt (ſaltem quæ præſenti negotio conveniat) quam multiplicatio; (nempe quantitas A non tam dividitur per 2, quam multiplicatur per $\frac{1}{2}$;) quippe non quæritur, quoties *numerus* 2 contineatur in *magnitudine* A (quod abſurdum eſſet)

ſed

ſed datæ quantitati A, alia in data ratione quæritur; quod *Multiplicationis* eſt, potius quam *Diviſionis* opus; quippe quæ in Multiplicatione Ratio datur, in Diviſione quæritur.

Rationes omnes invicem homogeneæ.

Atque hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunque ad invicem quantitatum, eſſe inter ſe homogeneas.* Utut enim, verbi gratia, Linea & Pondus, ſint res plane heterogeneæ, nec rationem ad invicem habeant; Ratio tamen Lineæ ad Lineam, & Ponderis ad Pondus, ſunt plane homogeneæ; puta ratio lineæ bipedalis ad pedalem, & Bipondii ad pondo, homogeneæ ſunt, imo eadem ipſa ratio, puta dupla: nam ſi inſtituatur Diviſio, erit utrobique quotiens 2. Et quidem dum quærenti, Quotuplum ſit hoc illius, reſpondetur, Duplum, Triplum, Quadruplum, Seſquialterum, Seſquitertium &c. tantundem eſt atque ſi quærenti, Quot vicibus hoc illud contineat, reſpondeatur, Duabus, tribus, quatuor, una cum ſemiſſe, una cum triente, &c. Atque hoc perinde ſive de lineis ſive ſuperficiebus ſive aliis quibuſvis quantitatibus invicem homogeneis quæratur. Et quidem ubi non diſtincte indicatur quoties, ſed per circuitum, eodem tamen res recidit. Nam ſi dicatur eandem eſſe rationem, verbi gratia, ſolidi V B q ad A B q, quæ eſt rectæ V ad rectam A; de numero tamen reſpondetur, nempe toties V B q continere ſolidum A B q, quoties recta V continet rectam A; utut non diſtincte dicatur quoties vel hoc vel illud fiat.

Sed non item omnes differentiæ.

Atque hinc quidem amplum emergit diſcrimen, inter duas quas diximus quantitatum homogenearum comparationes. Quamvis enim tam quæ quoad Differentiam, quam quæ quoad Rationem, inſtituitur comparatio, non ſit niſi inter homogeneas: quæ tamen ex comparatis homogeneis emergit Ratio, cum Ratione quæ ab aliis invicem homogeneis, ſed ad priores illas heterogeneis, emergit, comparari poteſt ut quid homogeneum; quod interim in comparatione quoad Differentiam non obtinet. Exempli gratia; Si comparatur quoad rationem quadripondium ad bipondium, ratio eſt dupla; ſi linea quadripedalis ad pedalem, ratio eſt quadrupla: quæ rationes invicem comparari poſſunt; nempe hæc illius dupla eſt. At, ſi quoad differentiam inſtituatur comparatio; Quadripondii & bipondii, differentia eſt Bipondium; Lineæ quadripedalis & pedalis, differentia eſt linea tripedalis: Harum vero Differentiarum nulla poterit comparatio inſtitui (vel quoad differentiam vel quoad rationem) cum linea tripedalis, & bipondium, ſint quantitates plane heterogeneæ: altera in genere Lineæ, altera in genere Ponderis.

Diſcriminis cauſa.

Cauſa hujus diſcriminis hæc eſt; Quoniam ubi comparatio inſtituitur quoad Differentiam, Reſidua ſive Exceſſus ejuſdem ſemper ſunt generis cum comparatis (quippe totum & pars ſunt invicem homogenea;) adeoque ſi hæc bina comparata, ſint binis illis heterogenea, etiam horum differentia heterogenea erit differentiæ illorum, & propterea comparationis incapax. Ubi autem comparatio fit quoad Rationem, quæ emergit ratio comparatorum genus non raro deſerit, & tranſit in genus numeroſum, cujuſcunque ſint generis quæ comparantur; & propterea, utut bina comparata binis comparatis aliis heterogenea ſint, ratio tamen rationi homogenea eſt, ut comparationi locus ſit. Et quidem cum duplum & dimidium, triplum & triens, &c. perinde pro rationum nominibus habenda ſint; dimidii autem & trientis notæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, numeris (fractis) accenſeantur; quidni & dupli, triplive notæ $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, vel 2, 3. Atque hac potiſſimum de cauſa, ego totam Rationum doctrinam Arithmeticæ potius quam Geometricæ ſpeculationis eſſe autumo; totumque Euclidis Elementum quintum Arithmeticum eſſe, utut ſpeciatim de Magnitudinibus efferantur propoſitiones, quæ interim non minus recte de Quantitatibus ſimpliciter quibuſvis efferri poſſent, quo ſenſu apud Euclidem μεγέθη intelligenda ſunt.

Differentia Quantitatem reſpicit, ratio Qualitatem.

Fortaſſe autem dicendum inſuper erit, comparationem quæ eſt quoad differentiam, ſimpliciter ad *Quantitatem* ποσότητα, referendam eſſe; at quæ quoad Rationem, ad *Qualitatem* ποιότητα. Eo enim reſpicere videtur quæ apud Euclidem extat Rationis definitio, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις 3 d 5. Cur enim ποιὰ σχέσις reddatur *quædam habitudo*, (quod ſolent interpretes,) non video; mallem *habitudo qualitativa*. Ut enim figuræ *Magnitudo* (quanta ſit) ad Quantitatem referri ſolet; at *Species* figuræ, lineæve, (qualis ſit,) quæ in terminorum, partiumve homologarum ratione ad invicem maxime conſiſtit, ad *Qualitatem* (quartam nempe iſtius ſpeciem:) quidni & in præſenti negotio ſimiliter faciendum ſit; ut nempe comparatio quæ eſt quoad Differentiam dicatur comparatio

Quanti-

Quantitativa; at quæ ſecundum Rationem, *Qualitativa*. Unde, ex rationum identitate, non tam oritur *Æqualitas* (quæ Quantitatum eſt affectio) quam *Similitudo*, quæ Qualitates magis quam quantitates reſpicit. Per ὁμοιότητα vero id intelligit quod nos *Quotientem* dicimus. *Æqualitas quantitatum eſt, ſimilitudo qualitatum.*

Ex dictis itaque patet, Quid ſit quantitates invicem homogeneas, tum quoad Exceſſum ſive Differentiam, tum quoad Rationem ſive Proportionem, invicem comparare. Nempe illic quæritur, Quanto ſit hoc illo majus, vel contra; cui Subducendo ſatisfaciendum eſt: hic, Quotuplum vel quantuplum ſit hoc illius, vel hujus illud; cui ſatisfaciendum eſt Dividendo. Illic exceſſus prodit, ſive differentia; hic quotus, ſive ratio.

Ex duplici autem hac ſive Numerorum, ſive quantitatum quarumlibet homogenearum, comparatione; duplex oritur, quæ tradita eſt, *Progreſſio*; quarum altera *Arithmetica* dicitur, altera *Geometrica*: (nominibus, credo, mere ad placitum impoſitis; cum utravis perinde Arithmeticam Geometriamve ſpectet; quæ tamen cum hactenus obtinuerint, per me immota ſunto.) *Progreſſionem* autem dicere mallem quam vel *Proportionem* vel *Proportionalitatem*, (quanquam non ignorem voces has non minus quam illam, & forſan ſæpius, apud authores hoc ſenſu occurrere;) ea potiſſimum de cauſa ut vocum ὁμωνυμία vitetur. Nam *Proportio* non raro vel apud Mathematicos non tam ἀναλογίαν, quam λόγον, *rationem* ſignificat, & quidem jam fere obtinet ut *ratio* & *proportio* Mathematicis promiſcue uſurpentur, aliis vero ſcriptoribus *rationis* vox hoc ſenſu rarius occurrat, ſed eo ſenſu in communi loquela *proportionis* vox ut plurimum uſurpetur quo apud Mathematicos *Ratio*. *Proportionalitas* autem, utut de progreſſione Geometrica minime diſpliceat, ut quæ tantundem valeat, an tamen ad progreſſionem Arithmeticam ita commode referenda ſit, haud mihi conſtat. Quippe *Proportionalitas*, vi vocis, *proportionum* tantum, hoc eſt *rationum*, comparationem videtur innuere, non item *differentiarum*. Quod vero nonnullis placet, ut & *differentia* vocetur *ratio Arithmetica*, (& Ratio ſimpliciter ſumpta, *ratio Geometrica*,) non mihi admodum placet, cum λόγον (ſive *rationem* ſive *proportionem*, libeat interpretari,) non niſi de ea, quam vocant *rationem Geometricam*, apud Euclidem uſurpari video, neſcio an apud Veterum quemvis alium; quod & de *proportionis* voce perinde intelligendum videtur. Cum vero mos ille loquendi jam obtinuerit, nos etiam eadem nonnunquam utemur formula; *Arithmetice proportionalia* appellando, quæ ſunt in progreſſione Arithmetica, conſtituta. *Progreſſio duplex.*

Progreſſio Arithmetica dicitur, ubi numeri plures (aliæve quantitates invicem homogeneæ) æqualibus differentiis (ſive exceſſibus ſive defectibus) procedunt. Ut 2. 4. 6. 8. &c. & 3. 5. 7. 9. &c. & contra 9. 7. 5. 3. &c. *Progreſſio Arithmetica.*

Progreſſio Geometrica, ubi plures numeri (aliæve quantitates invicem homogeneæ) eadem (vel æquali) ratione ſive proportione progrediuntur. Ut 2. 4. 8. 16. 32. &c. & 3. 9. 27. 81. 243. &c. & 8. 12. 18. 27. &c. & contra 32, 16, 8, 4, &c. & pariter in ſimilibus. Ut enim progreſſio Arithmetica, æqualitatem Differentiarum ſpectat; ſic Geometrica, Rationum ſive æqualitatem ſive identitatem dicas, ſive etiam ſimilitudinem: Unde illic *communis exceſſus* ſive *differentia*, hic *communis ratio* ſive *proportio*, progreſſionis *ſpeciem* determinat. *Progreſſio Geometrica.*

Harum autem Progreſſionum utraque (tum Arithmetica tum Geometrica) eſt vel *Continua*, vel *Disjuncta*, (ſive diſcreta, diſcontinua, interrupta;) Illa, ubi quantitates continue poſitæ æqualibus aut differentiis aut rationibus ubique procedunt. Hæc, ubi eadem quidem differentia aut ratio identidem redit, ſed non continue. In illa, quilibet terminus intermedius tum antecedens eſt tum conſequens, communis ſive differentiæ ſive rationis; In hac, non item. Sic 3, 5, 7, 9, 11, vel 11, 9, 7, 5, 3, ſunt in progreſſione Arithmetica continua (vel, ſi libet, Arithmetice proportionales continue,) quia quilibet numerus illic antecedentem, hic conſequentem, binario ſuperat. At 3, 5; 9, 11. vel 9, 11; 5, 7. ſunt in progreſſione Arithmetica disjuncta ſive interrupta conſtituti; nam eodem exceſſu ſecundus primum, & quartus tertium ſuperat, at non item tertius ſecundum. Et pariter 5, 3; 11, 9; 17, 15; 19, 17. ſunt in eadem progreſſione Arithmetica, ſed interrupta. Eodem modo, 2. 4. 8. 16. 32. &c. vel 32. 16. 8. 4. &c. ſunt in progreſſione Geometrica continua; quippe illic numerus conſequens antecedenti ſuo eſt ubique in ratione dupla, hic dimidia ſive ſubdupla. At 2. 4 :: 3. 6 :: 4. 8. ſunt quidem in eadem progreſſione Geometrica, ſed interrupta; quippe ſecundus primum, & *Progreſſio eſt vel continua vel disjuncta.*

quartus tertium, & sextus quintum eadem ratione superant; sed non item tertius secundum, vel quintus quartum. Similiter, de 4. 1 :: 12. 3. dicendum est, qui quidem numeri sunt Geometrice proportionales, sed non continue.

Proportionalium notatio.

Et quidem (quod semel dictum esto) hujusmodi sive numerorum sive quantitatum designatio A. B :: C. D, in sequentibus sæpissime intelligatur quantitates designare proportionales (Geometrice intellige) saltem discontinue; nempe qua ratione A ad B, eadem & C ad D. Hujusmodi autem A. B. C. D. ∴ notabit easdem esse continue proportionales. Progressio autem Arithmetica, ubi opus est, sic poterit notari A, B; C, D; vel, si continua fuerit, A, B, C, D ∴.

Atque hactenus tum duplicem quantitatum invicem comparationem satis aperuisse videamur; tum utriusque progressionis, Arithmeticæ scilicet & Geometricæ, naturam, quas in sequentibus capitibus fusius prosequar.

Proportio Harmonica.

Progressionem autem sive *proportionalitatem Harmonicam* vel *Musicam* dictam, cum ad scopum nostrum minus videatur pertinere, omittendam censui. *Ea vero est* (siquis quæ sit scire desiderat) *quando in quatuor terminis est ut primus ad quartum, sic differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti.* Puta si A. D :: B — A. D — C. Hoc est, $\frac{A \backsim B}{C \backsim D} = \frac{A}{D}$. Erunt illæ quantitates A, B, C, D, harmonice proportionales. Sic numeri 5, 8, 12, 30. quia 5. 30 :: 8 — 5 = 3. 30 — 12 = 18. Seu $\frac{8-5}{30-12} = \frac{5}{30}$. Vel etiam, *tres quantitates Harmonice proportionales sunt, si ut prima ad tertiam, sic differentia primæ & secundæ, ad differentiam secundæ & tertiæ.* Puta A. C :: B — A. C — B. hoc est $\frac{A \backsim B}{B \backsim C} = \frac{A}{C}$: Erunt, hoc casu tres A, B, C, Harmonice proportionales; vel, si libet, quatuor A, B, B, C. Sic numeri 3, 4, 6, vel 3, 4, 4, 6. Nam 3. 6 :: 4 — 3 = 1. 6 — 4 = 2. hoc est $\frac{4-3}{6-4} = \frac{3}{6}$. Sic 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. &c. sunt *continue proportionales Harmonice.* Nam 1. $\frac{1}{3}$ :: 1 — $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. — $\frac{1}{3}$ :: 6. 2 :: 6 — 3 = 3. 3 — 2 = 1. Et sic in cæteris. Et universaliter, $\frac{1}{A-1}$. $\frac{1}{A+1}$ (::A+1.A--1) :: $\frac{1}{A-1} - \frac{1}{A}$. $\frac{1}{A} - \frac{1}{A+1}$ :: ($\frac{A\text{-}A+1=1}{A \text{ in } A-1}$. $\frac{A+1\text{--}A=1}{A \text{ in } A+1}$ ::) A + 1. A — 1. Quod innuisse sufficiat.

CAP. XXVI.

Progressio Arithmetica variorum problematum familiarium solutione explicatur.

Problemata Progressionem Arithmeticam spectantia.

DE Arithmetica Progressione continua, solent hujusmodi proponi Problemata, aliaque multa his similia.

1 Dato termino primo, & communi terminorum excessu; terminum ultimum, aliumve in progressione quemlibet, investigare.

2 Dato termino primo, communi item excessu, & numero terminorum; summam terminorum omnium invenire.

3 Dato termino primo, cum excessu communi, & alterius cujusvis termini valore; invenire quoto loco in serie terminus ille reperitur. Vel (quod perinde est) dato termino primo, & ultimo, cum excessu communi; invenire numerum terminorum.

4 Dato termino primo, & ultimo, cum numero terminorum; communem excessum investigare.

5 Dato numero terminorum, cum terminorum omnium aggregato, & excessu communi; primum terminum invenire.

Per terminum primum jam intelligo (quod & deinceps intelligatur) terminum minimum; & per ultimum, maximum. Quamvis enim progressio, sive crescendo sive decrescendo fieri possit; ego tamen tanquam crescentem considero, atque eo sensu quæ dicenda sunt intellecta velim. Et propterea, siquis ea decrescenti seriei accommodare velit, id fiet mutatis tantum his vocibus primo & ultimo: Nempe quæ jam de primo crescentis dicuntur, illic de termino ultimo decrescentis

creſcentis ſeriei intelligenda erunt; quæ hic de ultimo, illic de primo. Quod ſemel dictum eſto, ne ſæpius opus ſit utrumque caſum ſeorſim proponere.

Exempli gratia. 1. Siquis iter conficiens ambulaverit primo die 3 milliaria, ſecundo 5, tertio 7, & ſic deinceps, diurnum iter quotidie augendo binis milliaribus, Quæritur quot milliaria ambulaturus eſt die Decimo? *Solvuntur.*

Quoniam ſinguli dies poſt primum, addunt incrementum duorum milliarium; multiplicetur numerus dierum poſt primum, nempe 9, in communem exceſſum 2; & productum $18 = 9 \times 2$, addatur itineri primi diei, eritque $21 = 18 + 3$ numerus quæſitus: tot nempe milliaria confecturus eſt die decimo.

2 Si quæratur inſuper, Quot toto itinere ambulaverit?

Additis termino primo & ultimo (ita ut jam dictum eſt invento,) ducatur ſumma in numerum terminorum: producti dimidium eſt numerus quæſitus. Puta $3 + 21 = 24$; & $24 \times 10 = 240$; hujus numeri ſemiſſis, 120, eſt numerus milliarium toto decem dierum itinere confectorum.

3 Si quæratur, Quoto itineris die ambulaverit 15 milliaria?

Ex numero aſſignato 15, auferatur terminus primus 3; & reſiduum per communem exceſſum dividatur: quod prodit, indicat quot diebus poſt primum ambulaverit. Nempe $15 - 3 = 12$, & 2) 12 (6. Septimo igitur die, (ſive poſt primum ſexto,) ambulantur milliaria 15.

4 Si ambulaverit primo die 3 milliaria, decimo 21; & quæratur communis exceſſus.

Demantur ex termino maximo minimus: quod reſtat dividatur per numerum terminorum poſt primum; Quod prodit eſt communis exceſſus. Nempe $21 - 3 = 18$. & 9) 18 (2. ergo communis exceſſus eſt, duorum milliarium.

5 Si totum iter milliarium 120, ſit diebus 10 confectum, quotidiano incremento duorum milliarium; & quæratur primi diei iter.

Dividantur 240, duplum numeri milliarium toto itinere confectorum, per numerum dierum 10; prodeunt 24, ſumma milliarium dierum primi & ultimi conjunctim. Ducantur inſuper 9, numerus dierum poſt primum, in communem exceſſum 2, & prodeunt 18, exceſſus totus termini ultimi ſupra primum. Quibus demptis ex primi & ultimi aggregato 24, reſtant $24 - 18 = 6$. Horum ſemiſſis, 3, eſt iter primi diei.

Porro; Ponamus alium exire die quinto, & æquabili itinere progredi. Quæritur, quot illum oporteat milliaria quotidie conficere, ut eodem tempore cum præcedente idem iter confecerit.

Cum ex 10 diebus, ponantur elapſi 4, reſtant 6. Cum igitur diebus 6 confecturus ſit iter milliarium 120; facta diviſione 6) 120 (20, prodit numerus milliarium quolibet die conficiendorum, nempe 20, ut eodem die cum præcedente idem confecerit iter.

Exemplum aliud eſto hujuſmodi; cum notum ſit horologium hora poſt meridiem prima ſonitum 1 edere, ſecunda 2, tertia 3, & ſic deinceps: Quæratur, quot edat ſonitus, duodecim ſuccedentium horarum ſpacio. Vel etiam, quot ab hora tertia, ad horam nonam. Aliaque ſimilia. Quibus quæſitis, eodem quo ſupra modo ſatisfaciendum erit.

Item, Si ponamus 20 lapides ita collocatos, ut primus abſit uno milliari, ſecundus duobus, tertius tribus, & ſic deinceps; oporteat autem aliquem hos omnes lapides ſigillatim afferre: Quæritur, quot ille milliaria confecturus ſit priuſquam omnes attulerit.

Cum ad primum lapidem eundo & redeundo, duo milliaria eunda ſint; ad ſecundum, 4; ad tertium, 6; &c. Communis exceſſus eſt 2; idemque terminus primus: numerus autem terminorum 20. Cumque etiam idem ſit terminus primus & communis terminorum exceſſus; ducto exceſſu communi in numerum terminorum, habetur terminus ultimus $40 = 20 \times 2$. cui ſi addatur terminus primus 2, erit $40 + 2 = 42$ extremorum aggregatum; quod ductum in numerum terminorum, dat $42 \times 20 = 840$ duplum totius itineris; (vel aggregatum ductum in ſeminumerum terminorum, aut aggregati ſemiſſis in numerum terminorum, dat ipſum iter; puta $42 \times 10 = 21 \times 20 = 420$;) conficienda igitur ſunt milliaria 420, quo omnes illi lapides ſigillatim afferantur.

Et pari modo alia hujuſmodi problemata de Progreſſione Arithmetica, & excogitari & reſolvi facile poterunt; vel etiam ex vulgaribus Arithmeticæ practicæ

libris depromi; quibus se exercere poterunt tirones. Nobis recensendis pluribus immorandum esse non duxi. Sed nec in jam traditis singularum operationum rationes aperui, cum non sint adeo intricatæ, quin possint, ex operationum Arithmeticarum superius expositarum natura satis intellecta, vel à tirone, modo advertente, satis percipi; unde & ipse inibi se exerceri non gravatim feret: sed præsertim quod sequente capite tum horum tum aliorum plurimorum problematum huc spectantium traditionem demonstrativam aggressurus sim.

CAP. XXVII.

Progressio Arithmetica fusius traditur.

QUo Progressionis Arithmeticæ doctrinam plenius aperiam, libet eam sequentibus propositionibus succincte, sed & perspicue tradere.

Siquem autem male habeat, quod hic aliquoties Æquationum vel ordinationes, vel etiam Analyses, adhibeam, priusquam illarum traditionem docuerim, (adeoque methodi leges violatas causetur;) poterit ille tum hoc, tum sequens caput, tum etiam Cap. 32, & 33, vel penitus omittere, vel saltem intermittere, donec Æquationum doctrinam tradidero; & quasi essent postposita reputare.

Quod autem aggredior quo rectius fiat, hæc sunto quibus sum usurus symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, sit A; maximus, quem ultimum appello, sit V; communis excessus E. Numerus Terminorum, T. Terminorum quorumvis ab invicem distantia, D. Extremorum (maximi & minimi) aggregatum Z = A + V. eorundem differentia X = V — A. Terminorum omnium summa vel aggregatum S. Singuli autem, à minimo inchoando, dicantur *a, b, c, d, e,* &c. à maximo vero inchoando, dicantur α, β, γ, δ, ε, &c. Numeros, qui cujuslibet termini distantiam à primo indicant, *Indices* appello, puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmissis, sequuntur propositiones.

Distantia à primo.						Distantia ab ultimo.
0	*a*	A	3	V — 9E	ϰ	9
1	*b*	A + E	5	V — 8E	ι	8
2	*c*	A + 2E	7	V — 7E	ϑ	7
3	*d*	A + 3E	9	V — 6E	η	6
4	*e*	A + 4E	11	V — 5E	ζ	5
5	*f*	A + 5E	13	V — 4E	ε	4
6	*g*	A + 6E	15	V — 3E	δ	3
7	*h*	A + 7E	17	V — 2E	γ	2
8	*i*	A + 8E	19	V — E	β	1
9	*k*	A + 9E	21	V	α	0
		S	120	S		

1 Si continuæ progressionis Arithmeticæ primus terminus seu minimus sit A, erit secundus A + E, tertius A + 2E, quartus A + 3E, & sic deinceps quilibet terminus continue augendus est communi excessu semel addito. Nempe illud postulat Arithmeticæ progressionis definitio. Puta *a* = A. *b* = A + E. *c* = A + 2E, &c.

2 Constat igitur terminus quilibet, ex termino primo seu minimo, cum communi excessu toties addito, quot terminus ille gradibus à primo distat, (ipso primo non computato,) sive (quod tantundem est) cum excessu communi in Indicem ducto. Sequitur hæc ex præcedente. Cum enim pro quolibet distantiæ gradu excessus semel additur; toties addendus erit, quot sunt distantiæ gradus. Puta, terminus sextus *f* = A + DE = A + 5E.

3 Dato igitur termino primo, cum communi Excessu, & termini cujusvis assignati Indice, sive distantia à primo; A, E, D; invenitur terminus assignatus. Nempe A + DE. per præced. quod enim illic theorematice affirmatur, hic problematice proponitur.

4 Si

4 Si terminus ultimus sit V; erit penultimus V — E; antepenultimus V—2E; quartus à fine V — 3E; & sic deinceps quilibet terminus continue minuendus est communi excessu semel detracto. Id enim postulat definitio. Quanto enim quilibet locus progrediendo augetur, tanto retrocedendo quilibet minuitur. Puta $\alpha = V$. $\beta = V - E$. $\gamma = V - 2E$, &c.

5 Constat igitur terminus quilibet ex termino maximo, dempto toties excessu communi, quot terminus ille gradibus ab ultimo distat: (ipso interim ultimo non computato.) per præced. Puta, sextus à fine $\zeta = V - DE = V - 5E$.

6 Dato igitur termino maximo, cum excessu communi, & termini cujusvis assignati distantia ab ultimo; V, E, D; invenitur terminus assignatus. Nempe V — DE. per præced.

7 Dato termino quovis, cum excessu communi, & cujusvis assignati termini majoris à dato distantia, (puta f, D, E;) invenitur terminus assignatus. (ut i.) Nempe toties addendo excessum communem termino dato, quot assignatus à dato gradibus distat. Puta $i = f + DE = f + 3E$. Nam per def. vel prop. 1. pro singulis gradibus semel addendus est communis excessus.

8 Dato termino quovis, cum excessu communi, & cujusvis assignati minoris distantia à dato; (puta f, D, E;) invenitur assignatus. (ut c.) Nempe toties auferendo excessum communem, quot assignatus à dato gradibus distat. Puta $c = f - DE = f - 3E$. Nam per def. vel prop. 4. pro singulis gradibus semel auferendus est communis excessus.

9 Dato igitur excessu communi, cum terminorum quorumvis ab invicem distantia; E, D; datur illorum terminorum differentia. (puta $f - c$: vel $i - f$.) nempe DE. per prop. 7 & 8. Puta $i - f = DE = 3E$. per prop. 7. & $f - c = DE = 3E$. per prop. 8. transpositis scilicet utrobique æquationum terminis.

10 Data vero terminorum quorumvis differentia, cum eorundem ab invicem distantia; (puta $f - c$, D;) datur communis excessus E; Dividendo scilicet differentiam per distantiam. Nam cum sit, verbi gratia, $f - c = DE$, per præcedentem; erit $\frac{f-c}{D} = E$.

11 Item data terminorum quorumvis differentia, cum communi excessu; ($f - c$, E:) datur eorundem distantia D; Dividendo scilicet differentiam per communem excessum. Nam cum sit (per prop. 9.) $f - c = DE$; erit $\frac{f-c}{E} = D$.

12 Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejusdem progressionis quibuslibet, in eadem ab invicem distantia positi, habent & eandem differentiam. Cum enim per prop. 9. differentia sit DE; si utrobique æqualis sit, non modo E communis excessus, sed & distantia D; erit eadem utrobique differentia DE. Puta si $a, b, c, d, e, f, \&c.$, erit $c - a = f - d$.

13 Et contra; Si eadem sit utrobique differentia, eadem est & utrobique distantia. Nam si tum excessus communis E, tum differentia DE, sit utrobique æqualis; erit utrobique æqualis D. Puta $a, b, c, d, e, f, \&c.$, & $c - a = f - d$; erunt a, c, & f, d, æqualiter remoti.

14 Ergo etiam; Si ex terminis quotvis in continua progressione Arithmetica constitutis, seligantur quotlibet in eadem continue ab invicem distantia; erunt & hi in continua progressione Arithmetica constituti. Puta si $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, \&c.$ erunt item tum $a, c, e, g, i, \&c.$ tum $b, d, f, h, k, \&c.$ tum $a, d, g, k, \&c.$; tum $a, e, i, \&c.$; in continua progressione Arithmetica constituti. Nam æqualibus continue differentiis continue crescunt, per prop. 12.

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, \&c.$	
$a, c, e, g, i, \&c.$	
$b, d, f, h, k, \&c.$	
$a, d, g, k, \&c.$	
$a, e, i, \&c.$	

15 Et contra; si ex terminis ita continue progredientibus, selecti quotlibet continue item progrediuntur; æqualibus ab invicem distantiis sumpti sunt, per prop. 13.

16 Dato excessu communi, cum numero terminorum, E, T: invenitur extremorum differentia, X. Est enim extremorum distantia unitate minor, quam numerus terminorum; $D = T - 1$. ut patet. Ergo, per 9. $X = V - A = DE = TE - E$.

17. Et, Data extremorum differentia, cum numero terminorum; X, T: habetur communis exceſſus, E. Nempe, cum ſit per præced. $X=DE=TE-E$. Erit $\frac{X}{D}=\frac{X}{T-1}=E$.

18. Et, Data extremorum differentia, cum communi exceſſu; X, E: habetur terminorum numerus, T. Cum enim ſit $DE=X$, erit $\frac{X}{E}=D=T-1$. Et $\frac{X}{E}+1=D+1=T$.

19. Dato termino primo ſeu minimo, cum communi exceſſu, & numero terminorum; A, E, T: habetur terminus ultimus, V. Cum enim, per 16. $X=V-A=TE-E$; erit $V=A+TE-E$, vel $V=A+DE$.

20. Dato termino maximo, cum communi exceſſu, & numero terminorum, V, E, T; invenitur minimus, A. Nempe ſublata, ex maximo, extremorum differentia, manet minimus. Cum ergo per 16. $X=DE=TE-E$. Erit $V-X=A=V-TE+E=V-DE$.

21. In continua progreſſione Arithmetica, ſi ex ſumma duorum quorumvis terminorum auferatur progreſſionis terminus primus; quod reſtat, eſt progreſſionis terminus ille cujus à primo diſtantia æquatur ipſorum à primo diſtantiis ſimul ſumptis. Sive, cujus Index æquatur eorum Indicibus ſimul ſumptis. Nam, per prop. 2. quilibet terminus conſtat ex primo cum tot exceſſibus quot gradibus a primo diſtat: Ergo duo additi continent primum bis, cum tot exceſſibus quot ſunt utriuſque diſtantiæ gradus ſimul additi. Hinc ſi ſemel auferatur primus; manet primus terminus ſemel cum tot exceſſibus quot ſunt utriuſque diſtantiæ gradus ſimul additi; hoc eſt (per eandem prop. 2.) terminus ille cujus diſtantia eſt eorum diſtantiis ſimul additis æqualis. Puta terminus tertius $c=A+2E$, ſextus $f=A+5E$, horum aggregatum $c+f=2A+7E$; hinc ſublato A, reſtat $A+7E$ terminus octavus, b; cujus à primo diſtantia 7, æqualis eſt diſtantiis tertii & ſexti ſimul ſumptis $2+5$.

dift: c + dift: f = dift: b.
$c+f-a=b$
$c=A+2E$
$f=A+5E$
$c+f=2A+7E$
$c+f-A=A+7E=b$

22. Eodem modo; ſumma trium, quatuor, quinque aut plurium terminorum; abjecto primo tot vicibus una minus; æquatur termino illi cujus Index eſt eorum omnium Indicibus ſimul ſumptis æqualis. Puta ſi dift. b + dift. d + dift. e = dift. i; erit $b+d+e-2a=i$. Probatur ut præcedens.

dift. b + dift. d + dift. e = dift. i.
$b+d+e-2a=i$

$b=A+E$
$d=A+3E$
$e=A+4E$
$b+d+e=3A+8E$
$b+d+e-2A=A+8E=i$

23. Ergo, ſi primus progreſſionis terminus ſit o ciphra, vel nihil: duorum pluriumve terminorum ſumma, æqualis eſt iſti termino cujus Index eſt eorum Indicibus ſimul ſumptis æqualis. Sequitur ex prop. 21, 22. quia ſublatio primi termini $A=o$, nihil immutat. Puta in progreſſione 0, 3, 6, 9, 12, 15, eſt $6+9=15$, quippe cujus Index æquatur eorum Indicibus ſimul ſumptis, $5=2+3$.

24. Item, in ejuſmodi progreſſione (cujus primus terminus eſt o) terminus quilibet æquatur illi communis exceſſus multiplo, quod eſt Indici, ſive à primo diſtantiæ cognomine. Cum enim per prop. 2. Sit terminus quilibet $A+DE$; ſi ſit $A=o$, erit $A+DE=DE$.

25. In continua progreſſione Arithmetica, ſi duorum terminorum differentiæ, addatur terminus primus; emergit terminus cujus diſtantia à primo eſt eorum diſtantiarum item à primo differentiæ æqualis: ſive, cujus Index æquatur Indicum illorum

lorum differentiæ: vel qui tantundem distat à primo quantum illi ab invicem. Sequitur ex prop. 21. Si enim, verbi gratia, dist: b — dist: c = dist: f, hoc est, dist. b = dist. c + dist. f; erit (per prop. 21.) $b = c + f - a$; ergo $b - c + a = f$.

26. Si igitur primus terminus sit 0; duorum quorumvis differentia est terminus ille cujus index sive distantia à primo est illorum indicum differentiæ æqualis. Quoniam hoc casu $b - c = b - c + a = f$.

27. Item, hoc casu, terminus ille, cujus index æquatur duorum indicum differentiæ, est multiplum excessûs communis, indici suo (sive duorum illorum indicum differentiæ) cognomine. Cum enim indicum differentia ostendat terminorum distantiam; sitque per prop. 9. differentia terminorum, DE (multiplum excessûs cognomine distantiæ, sive indicum differentiæ;) erit terminus ille, cujus index huic indicum differentiæ æquatur, item DE; quippe quæ est terminorum illorum differentia, per præced.

28. In continua progressione Arithmetica, extremorum aggregatum æquatur aggregato duorum quorumvis terminorum æqualiter ab extremis utrinque remotorum; (Intellige, quorum unus à primo tot abest gradibus, quot alter ab ultimo.) Nam, per prop. 2. & 5; tanto unus minimum superat, quanto alter à maximo deficit; propter æqualem utrobique distantiam. Puta $c = A + 2E$, & $\gamma = V - 2E$; ergo $c + \gamma = A + 2E + V - 2E = A + V$. Et sic ubique.

$$\begin{array}{r} c = A + 2E \\ \gamma = V - 2E \\ \hline c + \gamma = A + V \end{array}$$

29. Sin terminus omnium medius ab utroque extremo æqualiter distet, (quod, ubi numerus terminorum est impar, contingit) terminus ille bis sumptus æquatur extremorum aggregato. Puta expositis a, b, c, d, e &c. erit $a + e = 2c$. quia $c - a = e - c$, propter æqualem utrobiq; distantiam. Ideoque $c + c = a + e = 2c$.

30. Similiter in quatuor terminis Arithmeticæ progressionis interruptæ. Nempe Aggregatum extremorum æquatur aggregato mediorum. Puta A, M; N, V. Cum enim, propter communem utrobique excessum, sit $M - A = V - N = E$, ideoque $A + E = M$, & $N + E = V$, hoc est $V - E = N$; erit $M + N = A + E + V - E = A + V$. Vel expositis V, N; M, A. quoniam $V - N = M - A = E$, ideoq; $V - E = N$, & $M - E = A$, hoc est $M = A + E$; erit $N + M = V - E + A + E = A + V$.

$$\begin{array}{r} M = A + E \\ N = V - E \\ \hline M + N = A + V \end{array}$$

31. Ergo, Quatuor terminorum Arithmetice (ut loquuntur) proportionalium, datis tribus quibuslibet datur & reliquus. Cum enim expositis A, M; N, V. sit, per præced. $A + V = M + N$; erit (æqualibus utrinque subductis) $A = M + N - V$, $V = M + N - A$, $M = A + V - N$, $N = A + V - M$.

$$\text{Datis} \begin{cases} A, M, N. \\ A, M, V. \\ A, N, V. \\ M, N, V. \end{cases} \text{Datur} \begin{cases} V = M + N - A. \\ N = A + V - M. \\ M = A + V - N. \\ A = M + N - V. \end{cases}$$

32. Ex tribus autem in Arithmetica progressione continua constitutis, Aggregatum extremorum æquatur duplo medii. Quippe terminus medius, eodem excessu superat extremorum unum, quo ab altero superatur. Puta A, M, V &c. quoniam est $M - A = V - M = E$, sive $A + E = M = V - E$, erit $M + M = 2M = A + V$.

$$\begin{array}{r} M = A + E \\ M = V - E \\ \hline 2M = A + V \end{array}$$

33. Ergo, ex tribus terminis continue progredientibus Arithmetice, datis duobus quibuslvis datur & reliquus. Cum enim, per præced. sit $2M = A + V$; erit $2M - A = V$, $2M - V = A$, $M = \frac{A+V}{2}$.

Datis

$$\text{Datis}\begin{cases}A, M,\\ A, V,\\ M, V,\end{cases}\text{Datur}\begin{cases}V = 2M - A.\\ M = \frac{A+V}{2}.\\ A = 2M - V.\end{cases}$$

34. Atque idem valet de tribus quatuorve terminis progressionis Arithmeticæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus utrobique intervallis distantibus. Puta, si $a, b, c, d, e, f, g, \dot{\cdot}\dot{\cdot}$ erit $a+e=2c$. Nam & $a, c, e, \dot{\cdot}\dot{\cdot}$ per prop. 14. Item $a+f=c+d$. & $d+e=b+g$. Et sic alibi. Nam a, c; d, f. vel a, d; c, f. & b, e; d, g, vel b, d; e, g. &c. per pr. 12.

35. Sed & præcedentium aliquot conversæ pariter demonstrantur. Puta conversa pr. 28. In continua progressione Arithmetica, (excepta tantum progressione æqualium, ubi excessus est ubique nullus, puta, 1, 1, 1, 1, &c. $\dot{\cdot}\dot{\cdot}$; quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur,) si duorum intermediorum terminorum aggregatum aggregato extremorum æquetur, sunt illi ab extremis æqualiter utrinque remoti; (hoc est, quot gradibus intermediorum alter ab altero extremorum, tot reliquus à reliquo distat.) Puta in progressione $a, b, c, d, e, f, g, \dot{\cdot}\dot{\cdot}$ si $c+e=a+g$, totidem gradibus distant a, c, atque e, g; item a, e, atque c, g. Cum enim quanto duorum c, e, alter major est quam a, tanto alter minor sit quam g, (secus enim aggregata non essent æqualia,) distantia utrobique æqualis erit, per prop. 13.

36. Et conversa prop. 29. Si termini alicujus intermedii duplum æquetur aggregato extremorum: æqualiter ille ab utroque extremo distat. Probatur ut præcedens.

37. Item conversa prop. 32. Si unius termini duplum æquetur duorum aggregato, erit ille medius Arithmeticus inter hos. Nam, nisi æqualibus differentiis horum tum alter major sit tum alter minor, quam est expositus, non constaret æqualitas.

38. Similiter & conversa prop. 30. Si bini binis simul sint æquales, erunt illi quatuor termini Arithmetice (ut loquuntur) proportionales. Puta si $A+V=M+N$, quanto horum alter puta M, superat alterum illorum puta A, tanto horum reliquus ab illorum reliquo deficit; (nam nisi excessus & defectus se mutuo perimant, non constabit aggregatorum æqualitas:) Ideoque $M-A=V-N=E$. Ergo $A, M=A+E$; $N, V=N+E$. Vel sic, quia $A+V=M+N$; erit $V=M+N-A$, & $V-N=M-A$: Ergo, per def. A, M; N, V. Sed & eodem argumento M, A; V, N. vel V, N; M, A. Item, cum sit $V=M+N-A$ (ut dictum est) erit etiam $V-M=N-A$; Ideoque V, M; N, A, & M, V; A, N, vel A, N; M, V. Atque hinc sequitur, non tantum

39. Si quatuor termini sint Arithmetice proportionales, sunt & inverse proportionales; (Intellige, si A, M; N, V. vel N, V; A, M, tum M, A; V, N, vel V, N; M, A.) quod ex ipsa definitione sequitur. Nam si in alteris sit æqualis excessus, in alteris erit æqualis defectus; adeoque utrobique progressio Arithmetica. Sed &

40. Si quatuor termini sint Arithmetice proportionales, sunt & alterne (permutatim, vicissim,) proportionales. Hoc est, si A, M; N, V, ideoque $A+V=M+N$; erit A, N; M, V, ut ostensum est prop. 38. Item N, A; V, M, ut ibidem, & prop. 39.

41. Item si Arithmetice proportionalium vel primus & tertius, vel secundus & quartus, æqualiter vel augeantur, vel minuantur; manent adhuc Arithmetice proportionales. Puta, si A, M; N, V, hoc est A, $A+E$; N, $N+E$; erit etiam A, $M+B$; N, $V+B$, hoc est A, $A+E+B$; N, $N+E+B$; Nempe illic communis excessus est E, hic $E+B$. Item $A+B, M=A+E$; $N+B, V=N+E$, ubi communis excessus est $E-B$. Et, pari de causa, $A \pm B, M \pm C$; $N \pm B, V \pm C$; Et pariter in similibus. Quippe qui prius erat communis excessus, utrobique vel pariter augetur, vel pariter minuitur, adeoque etiamnum utrobique æqualis; & propterea termini Arithmetice proportionales.

42. Item, si Arithmetice proportionales sint tum A, M; N, V. tum α, μ; ν, υ; tum a, m; n, u, (tum, si placet, quaterni plures:) erunt item tum aggregata, tum differentiæ, terminorum respective sumptorum, termini proportionales. Puta $A+\alpha \pm a$, $M+\mu \pm m$; $N+\nu \pm n$, $V+\upsilon \pm u$. Nam si in primis excessus sit ubique E, in secundis ε, in tertiis $\pm e$; erit in quartis $E+\varepsilon \pm e$. Ut additione patebit.

A,

$$\begin{cases} A, \\ \alpha, \\ a, \end{cases} \quad \begin{cases} M = A + E; \\ \mu = \alpha + \varepsilon; \\ m = a \pm e; \end{cases} \quad \begin{cases} N, \\ \nu, \\ n, \end{cases} \quad \begin{cases} V = N + E. \\ \upsilon = \nu + \varepsilon. \\ u = n \pm e. \end{cases}$$

$A + \alpha \pm a$, $A + \alpha \pm a + E + \varepsilon \pm e$; $N + \nu \pm n$, $N + \nu \pm n + E + \varepsilon \pm e$.

43. Sed & idem obtinet in Arithmeticis progreſſionibus continuis. Quod ſimiliter probandum erit. Puta, ſi tum A, B, C, D, &c. tum α, β, γ, δ, &c.; tum a, b, c, d, &c. erunt $A + \alpha \pm a$, $B + \beta \pm b$, $C + \gamma \pm c$, $D + \delta \pm d$, &c.

44. Et quidem, licet altera progreſſio creſcens fuerit, altera decreſcens.

$$\text{Puta} \begin{cases} A + E, \; A + 2E, \; A + 3E, \; A + 4E, \; \&c. \\ \upsilon - \varepsilon, \; \upsilon - 2\varepsilon, \; \upsilon - 3\varepsilon, \; \upsilon - 4\varepsilon, \; \&c. \end{cases}$$

Quippe aggregatorum exceſſus continuus eſt $E - \varepsilon$.

Atque hujuſmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile eſſet tum comminiſci tum demonſtrare. Verum illud haud eſt neceſſe, ſed cujuſlibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet; & cum res poſtulaverit ipſe perficiat.

45 In continua progreſſione Arithmetica, Aggregatum extremorum ($Z = A + V$) per numerum terminorum multiplicatum T, eſt duplum ſummæ terminorum omnium. Hoc eſt $TZ = 2S$. Progreſſionis termini ordine directo (à primo inchoati) dicantur a, b, c, d, &c. Iidem termini ordine retrogrado (ab ultimo inchoati) dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. Quoniam igitur, per prop. 28. tum $a + \alpha$, tum $b + \beta$, tum $c + \gamma$, &c. æquantur aggregato extremorum $A + V = Z$: erunt omnes a, b, c, d, &c. cum omnibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. æquales ipſi Z toties ſumpto. Hoc eſt, omnes termini bis ſumpti (nempe, tum ordine directo, tum ordine retrogrado,) æquantur extremorum aggregato Z toties ſumpto quot ſunt termini. Hoc eſt $TZ = 2S$.

$$\begin{array}{l} a + \alpha = Z = A + V \\ b + \beta = Z \\ c + \gamma = Z \\ d + \delta = Z = A + V \\ \qquad \&c. \\ \hline S + S = TZ = TA + TV. \end{array}$$

46 Idem valet in quatuor diſcontinue proportionalibus Arithmetice. Puta A, M; N, V. Cum enim, per prop. 30, ſit $A + V = Z = M + N$, erit $4Z = 2S$.

47 Datis igitur, in Arithmetica progreſſione continua, extremorum aggregato & terminorum numero; Z, T; habetur totius progreſſionis ſive terminorum omnium ſumma. S. nempe $TZ = 2S$, per prop. 45. Ergo $\frac{TZ}{2} = S$.

48 Et Dato extremorum aggregato, cum progreſſionis ſumma; Z, S; habetur numerus terminorum. T. Nam, quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{Z} = T$.

49 Et Dato terminorum numero, cum progreſſionis ſumma; T, S; datur item extremorum aggregatum. Z. Nam, quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{T} = Z$.

50 Datis terminorum numero, progreſſionis ſumma, & termino minimo; T, S, A; habetur maximus. V. Eſt enim per p. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A + V$. Ergo $\frac{2S}{T} - A = Z - A = V$.

51 Datis iiſdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - A = V$. Ergo $\frac{2S}{T} - 2A\ (= Z - 2A) = V - A = X$.

52 Datis numero terminorum, progreſſionis ſumma, & termino maximo; T, S, V, habetur item minimus. A. Cum enim, per pr. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A + V$, erit $\frac{2S}{T} - V = A$.

53 Datis iiſdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T}-V=A$. Ergo $V-\frac{2S}{T}+V=2V-\frac{2S}{T}\ (=2V-Z)=V-A=X$.

$$\begin{array}{rl} & V+A=Z \\ \text{mi:} & V-A=X \\ \hline & 2A=Z-X \end{array}$$

54 Datis extremorum ſumma & differentia, Z, X; datur extremum minus, ſeu terminus minimus. A. $Z-X$ ($V+A$ minus $V-A$) $=2A$. Ergo $\frac{Z-X}{2}=A$.

$$\begin{array}{rl} & V+A=Z \\ \text{pl.} & V-A=X \\ \hline & 2V=Z+X \end{array}$$

55 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. Nempe $Z+X$ ($V+A$ plus $V-A$) $=2V$. Ergo $\frac{Z+X}{2}=V$.

56 Datis extremis (vel eorundem ſumma & differentia,) cum exceſſu communi, Z, X, E, datur progreſſionis ſumma. S. Nempe per pr. 18. habetur T, ergo & per pr. 47. $S=\frac{ZX+ZE}{2E}$.

57 Datis extremis, cum ſumma progreſſionis, A, V, S, datur communis exceſſus. E. nempe, per prop. 48. habetur T, ergo & per pr. 17. $E=\frac{ZX}{2S-Z}$.

58 Datis termino minimo, terminorum numero, & communi exceſſu; A, T, E; datur progreſſionis ſumma. S. Nempe per pr. 19. habetur V; ergo & per pr. 47, $S=\frac{2A+TE-E}{2}T$.

59 Datis termino minimo, terminorum numero, & progreſſionis ſumma; A, T, S; datur communis exceſſus. E. nempe per pr. 51. habetur X; ergo & per pr. 17, $E=\frac{2S-2TA}{Tq-T}$.

60 Datis termino maximo, terminorum numero, & communi exceſſu; V, T, E; datur progreſſionis ſumma. S. nempe per prop. 20. habetur A; ergo & per prop. 47, $S=\frac{2V-TE+E}{2}T$.

61 Datis termino maximo, terminorum numero, & progreſſionis ſumma; V, T, S; datur communis exceſſus. E. nempe per prop. 53, habetur X; ergo & per prop. 17. $E=\frac{2TV-2S}{Tq-T}$.

62 Datis terminorum numero, communi exceſſu, & progreſſionis ſumma, T, E, S; datur terminus minimus. A. nempe per pr. 16. habetur X, & per pr. 49, Z; ergo & per prop. 54. $A=\frac{2S-TqE+TE}{2T}$.

63 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. nempe per prop. 16 & 49, habentur Z & X; ergo & per prop. 55. $V=\frac{2S+TqE-TE}{2T}$.

64 Datis termino minimo, communi exceſſu, & progreſſionis ſumma, A, E, S: datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 19. $A+TE-E=V$. adeoque $2A+TE-E=A+V=Z$. Ergo, per pr. 45. $2S=TZ=2TA+TqE-TE$. adeoque $\frac{2S}{E}=Tq+\frac{2A-E}{E}T$. Et (reſolvendo æquationem) $\frac{-A+\frac{1}{2}E+\sqrt{:\frac{1}{4}Eq+Aq-AE+2SE:}}{E}=T$.

65 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. nempe, per præcedentem, habetur T. adeoque V per. pr. 19.

Vel ſic. Quia, per pr. 18. $\frac{X+E}{E}=T$; erit per prop. 45. $2S=TZ=ZX$

$= \frac{ZX+ZE}{E}$. Et $2SE = ZX+ZE$. Hoc eſt (quia $ZX = Vq - Aq$, & $Z = A+V$;) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Adeoque $Vq+EV = Aq+2SE-AE$. Ergo (reſolvendo æquationem) $\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq+Aq-AE+2SE:-\frac{1}{2}E = V$.

$$\begin{array}{r|l} V+A=Z & \\ V-A=X & \\ \hline Vq+VA & \\ \quad -VA-Aq & \\ \hline Vq-Aq=ZX. & \end{array}$$

Si autem hac methodo reperiatur V; Inveſtigabitur T, propoſitionis præcedentis, per pr. 48. (alia quidem forma, ſed eodem valore quo prius.) nempe $T = \frac{2S}{-\frac{1}{2}E+A+\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq+Aq-AE+2SE:}$

66 Datis termino maximo, communi exceſſu, & progreſſionis ſumma; V, E, S; datur numerus terminorum. T. Nam, per prop. 20. $V-TE+E = A$. adeoque $2V-TE+E = V+A = Z$. Ergo, per prop. 45. $2S = TZ = 2TV-TqE+TE$. adeoque $\frac{2S}{E} = \frac{2V+E}{E}T - Tq$. Et (reſolvendo æquationem) $\frac{V+\frac{1}{2}E\mp\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq+Vq+VE-2SE:}{E} = T$.

Notandum autem eſt, hujus æquationis (utpote ambiguæ) radicem minorem tunc convenire, cum A major eſt quam $\frac{1}{2}E$, (adeoque radicem univerſalem $\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq$ &c. afficiendam ſigno $-$;) majorem vero (adeoque $+\sqrt{:}$ &c.) quoties A minor eſt quam $\frac{1}{2}E$. Sin $A = \frac{1}{2}E$; perinde erit utra eligatur; nam hoc caſu totum illud quod nota radicalitatis afficitur, evaneſcit.

67. Datis iiſdem; datur terminus minimus A. Nam, per præcedentem habetur T. adeoque A per prop. 20.

Vel ſic. Quoniam (ut in prop. 65.) $2SE = Vq-Aq+VE+AE$. Tranſponantur termini (ſi ſit $Vq+EV$ plus quam $2SE$; quod tum continget, cum A major eſt quam E;) ad hanc formam, $Aq-AE = Vq+EV-2SE$: cujus æquationis radix eſt $\frac{1}{2}E+\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq+Vq+EV-2SE: = A$. Vel (ſi ſit $Vq+EV$ minus quam $2SE$: quod tum continget, cum A minor eſt quam E;) tranſponantur ad hanc formam, $EA-Aq = 2SE-Vq-EV$; cujus æquationis radix eſt ambigua, nempe $\frac{1}{2}E\pm\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq+Vq+EV-2SE: = A$. quarum radicum major convenit quoties A major quam $\frac{1}{2}E$; minor autem quoties A minor eſt quam $\frac{1}{2}E$. Si autem ſit $Vq+EV = 2SE$, manifeſtum eſt (utrovis modo diſponantur termini) $Aq \infty EA = 0$, adeoque $A = E$.

Si autem hac methodo reperiatur A; inveſtigabitur T, propoſitionis præcedentis, per prop. 48. Nempe $T = \frac{2S}{V+\frac{1}{2}E\pm\sqrt{:}\frac{1}{4}Eq+Vq+EV-2SE:}$ Ubi non temere factum, quod cum forma ſuperius tradita, fuerit $\mp$, jam ſit $\pm$. Nam quo caſu in illa forma eligenda erat radix major, in hac minor eligenda erit.

Atque hactenus Progreſſionis Arithmeticæ traditionem ſatis videamur abſolviſſe; cujus breviorem ſynopſin capite ſequente exhibebimus.

Notandum autem eſt, propoſitiones omnes hoc capite de Progreſſione Arithmemetica traditas, poſſe item ad Progreſſionem Geometricam (mutatis mutandis) non difficulter accommodari. Nempe ſubſtitutis fere illic Multiplicatione & Diviſione pro hic imperatis Additione & Subductione; item poteſtatum Conſtructione & Analyſi, pro Multiplicatione & Diviſione; & denique Rectangulorum aggregato pro Duplo ſummæ; (cum paucis inſuper aliis immutationibus:) Quod ex comparatis his cum primoribus totidem propoſitionibus: Cap. XXXIII. (eodem ordine poſitis) videre eſt.

CAP. XXVIII.

Progreſſionis Arithmeticæ brevior Synopſis.

CUM in præcedente Capite doctrinam Progreſſionis Arithmeticæ fuſius proſecuti ſimus: libet hoc Capite ſelectas aliquot propoſitiones, progreſſionem continuam ſpectantes, alio ordine ſummatim tradere; ut uno quaſi intuitu oculo ſubjiciantur. Retentis iiſdem quibus ſupra Symbolis uſi ſumus.

Theoremata.

1	$D = T - 1.$
2	$V = A + DE$
3	$S = \frac{1}{2}TZ.$

Problemata.

	Data.	Quæsita.	
1	A, V :	$Z = V + A.$	
2		$X = V - A.$	
3	A, Z :	$V = Z - A.$	
		X	per 2.
4	A, X :	$V = A + X$	
		Z	per 1.
5	V, Z :	$A = Z - V.$	
		X	per 2.
6	V, X :	$A = V - X.$	
		Z	per 1.
7	Z, X :	$A = \frac{Z-X}{2}.$	
8		$V = \frac{Z+X}{2}.$	
9	T, E :	$X = DE$	
10	T, X :	$E = \frac{X}{D}$	
11	X, E :	$T = \frac{X}{E} + 1$	
12	Z, T :	$S = \frac{ZT}{2}$	
13	Z, S :	$T = \frac{2S}{Z}$	
14	T, S :	$Z = \frac{2S}{T}$	
15	A, V, T :	Z, X,	per 1, 2,
		E, S,	per 10, 12.
16	A, V, S :	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
17	A, V, E :	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 1, 11.
		S,	per 12.
18	A, Z, T :	V, X, S,	per 3, 12.
		E,	per 10.
19	A, Z, S :	V, X, T,	per 3, 13,
		E,	per 10.
20	A, Z, E :	V, X,	per 3.
		T,	per 11.
		S,	per 12.
21	A, X, T :	V, Z, E,	per 4, 10.
		S,	per 12.
22	A, X, S :	V, Z,	per 4.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
23	A, X, E :	V, Z, T,	per 4, 11.
		S,	per 12.
24	V, Z, T :	A, X, S,	per 5, 12.
		E,	per 10.
25	V, Z, S :	A, X, T,	per 5, 13.
		E,	per 10.
26	V, Z, E :	A, X,	per 5.
		T,	per 11.
		S,	per 12.
27	V, X, T :	A, Z, E,	per 6, 10.
		S,	per 12.
28	V, X, S :	A, Z,	per 6.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
29	V, X, E :	A, Z, T,	per 6, 11
		S,	per 12.
30	Z, X, T :	A, V, S, E,	per 7, 8, 12, 10.
31	Z, X, S :	A, V, T,	per 7, 8, 13.
		E,	per 10.
32	Z, X, E :	A, V, T,	per 7, 8, 11.
		S,	per 12.
33	Z, T, E :	X, S,	per 9, 12.
		A, V,	per 7, 8.
34	Z, S, E :	T,	per 13.
		X,	per 9.
		A, V,	per 7, 8.
35	T, S, A :	Z,	per 14.
		V, X,	per 3.
		E,	per 10.
36	T, S, V :	Z,	per 14.
		A, X,	per 5.
		E,	per 10.
37	T, S, X :	E, Z,	per 10, 14.
		A, V,	per 7, 8.
38	T, S, E :	X, Z,	per 9, 14.
		A, V,	per 7, 8.
39	T, E, A :	X,	per 9.
		V, Z,	per 4.
		S,	per 12.
40	T, E, V :	X,	per 9.
		A, Z,	per 6.
		S,	per 12.
41	X, E, S :	T,	per 11.
		Z,	per 14.
		A, V,	per 7, 8.
42	S, E, A :	$V = -\frac{1}{2}E + \sqrt{:}$	
		$\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE.$	
		Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
43	S, E, V :	$A = +\frac{1}{2}E \pm \sqrt{:}$	
		$\frac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE.$	
		Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.

Datis.

A, V, Z, X. vel Z, T, S. vel T, E, X.	nihil ulterius inde notescit.

Atque hactenus de Progressione Arithmetica dictum esto.

CAP.

CAP. XXIX.

Rationum Distributio, & Nomina. Ratio Multiplex, Super-particularis, Superpartiens, Submultiplex, &c. Rationum Designatio, & Notatio.

EXposita in superioribus capitibus Progressione Arithmetica, quæ ex æqualitate Differentiarum ortum ducit: Priusquam Progressionem Geometricam distinctius tractandam aggrediar, quæ ex Rationum sive Æqualitate sive (ut plerique loquuntur) Identitate trahit originem; De Rationibus, sive proportionibus, quædam adhuc restant exponenda; præsertim de Rationum tum Nominibus sive appellationibus, tum Notatione.

Ratio, quid?

Quid sit Ratio, jam satis innotescat, tum ex iis quæ superius tradidimus Cap. XXV. tum ex Euclidis definitione 3 *d* 5. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις. *Ratio est, duarum magnitudinum homogenearum, quæ secundum quantitatem est, ad invicem* (ποιὰ σχέσις) *habitudo qualitativa.* Nempe, qua dicitur, ὁσαπλάσιον, *quantuplum* vel *quotuplum* sit hoc illius; puta duplum, triplum, dimidium, &c. vel, quoties hoc illud contineat. Adeoque divisione innotescit, (sicuti subductione Differentia,) divisionis *Quoto* sive Quotiente determinanda. Et propterea, *ex Quotientum identitate, identitas Rationum colligitur, & contra.* Puta, tum numeri quaternarii ad binarium, tum senarii ad ternarium, eadem est ratio, nempe dupla; quia utrobique antecedens consequentem bis continet; quod antecedentem utrumque per consequentem suum dividendo innotescit. Nam 2)4(2, & 3)6(2.

Rationalis & Irrationalis.

Distribuitur autem Ratio sive proportio in *Rationalem & Irrationalem.* Rationalis dicitur, quæ potest veris numeris exhiberi: puta 6 ad 4, quæ est ratio Sesquialtera. Irrationalis autem quæ veris numeris exhiberi non potest: ut, in quadrato, ratio Lateris ad Diagonium. Quamvis enim hujusmodi ratio utcunque explicari solet per numeros quos *Surdos* vocant, puta ut 1 ad $\sqrt{2}$; tamen, cum numerus Surdus, proprie loquendo, numerus non sit, sed imaginarii cujusdam numeri nota, ideo nec ea ratio veris numeris explicabilis censenda erit. Est nempe, $\sqrt{2}$, nota numeri qui supponitur in se ductus numerum 2 producere; sicut $\sqrt{4}$, numerum notat (nempe 2) qui in se ductus producit 4. Cum autem nullius omnino numerus possibilis sit (vel integer, vel fractus,) qui sui in se multiplicatione producere possit numerum 2; est igitur $\sqrt{2}$ numeri tantum supposititii & imaginarii, non veri alicujus numeri, nota. Non est itaque illa ratio veris numeris explicabilis, ideoque ratio ἄλογος, ἄῤῥητος, *irrationalis.*

Non autem dissimulandum est, *Rationalitatis* appellationem, ab Euclide passim in Elemento decimo, etiam eis lineis attribui quæ potentia tantum sunt commensurabiles; hoc est, quarum saltem quadrata rationem habent numeris explicabilem, utut longitudine sint ἀσύμμετροι, incommensurabiles. Atque hoc sensu Latus & Diagonium quadrati erunt Rationalia, quippe quorum quadrata sunt ut numerus ad numerum, puta ut 1 ad 2. Verum alibi non raro obtinet, *Rationalia* tantum ea dicere quæ & σύμμετρα sunt: ut perinde sit ἄλογον esse sive ἄῤῥητον, atque ἀσύμμετρον.

Sicui vero durius cula videri possit *Rationis Irrationalis* appellatio; quæ enim λόγον rationem habent ad invicem, quî dici possint ἄλογα? aut etiam ipse λόγος, ἄλογος? Dicendum est, hoc ob vocis λόγος apud Græcos homonymiam obtingere, (quos & Arithmetici Latini sequuntur.) Quippe λόγος (præter alia significata) etiam *Ratiocinium* sive *Computum* significat; unde *Logista* idem est qui *Calculator* sive *Computator*; atque illud ἄλογον, quod calculum fugit, nec vero numero est explicabile: qua de causa & ἄῤῥητον & ἀνεκφώνητον dicitur, inexplicabile, ineffabile, inenarrabile: non quod omnino enarrari non possit, sed non veris numeris possit enarrari.

Ratio Æqualitatis, & Inæqualitatis.

Distribuitur porro *Ratio*, in rationem *Æqualitatis*, & rationem *Inæqualitatis.* Illa est, cum comparata sunt æqualia. Hæc, cum inæqualia. Sic 2 ad 2, & 4 ad 4, &

& ½ ad ⅔, &c. sunt in ratione Æqualitatis constituta. At 2 ad 3, & 5 ad 4, & 4 ad 5, &c. in ratione Inæqualitatis. Sicui interim nomina Æqualitatis & Inæqualitatis, potius ad alteram comparationem, quæ est quoad Differentiam, referenda videantur, quam ad hanc quæ est quoad Rationem: Ego quidem non repugno. Nam quod, quoad differentiam, alteri *Æquale* dicitur; id forsan, quoad rationem, rectius dicatur *Simplum*. Verum hoc non tanti est ut receptas jam appellationes innovandas contendam.

Notandum hic est, Rationem Æqualitatis, & Rationalem esse; nempe ut 1 ad 1: At non contra, rationem omnem Rationalem esse & rationem Æqualitatis. Item, omnem rationem Irrationalem, esse & Inæqualitatis rationem; non autem contra, omnem Inæqualitatis rationem, esse & Irrationalem: quippe dupla, tripla, aliæque infinitæ Inæqualitatis rationes sunt, Rationales tamen.

Ratio Majoris inæqualitatis, & Minoris.

Ratio Inæqualitatis (sive Rationalis fuerit sive Irrationalis,) subdividitur rursus in rationem (sive proportionem) *Majoris inæqualitatis*, & *Minoris*. (Vel in rationem *Majoritatis* & *Minoritatis*.) Illa est, quantitatis majoris ad minorem; ut 4 ad 2. Hæc, minoris ad majorem; ut 2 ad 4.

Rationis sive proportionis Majoris inæqualitatis (Rationalis intellige; nam, de rationum irrationalium nominibus Scriptores nondum fuerunt solliciti;) quinque solent constitui genera, *Multiplex*, *Superparticularis*, *Superpartiens*, *Multiplex-superparticularis*, & *Multiplex-superpartiens*.

Et pariter Minoris inæqualitatis ratio (rationalis) in totidem solet genera distribui, iisdem insignita nominibus, præfixa tantum particula *Sub* nempe *Submultiplex*, *Subsuperparticularis*, *Subsuperpartiens*, *Submultiplex-superparticularis*, *Submultiplex-superpartiens*. Siquem interim terreat nominum barbaries, in vocibus technicis; liberum ipsi erit illis abstinere; dummodo mihi permittat indicare, quid alii his nominibus intellectum volunt.

Multiplex.

Quantitas major minoris *Multiplex* dicitur, (vel multipla,) quæ minorem aliquoties exacte continet, vel, cum minor metitur majorem. Πολλαπλάσιον τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος, definiente Euclide 2 *d* 5, & speciatim de numeris 5 *d* 7. Hoc est, cum minor aliquoties accepta æquatur majori. Ea enim est vocis καταμετρεῖσθαι apud Euclidem significatio. Sic enim Euclides 23 *d* 7. *Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit*: Et eodem modo Quantitas quantitatem metiri censenda est. Si ergo quantitas minor per nullum numerum (integrum intellige) multiplicata producat majorem, hanc illa non metitur. Ita numerus senarius est binarii multiplus; quia binarius aliquoties acceptus, nempe ter, æquatur ipsi senario; sive (ut loquitur Euclides) numerus 2 metitur 6, per 3; quia bis tria sunt sex. $2 \times 3 = 6$. At 8 ad 3 non esse dicimus in ratione multiplici: quia, quamvis 3 in 8 aliquoties contineantur, nempe bis; non tamen 3 exacte metiuntur 8, quia bis ablata relinquunt 2, ter autem auferri non possunt.

Submultiplex.

Multiplicis correlatum (in proportione minoris æqualitatis constitutum) dicitur *Submultiplex*. Apud Euclidem simpliciter *Pars* dicitur 1 *d* 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. *Magnitudo minor majoris Pars est, quando exacte metitur majorem.* Ubi autem minor majorem non metitur (at saltem in ratione rationali constituta sit,) quantitas illa non hujus *Pars*, sed *Partes*, ab Euclide dicitur; quippe ille, hic loci, per *partem* non aliam quam *partem aliquotam* intelligit; & per *partes*, partium aliquotarum aggregatum. Quæ autem hic Euclides *partem* & *partes* appellat; appellant alii recentiores, *partem aliquotam*, & *partem aliquantam*. Sic Semissis, Triens, Quadrans, Sextans, Uncia, dicuntur singulæ, *aliquota pars* Assis; quoniam aliquoties acceptæ integrum Assem complent. Nempe Semissis bis, Triens ter, Quadrans quater, Sextans sexies, & Uncia duodecies, præcise, continentur in Asse, sive integro. Est autem Quincunx, Assis pars aliquanta, non aliquota: Nam quincunx bis acceptus, est asse minor, nempe decem unciæ; at ter acceptus, major erit, nempe 15 Unciæ, quæ assem tribus unciis superant. Atque idem de Septunce, Besse, Dodrante, Decunce, Undecunce, (sive, ut loquuntur alii, Dextante, Deunce,) dicendum est. Nam, verbi gratia, Bes, non assis aliquota *Pars* dicitur, sed *Partes*, nempe duæ tertiæ; & Dodrans, tres quartæ; & sic de cæteris. Sic enim Euclides, 3 & 4 *d d* 7. Pars est numerus minor majoris, cum minor metitur majorem: Partes autem, cum non metitur.

Proportionis (sive Rationis) Multiplicis species sunt, *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, &

& ſic deinceps in infinitum. Et contra proportionis (ſive Rationis) Submultiplicis ſpecies ſunt, *Subdupla*, *Subtripla*, *Subquadrupla*, &c. vel etiam Semiſſis, Triens, Quadrans, &c. vel etiam Pars dimidia, tertia, quarta, decima, centeſima, milleſima, &c. Græce ἡμιμόριον, τριτημόριον, τεταρτημόριον, δεκατημόριον, ἑκατοστημόριον, χιλιοστημόριον, &c.

Quantitates autem quantitatum *Æquimultiplices*, Euclidi aliiſque, dicuntur, quas ſuæ reſpective partes per eundem numerum metiuntur. Vel (quod perinde eſt) prima ſecundæ, & tertia quartæ æque-multiplices ſunt, quando prima ſecundam toties præciſe continet, quoties tertia quartam. Sic quaternarius binarii, & ſenarius ternarii ſunt æque-multiplices; utrobique ſcilicet in proportione dupla: quia tum illum binarius, tum hunc ternarius, per binarium metitur; & toties 2 in 4, quoties 3 in 6 continentur, nempe utrobique bis.

2) 4 (2
3) 6 (2

Ratio (ſive proportio) *Superparticularis*, eſt ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem ſemel quidem, nec ſæpius continet, ſed & ipſius partem aliquotam. Sic 3 ad 2, & 6 ad 4, ſunt in ratione ſuperparticulari; uterque enim numerus antecedens conſequentem ſuum ſemel continet & ipſius inſuper ſemiſſem. Diviſo nempe nunero majore per minorem, prodibit utrobique Quotiens $1\frac{1}{2}$. *Superparticularis.*

2) 3 ($1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
4) 6 ($1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Hujus Rationis ſpecies ſunt, *Seſquialtera*, *Seſquitertia*, *Seſquiquarta*, *Seſquiquinta*, *Seſquidecima*, *Seſquicenteſima*, *Seſquimilleſima*, & ſic deinceps in infinitum: prout ſcilicet major minorem ſemel continet, & inſuper minoris partem dimidiam, tertiam, quartam, quintam, decimam, centeſimam, milleſimam, &c.

2) 3 ($1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
3) 4 ($1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$
4) 5 ($1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
5) 6 ($1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

10) 11 ($1,1=\frac{11}{10}$
100) 101 ($1,01=\frac{101}{100}$
1000) 1001 ($1,001=\frac{1001}{1000}$
10000) 10001 ($1,0001=\frac{10001}{10000}$

Ubi autem major ad minorem eſt in ratione *Superparticulari*, ſeſquialtera, ſeſquitertia, &c. erit minor illa quantitas ad majorem in ratione *Subſuperparticulari*, ſubſeſquialtera, ſubſeſquitertia, &c. Sic 18 ad 16 ſunt in ratione ſeſquioctava, (nempe ut 9 ad 8,) ergo 16 ad 18 in ratione ſubſeſquioctava. Et pariter in ſimilibus. Apud Ariſtotelem, ὑπέμβεκος & ὑπερτρίτος hoc ſenſu occurrunt Metaph. 4. & alibi. Et apud alios paſſim. *Subſuperparticularis.*

Ratio ſeu proportio *Superpartiens* ὑπερμερὴς eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem ſemel quidem, nec ſæpius, continet; ſed & aliquot inſuper ipſius partes aliquotas. Sic 5 ad 3, ſunt in ratione Superpartiente: numerus enim quinarius ternarium continet ſemel, & duos inſuper ipſius trientes. Si enim 5 per 3 dividamus, erit quotiens $1\frac{2}{3}$. *Superpartiens.*

3) 5 ($1\frac{2}{3}$

Hujus proportionis ſpecies duplicem characterem poſtulant. Cum enim major minorem contineat, & inſuper aliquot ipſius partes aliquotas; dicendum eſt, *quot* partes, & quidem *quotas* continet. Priori reſpectu dicitur, *Superbipartiens*, *Supertripartiens*, *Superquadripartiens*, *Superdecupartiens*, &c. prout quantitas major, præter ipſam minorem, contineat inſuper ipſius partes aliquotas, duas, tres, quatuor, decem, &c. Poſteriori reſpectu dicitur *ſuperpartiens tertias*, *ſuperpartiens quartas*, *quintas*, *decimas*, *centeſimas*, &c. prout partes illæ aliquotæ ſint trientes, quadrantes, &c. hoc eſt, partes tertiæ, quartæ, quintæ, decimæ, centeſimæ, &c. Sic ratio numeri 5 ad 3, vel 10 ad 6, eſt ſuperbipartiens tertias: Major enim minorem utrobique ſemel continet, & inſuper duos ipſius trientes, ut ex diviſione liquet. Sic 7 ad 4, eſt ſupertripartiens quartas. Et pariter in ſimilibus.

3) 5 ($1\frac{2}{3}$
6) 10 ($1\frac{2}{3}$
4) 7 ($1\frac{3}{4}$

5) 7 ($1\frac{2}{5}$
5) 8 ($1\frac{3}{5}$
5) 9 ($1\frac{4}{5}$

6) 11 ($1\frac{5}{6}$
7) 10 ($1\frac{3}{7}$
8) 15 ($1\frac{7}{8}$

10) 13 ($1,3=1\frac{3}{10}=\frac{13}{10}$
100) 107 ($1,07=1\frac{7}{100}$
100) 108 ($1,08=1\frac{8}{100}=1\frac{2}{25}$

Ubi

Subſuper-partiens. Ubi vero quantitatis majoris ad minorem ratio eſt *Superpartiens*, ſuperbipartiens, ſupertripartiens, &c. Erit minoris hujus ad illam majorem, ratio *Subſuperpartiens*, ſubſuperbipartiens, ſubſupertripartiens, &c. Nempe ratio 3 ad 5, vel 6 ad 10, eſt ſubſuperbipartiens tertias; & 4 ad 7, ſubſupertripartiens quartas. Et in aliis pariter.

Notandum autem eſt, in rationibus ſuperpartientibus, Denominatorem partis aliquotæ majorem eſſe debere quam eſt Numerus earundem aliquotarum partium aſſumptarum. Non igitur dicitur ſupertripartiens tertias, vel ſuperquadripartiens quartas: nam $\frac{3}{3}$, vel $\frac{4}{4}$, tantundem ſunt ac 1. Et $1\frac{3}{3}$, vel $1\frac{4}{4}$, &c. idem eſt atque 2: ideoque major minorem ſæpius quam ſemel contineret; (nempe bis,) quod eſt contra definitionem rationis ſuperpartientis. Multo minus dicendum erit, Superquadripartiens tertias vel Superquintupartiens quartas, &c. (ut denominator aliquotarum partium minor ſit quam earundem numerus;) ita enim major ſaltem bis ſupponetur minorem continere, & aliquid inſuper.

Sed neque rite dicitur, Ratio ſuperbipartiens quartas, ſextas, &c. vel ſupertripartiens ſextas, nonas, &c. vel ſuperquadripartiens octavas, decimas, duodecimas, &c. & pariter in ſimilibus: ut denominator aliquotarum partium aſſumptarum, & earundem numerus, communem aliquem diviſorem habeant qui utrumque exacte metiatur. Sunt enim $1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$, & $1\frac{2}{6}=1\frac{1}{3}$, & $1\frac{3}{6}=1\frac{1}{2}$, & $1\frac{3}{9}=1\frac{1}{3}$, & $1\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$, & $1\frac{4}{10}=1\frac{2}{5}$, & $1\frac{4}{12}=1\frac{1}{3}$, &c. Non igitur dicenda eſt ratio ſuperbipartiens quartas, aut ſupertripartiens ſextas, aut ſuperquadripartiens octavas; ſed ratio ſeſquialtera. Neque item ſuperbipartiens ſextas, aut ſupertripartiens nonas, aut ſuperquadripartiens duodecimas, ſed ratio ſeſquitertia. Neque, ſuperquadripartiens decimas, ſed ſuperbipartiens quintas. Et ſimiliter alibi.

Siquis urget; per Rationis ſuperpartientis definitionem, hujuſmodi loquendi formulas non excludi: Dicendum erit, Rationum definitiones intelligendas eſſe de *Rationibus ad minimos terminos reductis*. Prout enim in Fractionibus, (ut poſt dicetur,) ita & in Rationibus deſcribendis, plerumque expedit, ut terminis quam fieri poteſt minimis deſcribantur, quo melius animus valorem aſſequatur. Secus enim eadem non raro Ratio & ſuperbipartiens, & ſupertripartiens, & ſuperquadripartiens, &c. dicenda erit. Siquidem ſuperbipartiens quartas, ſupertripartiens ſextas, ſuperquadripartiens octavas, aliaque hujuſmodi rationum nomina, eandem ipſam rationem deſignabunt. Imo vero eadem ipſa Ratio & ſuperparticularis erit, & ſuperpartiens: ſiquidem illa ipſa nomina nuper recenſita, quæ rationes ſuperpartientes videantur indicare, revera ſuperparticularem rationem ſignificant, nempe ſeſquialteram. Sunt enim $1\frac{2}{4}=1\frac{3}{6}=1\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$.

At ſiquis nihilominus contendat; neque neceſſe eſſe, nec quidem ſemper expedire, ut vel fractiones vel rationes in minimis terminis exprimantur: Neque etiam magnum eſſe incommodum, eandem ipſam rationem nunc ſuperbipartientem, nunc ſupertripartientem, &c. fortaſſe & nonnunquam ſuperparticularem, vel etiam multiplicem, dici poſſe: Vel etiam, ſi ratio multipla aut quæcunque alia, tanquam ſi eſſet ſuperparticularis, vel ſuperpartiens, vel cujuſvis generis, proponatur; neutiquam id formidandum eſſe, dummodo utcunque ſic proponatur ratio ut ipſius valorem mens ſatis aſſequi valeat. Ego quidem fateor, non tanti rem eſſe ut de verbis contendamus: Imo non ſine magno nonnunquam commodo, hujuſmodi rationum quaſi metamorphoſes exerceri poſſe; atque eandem ipſam quantitatem, Protei inſtar, quacunque libet forma exhiberi poſſe: quod & ubi opus poſtulet faciendum erit. At cæteris paribus, ubi nihil in contrarium ſuadet, tum rationes, tum fractiones, aliæve quantitates, terminis quam fieri poteſt ſimplicibus explicari par eſt.

Reſtant adhuc duo Rationum genera explicanda; Multiplex ſuperparticularis, & Multiplex-ſuperpartiens; cum correlatis.

Multiplex-ſuperparticularis. *Multiplex-ſuperparticularis*, eſt ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem aliquoties continet (ſaltem bis) & unam inſuper ipſius aliquotam partem. Ut 9 ad 4, Quippe novenarius quaternarium bis continet, & ipſius inſuper quadrantem.

4) 9 ($2\frac{1}{4}$
2) 7 ($3\frac{1}{2}$
10) 42 ($4,2 = 4\frac{1}{5}$
10) 101 ($10,1 = 10\frac{1}{10}$

Hujus ſpecies ſunt, Dupla-ſeſquialtera, Dupla-ſeſquitertia, Dupla-ſeſquiquarta, &c. Tripla-ſeſquialtera, Tripla-ſeſquitertia, &c. aliæque ejuſmodi in infinitum. Sic ratio 9 ad 4, eſt dupla-ſeſquiquarta; 7 ad 2, eſt tripla-ſeſquialtera; 42 ad 10 eſt, quadrupla-

pla-ſeſquiquinta ; 101 ad 10, eſt decupla-ſeſquidecima. Et pariter in aliis.

Duplici itaque charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam ; altero, quo ſpecies multiplicitatis indicetur, (dupla, tripla, &c.) altero, quo deſignetur aliquota pars, puta, num dimidia, tertia, &c.

Submultiplex-ſuperpartiens.

Ubi autem ratio quantitatis majoris ad minorem eſt multiplex-ſuperparticularis ; minoris hujus ad illam majorem dicitur *Submultiplex-ſuperparticularis*. Hujuſque ſpecies ſpeciebus illius correſpondent. Eſt igitur 4 ad 9, ratio ſubdupla-ſeſquiquarta ; 2 ad 7, ſubtripla-ſeſquialtera ; 10 ad 42, ſubquadrupla-ſeſquiquinta ; 10 ad 101, ſubdecupla-ſeſquidecima. Et ſic in aliis.

Multiplex-ſuperpartiens.

Ratio multiplex-ſuperpartiens, eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem aliquoties continet, & ipſius inſuper aliquot partes aliquotas. Ut 8 ad 3. Nempe numerus ille hunc continet bis, & duas inſuper hujus partes tertias, ſive trientes.

Hujus ſpecies ſunt ; Dupla-ſuperbipartiens-tertias , Dupla-ſuperquadripartiens-quintas , Tripla-ſupertripartiens-quartas , Quadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas, aliæque ejuſmodi infinitæ. Tales ſunt rationes 8 ad 3 ; 14 ad 5 ; 15 ad 4 ; 31 ad 7. &c.

$3)8\ (2\frac{2}{3}$
$5)14\ (2\frac{4}{5}$
$4)15\ (3\frac{3}{4}$
$7)31\ (4\frac{3}{7}$

Triplici itaque charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam : quo tum numerus multiplicitatis, tum numerus partium aliquotarum, tum harum denominatio indicetur : ut patet.

Submultiplex-ſuperpartiente.

Ubi autem quantitas major ad minorem eſt in ratione Multiplici-ſuperpartiente ; eſt minor hæc ad illam majorem in ratione *Submultiplici-ſuperpartiente* : & ſpecies hujus ſpeciebus illius correſpondent. Ita ratio 3 ad 8, eſt ſubdupla-ſuperbipartiens-tertias ; 5 ad 14, ſubdupla-ſuperquadripartiens-quintas ; 4 ad 15, ſubtripla-ſupertripartiens-quartas ; 7 ad 31 , ſubquadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas. Atque in aliis pariter.

Quæ autem ſuperius notanda monuimus de ratione (ſimplici) ſuperpartiente ; eadem & hic, mutatis mutandis, notanda ſunt de ratione multiplici ſuperpartiente. Nec opus eſt ut repetantur.

Eſtque hæc Rationum diſtributio quam tradunt Recentiores Arithmetici. Quippe non hæc omnia Rationum nomina apud Euclidem occurrunt ; ſed quædam eorum præcipua. Cum tamen hujuſmodi paſſim apud Mathematicos recentiores occurrant Rationum nomina ; nequis de illis hæreat, exponenda duxi.

Sicui vero nimis intricatæ videantur hæ Rationum appellationes ; poterunt illæ ſimplicius deſignari per duos numeros ea qua res poſtulet ratione conſtitutos, præſertim qui ſunt in eadem ratione minimi. Puta ſi, pro ratione ſubquadrupla-ſupertripartiente-ſeptimas, eam dicamus rationem quæ eſt 7 ad 31. Ita, qui dicit, ſit A ad B, ut 7 ad 31 ; tantundem innuit ac ſi diceret, ſit ratio quantitatis A ad quantitatem B, ſubquadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas. Atque ad hanc formam Rationes ſæpiſſime exponi ſolent.

Rationum Deſignatio.

Rationes itaque pluribus modis deſignari poſſunt. Nempe

Vel, nominibus ſuis, modo indicatis. Ut Duplum, Triplum, Dimidium , Seſquialterum, &c.

Vel quidem, Figuris numericis rationes illas denominantibus : affixa ſaltem, vel quidem ſubintellecta , multiplicationis nota. Puta , 2, 3, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, &c. vel $\times 2$, $\times 3$, $\times \frac{1}{2}$, $\times 1\frac{1}{2}$, &c. Quid enim eſt Duplum, Triplum, Dimidium, Seſquialterum, &c. aliud quam, Multiplicatum in 2, 3, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ &c.

Vel etiam, per duos numeros in ea ratione conſtitutos. Puta, Ratio ea quæ eſt 2 ad 1 ; 3 ad 1 ; $\frac{1}{2}$ ad 1, vel 1 ad 2 ; $1\frac{1}{2}$ ad 1, vel 3 ad 2, &c.

Vel quidem, duabus quibuſvis quantitatibus homogeneis ita conſtitutis ; ut lineis, planis, ſolidis, angulis, &c. (quorum ad invicem ratio exponitur ut jam cognita, vel quaſi cognita,) eorumve ſymbolis. Puta, ut V ad A ; ut L ad M ; ut R ad S, &c.

Vel item, Fractionum inſtar $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{V}{A}, \frac{L}{M}, \frac{R}{S}$, &c. Cum enim Rationum denominatores nil aliud ſint quam Diviſionum Quotientes, (ut jam ante fuit expoſitum,) Diviſiones autem indicare ſolenne ſit interjecta virgula, Dividuum inter & Diviſorem, (idque neceſſario, ubi numerus dividendus eſt dividente minor, ut $\frac{1}{2}$ atque etiam alias, aliis de cauſis, non raro commode,) Quidni & Rationes ita

designentur? præfixa tamen, ubi opus fuerit, multiplicationis nota. Et quidem ipsæ Fractiones nil aliud sunt quam Rationum Indicia; nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, &c. illam indicant partem, quæ ad integrum sive unitatem eam habent rationem quam 1 ad 2, 3 ad 5, &c. numerator ad denominatorem: Atque ut 2 est duplum unius, sic $\frac{1}{2}$ est semissis unius, & sic in cæteris. Fractionis itaque Numerator & Denominator, perinde sunt atque Rationis Antecedens & Consequens: Si saltem & Fractiones impropriæ (ut loquuntur) unitate quippe majores vel saltem æquales simul intelligantur, quæ rationem æqualitatis, & majoritatis indicent; sicut fractiones propriæ indicant rationes minoritatis, sive minoris inæqualitatis.

Vel etiam, si libet, (quodque non raro expedit,) simplicibus symbolis, aliarum quantitatum instar. Puta $\frac{3}{4} = \frac{V}{A} = R$ &c. Sunt enim Rationes, non minus quam numeri, veræ quantitates.

Perinde igitur est, verbi gratia, sive dicamus, Duplum quantitatis A, sive 2 A vel $2 \times A$ vel $A \times 2$, sive $\frac{2}{1}$ A, vel $A \times \frac{2}{1}$, sive quod est ad A ut 2 ad 1, sive ad quod A est ut 1 ad 2. Sic Triplum A, $= 3\,A = A \times 3 = \frac{3}{1}$ A. Et semissis A, $= 2)\,A = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ A. Et sesquialterum ipsius A, $= 1\frac{1}{2}\,A = 1\frac{1}{2} \times A = A \times 1\frac{1}{2} = A \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,A = 2)\,3 \times A = \frac{3\,A}{2}$ &c.

Similiter in proportionalibus designandis; ubi nempe eadem utrobique ratio esse significatur. Puta, A ad B ut 1 ad 2, vel A.B :: 1.2. vel $A = \frac{1}{2}$ B, vel $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$, vel B)A($\frac{1}{2}$.

Item, Ratio lateris ad diagonium quadrati, L. D :: 1. $\sqrt{2}$, vel $\frac{L}{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vel $L = \frac{1}{\sqrt{2}}$ D, vel $L = \frac{D}{\sqrt{2}}$. Diagonii vero ad Latus, D.L :: $\sqrt{2}$.1. vel $\frac{D}{L} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, vel $D = \frac{\sqrt{2}}{1} L = \sqrt{2} \times L = L \times \sqrt{2} = L\sqrt{2} = \sqrt{:2}\,Lq: = \sqrt{:2 \times L\,q}$.

Item, L ad M ut R ad S, vel L. M :: R. S. vel $L = \frac{R}{S}$ M, $\frac{L}{M} = \frac{R}{S}$. Et similiter alibi.

Qua vero ex omnibus designandi formulis, Rationes quilibet designare velit, penes se sit optio: Liberum quippe cuique erit, quam velit eligat; vel etiam nunc hanc nunc illam, prout præsenti negotio magis accommodum videatur.

CAP. XXX.

De Rationum Compositione sive Continuatione, & Imminutione. Ratio Duplicata, Triplicata, &c. Item Subduplicata, Subtriplicata, &c. Et Subduplicatæ-triplicata, &c.

AD pleniorem Rationum traditionem, superest ut Rationum Compositio, sive Continuatio, & Imminutio exponantur.

Rationum Compositio, sive continuatio, quid.

Rationum Compositionem, sive Continuationem, sive (ut nonnulli loquuntur) Additionem, definit Euclides, 5 *d* 6 Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν, αἱ τοῦ λόγων πολλαπλασιάσαντες ἑαυτὰς ποιῶσι τινά: Malim τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquas* (seu potius *aliquam*) *efficiunt.*

Quid per *Rationum quantitates* intelligit Euclides non inter interpretes convenit: num scilicet ipsos terminos; an quod ex eorum comparatione provenit. Utrumvis autem dicatur pertnde est. Puta, si rationis A ad B termini, in terminos rationis

rationis α ad β respective ducantur; nempe $A \times \alpha$, $B \times \beta$; ut proveniat ratio $A \times \alpha$ ad $B \times \beta$: sive etiam ratio $\frac{A}{B}$ ducatur in rationem $\frac{\alpha}{\beta}$, ut proveniat $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta}$ non multum interest; nam $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A\alpha}{B\beta}$: ut ex fractionum multiplicandarum regulis suo loco patebit. Fusius hæc exponit Eutocius ad prop. 4. lib. 2. Archim. *de Sphæra & Cylindro.*

Quod autem volunt tum Euclides, tum alii, hoc est, verbi gratia, *Duplum tripli*, vel *Triplum dupli*, componi ex *Duplo* & *Triplo*, (vel, ut Latinius dicam, Ratio quam habet *Duplum tripli* componi dicatur ex ratione *Dupli* & ratione *Tripli*) quippe quæ quantitates invicem ductæ constituunt duplum tripli: puta $\frac{2}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{1}$, vel $2 \times 3 = 6$. Sic Tripli dimidium, vel Dimidii triplum, (quod est, Sesquialterum,) componitur ex Triplo & Dimidio: puta $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic ratio *Dupla*, componi dicitur ex *Sesquialtera* & *Sesquitertia.* (hoc est, ut loquuntur Musici ex Diapente & Diatessaron componitur Diapason,) quia $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{2} = 2$. Sic ratio $\frac{ABC}{\alpha\beta\gamma}$ componitur ex rationibus $\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}$. Item $\frac{A}{D}$ componitur ex $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$, quia $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{ABC}{BCD} = \frac{A}{D}$. quæ dicitur λόγος δἰσα, *ex æquo*, sive *ex æqualitate.* 18 *d* 5.

Contra vero, Ratio $\frac{AB}{\alpha\beta}$, imminuta ratione $\frac{A}{\alpha}$, est $\frac{B}{\beta}$; quia $\frac{A}{\alpha}) \frac{AB}{\alpha\beta} (\frac{B}{\beta}$. Quod nonnulli sic efferunt, si ex ratione $\frac{AB}{\alpha\beta}$ auferatur ratio $\frac{A}{\alpha}$, manebit ratio $\frac{B}{\beta}$. *Rationis Imminutio.*

Cur autem hanc rationum Imminutionem non pariter definiverit Euclides atque Compositionem sive Continuationem; causa est, quoniam id minus erat necesse, cum utrumque per compositionem fieri possit. Perinde enim est rationem $\frac{AB}{\alpha\beta}$ ratione $\frac{A}{\alpha}$ imminuere, atque cum ratione $\frac{\alpha}{A}$ componere. Nam $\frac{A}{\alpha}) \frac{AB}{\alpha\beta} (\frac{B}{\beta} = \frac{AB\alpha}{\alpha\beta A} = \frac{AB}{\alpha\beta} \times \frac{\alpha}{A}$.

Hæc autem Rationum Compositio, an Additio judicanda sit an Multiplicatio, haud satis videtur apud scriptores Arithmeticos (vel etiam Geometricos) constare. Utut enim certum sit quantitates invicem *Multiplicari*, non Addi: (nam verbi gratia, *duplum tripli* non idem est atque *duplum & triplum*, quippe hoc est *quintuplum*, nam $3 + 2 = 5$; sed *Triplum in 2 multiplicatum*, adeoque *Sextuplum.* Nempe $3 \times 2 = 6$:) Attamen usu fere obtinet, ut rationum potius *Additio* dicatur, quæ est revera multiplicatio. Et quidem ne Multiplicationis nomine jam tandem ex postlimino gaudeat, id maxime impedit, quod *Multiplicatio rationum* jam alio sensu usurpetur, adeoque homonymia metuenda sit, si pro rationum continuatione sive compositione usurpandam velimus. Nam rationum Duplicatio, Triplicatio, aliasve multiplicatio, alio plane sensu jam solet usurpari, quam quo jam loquimur, ut mox dicetur.

Malim itaque ut vel *Compositio* vel (quod vox Græca συγκεῖσθαι magis innuere videtur) *Continuatio* dicatur, quam vel Additio vel Multiplicatio.

Designandam autem malim per notam $\times$ Multiplicationis, quam per $+$ Additionis; (nam praxin multiplicando exerceri nemo dubitat:) adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$, & $\frac{B}{\beta}$, componitur ratio, scribenda est $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta}$. Adeoque tota illa de Fractionum Multiplicatione & Divisione tradenda doctrina; de Rationum Continuatione & Imminutione pariter intelligenda erit: sunt enim ipsissima eadem res. Rationum itaque continuandarum praxin in illum locum rejiciendam censui.

At cavendum interim ne *Ratio composita*, λόγος συγκείμενος, 5 *d* 6 tradita, atque *Compositio rationis*, σύνθεσις λόγυ 14 *d* 5 definita, pro eodem habeantur. Sunt enim res satis diversæ. Quippe illud Additionis, hoc Multiplicationis est negotium. Ut ex ipsis definitionibus citatis constat. Quod innuisse sufficiat.

Ratio Duplicata, Subduplicata, &c. quid.

Verum huc omnino ſpectat, quod de Ratione Duplicata, Triplicata, aliaſve multiplicata tradit Euclides 10 *d* 5, & alibi; vel etiam Subduplicata, Subtriplicata, &c. (Eodem plane modo quo ad Multiplicationem referendæ ſunt Quadratio, Cubicatio, aliæve multiplicationes poteſtatum generativæ; de quibus poſt dicetur.) Non enim tantundem ſignificant atque ratio Dupla, Tripla, Subdupla, Subtripla, &c. vel Duplex, Triplex, &c. (neque enim ratio Sextupla, rationis Triplæ, ratio Duplicata dicitur, utut Dupla ſit; quippe Sextuplum eſt Tripli Duplum.) Sed cum ratio aliqua (ſive majoris ſive minoris inæqualitatis) cum ſeipſa continuatur, quæ prodit ratio, rationis expoſitæ ratio *Duplicata* dicitur; ſin in eandem iterum continuetur, ratio *Triplicata* dicitur; & ſic deinceps: Quibus, ut correlata, opponuntur ratio *Subduplicata, Subtriplicata, &c.* (ſicut quantitas in ſe ducta, expoſitæ *Quadratum* producit; ſin in eandem iterum ducatur, *Cubum*, &c.) Sic rationis $\frac{A}{B}$ ratio duplicata eſt $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{AA}{BB} = \frac{Aq}{Bq}$; triplicata, $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}$, &c. Et contra; Rationis $\frac{Ac}{Bc}$, ratio ſubtriplicata eſt $\frac{A}{B}$: Et rationis $\frac{Aq}{Bq}$, ratio ſubduplicata eſt $\frac{A}{B}$. (Ipſius autem $\frac{A}{B}$ rationis, ratio ſubduplicata erit $\sqrt{\frac{A}{B}}$; ſubtriplicata, $\sqrt{c}\,\frac{A}{B}$. Ut plenius patebit, poſtquam poteſtatum Geneſis & Analyſis tradita fuerit. Nam ſi expoſita Ratio dicatur Radix, vel poteſtas prima; Ratio Duplicata erit Quadratum, ſive poteſtas ſecunda; Ratio Triplicata Cubus, vel poteſtas tertia; &c. Et Ratio Subduplicata, erit expoſitæ Radix-quadratica, vel poteſtas ſubſecunda; Subtriplicata, expoſitæ Radix-cubica, vel poteſtas ſubtertia, &c.) Sic ratio quadrupla eſt, rationis duplæ, ratio (non modo dupla, quia $2+2=4$, ſed) duplicata, quia $2\times2=4$; & hujus illa ſubduplicata. Item rationis triplæ, ratio duplicata eſt (non ſextupla, quod ſit $3+3=6$, ſed) noncupla, quia $3\times3=9$: triplicata vero vigintiſeptupla, quia $3\times3\times3=27$. Sic rationis $\frac{1}{2}$, duplicata eſt $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; triplicata, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, &c. Et rationis $\frac{1}{3}$, duplicata eſt $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$; triplicata, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$. Item rationis $\frac{2}{3}$, ratio duplicata eſt $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$; triplicata, $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$; quadruplicata $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$, &c.

Neque aliud volunt definitiones Euclidis, 10 *d* 5. *Ὅταν τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. Cum tres magnitudines* (continue) *proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines* (continue) *proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.* Verbi gratia, ſi quantitas prima A, ſit ſeſquialtera ſecundæ B, & hæc tertiæ C, atque hæc quartæ D, & ſic deinceps, (ubique ſcilicet in ratione ſubdupla;) Erit $B=2A$, $C=2B=4A$, $D=2C=4B=8A$, &c. Ideoque ratio A ad B eſt $\frac{1}{2}$, (cum enim $B=2A$, erit A.B::1.2.) Ratio A ad C (duplicata) $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, (nam propter $C=4A$, erit A.C::1.4.) Ratio A ad D (triplicata) $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, (nam propter $D=8A$, erit A.D::1.8.) Et ſic deinceps.

Atque hic non incommodum erit notare; quod Euclides non *διπλάσιον, τριπλάσιον*, &c. vel *διπλάσιον, τριπλάσιον*, &c. dicit, (quibus vocibus alibi id innuere ſolet quod Latini vocibus *duplum, triplum, &c.* vel etiam *duplex, triplex, &c.*) ſed *διπλασίονα, τριπλασίονα*, &c. (quod & perpetuo hoc ſenſu obſervat,) quem aliquatenus imitari conantur interpretes, dum non tam rationem *duplam, triplam, &c.* vel etiam *duplicem, triplicem, &c.* hoc ſenſu; ſed potius, mutata forma, *duplicatam, triplicatam, &c.* dicunt: tum ut diverſitatem formarum *διπλάσιος*, & *διπλασίων* apud Euclidem, aliquatenus referant; tum ut *ὁμωνυμία* aliquatenus caveatur.

Ratio Subduplicatæ-triplicata, &c.

Verum & hujuſmodi rationes (puta duplicata, triplicata, ſubduplicata, &c.) invicem continuari poſſunt, unde ratio ex illis compoſita emergat. Puta rationis $\frac{A}{B}$, ratio triplicata eſt $\frac{Ac}{Bc}$, hujus autem Subduplicata eſt $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$: ergo rationis

nis $\frac{A}{B}$ ratio Triplicatæ Subduplicata, erit $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$. Sic rationis $\frac{V}{A}$, ratio Triplicatæ-ſubduplicata, erit $\sqrt{\frac{V}{A}}c$. Eodem modo, cum rationis $\frac{V}{A}$ ratio duplicata ſit $\frac{V}{A}q = \frac{V}{A} \times \frac{V}{A}$, atque hujus triplicata $\frac{V}{A}q \times \frac{V}{A}q \times \frac{V}{A}q = \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A}$; erit hæc, rationis $\frac{V}{A}$ expoſitæ, ratio duplicatæ-triplicata, (ſive triplicatæ-duplicata,) nempe ſextuplicata. Vel etiam ſi ratio quævis ſimplici ſymbolo deſignetur, puta R, erit Rq vel R^2 ratio duplicata, R^3 triplicata, R^4 quadruplicata, $R^6 = R^2 \times R^3$ ſextuplicata, ſive triplicatæ-duplicata, $\sqrt{R}$ ſubduplicata, $\sqrt[3]{R}$ ſubtriplicata, $\sqrt[3]{R^2}$ duplicatæ ſubtriplicata. Nec ſecus alibi.

Totius autem hujus negotii praxis Arithmetica, (puta datæ rationis rationem duplicatam, triplicatam, ſubduplicatam, ſubduplicatæ triplicatam, &c. invenire, vel numeris aut etiam ſymbolis deſignare,) ex fractionum multiplicatione, quadratione, cubicatione, & radicum cujuſvis poteſtatis analyſi, dependet: quæ ſuis locis tradentur.

CAP. XXXI.

Progreſſio Geometrica. Continua: Disjuncta. Inveſtigatio Summæ. Inveſtigatio termini ultimi; vel cujuſvis remoti.

PRogreſſionis Geometricæ originem & naturam ſuperius tradidimus Cap. XXV. Quippe quæ Rationum æqualitatem (ſimilitudinem, identitatem,) reſpicit, ut progreſſio Arithmetica æqualitatem Differentiarum, exceſſuum puta ſive defectuum. *Progreſſio Geometrica, quid?*

Euclidi dicitur Ἀναλογία: Interpretibus, *Proportio*, *Proportionalitas*, *Progreſſio*. Cicero ἀναλογίαν interpretatur *Comparationem* & *Proportionem*; & quidem primus, ipſo teſte, (in Plat. Timæi interpretatione,) *Quæ Græce* ἀναλογία *Latine* (*audendum eſt enim, quoniam hæc primum a nobis novantur*) *Comparatio Proportioue dici poteſt.*

Euclidi definitur Ἀναλογία ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης, *Rationum ſimilitudo.* 4 *d* 5. vel (ſecundum alios) 8 *d* 5. Ariſtoteli, Ethic. 5. ἰσότης τοῦ λόγου. *Rationum æqualitas.* Proclo in Plat. de Rep. λόγου ἐστὶν ἀναλογία ταυτότης, *rationis Identitas.* Theoni Smyrnæo ἀναλογία ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης ἢ ταυτότης, *rationum ſimilitudo ſeu identitas.* Fabius Quintilianus *Similitudinis* vocem comprobat, l. 5. c. 11. Ἀναλογίαν *quidem a Simili ſeparaverunt, nos eam ſubjectam huic generi putamus. Nam, ut Unum ad Decem, ſic Decem ad Centum, Simile certe eſt.* Euclides ipſe, utut, in Definitione, *Similitudinis* vocem adhibeat, alibi tamen paſſim, *Identitatem* potius innuit; nec tam Rationem rationi *æqualem* dicit, aut *ſimilem*, quam *eandem.* Ut per totum lib. 5. paſſim eſt videre. Perinde autem eſt ſive Similitudinem, ſive Æqualitatem, ſive etiam Identitatem dicamus; dummodo enim de ſenſu convenit, non eſt ut de verbis admodum litigemus.

Diſtribuitur autem (ut ſupra dictum eſt) in Continuam, & Disjunctam (ſive diſcretam, diſcontinuam; Budæo, hiulcam & interruptam.) Illam appellat Ariſtoteles συνεχῆ: hanc ἀναδιῃρημένην.

Illa eſt, ubi termini ita continue procedunt, ut intermedius quilibet ſit tum antecedentis conſequens, tum conſequentis antecedens, in eadem ratione. Ut 2. 4. 8. 16 ∴ *Continua.*

Hæc, ubi eadem quidem recurrit ratio, non autem continue, ſed disjunctim. Ut 2. 4 :: 3. 6. *Diſjuncta.*

Proportio itaque ſive Progreſſio, tribus ad minimum terminis conſtituitur. Quod & notat Euclides 9 *d* 5. Ἀναλογία δὲ, ἐν τρίσιν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. *Analogia* (proportio, proportionalitas,) *in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.* Nempe, proportio continua, ut 2. 4. 8 ∴ ubi eadem intercedit ratio inter primum & ſecundum, atque inter ſecundum & tertium. Proportio autem diſcontinua ſive interrupta, nonniſi

quatuor saltem terminis constituitur; puta 2. 4. :: 3. 6. Cum enim ratio quælibet duos terminos postulet, quippe qui invicem comparantur; eademque ratio saltem bis occurrat ut constituatur analogia, quæ rationes comparat: si terminus medius sit utrique rationi communis (puta prioris consequens, & posterioris antecedens) in tribus terminis eadem bis reperiri potest ratio; sin minus, non nisi in quatuor, cum utriusque rationis duo termini, à duobus reliquis terminis alii sint. Potest autem tum analogia continua pluribus adhuc quam tribus; & disjuncta, pluribus quam quatuor absolvi. Puta 2. 4. 8. 16. 32 &c. sunt continue proportionales; discontinue vero 2. 4 :: 3. 6 :: 9. 18 :: 5. 10. Vel etiam (nam & sic proportionales notare licebit) 2′. 3″. 5‴ :: 4′. 6″. 10‴. puta, ut sunt ad invicem 2, 3, 5; sic & 4, 6, 10.

De Progressione Geometrica continua, duo præsertim tradi solent operationum compendia; duobus Problematis proposita. Primum est; Totius progressionis summam, sine continua intermediorum additione, invenire. Alterum est; Terminum ultimum, aliumve à primo satis remotum, neglectis intermediis, invenire.

Investigatio. Summæ.

2	0
6	1
18	2
54	3
162	4
486	5
1458	6
4374	7
13122	8
39366	9
59048	

Primum quod attinet. Continuæ Progressionis summa sic reperitur. Si terminus ultimus per communis rationis Exponentem multiplicetur, (sive, quod tantundem est, progressio per unum adhuc gradum continuetur;) atque inde auferatur terminus primus, & quod restat per numerum unitate minorem quam est communis rationis Exponens dividatur; prodibit progressionis summa. Hoc est, si terminus primus seu minimus dicatur A, maximus V, communis rationis Exponens R, & progressionis summa S. erit $\frac{VR-A}{R-1} = S$. Cujus Regulæ demonstrationem infra exponemus.

Sic in progressione adjuncta, decem terminorum Terminus ultimus 39366 in communis rationis Exponentem 3 ductus, facit 118098; unde demptis 2 (termino primo) restant 118096. Qui numerus per 2 (numerum unitate minorem quam est 3, rationis communis Exponens) divisus, quotientem exhibet 59048, totius progressionis summam. Quæ quidem eadem est & quæ ex terminis omnibus continue additis emergit.

39366
×3
118098
−2
2) 118096
59048

Cum autem res tædio plena videri possit, in prolixioribus saltem progressionibus, singulos terminos continua multiplicatione sigillatim investigare; Hujus itaque operationis compendium quærit problema illud alterum; Nempe

Investigatio termini ultimi.

Progressionis cujusvis inchoatæ, terminum ultimum, aliumve quemvis assignatum, à primo satis remotum, invenire. Quod hoc pacto faciendum docent. Progressio exposita per aliquot saltem gradus inchoetur. Et singuli termini notari intelligantur totidem numeris naturali serie progredientibus à cipbra inchoatis; puta 0, 1, 2, 3, 4, &c. (vel etiam quibusvis aliis, continua progressione procedentibus, ab 0 inchoatis:) qui *Indices* vocari solent, sive *Exponentes*; distantiam cujusque termini à primo indicantes. Hac præparatione facta; si terminorum jam inventorum quilibet multiplicetur vel in se vel eorum alium quemlibet; & productum per terminum primum dividatur: prodibit terminus ille cui respondet Index ex invicem multiplicatorum Indicibus additis conflatus. Atque hoc, quoties opus fuerit, iterandum erit.

Exempli gratia. In exposita progressione; Inventis terminis primoribus quatuor, 2, 6, 18, 54, quibus respondent indices 0, 1, 2, 3. Ductis 54 in 54 (termino quarto in seipsum, cujus index 3, 3,) fiunt $54 \times 54 = 2916$; quem numerum si per 2 terminum primum dividamus, proveniet 2) 2916 (1458 terminus septimus cujus index $6 = 3 + 3$. Deinde, si 1458 terminus septimus jam inventus, (cujus index 6,) ducatur in 54 terminum quartum, (cujus index 3) prodibunt 78732, quæ per 2 (terminum primum) divisa, exhibebunt 2) 78732 (39366 terminum decimum, cujus index $9 = 6 + 3$. Et sic deinceps, quousque opus fuerit, progressio per saltus continuabitur.

2	0	54	3
6	1	×54	+3
18	2	2) 2916	
54	3	1458	6
1458	6	×54	+3
		2) 78732	
39366	9	39366	9

Exemplum hujuſmodi aliud notiſſimum libet adjungere. Sint in equi cujuſdam calceis ſingulis ſex clavi, adeoque in omnibus 24. Et venum expoſitus equus ea lege, ut emptor pro primo clavo denarium ſolvat, pro ſecundo duos, pro tertio 4, & ſic deinceps, ſingulorum clavorum pretium continue duplando. Quæritur, quanti emendus eſt Equus?

Vel etiam, Si quis ſervum conduxerit in annum integrum, ea lege ut prima ſeptimana recipiat denarium, ſecunda duos, tertia 4, & ſic deineeps, ſingulis ſeptimanis mercedem duplando. Quæritur, quantam habiturus eſt mercedem ſervus anno integro, ſive ſeptimanis 52?

Conſtituantur primo, continua multiplicatione, numeri aliquot primores, puta ſex, 1, 2, 4, 8, 16, 32. quorum Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ductis itaque in ſe 32 (termino ſexto cui index 5) fiunt 1024. Quæ cum per terminum primum dividenda ſint, ſitque ille 1, numerus dividendus inde non mutatur; & propterea 1024 terminus ille eſt cui convenit Index $10 = 5 + 5$, nempe undecimus, ſive poſt primum decimus. Ille autem in ſe ductus producit (eadem ratione,) terminum poſt primum viceſimum, quia $10 + 10 = 20$. Hic autem (eadem ratione) ductus in 16, terminum poſt primum quartum (cui index 4) producit terminum cui index $24 = 20 + 4$. Qui quidem terminus cum ſit ordine viceſimus quintus; adeoque clavi ultimi, nempe viceſimi quarti, pretium exhibeat uno adhuc gradu auctum; ſive quod tantundem eſt, terminum ultimum in communis rationis Exponentem ductum; Hinc ſi auferatur terminus primus 1, numerus reſiduus 16777215 (qui, cum per communem multiplicatorem unitate minutum, nempe $2 - 1 = 1$, dividendus ſit; hac diviſione non immutetur,) eſt ipſe numerus denariorum quibus emendus eſt equus: qui 16 millena millia ſuperat.

1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
1024	10
1048576	20
16777216	24
281474976710656	48
4503599627370496	52
— 1	
4503599627370495	

Sin adhuc continuanda ſit progreſſio ad locum uſque quinquageſimum ſecundum; id eodem modo fiet. Nempe ducto in ſeipſum termino modo invento, (cujus index 24,) habebitur ille cujus index $48 = 24 + 24$. Atque hic item in illum cujus index 4, habebitur ille cujus index 52. (nempe ultimus in communis rationis Exponentem ductus) qui, unitate minutus, ſummam totius progreſſionis exhibet: mercedem quidem ſatis amplam.

Atque hinc abunde liquet in quam immenſam & plane incredibilem ſummam ab exiguis principiis in continua progreſſione Geometrica perveniatur.

Priuſquam autem hoc negotium dimittam; libet & Exemplum aliud annectere, ex Authore Arabico deſumptum; (quod D. *Pocockio* noſtro, ſummæ in linguis Orientalibus Eruditionis viro, debeo:) unde, non modo hujuſmodi computi exemplum, (fortaſſe, omnium antiquiſſimum, ad cujus imitationem alia fuerint excogitata;) ſed & aliarum aliquot inventionum originem videre licet. Nempe in Commentariis quos ſcripſit *Seláho 'ddin Mohámmed Alſéphadi*, in Nobiliſſimi Poetæ *Tograii* Poema, *Lamiato'lAjam* dictum, ad hunc verſum

ان العلي حدثتني *Enna'l ola hadathatni*

hæc habentur

الصحيح ان هذه لفظة عجمية واصلة بالعجمية شش رنك معناه شئة اذوان وهي الشاه والفرزان والفيل والفرس والرخ والبيدق والناس كثير

كثير منهم من يغلط في الصولي وهو ابو بكر بن محمد بن يحيي
بن عبد الله بن العباس ابن صول تكين الكاتب ويزعم انه وضع
الشطرنج لماضرب المثل فيه والصحيح ان واضعه صصة بن داهر الهندي
لان اردشير بن بابك اول ملوك الفرس الاخرة قد وضع النرد ولذلك
قيل انه نردشير جعله مثلا للدنيا وامثلها فرتب الرقعة اثني
عشر بيتا بعدد شهور السنة والمهارك ثلثين قطعة بعدد ايام
الشهر والفصوص مثلا لافلاك الدايرة ورميها مثل تقلبها ودورانها والنقط
فيها بعدد الكواكب السيارة كل وجه منها سبعة الشش ويقابله
البيدق والبنج ويقابله الدو والجهار ويقابله السه وجعل مياتي به
اللاعب من النقوش كالقضا والقدر قارة له وقارة عليه وهو يصرف
المهارك علي ماجات به النقوش لكنه اذا كان عنده حسن نظر عرف
كيف ياتي وكيف يحتال علي الغلبة وقهر خصمه مع الوقوف
عند ما حكمت به الفصوص وهذا هو مذهب الاشاعرة اخبرني
من اثق به ان الشيخ تقي الدين احمد بن تيمية كان يقول اللعب
بالنرد خير من اللعب بالشطرنج لان لاعبه يعترف بالقضا والقدر
والشطرنج لاعبه ينفي ذلك وهو اقرب الى الاعتزال ـــــ فلما
وضعت الفرس ذلك افتخرت به وكان ملك الهند يومين بلهيب
فوضع له صصة المذكور الشطرنج فقضت حكما ذلك العصر بتفضيله
ولما عرضه علي الملك واوضح له امره ساله ان يتمني عليه فتمني عليه
عند تضعيفه قمحا فاستصغر الملك ذلك من همته وانكر عليه ما قابله
به من طلب النزر القليل في ذلك المقام فقال ما اريد غير ذلك
فامر له بذلك فلما حسبه ارباب الديوان قالوا للملك ما عندنا ما يقارب
ذلك القليل منه فانكر ذلك فاوضحوه له فاعجبه الامر الثاني
اكثر من الاول * قال القاضي شمس الدين احمد بن خلكان ولقد
كان في نفسي من هذه المبالغة شي حتي اجتمع لي بعض
حساب الاسكندرية وذكر لي طريقا تبين لي ما ذكروه واحضر لي
ورقة بصحة ذلك وهو انه ضاعف الاعداد الي البيت السادس عشر فاثبت
فيه اثنين وثلثين الفا وسبع ماية وثمانية وستين حبة وقال تجعل
هذه الجملة مقدار قدح وقد عيرتها وكان كما ذكر والعهدة
عليه من هذا النقال ثم ضاعف السابع عشر الي البيت العشرين فكان
فيه ويبة ثم انتقل من الويبات الي الاردب ولم يزل يضعفها حتي
انتهي في بيت الاربعين الي اربعة الف اردب واربعة وسبعين الف اردب
وسبع ماية واثنين وستين اردبا وثلثي اردب وهذا المقدار شونة ثم
انه ضاعف الشون الي بيت الخمسين فكانت الجملة الفا واربعا
وعشرين شونة وهذا المقدار مدينة ثم انه ضاعف ذلك الي البيت الرابع
والستين وهو اخر الابيات فكانت الجملة ستة عشر الف مدينة
وثلث ماية واربعا وثمانين مدينة وقد تعلم انه ليس في الدنيا مدن
اكثر

اكثر من هذا العدد انتهي قلت اخر ما اقتضاه تضعيف رقعة الشطرنج
ثمانية عشر الف الف ستت مرات واربعماية واربعون الفا خمس مرات
وسبع ماية واربع واربعون الفا اربع مرات وثلثة وسبعون الفا ثلث
مرات وسبع ماية وتسعة الاف مرتين وخمس ماية واحد وخمسون الفا
وستماية وخمسة عشر عددا ———————

١ ٨ ٤ ٤ ٦ ٧ ٤ ٤ ٠ ٧ ٣ ٧ ٠ ٩ ٩ ٩ ١ ٦ ١ ٩
٦ ٩ ٤ ٣ ٢ ١

واذا جمع هذا لعدد هرما واحدا مكعبا طوله ستين ميلا وعرضة كذلك
وارتفاعه كذلك بالميل الذي هو اربعة الاف ذراع بالعمل الذي
هو ثلثة اشبار معتدلة علي ان الاردب المصري مساحته ذراع مكعبا
وزنته ما يتان واربعون رطلا وكل رطل ماية واربعة واربعون
درهما الدرهم اربعة وستون حبة من القمح وكل بيت اذا ربعنا ما
فيه من العدد حصل من مربعة ما يجب ان يكون في البيت الذي
عدده كضعف ذلك البيت الا واحدا فاذا ربعنا ما في الثالث مثلا
حصل ما في الخامس واذا ربعنا ما حصل في الخامس حصل
ما في التاسع فاذا ربعناه حصل ما في السبع عشر فاذا ربعناه حصل
ما في الثالث والثلثون فاذا ربعناه حصل ما في الخامس والستين
فاذا انقصنا منه احدا كان الباقي جملة ما في البيوت كلها
الي البيت الرابع الستين وان نصفناه قبل ان ننقص منه واحدا كان
نصفه حاصل البيت الرابع والستين وبهذا العمل يحصل تضعيف رقعة
الشطرنج من خمس ضربات —— ويقول فضلاء الهند ثلثة سبقوا بها من
سولهم من الناس كتاب كليلة ودمنه ولعبة الشطرنج والتسعة
احرف التي تجمع انواع الحساب ٭

Quæ Latine ſic ſonant. "Certum eſt, vocabulum hoc [ſhetrunge, *Scaccho-*
"*rum ludus*;] Perſicum eſſe, cujus Thema Perſice eſt *ſheſh ranc*, quod ſignificat
"*ſex ſpecies*, quæ ſunt *Alſhâh*, *Alpharzân*, *Alphîl*, *Alphâras*, *Alrôch*, & *Baidak*.
"[Hoc eſt, Rex, Regina, Elephas, Equus, Roch, Pedes.] Hominum autem non
"pauci fallùntur, quod ad *Alſûli*, qui eſt *Abu Beker Ebn Mohammed Ebn Yahya*
"*Ebn Abdollah Ebno'l Abbâs Ebn Sûl Takîn* ſcriba, autumantes illum, Scaccho-
"rum ludum inveniſſe, eo quod Proverbio originem dederit. Certum autem eſt
"ludi hujus authorem fuiſſe *Seſſa Ebn Dahir* Indum. Cum enim *Ardſhîr Ebn*
"*Babec*, primus Regum Perſiæ Poſteriorum, Calculorum ludum [*Tables*] inve-
"niſſet; unde & *Nardſhîr* appellatus eſt [*ludus ille*] quem ad exemplar mundi
"compoſuit: Abacum in duodecim domos diſtinguens, ad numerum menſium
"Anni; Calculos triginta, numero dierum menſis; Talos, ad inſtar ſphærarum
"circumrotantium; eorumque jactum, ad inſtar motus & circulationis earundem;
"in eiſque puncta numero Planetarum, quorum ſitus quilibet numerum exhibet
"ſeptenarium, (dum ſenioni opponitur monas, quinternioni dyas, quaternioni
"ternio opponitur;) notas quas jactu ſortitur ludens, inſtar prædeterminationis
"& decreti divini, quæ ipſi aliquando favent, aliquando adverſantur; ipſe autem
"calculos pro ratione notarum movet, ita interim ut, ſi perſpicaci ſit ingenio,
"dignoſcere queat res ea arte diſponere, ut victoriam conſequatur, atque adver-
"ſarium ſuum ſuperet, ſtante quod determinaverint tali; quæ eſt via Aſſhario-
"rum. ——— Narravit mihi quidam fide dignus, *Sheich Takioddin Ahmed*

"*Ebn Tamîmah* dixiſſe, ludum Calculorum præſtantiorem eſſe ludo Scacchorum, quod illis ludens agnoſcat Decretum & Prædeterminationem: at Scachiis ludens, eadem neget; quod propius accedit ad *Matazalorum* ſententiam. ———

"Cum ergo hoc inveniſſent Perſæ, eoque glorientur; ..... Regi Indiæ, invenit *Seſſa* prædictus Scacchorum ludum, quem iſtius temporis ſapientes iſti præferendum cenſuerunt. Quem ergo cum Regi exhibuiſſet, ejuſque rationem ipſi declaraſſet; ab ipſo juſſus, quicquid liberet, petere; petiit ille grana tritici juxta [areolarum] numerum [continue] duplicanda. Quod, ut parum quid, exiſtimans Rex, præ eo quod animo conceperat; male ab illo tulit, quod eum rei tam modicæ ac tenuis petitione exceperit eo in loco. Reſpondit ille; ſe nolle aliud. Hoc igitur illi dari juſſit. At ubi, qui Ratiocinüs præerant, illud computaſſent: Regi dixerunt; Non eſſe penes ipſos, quod ad illius Exiguum iſtud, prope accederet. Cui cum Rex haud adhiberet fidem; rem ipſi demonſtrarunt. Adeo ut, Secundum hoc, majorem ipſi admirationem incuteret, quam illud Prius.

"Refert *Al Kâdi Shemſo 'ddîn Ahmed Ebn Chalecân*: Hærebat mihi animo [ſcrupulus] de hac ſumma, donec computiſta quidam Alexandrinus, qui me convenerat, viam mihi oſtenderat qua manifeſtum mihi factum eſt quod dixerant; chartam mihi exhibens, qua veritas ipſius conſtaret. Nempe numeros duplicans uſque ad areolam decimam ſextam, illic ſtatuit granorum triginta duo millia, ſeptingenta ſexaginta & octo; ſummam hanc, inquit, ſtatuamus menſuram *Kâbah*. Quod cum examinaveram, ita ſe habuit uti dixit. ———

"Deinde duplicando decimam ſeptimam & ſic deinceps ad viceſimam; in ea fuit menſura *Waibah*. Dein à *Waibis* tranſiit ad *Ardubbas*; quas duplicare non deſiit [hoc eſt, continue duplicavit] donec in areola quadrageſima pertingeret ad centena & ſeptuaginta quatuor millia, & ſeptingenas & ſexaginta duas Ardubbas, cum duobus trientibus. Atque hæc ſumma eſto Granarium. Deinde Granaria duplicans ad areolam uſque quinquageſimam, prodiit ſumma, mille & viginti quatuor granariorum. Atque hæc menſura, pro urbe habeatur. Dein, illud duplicans, ad areolam uſque ſexageſimam quartam, quæ eſt omnium ultima, prodiit ſumma urbium, ſexdecim mille & tercentum octoginta quatuor. Scias autem non eſſe in univerſo mundo urbes hiſce plures numero. Atque hactenus ille.

"Dico ego; ultimum quod producitur duplicando abacum Scacchorum, eſt octodecies mille mille, ſexies; quadringenta quadraginta ſex mille, quinquies; ſeptingenta quadraginta quatuor mille, quater; ſeptuaginta tria millia, ter; ſeptingenta novem mille, bis; quingenta quinquaginta unum mille; atque ſexcenta & quindecim. 18446744073709551615.

6 5 4 3 2 1

"Atque ſi collecta fuerint illa in unam pyramidem quadratam; longitudo erit ſexaginta milliarium; latitudo, par; altitudo etiam, par. ſecundum milliare quod conſtat quatuor mille cubitis vulgo uſitatis: quorum quiſque eſt trium ſpithamarum mediocrium. Cum etiam Ardubbæ Ægyptiacæ menſura ſit cubitus cubicus; pondus ipſius erit, Rotalarum ducentarum & quatuor: quarum unaquæque Rotal eſt centum quadraginta quatuor drachmarum: Drachma autem eſt granorum tritici ſexaginta quatuor.

"Porro ſi numerum, in qualibet areola, quadraverimus; quadrando producitur qui ſtatuendus eſt in areola cujus numerus duplus eſt numeri iſtius areolæ, uno minus. Exempli gratia; ubi quadraverimus quod eſt in tertia, prodit quod quintæ eſt: Cumque quadraverimus quod prodiit in quinta, producitur quod nonæ eſt: Et cum hoc quadraverimus, prodit, quod eſt decimæ ſeptimæ: Hoc item quadrato, prodibit quod eſt triceſimæ tertiæ: atque hoc quadrato, prodit quod eſt [loci] ſexageſimi quinti: Unde ſi unitatem ſubtraxerimus; reliquum, eſt ſumma iſtius quod eſt in areolis omnibus uſque ad ſexageſimam quartam. Quod ſi, ante ſubductam unitatem, dimidiaverimus; erit ſemiſſis, id quod prodit in areola ſexageſima quarta. Atque hac praxi prodit duplicatio abaci Scachorum, quinque operationibus. ———

"Dicitur, ex quibus excellunt Indi, quibuſque reliquis hominibus præiverunt,

"tria

"tria esse. viz. Librum *Golailah Wadamnah*; ludum Scacchorum; atque novem "Figuras numerarias.

Cum autem in superioribus, laudatus sit *Ebn Chalecan*; gravis apud suos author, & magni nominis; lectori forsan non ingratum erit quæ apud ipsum, in vita *Alsûli*, habentur, recitare: quæ, latine reddita, sic sonant.

'Vidi multos qui assererent, *Alsûli* Scacchorum [sive *latrunculorum*] ludum 'invenisse. Quod error est. Ejus enim Author fuit *Sessa Ebn Daher* Indus; 'Regisque, cujus gratia illum invenit, nomen *Shehrâm*. Siquidem *Ardshîr Ebn 'Babec*, primus Regum Persiæ posteriorum, ludum Calculorum invenerat, (*Nard-'shîr* inde dictum, ab Authore sc. denominatum:) quo mundi, ejusque incola-'rum, specimen exhibuit; dum Alveum in duodecim domos distinxit, mensium 'anni numero; calculos triginta, numero dierum cujuslibet mensis, statuens; ta-'los autem, decreti Divini, & mutationum quibus mundi incolas agitat, loco po-'suit. In summa; longus esset his de rebus sermo, & à proposito nostro alienus. 'Gloriantibus ergo Persis, ludi calculorum inventione; in Regis Indorum gra-'tiam, *Sessa* Scacchorum ludum composuit: Quem calculorum [*ludo*] longe an-'tecellere censuerunt istius temporis sapientes, ob multa quæ enarrare longum esset. 'Ferunt autem, quod, ubi *Sessa* ludum istum, à se inventum, Regi *Shehramo* 'prædicto exposuisset, ille de hoc miratus, valdeque lætatus, jussit ut in Ratio-'cinatorum consessibus usurpetur; omniumque quæ nosset præstantissimum judi-'cavit; utpote qui bello instrumentum esset, religioni vitæque communi stabili-'mentum, omnisque commenti fundamentum; atque se gratum ostendit & lætitia 'affectum, ob insigne quod sibi in regno suo hac ratione contigisset beneficium. 'Jussitque *Sessam*, ut, quicquid sibi libuerit, peteret. Qui ergo, Opto, inquit, 'ut tritici granum prima domo [areola] positum, continue duplicetur, donec 'ad ultimam perventum fuerit; illudque quicquid fuerit, mihi concedas, Rex au-'tem illud, ut parum quid, contemptu accepit; & male tulit, quod ille exiguum 'quid & tenue proposuisset, cum ipse magnum aliquod animo concepisset. Cui 'ille, Nolo, inquit, aliud quam hoc; atque in ea petitione perseveravit; donec 'ipsius voto annuens [*Rex*] id ipsi dari jussit. Quod ubi computistis suis di-'ctum esset; illi, facto computo, retulerunt, non esse penes ipsos frumentum, 'quod summam istam æquaret, vel ad eam prope accederet. Quod cum Regi 'nunciatum esset, ipseque dictis assensum haud præberet, computistas accersi jussit. 'Qui, ab illo interrogati, responderunt; si comportaretur totum quod in mundo 'esset frumentum, id summam istam haudquaquam æquaturum. Ipsoque sibi rem 'demonstrari petente; cum considentes computum fecissent, apparuit id fuisse ve-'rum. Rex ergo dixit, Magis ego te miror, ob eam quam fecisti optionem, quam 'ob Scacchorum quem inveniisti ludum.

'Ratio autem duplicationis istius est, ut in domo prima, ponatur granum unum; 'in secunda, duo; in tertia, quatuor; in quarta, octo; atque ita deinceps usque 'ad ultimam; & quotiescunque ad aliam domum transeatur, duplum ejus quod in 'priori positum fuerat statuatur.

'Eram autem animo solicitus de hac summa, donec computistam quendam A-'lexandriæ convenissem; qui duos mihi modos ostendit quibus dicti veritas pa-'teret: chartamque mihi exhibuit, qua illud delineatum fuit. Hac scil. ratione, 'ut, cum numeros duplicasset usque ad domum decimam sextam, statueret ibi gra-'na 32768: quam, inquit, summam, mensuram *Kadah* statuas; quod mihi per-'pendenti ita se habere visum est. ——— Dein, *Al Kadah* domo decima 'septima duplicans, eo modo perrexit donec areola vicesima *Waibah* haberet. 'Dein *Waibas* duplicare pergens, ad *Ardobas* pervenit: Quas duplicare non de-'siit, donec domo quadragesima *Ardobas* haberet 174762 cum duabus tertiis. 'Tum dixit, Hanc summam statuamus *Granarium*; neque enim plus ea contine-'bit Granarium. Dein Granaria ista, usque ad domum quinquagesimam dupli-'cata, erant 1024. Atque hæc inquit, *Urbem* conficiant. Neque enim urbs plura 'Granaria continebit; & quæ tandem Urbs tot in se continebit granaria? Dein, '*Urbes* duplicatæ usque ad domum sexagesimam quartam, quæ in Scacchorum 'Abaco ultima est, ad numerum 16384 pertigerunt. Sciasque, inquit, non esse 'in toto mundo plures quam tot urbes: Siquidem Sphæræ terræ circuitus, prout 'ex Geometria constat, est Parasangarum 8000; adeo ut si quocunque terræ 'loco poneretur funis extremitas, quo totam terræ sphæram cingeremus, donec

'alteram funis extremitatem ad eundem locum perduceremus, ita ut occurrerent 'utraque extremitas, funis iſtius menſura eſſet longitudinis milliarium 24000, 'quæ Paraſangas 8000, æquant. Atque hoc demonſtrative verum eſt ſine du- 'bio. ——— Notum autem eſt, partem terræ habitabilem circiter quartam 'ejus ſphæræ partem eſſe. Atque hæc ſunt quæ de hoc negotio habet *Ebn Chalecan*, loco citato.

Hæc autem fuſius recitare operæ pretium duxi, Quoniam, præter elegans præſentis negotii exemplum, idque admodum vetuſtum, & forte omnium primum; Habemus etiam originem tum ludi Calculorum (Alvei aleatorii,) tum Latrunculorum (Schacchii,) tum etiam Figurarum Numeralium. Nomina vero, quibus Latrunculorum ludus vulgo appellatur, *Cheſſe*, *Eſches* &c. ab ipſo Authoris nomine *Seſſa*, videntur deducta. *Schacchii* vero nomen, à *Shah*, quod Regem ſignificat. Unde & *Check* ſeu *Shach*; quo, inter ludendum, *Regi cavendum* indicamus: & *Shach mât*, (hoc eſt *Shah mât*, rex moritur,) quo, adverſo Rege plane victo, victoriam profitemur.

Quod autem ad Calculum, in citatis Authoribus recenſitum, attinet: eſt quidem ille per ſe ſatis clarus, ut multa explicatione non indigeat. Id interim obſervetur, quod ex calculo patet, poni nempe, quoad menſuram capacitatis,

32768	Grana tritici	= Kadah.
16	Kadah	= Waibah.
6	Waibah	= Ardob.
174762⅔	Ardob	= Granario.
1024	Granaria	= Urbi.
32767	Urbes	= Summæ.

Vel 32768, *ſaltem uno grano minus.*

Item, quoad pondus,

Ardob	= 204	Rotal.
Rotal	= 144	Drachmis
Drachma	= 64	Granis.

Denique, quoad menſuram longitudinis,

Paraſanga	= 3	Milliaribus.
Milliare	= 4000	Cubitis.
Cubitus	= 3	Spithamis.
Ardob	=	Cubito cubico.

Ut autem menſuræ iſtæ cum noſtris Anglicanis melius comparentur: libet ſtatutum de menſuris Anglicanis recenſere, Anno 31° Edwardi primi ſancitum, hoc eſt, Anno Domini 1302.

Conſenſu totius Regni Angliæ, menſura regia ſic conſtituta eſt: ut [1] *Denarius Anglicus, qui vocatur Sterlingus, rotundus ſine abraſione, pendeat triginta duo Grana tritici bene exſiccata, & ex medio ſpicæ collecta: & viginti Denarii, conſtituant Unciam: & duodecim Unciæ, conſtituant Libram: & octo Libræ conſtituant* [2] *Congium vini: & octo Congii vini, conſtituant* [3] *Modium Londinenſem: qui eſt octava pars Quarterii.*

Juxta hanc itaque conſtitutionem, 32 Grana tritici pendent Denarium: 640 Grana, pendent Unciam: 7680 grana, pendent Libram, (adeoque conſtituunt menſuram Pintæ, = ⅛ Congii:) 61440 grana, conſtituunt vini Congium: & 491520 grana, conſtituunt Modium.

Videtur itaque Modius noſter, cui aſſignantur grana 491520, præter propter æqualis eſſe illorum Waibæ, cui nempe implendæ ſatis ſuperque ſufficiant grana loci viceſimi, hoc eſt, grana 524288. Item eorum Kadah (nempe 1/16 Waibæ) cui implendæ ſatis ſuperque ſufficiant grana loci decimi ſexti, hoc eſt, grana 32768; perinde fere videtur atque Semicongius noſter, cui nempe conveniunt grana 30720, quippe toti congio conveniunt grana 61440. Similiter eorum Ardob = 6 Waibis, continebit propterea 6 modios Anglicanos circiter.

Similiter; cum eorum Ardob pendere dicitur 204 Rotalas; adeoque Waibah, Rotalas 34, hoc eſt, Drachmas 4896, ſive Grana ponderis 313344. Patet vel eorum Grana ponderis, graviora fuiſſe tritici granis; vel ſaltem grana tritici quæ habentur

1 *Valet, in argento, fere tres denarios monetæ Anglicanæ hodiernæ.*
2 *A Gallon.*
3 *A Buſhel.*

habentur loco viceſimo, nempe 524288, multo plura eſſe quam contineat Waibah, quæ autem loco decimo nono habentur, pauciora, nempe 262144.

Si autem ponantur illorum grana ponderis, noſtris æqualia, illorum Rotala, (hoc eſt grana 9216) ſuperabit libram noſtram (eam nempe quam *Trojanam* vocant, granorum 7680) duabus unciis & ſemiſſe fere, adeoque prope accedit ad libram quam vocamus *Averdupois*, quæ æquatur unciis Trojanis 14 $\frac{3}{5}$, (nempe libræ Trojanæ, & duabus unciis cum ſemiſſe, & inſuper duobus denariis; ſive unciis 14 & denariis 12.) Si vero eorum grana majora ſint; ut nempe eorum Waibah vel æquet vel ſuperet Modium noſtrum; tum Rotala illorum fere duas libras, quas vocamus, Trojanas æquabit; ſaltem 34 Rotalæ (pondus Waibæ) æquabunt 60 libras Trojanas, nempe modii noſtri pondus. Accuratam vero menſurarum vel ponderum illorum cum noſtris comparationem hinc inſtituere minime valemus; propterea quod (ubi omnium fundamentum ponitur) grana loci decimi ſexti non ſtatuuntur menſuram Kadah præciſe implere, ſed ſaltem implere, & potius ſuperare quam deficere.

Si autem libeat etiam totam quæ emergit granorum molem, ad menſuram milliaris Anglicani redigere: illud haud magno labore fiet. Cum enim conſtat, ex ſuperius dictis, grana loci viceſimi, 524288, ſaltem æquare vel potius ſuperare modium Anglicanum: erit modiorum in tota mole numerus (ut diviſione patebit) 351843720888 32 (ſaltem uno grano minus) nempe quantus eſt numerus granorum in loco 46.

Continet autem quilibet modius Congios octo, quilibet autem congius pollices cubicos 231, (de Vini Congio intelligo, nam Congius cerviſiæ continet pollices cubicos 272 $\frac{1}{4}$ nempe tot cubicos pollices; quot ſunt, in quadrata Pertica, Pedes quadrati; nam $16\frac{1}{2} \times 16\frac{1}{2} = 272\frac{1}{4}$) quod accurate ſe obſervaſſe teſtatur D. *Oughtredus* in libro quem *De Circulis Proportionum* inſcripſit, *Cap.* 9. Et propterea in Modio Anglicano continentur pollices cubici 1848; atque in ſex Modiis Anglicanis pollices 11088; cui cum præterpropter æqualis fuiſſe colligitur Ardoba Ægyptia, quæ illorum cubito cubico æqualis ponitur, erit illorum cubitus cubicus pollicibus Anglicanis 11088 æqualis; adeoque cubiti longitudo, erit pollicum Anglicanorum 22,3 circiter.

Milliare autem Anglicanum continet 8 ſtadia, quorum quodlibet continet 40 perticas, harumque quælibet pedes $16\frac{1}{2}$: adeoque ſtadii longitudo, eſt pedum 660; milliaris autem, pedum 5280. Et propterea, milliare cubicum continebit pedes cubicos 147197952000; hoc eſt, pollices cubicos 254358061056000; (quippe pes continet 12 pollices, adeoque pes cubicus pollices cubicos $1728 = 12 \times 12 \times 12$.)

Cum itaque, ut dictum eſt, modius contineat pollices cubicos 1848, diviſo per hunc numerum numero pollicum cubicorum, unius milliaris cubici, prodibit 137639643428$\frac{4}{7}$ numerus modiorum in milliari cubico. Per quem itaque numerum ſi dividamus 351843720888 32 numerum modiorum in tota mole, prodibit 255|62673 numerus milliarium cubicorum. Cum autem Pyramis ſit $\frac{1}{3}$ Parallelepipedi, (ſuper eadem baſe, æque alti;) ſi triplicetur numerus milliarium in expoſita pyramide, habebitur Parallelepipedum ſuper eadem baſe æque altum, nempe 766|88019, cujus numeri latus cubicum eſt 9|15226. Adeoque ſummæ triplum, ſuperat corpus cubicum cujus latus 9 milliaria. Et propterea ipſa ſumma (nempe cubi triens) ſuperabit Pyramidem cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, eſt milliarium Anglicanorum 9.

Dum vero in commentario *Alſephadi*, dicitur æquare Pyramidem longam latam & altam milliaria 60; manifeſtum mendum videtur: vel enim meus me fallit calculus, vel reponendum eſt 6. Cum enim ſtatuitur eorum Ardoba cubito cubico æqualis: Tot erunt in tota mole cubiti cubici, quot Ardobæ; nempe 5864062014805$\frac{1}{3}$, (nimirum $\frac{1}{6}$ numeri modiorum, ſive Waibarum; ponitur enim Ardoba æqualis ſex Waibis.) Cum itaque ſtatuitur eorum milliare æquale cubitis 4000; adeoque milliare cubicum, cubitis cubicis 64000000000; Si per hunc numerum dividatur numerus cubitorum cubicorum, ſive Ardobarum, in tota mole pyramidali, prodibit numerus milliarium cubicorum in pyramide 91|625968981$\frac{1}{3}$; ejuſque triplum 274|87790695 numerus milliarium in Cubo ſuper eadem baſi: cujus latus cubicum eſt 6|502 proxime. Adeoque Pyramis (quippe Cubi triens) cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, ſit iſtorum milliarinm $6\frac{1}{2}$ proxime æquabit totam

granorum ſummam. Illorum itaque milliaria $6\frac{1}{2}$, videntur æquare circiter 9 ex noſtris. Unumque ex eorum milliaribus, æquabit fere unum cum ſemiſſe ex noſtris.

Atque hæc ſunt quæ de Menſuris comparandis, hic loci, dicenda videbantur.

Quo quis autem, de incredibili hoc augmento, minus dubitet; placuit totius operationis proceſſum, ad locum uſque ſexageſimum quartum continue duplando apponere; termini autem ultimi duplum, unitate minutum, eſt omnium aggregatum: quod, ſiquis dubitet, continue addendo conſtare poterit.

1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6
64	7
128	8
256	9
512	10
1024	11
2048	12
4096	13
8192	14
16384	15
32768	16
65536	17
131072	18
262144	19
524288	20
1048576	21
2097152	22
4194304	23
8388608	24
16777216	25
33554432	26
67108864	27
134217728	28
268435456	29
536870912	30
1073741824	31
2147483648	32
4294967296	33
8589934592	34
17179869184	35
34359738368	36
68719476736	37
137438953472	38
274877906944	39
549755813888	40
1099511627776	41
2199023255552	42
4398046511104	43
8796093022208	44
17592186044416	45
35184372088832	46
70368744177664	47
140737488355328	48
281474976710656	49
562949953421312	50
1125899906842624	51
2251799813685248	52
4503599627370496	53
9007199254740992	54
18014398509481984	55
36028797018963968	56
72057594037927936	57
144115188075855872	58
288230376151711744	59
576460752303423488	60
1152921504606846976	61
2305843009213693952	62
4611686018427387904	63
9223372036854775808	64
18446744073709551615	Summa.

Nota autem, Indices in poſtremo hoc exemplo appoſitos verum locorum ordinem deſignare, nempe ab 1 inchoatos; non autem, diſtantiam à primo, quod faciunt Indices Exemplorum aliquot præcedentium, inchoati ab 0: quod quidem illic factum eſt ob eam quam tradidimus Regulam, de Termino ultimo, vel alio qui aliquanto à Primo diſtet, omiſſis intermediis, inveniendo.

Atque hactenus de Progreſſione Geometrica hic dictum eſto. Fuſior autem hujuſce rei tractatio habetur deinceps capite XXXIII. Unde & jam dictorum demonſtrationes ſunt petendæ.

CAP.

CAP. XXXII.

De Logarithmorum Origine & Usu.

EST autem ea, quam superiori capite tradidimus, Regula, (de terminis remotioribus intermediis, quasi per saltum, inveniendis,) maximi quidem momenti Regula: non tam ob eum, quem jam ostendimus, illius usum; quam ob insigniora quæ inde defluxerunt commoda. Ex hoc enim fundamento, dependet, Mirificum illud *Logarithmorum* inventum: Quod inchoavit quidem Nobilissimus *Johannes Nepperus, Merchistonii* apud Scotos Baro: perfecit autem & consummavit, Egregius ille Geometra *Henricus Briggius*, Præcellor olim meus meritissimus, Professorum Geometriæ *Savilianorum* primus; nec hujus tantum subsellii, sed & totius Academiæ decus & ornamentum.

Totum, inquam, illud Logarithmorum negotium hoc fundamento nititur. Sunt enim *Logarithmi*, numeri Arithmetice proportionales, totidem Geometrice proportionalium, Indices. Horum autem Indicum, sive Logarithmorum, ope, per Additionem & Subductionem magna facilitate id perficitur, quod in veris Numeris non nisi per Multiplicationem & Divisionem faciendum erat. Item, per Bipartitionem, Tripartitionem, Quadripartitionem, &c. id perficitur, quod naturali methodo per Extractionem Radicis Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. perficiendum est. *Logarithmorum Origo.*

Statuerunt quippe illi, Logarithmorum Magistri, (communicatis consiliis,) numerorum Geometrice proportionalium 1, 10, 100, 1000, &c. Indices, sive Logarithmos, Arithmetice proportionales, 0, 1, 2, 3. &c. Ad numeros autem istis intermedios, his item intermedios Logarithmos, debita ratione interjectos, aptarunt. Indicibus nempe, sive Logarithmis, integris, partium decimalium adjectione ita auctis, ut singulorum interjectorum numerorum sedes postularunt, singulis interjectis numeris suos Logarithmos, laborioso calculo, & indefessis vigiliis, investigarunt ad hanc fere formam.

1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
&c.	&c.

Numeri	Logarithmi	Numeri	Logarithmi.
1	0.00000	500	2.69897
$2\frac{1}{2}$	0.39794	750	2.87506
5	0.69897	1000	3.00000
$7\frac{1}{2}$	0.87506	2500	3.39794
10	1.00000	5000	3.69897
25	1.39794	7500	3.87506
50	1.69897	10000	4.00000
75	1.87506	25000	4.39794
100	2.00000	50000	4.69897
250	2.39794	75000	4.87506
		100000	5.00000

Atque eadem methodo omnibus etiam hisce intermediis numeris, nempe ab 1 ad 100000, aptatos habemus Logarithmos jamjam investigatos, in D. *Briggii Arithmetica Logarithmica* conspiciendos; nempe ad usque centena millia: qui etiam, non magno labore, (sumptis nempe proportionalibus intermediis) ad usque centies millena millia, sine notabili errore, accommodari poterunt. Sed & ibidem Canones Sinuum, Tangentium, & Secantium, Logarithmice computatos habemus. Quorum omnium fusiorem traditionem qui postulat, tum ibidem quærat, tum in ejusdem *Trigonometria Britannica*; ab *Henrico Gellibrand*, (Astronomiæ in Collegio Gresshamensi apud Londinenses tum Professore) edita & aucta.

Loga-

Logarithmorum usus; in Multiplicatione.

Logarithmorum autem usum quod attinet. *Duorum quorumvis,* (*aut etiam plurium,*) *Numerorum Logarithmi, simul additi, constituunt Logarithmum, qui numero ex assumptorum numerorum continua multiplicatione facto convenit.* Adeoque invento facti Logarithmo, habetur ipse numerus factus, ex Canone. Puta si numeri 25, Logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 100, Logarithmus 2; horum aggregatum $2+1,39749=3,39794$, est Logarithmus numeri $25\times100=2500$. Pariter, si numeri 25, Logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 75, Logarithmus 1,87506; horum aggregatum 3,27300 est Logarithmus cui in canone convenit numerus 1875. Eodem modo; in continue proportionalibus, 1, 2, 4, &c. cum ad inveniendum locum sexagesimum quartum, numerus 1, continue multiplicandus est in 2 sexagies & ter; si numeri 1 Logarithmo 0,00000, adjiciatur numeri 2, Logarithmus 0,30103, sexagies & ter, (hoc est, $63\times0,30103$) prodibit 18,96489; cui juxta Canonem Logarithmicum conveniet numerus 92233000000000000000, circiter; vel saltem 92234000000000000000; vel potius inter utrumque: neque enim in tam vastis numeris expectandum est ut Canon Logarithmicus majori ἀκριβείᾳ rem prodat.

Logar.	Num.
1,39794	25
+2,00000	×100
3,39794	2500

Logar.	Num.
1,39794	25
+1,87506	×75
3,27300	1875

In Divisione.

Similiter; *Si ex numeri Dividendi Logarithmo, auferatur Logarithmus Divisoris, prodibit Logarithmus Quotientis.* Si autem plures continue faciendæ sint divisiones; ex propositi numeri dividendi Logarithmo, auferendi sunt Logarithmi omnium continue dividentium. Puta, si ex numeri 100, Logarithmo 2,00000, auferatur numeri 50 Logarithmus 1,69897; manebit 0,30103 Logarithmus Quotientis 2. Si ex numeri 50 Logarithmo 1,69897 auferatur 0,69867 Logarithmus numeri 5, manebit 1. Logarithmus numeri 10. Item si ex numeri 61875 Logarithmo 4,79151 auferantur tum 1,39794 Logarithmus numeri 25; tum 1,87506 Logarithmus numeri 75, (ex canone depromendi;) manebit 1,51851 Logarithmus numeri 33, duabus divisionibus per 25 & 75 continue factis provenientis. Et similiter alibi.

Logar.	Num.
2,00000	100 (2
−1,69897	50
0,30103	

Logar.	Num.
1,69897	50 (10
−0,69897	5
1,00000	

Logar.	Num.
4,79151	
−1,39794	75) $\frac{61875}{25}$ (33
−1,87506	
1,51851	

In Potestatum Genesi.

Atque hinc similiter sequitur; *Si numeri cujusvis Logarithmus dupletur, tripletur, quadrupletur, &c. proveniet Logarithmus Quadrati, Cubi, Biquadrati, &c. expositæ radicis.* Puta numeri 5 Logarithmus 0,69897, triplatus, nempe $2,09691=3\times0,69897=0,69897+0,69897+0,69897$, est Logarithmus numeri $125=5\times5\times5$.

Logar.	Num.
0,69897	5
+0,69897	×5
+0,69897	×5
2,09691	125

In Radicum extractione.

Et, vice versa; *Si numeri cujusvis Logarithmus fuerit bifariam, trifariam, quadrifariam, &c. divisus; prodibit Logarithmus radicis quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, &c.* Puta 3) 2,09691 (0,69897, erit logarithmus numeri $5=\sqrt[3]{125}$.

Fractionum Logarithmi.

Quoties autem occurrit numerus minor per majorem dividendus unde oritur numerus fractus, qui unitate minor est; prodibit Logarithmus Negativus sive Ablatitius, quippe minor quam 0,00000 Logarithmus unitatis. Puta 3) 2 ($\frac{2}{3}$ numerus, logarithmum postulabit −0,17609. qui nempe provenit subducto logarithmo numeri 3, ex logarithmo numeri 2.

Logar.	Num.
0,30103	2 ($\frac{2}{3}$
−0.47712	3
−0,17609	

Qui plura petit de Logarithmici Canonis sive Constructione sive Usu, authores adeat supra laudatos, Nepperum, Briggium, Gellibrandum, aliosque qui de hoc negotio ex professo scripserunt. Sufficiat nobis, operationum Logarithmicarum originem & fontem indicasse.

CAP.

CAP. XXXIII.

Progressio Geometrica fusius traditur.

Sicut superius Cap. XXVII & XXVIII, Progressionis Arithmeticæ doctrinam fusius prosecuti sumus, libet eadem Methodo & Progressionem Geometricam aggredi, sequentibus propositionibus explicandam. Quod quo rectius fiat, hæc sunto quibus sum usurus Symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, sit A; maximus V; extremorum rectangulum VA = V × A; maximi ad minimum ratio $\frac{V}{A}$; Rectangulorum (ipsi VA æqualium) terminis reciproce sumptis comprehensorum aggregatum, Z; numerus terminorum, T; communis ratio R (intellige, Rationis communis *Exponentem*) distantia termini cujusvis à dato, D; summa progressionis, S. Termini ipsi, à minimo inchoando, dicantur. *a, b, c, d, e,* &c. à maximo vero inchoando, dicantur α, β, γ, δ, ε, &c. Numeros qui cujusque termini à primo distantiam indicant, *Indices* appello; puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmissis, sequuntur propositiones.

κ	R⁹) V	2	A	*a*	0
ι	R⁸) V	6	AR	*b*	1
θ	R⁷) V	18	AR²	*c*	2
η	R⁶) V	54	AR³	*d*	3
ζ	R⁵) V	162	AR⁴	*e*	4
ε	R⁴) V	486	AR⁵	*f*	5
δ	R³) V	1458	AR⁶	*g*	6
γ	R²) V	4374	AR⁷	*h*	7
β	R) V	13122	AR⁸	*i*	8
α	V	39366	AR⁹	*k*	9

1. Si sit *a* = A, erit *b* = AR, *c* = AR², *d* = AR³, &c. Quilibet enim terminus in communem rationem ductus, producit terminum proxime sequentem, per def. Progressionis Geometricæ.

2. Quilibet ergo terminus producitur ex multiplicatione termini primi in Rationis communis potestatem Indici cognominem; vel (quod idem est) cognominem distantiæ ipsius à termino primo, ipsum primum non computando. Nempe AR^d. Sequitur ex præced.

3. Datis igitur Termino primo seu minimo, Ratione communi, & termini quæsiti distantia à primo; A, R, D; habetur terminus quæsitus, nempe AR^d. per præced. Puta terminus sextus *f*, cujus index sive distantia à primo 5, fit ex ductu primi in rationis communis potestatem 5^am distantiæ D = 5 cognominem. *f* = AR⁵.

4. Si terminus maximus sive ultimus sit V, erit penultimus $\frac{V}{R}$ vel R) V; antepenultimus $\frac{V}{R^2}$ vel R²) V; hinc proxime minor R³) V; & sic deinceps; V = α, R) V = β, R²) V = γ, R³) V = δ. &c. Quilibet enim terminus per rationem communem divisus, dat terminum proxime minorem. per def. progr. Geom.

5. Quilibet igitur terminus æqualis est, termino maximo per rationis communis potestatem distantiæ ab ultimo cognominem diviso. Nempe R^d) V. per præced.

6. Dato ergo termino Maximo, cum Ratione communi, & Distantia termini quæsiti à maximo; V, R, D; habetur terminus quæsitus. Puta sextus à fine, sive ante ultimum quintus, ζ = R⁵) V. per præced.

7. Dato termino quovis, (ut *f*) cum ratione communi, & cujusvis assignati majoris distantia à dato; *f*, R, D; invenitur terminus assignatus (puta *i*.) nempe, multiplicando terminum datum in Rationis communis potestatem distantiæ cognominem. Hoc est *i* = *f*R^d = *f*R³. Nam per def. vel prop. 1. pro singulis di-

stantiæ

ſtantiæ gradibus, Exponens poteſtatis Rationis communis unitate augetur; ergo, pro omnibus gradibus, tot unitatibus quot ſunt ipſi diſtantiæ gradus.

8. Dato termino quovis, cum Ratione communi, & cujuſvis aſſignati minoris diſtantia à dato; (puta f, R, D;) invenitur aſſignatus. (ut c.) Nempe dividendo datum per Rationis poteſtatem diſtantiæ cognominem. Puta $R^d)f=c$, hoc eſt $R^3)f=c$. Vel $R^d)\zeta=\iota=R^3)\zeta$. Sequitur ex def. vel prop. 4.

9. Data igitur duorum quorumvis terminorum ab invicem diſtantia, cum Ratione communi; D, R; datur eorundem ad invicem ratio. (Puta i ad f; vel ζ ad ι) nempe per 7 & 8; majoris ad minorem ratio eſt R^d, & hujus reciproca, eſt minoris ad Majorem. Puta $\frac{i}{f}=R^d=R^3$; & ſimiliter $\frac{f}{c}=R^d=R^3$; vel $\frac{\zeta}{\iota}=R^d=R^3$.

10. Data vero terminorum quorumvis ad invicem Ratione, cum eorundem ab invicem diſtantia; (puta i ad f, D) datur communis Ratio. R. Eſt enim (per præced.) datorum terminorum ratio ad invicem, R^d, rationis communis poteſtas diſtantiæ cognominis: extracta igitur analoga radice, habetur communis ratio. Nempe $R=\sqrt[d]{R^d}$.

11. Item Data terminorum quorumvis ad invicem ratione, (R^d per prop. 9.) cum ratione communi (R,) datur eorum ab invicem diſtantia. D. Quærendo nempe quota poteſtas R^d ſit ipſius R.

12. Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejuſdem progreſſionis quibuſlibet, in eadem ab invicem diſtantia poſiti; ſunt & in eadem ad invicem ratione conſtituti. Cum enim (per prop. 9.) termini majoris ad minorem ratio ſit R^d; ſi utrobique æqualis ſit tum R, tum D; erit & utrobique æqualis R^d. puta (propter æqualem utrobique diſtantiam) $i.f::\zeta.\iota$.

13. Et contra; Si eadem ſit utrobique eorundem majoris ad minorem ratio, eadem eſt & utrobique diſtantia. Nam ſi ſit utrobique æqualis tum R, tum R^d; erit & utrobique æqualis D. Puta ſi $i.f::\zeta.\iota$. erit & utrobique æqualis diſtantia.

14. Ergo etiam: Si ex terminis quotvis continue proportionalibus, ſeligantur quotlibet in eadem continue ab invicem diſtantia; erunt & illi in continua progreſſione Geometrica conſtituti. Puta, ſi $a.b.c.d.e.f.g.h.i.k.\div\div$: erunt item tum $a.c.e.g.i.\div\div$, tum $b.d.f.h.k.\div\div$, tum $a.d.g.k:\div\div$, tum $a.e.i.\div\div$ continue proportionales. Nam æqualibus continue rationibus progrediuntur per prop. 12.

$a.b.c.d.e.f.g.h.i.k.\div\div$	
$a.\ c.\ e.\ g.\ i.\div\div$	
$b.\ d.\ f.\ h.\ k.\div\div$	
$a.\ d.\ g.\ k.\div\div$	
$a.\ e.\ i.\div\div$	

15. Et contra: ſi ex terminis ita continue proportionalibus ſelecti quotlibet ſint item continue proportionales; æqualibus ab invicem diſtantiis ſumpti ſunt. Per prop. 13.

16. Data ratione communi, cum numero terminorum; R, T; invenitur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Eſt enim $T-1=D$, (extremorum diſtantia, unitate minor quam eſt numerus terminorum.) Ideoque $\frac{V}{A}=R^d=R^{t-1}$.

17. Et, Data extremorum ratione, cum terminorum numero; $\frac{V}{A}$, T; habetur communis ratio. R. Eſt enim $T-1=D$; & $\frac{V}{A}=R^d$: Ergo (extracta radice analoga) $\sqrt[d]{\frac{V}{A}}=\sqrt[d]{R^d}=R$.

18. Et, Data extremorum ratione, cum ratione communi $\frac{V}{A}$, R; habetur numerus terminorum. T. Cum enim $\frac{V}{A}=R^d$; quærendo quota poteſtas eſt $\frac{V}{A}$ vel R^d, ipſius R, habetur extremorum diſtantia D; adeoque & $T=D+1$.

19. Dato termino primo, cum ratione communi, & numero terminorum; A, R, T; habetur ultimus. V. Cum enim, per prop. 16. $\frac{V}{A}=R^d$. Erit $AR^d=A\times\frac{V}{A}=V$.

Nota interim, ob commodiorem notationem, tum hic tum poſtea, pro $T-1$, poni D, vel d.

20. Dato termino ultimo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; habetur primus A. Nam (propter $R^d=\frac{V}{A}$) erit $R^d)\ V=\frac{V}{A})\ V=A$.

21. Continue proportionalium; ſi duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus cujus index (ſive diſtantia à primo)

primo) æquatur illorum indicibus simul sumptis. Sit enim, verbi gratia, terminorum invicem multiplicatorum unius index m, alterius n: erunt ergo termini illi AR^m & AR^n; per prop. 2. horum ergo rectangulum $AR^m \times AR^n = A^2R^{m+n}$, quod, per A divisum, exhibet AR^{m+n}, hoc est (per prop. 2.) terminum illum cujus index est $m+n$, indicum illorum aggregato æqualis.

A) $\begin{array}{l} ARRR = AR^3 \\ \times\ ARR = AR^2 \\ \hline AARRRRR = A^2R^5 \end{array}$ $\quad \frac{AARRRRR = A^2R^5}{A} = AR^5$

22. Eodem modo; Si termini tres, quatuor, quinque, aut plures, continue multiplicentur, productum tot vicibus una minus divisum per terminum primum (sive ea primi potestate quæ uno gradu minor est quam numerus terminorum sic continue multiplicatorum,) exhibet terminum cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Puta, si continue multiplicatorum indices sint l, m, n, termini erunt AR^l, AR^m, AR^n, qui invicem ducti facient $AAAR^{l+m+n}$; quodli dividantur per AA, vel A^2, prodibit AR^{l+m+n}, terminus nempe cujus index $l+m+n$. per prop. 2.

23. Si itaque continue proportionalium primus terminus sit 1; (quod in tabulis Logarithmicis ponitur;) duobus, pluribusve, continue multiplicatis, proveniet terminus cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Sequitur ex prop. 21, & 22. Quia nempe quæ illic imperatur divisio per terminum primum (sive semel sive sæpius facienda) hoc casu (cum primus terminus ponitur 1,) nihil immutabit. Nam $1 \times 1 \times 1 \times R = 1 \times 1 \times R = 1 \times R = R$.

24. Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; erit quilibet terminus, ipsa potestas rationis communis, quæ termini illius indici est cognominis. per prop. 2. Nam si $A = 1$, erit $AR^d = 1R^d = R^d$.

Atque hinc pendet Regula de Multiplicatione Logarithmica. Nempe *Datorum numerorum Logarithmi simul additi, æquantur Logarithmo numeri ex datorum invicem multiplicatione producti.* per pr. 23. Sunt enim Logarithmi, numerorum ab 1 continue proportionalium Indices.

25. Continue proportionalium; si duorum alter per alterum dividatur, & quotiens in terminum primum ducatur; prodibit terminus cujus index æquatur differentiæ indicum terminorum expositorum. Sit majoris index $m+n$, minoris m, adeoque eorum differentia n; erunt per pr. 2. ipsi termini AR^{m+n}, & AR^m; facta itaque divisione, AR^m) AR^{m+n} (R^n, si quotiens ducatur in A, habetur AR^n, terminus cujus index n per pr. 2.

26. Si itaque continue proportionalium primus terminus sit 1; quotiens cujusvis termini per quemvis alium divisi, est ipse terminus cujus index æquatur illorum indicum differentiæ. (Intellige, excessui indicis divisi supra indicem dividentis; & propterea si hic major fuerit, quotientis index erit negativus.) Sequitur ex præced. quia si $A = 1$ erit $R^n = AR^n$.

27. Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; si alter per alterum dividatur, erit quotiens, ipsa potestas rationis communis, differentiæ indicum datorum numerorum cognominis. nempe R^n. per præced.

Atque hinc pendet Regula Divisionis Logarithmicæ. Nempe *Si ex Logarithmo Dividendi auferatur Logarithmus Divisoris, quod reliquum est, est Logarithmus Quotientis.* Quippe Logarithmi sunt numerorum ab 1 continue proportionalium indices.

Aliæ propositiones de operationibus Logarithmicis; puta, de extractione Radicis Quadraticæ, per bipartitionem Logarithmi; & Cubicæ, per ejusdem tripartitionem, &c. aliæque consimiles; ex propositionibus jam traditis dependent. Nec opus erit illis fusius explicandis jam immorari, ne nimis digressi videamur. Sufficit digito fontem indicasse.

28. In quantitatum continue proportionalium quotcunque progressione; Quod fit ex ductu termini primi in ultimum, æquatur facto ex mutuo ductu duorum quorumvis terminorum ab extremis æqualiter utrinque remotorum. Vel, Rectangulum sub extremis, æquatur rectangulo sub duobus quibuslibet intermediis ab extremis utrinque æqualiter distantibus. (Intellige; quorum unus tot præcise gradibus ab uno extremo, quot reliquus à reliquo, distat.) Cum enim sit terminorum alter AR^d, per prop. 2. alter R^d) V, per prop. 5. sitque distantia D utrobique eadem;

eadem; erit rectangulum $R^d) V \times A R^d = VA = \mathcal{A} = a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ &c. Atque hæc sunt illa rectangula quorum omnium aggregatum Symbolo Z designatum volumus; Et quæ simpliciter *Rectangulorum aggregatum* deinceps appellabimus.

29. Sin terminus omnium medius ab utroque extremo æqualiter distet, (quod tum continget quum terminorum numerus est impar;) Quadratum medii æquatur extremorum rectangulo. Nam propter $R^d) V = M = A R^d$, (& distantiam D utrobique æqualem,) erit $R^d) V \times A R^d = M \times M = Mq$.

30. Similiter, In quatuor terminis utut discontinue proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur rectangulo mediorum. Puta A.M::N.V. Cum enim (propter æqualem utrobique rationem) sit $AR = M$, & $NR = V$, adeoque $R) V = N$; erit $N \times M = R) V \times A R = VA$. Atque hinc sequitur Regula quæ dicitur *Aurea*, sive *Regula Trium*. Nempe

Datis.	Datur.
A)	$M \times N$ (V
V)	$M \times N$ (A
M)	$A \times V$ (N
N)	$A \times V$ (M

31. Quatuor proportionalium, datis tribus quibuslibet, datur & reliquus. Cum enim sit, per præced. $A \times V = M \times N$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $V = \frac{MN}{A}$, $A = \frac{MN}{V}$. $M = \frac{AV}{N}$. $N = \frac{AV}{M}$. Estque hæc Regula infiniti pene usus per totam Mathesin, ideoque merito *Aurea* dicta.

32. Ex tribus autem continue proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur quadrato medii. Puta A.M.V.∴. Nam, propter æqualem utrobique rationem, est $AR = M$, & $MR = V$; ergo $R) V = M$. Ideoque $R) V \times A R = VA = M \times M = Mq$.

Datis	Datur.
A)	Mq (V
V)	Mq (A
$\sqrt{AV} =$	M

33. Trium ergo continue proportionalium, datis duobus quibusvis, datur & reliquus. Cum enim, per præced. $AV = Mq$. Erit A) Mq (V, & V) Mq (A, & $\sqrt{AV} = \sqrt{Mq} = M$.

34. Atque idem valet de tribus quatuorve terminis progressionis continuæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus intervallis distantibus. Puta si $a.b.c.d.e.f.g.\div\div$ erit $ae = c^2$; nam & $a.c.e \div\div$ per 14. Item $af = cd$; & $de = bg$; & sic alibi. Nam $a.c::d.f.$ vel $a.d::c.f.$ & $b.d::e.g.$ vel $b.e::d.g.$ &c. per 12.

35. Sed & præcedentium aliquot conversæ pariter demonstrantur. Puta conversa prop. 28. In continue proportionalibus, (excepta tantum æqualium progressione, ut 1.1.1.1. &c. ∴, quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur;) si duorum terminorum intermediorum rectangulum rectangulo extremorum æquetur; sunt illi ab extremis æqualiter utrinque remoti, (hoc est, quot gradibus eorum alteruter ab alterutro extremorum distat, tot & reliquus à reliquo.) Puta, si sint $a.b.c.d.e.f.g.\div\div$, sitque $ce = ag$; totidem gradibus distant a, c, atque e, g; item a, e, atque c, g. Cum enim duorum c, e, alter sit aR^d, alter $R^d) g$; adeoque $R^d) g \times a R^d = (ce =) ag$; æqualis erit utrobique R^d (ut divisio & multiplicatio se mutuo destruant,) adeoque & distantia D utrobique æqualis per prop. 13.

36. Et conversa prop. 29. Si continue proportionalium, intermedii alicujus quadratum æquetur rectangulo extremorum; æqualiter ille ab utroque extremo distat. Probatur ut præcedens.

37. Item conversa Prop. 32. Si unius termini quadratum æquetur duorum rectangulo, erit ille medius inter hos Geometricus. Si enim $AV = Mq = MM$, Erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MM}{V}$ & $\frac{A}{M} = \frac{M}{V}$. Ergo A.M.V ∴

38. Similiter & conversa Prop. 30. Si ex terminis quatuor, duorum rectangulum, rectangulo reliquorum æquetur; sunt illi quatuor proportionales. Puta, Si $AV = MN$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MN}{V}$, & $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ vel etiam $\frac{A}{N} = \frac{M}{V}$; hoc est A.M::N.V. & A.N::M.V. Item, quia, ut prius,

$AV = MN$, erit $\frac{MN}{A} = V$, & $\frac{M}{A} = \frac{V}{N}$, vel etiam $\frac{N}{A} = \frac{V}{M}$: hoc eſt M. A :: V. N. & N. A :: V. M. Nam ſingulis his modis proportio concluditur.

39. Hinc ſequitur ; Si quatuor termini ſint proportionales, ſunt & inverſe (ἀνάπαλιν) proportionales. Puta ſi A. M :: N. V. Erit (per. pr. 30.) $AV = MN$; ideoque, (ut oſtenſum eſt, Prop. præced.) M. A :: V. N.

40. Item ; ſi quatuor termini ſint proportionales, ſunt & alterne (permutatim, viciſſim, ἐναλλὰξ,) proportionales. Puta ſi A. M :: N. V. adeoque $AV = MN$, erit A. N :: M. V. ut eſt oſtenſum pr. 38. Item, N. A :: V. M. ut ibid. & Pr. 39.

41. Porro, ſi quatuor proportionalium vel primus & tertius, vel ſecundus & quartus, æqualiter vel multiplicentur vel dividantur, manent adhuc proportionales. Puta ſi A. M :: N. V, hoc eſt A. AR :: N. NR ; (ubi communis ratio eſt R ;) erit & A. MB :: N. VB, hoc eſt A. ARB :: N. NRB. (ubi communis ratio eſt RB) Item, A. B) M :: N. B) V. hoc eſt A. B) RA :: N. B) RN. ubi communis ratio eſt B) R. Similiter ſi A. M :: N. V. hoc eſt R) M. M :: R) V. V. erit B) A. M :: B) N. V. hoc eſt BR) M. M :: BR) V. V &c. Vel ſic. Si $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ tum $\frac{A}{M}B = \frac{N}{V}B$. & B) $\frac{A}{M}$ = B) $\frac{N}{V}$. Sive (quod tantundem eſt) $\frac{AB}{M} = \frac{NB}{V}$, & $\frac{A}{BM} = \frac{N}{BV}$. Vel etiam C) $\frac{AB}{M}$ = C) $\frac{NB}{V}$, ſive $\frac{AB}{CM} = \frac{NB}{CV}$, ſive AB. CM :: NB. CV. &c.

42. Item, ſi proportionales fuerint tum A. M :: N. V. tum $\alpha . \mu :: \nu . \upsilon$. tum $a . m :: n . u$. (tum, ſi placet quaterni, plures quotlibet ;) erunt item tum facti, tum dividendo orti, (terminis reſpective ſumptis) termini proportionales. Eſto enim in primis ratio R, in ſecundis ϱ, in tertiis r. Adeoque A. M = AR :: N. V = NR. Item $\alpha . \mu = \alpha\varrho :: \nu . \upsilon = \nu\varrho$. Et $a . m = ar :: n . u = nr$. Ergo (per Prop. 41.) $A\alpha a . M\mu m = AR\alpha\varrho ar :: N\nu n . V\upsilon u = NR\nu\varrho nr$. hoc eſt $A\alpha a . A\alpha aR\varrho r :: N\nu n . N\nu nR\varrho r$. ubi communis ratio eſt $R\varrho r$. Pariter & $\frac{A\alpha}{a} . \frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\varrho}{ar} :: \frac{N\nu}{n} . \frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\varrho}{nr}$. ſive a) A$\alpha$. ar) A$\alpha$R$\varrho$ :: n) Nν. nr) NνRϱ. ubi communis utrobique ratio eſt $\frac{R\varrho}{r}$ vel r) Rρ. Vel ſic

A.	M = AR ::	N.	V = NR.
α.	$\mu = \alpha\rho$ ::	ν.	$\upsilon = \nu\rho$.
a.	$m = ar$ ::	n.	$u = nr$.
Aαa.	Mμm = AαaRϱr ::	Nνn.	Vυu = NνnRϱr.

$\frac{A\alpha}{a} . \frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\varrho}{ar} :: \frac{N\nu}{n} . \frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\varrho}{nr}$.

43. Sed & idem obtinet in continue proportionalibus. Quod ſimiliter probandum erit. Puta,

Si A . B . C . D . E ∴ vel A . AR . AR² . AR³ . AR⁴ ∴
Et $\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon$ ∴ vel $\alpha . \alpha\varrho . \alpha\varrho^2 . \alpha\rho^3 . \alpha\varrho^4$ ∴
Erunt Aα. Bβ. Cγ. Dδ. Eε ∴ vel Aα. AαRρ. AαR$^2\varrho^2$. AαR$^3\rho^3$. AαR$^4\varrho^4$ ∴
Et $\frac{A}{\alpha} . \frac{B}{\beta} . \frac{C}{\gamma} . \frac{D}{\delta} . \frac{E}{\varepsilon}$ ∴ vel $\frac{A}{\alpha} . \frac{AR}{\alpha\rho} . \frac{AR^2}{\alpha\varrho^2} . \frac{AR^3}{\alpha\varrho^3} . \frac{AR^4}{\alpha\varrho^4}$ ∴

44. Et quidem, licet altera progreſſio creſcens fuerit, altera decreſcens. Ut ſi tum A . AR . AR² . AR³ . AR⁴ . ∴ tum $\alpha . \varrho$) $\alpha . \rho^2$) $\alpha . \varrho^3$) $\alpha . \rho^4$) α. ∴ erit etiam A$\alpha . \varrho$) αAR . ρ^2) αAR² . ϱ^3) αAR³ . ρ^4) αAR⁴ . ∴ ut patet; quippe communis ratio eſt ϱ) R.

Atque hujuſmodi complures proportionalium immutationes & comparationes

facile esset tum comminiſci tum demonſtrare. Verum illud haud eſt neceſſe, ſed cujuſlibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet, ſuiſque uſibus accommodet. Quæ autem huc ſpectant non pauca infra, ubi Euclidis Elementum quintum explicaturus ſum, tradentur.

45. In continue proportionalibus, extremorum Rectangulum ductum in numerum terminorum, æquatur aggregato Rectangulorum omnium æqualium (ſenſu quo pr. 28.) cum enim per pr. 28. ſit $\mathcal{A}=a\alpha=b\beta=c\gamma=d\delta=e\varepsilon$ &c. ſintque hæc totidem quot termini; (nam ſinguli termini ordine directo ſumpti in reſpectivos terminos ordinis retrogradi duci ſupponuntur; adeoque tot erunt rectangula quot termini;) erit $T\mathcal{A}=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta+e\varepsilon$ &c.

Notandum autem eſt rectangulum $a\alpha$, & $k\varkappa$, (ſi nempe k ponatur terminus ultimus) & in reliquis ſimiliter, revera idem eſſe rectangulum (nam a & $\varkappa$, item α & k, ſunt idem terminus,) ſed cum id non ſtatim appareat, atque alius item de cauſis, commodius putavimus tanquam ſi eſſent diſtincta bis numerare; (adeoque tot reputare rectangula quot ſunt termini:) cum tamen ſi $a\alpha$ & $k\varkappa$ (& ſimiliter de reliquis) pro eodem habeamus rectangulo, erit numerus rectangulorum diverſorum $\frac{1}{2}T$, ubi termini ſunt numero pares; at $\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}$, ubi numero impares; nam hoc caſu, ne noſtro quidem computo quadratum medii bis ponitur. Quod monuiſſe ſufficiat. Nos itaque priorem loquendi formulam potius ſelegimus: quo ſenſu & deinceps loqui intelligamur.

46. Idem valet in quatuor diſcontinue proportionalibus. Puta $A.M::N.V.$ Nam $AV+MN+NM+VA=4\mathcal{A}$. Per Pr. 30.

47. Dato itaque in continue proportionalibus quotlibet, extremorum rectangulo, & numero terminorum $\mathcal{A}$, T; datur Rectangulorum aggregatum. Z. Nempe $Z=T\mathcal{A}$. per prop. 45.

48. Item dato extremorum rectangulo, & rectangulorum Aggregato; $\mathcal{A}$, Z; datur numerus terminorum. T. Nam, quia $Z=T\mathcal{A}$, erit $\mathcal{A})Z=T$.

49. Et Dato numero terminorum, cum rectangulorum aggregato; T, Z; datur rectangulum extremorum. $\mathcal{A}$. Cum enim ſit $Z=T\mathcal{A}$. erit $T)Z=\mathcal{A}$.

50. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino minimo; T, Z, A; datur maximus. V. Nam per præced. $T)Z=\mathcal{A}$. Ergo $AT)Z=V$.

51. Datis iiſdem; datur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Nam per præced. $AT)Z=V$. Ergo $A^2T)Z=\frac{V}{A}$.

52. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino maximo; T, Z, V; datur minimus. A. Nam per prop. 49. $T)Z=\mathcal{A}$. Ergo $VT)Z=A$.

53. Datis iiſdem; datur extremorum ratio. $\frac{V}{A}$. Nam, per præced. $VT)Z=A$, Ergo $\frac{V}{A}=\frac{V}{VT)Z}=\frac{V^2T}{Z}$. Vel etiam $Z)V^2T$ ($\frac{V}{A}$. vel $V^2T.Z::V.A$.

54. Datis extremorum tum ratione, tum rectangulo $\frac{V}{A}$, $\mathcal{A}$; datur terminus minimus A. Nam $\frac{V}{A})\mathcal{A}$ (A^2. Cujus radix, A.

55. Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. Nam $\mathcal{A}\times\frac{V}{A}=V^2$. Ergo $\sqrt{:}\mathcal{A}\times\frac{V}{A}:=V$.

56. Datis extremis (vel eorundem ratione, & rectangulo) cum communi ratione; $\frac{V}{A}$, $\mathcal{A}$, R; habetur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per prop. 18. habetur T. ergo & (per prop. 47.) $Z=T\mathcal{A}$.

57. Datis extremis (vel eorundem ratione & rectangulo,) cum rectangulorum aggregato; $\frac{V}{A}$, $\mathcal{A}$, Z; habetur communis ratio. R. Nam per prop. 48. habetur T; ergo & R. per prop. 17.

58. Datis termino minimo, numero terminorum, & ratione communi; A, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per pr. 19. $V=AR^d$. Ergo per pr. 47. $TVA=Z=TA^2R^d$. (per d intellige $T-1$.)

59. Datis termino minimo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; A, T, Z; datur ratio communis. R. Nam per prop. 51. habetur $\frac{V}{A}=\frac{Z}{A^2T}$. Ergo per pr. 17. $R=\sqrt[d]{\frac{Z}{A^2T}}$.

60. Datis

60. Datis termino maximo, numero terminorum, & communi ratione; V, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per prop. 20. $A = R^d)\ V$. Ergo per prop. 47. $TVA = Z = R^d)\ TV^2$.

61. Datis termino maximo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; V, T, Z; datur communis ratio R. Nam, per prop. 53. $\frac{V}{A} = Z)\ V^2\ T$. Ergo per prop. 17. $R = \sqrt[d]{\frac{V^2\ T}{Z}}$.

62. Datis numero terminorum, ratione communi, & rectangulorum aggregato; T, R, Z; datur terminus minimus. A. Nam per pr. 16. $\frac{V}{A} = R^d$. Et per pr. 49. $T)\ Z = VA$. Ergo per pr. 54. $TR^d)\ Z = \frac{V}{A})\ VA = A^2$. Ideoque $A = \sqrt{\frac{Z}{TR^d}}$.

63. Datis iisdem; datur terminus maximus. V. Nam per pr. 16 & 49. habentur $\frac{V}{A}$ & VA, ut prius. Ergo per pr. 55. $V = \sqrt{:VA \times \frac{V}{A}:} = \sqrt{\frac{ZR^d}{T}}$.

64. Datis termino minimo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; A, R, Z; invenitur terminorum numerus T. Nam per pr. 45, vel 47. $Z = TVA$. adeoque $A)\ Z = TV$. Item per pr. 19. $V = AR^d$. adeoque (cum sit $D + 1 = T$) erit $RV = ARR^d = AR^t$. Et $RVT = TAR^t = A)\ ZR$. (quia nempe $A)\ Z = TV$.) Ideoque $TR^t = A^2)\ ZR$. Quærendum igitur, quota potestas datæ rationis communis R, ducta in suum indicem sive exponentem potestatis, æquabitur quantitati datæ $A^2)\ ZR$. quippe potestatis istius index sive exponens est T, numerus terminorum.

65. Iisdem datis; reperitur terminus maximus. V. nam per præced. habetur T. adeoque V per pr. 19.

66. Datis termino maximo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; V, R, Z; invenitur numerus terminorum, T. Est enim per pr. 45 vel 47. $Z = TVA$. adeoque $V)\ Z = TA$. Item per pr. 20. $A = R^d)\ V$. adeoque $R)\ A = R^t)\ V$. Et $R)\ AT = R^t)\ VT = RV)\ Z$, nempe, quia $V)\ Z = TA$. Et $R^t)\ T = RV^2)\ Z$. Quærendum igitur quota potestas ipsius R, exponentem suum dividens, exhibebit quantitatem datam $RV^2)\ Z$. quippe potestatis istius exponens sive index est T, numerus terminorum quæsitus. Vel etiam (nam eodem recidit) mutatis sedibus, $T)\ R^t = Z)\ RV^2$. Ut quærendum sit, quota potestas ipsius R per suum indicem sive exponentem divisa, exhibebit quantitatem cognitam $Z)\ RV^2$. quippe potestatis istius exponens est T, quæsitus numerus terminorum.

67. Datis iisdem, reperitur terminus minimus, A. nam per præced. habetur T. adeoque A, per pr. 20.

Atque hæ quidem propositiones omnes hactenus traditæ, respondent totidem propositionibus Cap. XXVII. de Progressione Arithmetica; singuli singulis eodem ordine.

Sequitur Theorema, quo, in Geometricæ progressionis summa investiganda, utuntur fere omnes Arithmetici. Nempe,

68. Si terminus maximus in communem multiplicatorem ducatur, & ex producto auferatur terminus minimus, residuumque per multiplicatorem communem unitate minutum dividatur; quotiens exhibet progressionis totius summam. Hoc est, $\frac{VR - A}{R - 1} = S$.

Quis hanc primus invenerit regulam, aut quibus mediis, ego plane ignoro; & quidem, utut ea plerique utantur, non memini tamen me illam uspiam demonstratam vidisse; cum tamen vel maxime demonstratione indigeat. Nobis itaque hanc libuit demonstrationem comminisci.

Cum sit, per pr. 19. $V = AR^d$, adeoque (propter $T = D + 1$,) $VR = AR^t$, & propterea $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$. Facta divisione quantitatis $AR^t - A$, per quantitatem $R - 1$, (eo modo quo supra ostendimus dum divisionem Symbolicam docuimus,) quotientis loco prodibit series exposita $A + AR + AR^2$ &c. hoc est, quantitas S, sive terminorum omnium summa.

Exempli

Exempli gratia. Ponamus numerum terminorum $T=4$. adeoque $AR^t=AR^4$. Et dividenda proponatur AR^4-A, per $R-1$. Cum igitur ſit $R)AR^4(AR^3$; Erit quotientis membrum primum AR^3, quod in diviſorem ductum dat AR^4-AR^3. hoc ex dividendo ſubductum relinquit AR^3-A. Deinde cum ſit $R)AR^3(AR^2$: erit quotientis membrum ſecundum $+AR^2$ quod ductum in diviſorem dat AR^3-AR^2. hoc ex dividendo ſubductum relinquit AR^2-A. Eodem modo, quotientis membrum tertium erit $+AR$. adeoque facta tum multiplicatione tum ſubductione, manebit $AR-A$. Denique quotientis membrum quartum, eodem modo repertum, eſt $+A$. Et peracta tum multiplicatione tum ſubductione ut prius, nihil reſtabit.

$$\begin{array}{r|l}
R-1 & AR^4-A \\
\hline
 & AR^4-AR^3 \\
\hline
 & AR^3-A \\
 & AR^3-AR^2 \\
\hline
 & AR^2-A \\
 & AR^2-AR \\
\hline
 & AR-A \\
 & AR-A \\
\hline
 & 00\ \ 0
\end{array}$$

Totaque operatione ſic peracta, habetur quotiens $\frac{AR^4-A}{R-1}=AR^3+AR^2+AR+A=S$. Et ſimiliter continget quantuſcunque ponatur numerus terminorum; nempe quotiens ſingulos exhibebit. Adeoq; univerſaliter $\frac{VR-A}{R-1}=\frac{AR^t-A}{R-1}=A+AR+AR^2$ &c. $=S$. quod erat demonſtrandum.

Id ipſum pariter oſtendetur, ſi juxta prop. 20. exponamus $A=R^d)V$. Adeoque $\frac{VR-A}{R-1}=\frac{VR-R^d)V}{R-1}=\frac{VR^t-V}{R^t-R^d}=V+\frac{V}{R}+\frac{V}{R^2}+\frac{V}{R^3}$ &c. $=S$. ut ex adjuncta diviſionis operatione manifeſtum eſt.

$$\begin{array}{r|l}
R^4-R^3 & VR^4-V \\
\hline
 & VR^4-VR^3 \\
\hline
 & VR^3-V \\
 & VR^3-VR^2 \\
\hline
 & VR^2-V \\
 & VR^2-VR \\
\hline
 & VR-V \\
 & VR-V \\
\hline
 & 00\ \ 0
\end{array}$$

Libet autem aliam methodum, ſummam progreſſionis Geometricæ colligendi, ex D. *Oughtredo* adjungere, poſtquam hoc lemma oſtendero. Nempe

69. Si ſint quotlibet termini proportionales; erit ut unus antecedentium ad ſuum conſequentem, ſic antecedentium omnium aggregatum, ad aggregatum omnium conſequentium. (Quæ eſt 12 e 5.) Puta ſi $A.\alpha::B.\beta::C.\gamma::D.\delta$. &c. hoc eſt $A.RA::B.RB::C.RC::D.RD$. &c. Erit $A.\alpha::A+B+C+D$ &c. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ &c. hoc eſt $A.RA::A+B+C+D$ &c. $RA+RB+RC+RD$ &c. propter communem utrobique rationem R.

70. Ideoque; In continue proportionalibus, ut terminus primus, ad ſecundum, (hoc eſt, ut 1 ad rationis communis exponentem R;) ſic ſumma terminorum omnium præter ultimum, ad ſummam omnium præter primum. Puta ſi $A.B.C.D.V$ ∴ hoc eſt $A.B::B.C::C.D::D.V$. Erunt $A+B+C+D=S-V$, omnes antecedentes; & $B+C+D+V=S-A$, omnes conſequentes. Ergo per præced. $A.B(::1.R)::S-V.S-A$.

71. Et conſequenter; Si ex rectangulo ſecundi & ultimi, auferatur quadratum primi; reſiduumque dividatur per terminum ſecundum dempto primo; prodibit ſumma terminorum omnium. Cum enim per præced. ſit $A.B::S-V.S-A$. adeoque per pr. 30. $SB-VB=SA-Aq$, & tranſponendo, $SB-SA=VB-Aq$. Erit (utrinque dividendo) $S=\frac{VB-Aq}{B-A}$.

Sed & ex eodem lemmate demonſtratur Prop. 68. cum enim ſit per Prop. 70. $S-V.S-A::(A.B::A.AR::)1.R$. adeoque per prop. 30. $SR-VR=S-A$.

Et, transponendo, $SR-S=VR-A$: erit (utrinque dividendo) $S=\frac{VR-A}{R-1}$.

Vel sic, per præsentem, $S=\frac{VB-Aq}{B-A}=\frac{VAR-Aq}{AR-A}=\frac{VR-A}{R-1}$.

72. Datis igitur extremis & ratione communi; A, V, R, habetur terminorum omnium summa S. Nempe $S=\frac{VR-A}{R-1}$. per prop. 68. vel 71.

73. Idem habetur, si, pro extremis A, V, darentur A, $\sqrt{A}$. Nempe $S=\frac{A)\sqrt{A}R-A}{R-1}$. Nam $A)\sqrt{A}=V$.

74. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nempe $S=\frac{\frac{V}{A}AR-A}{R-1}$. Nam $\frac{V}{A}A=V$.

75. Vel V, $\sqrt{A}$. Nempe $S=\frac{VR-V)\sqrt{A}}{R-1}$. Nam $V)\sqrt{A}=A$.

76. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $S=\frac{VR-\frac{V}{A})V}{R-1}$. Nam $\frac{V}{A})V=A$.

77. Vel denique $\sqrt{A}$, $\frac{V}{A}$. Nempe $S=\frac{R\sqrt{\frac{V}{A}\sqrt{A}-\sqrt{:\frac{V}{A})\sqrt{A}}}}{R-1}$. Nam $\frac{V}{A}\sqrt{A}=V^2$. Et $\frac{V}{A})\sqrt{A}=A^2$.

78. Et, datis extremis, cum terminorum omnium summa; A, V, S; habetur communis ratio.. R. Nam per prop. 68, vel 72. $S=\frac{VR-A}{R-1}$. hoc est, $SR-S=VR-A$; adeoque $SR-VR=S-A$, & $\frac{S-A}{S-V}=R$. Vel brevius; per prop. 70. $\frac{S-A}{S-V}=\frac{B}{A}=\frac{R}{1}=R$.

79. Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, $\sqrt{A}$. Nempe $R=\frac{S-A}{S-A)\sqrt{A}}$.

80. Vel, A, $\frac{V}{A}$. Nempe $R=\frac{S-A}{S-\frac{V}{A}A}$.

81. Vel, V, $\sqrt{A}$. Nempe $R=\frac{S-V)\sqrt{A}}{S-V}$.

82. Vel, V, $\frac{V}{A}$. Nempe $R=\frac{S-\frac{V}{A})V}{S-V}$.

83. Vel denique, $\sqrt{A}$, $\frac{V}{A}$. Nempe $R=\frac{S-\sqrt{:\frac{V}{A})\sqrt{A}}}{S-\sqrt{:\frac{V}{A}\sqrt{A}}}$.

84. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum omnium summa; A, R, S; datur maximus. V. Nam (ut in Prop. 78.) $SR-S=VR-A$. Ergo $SR-S+A=VR$, & $\frac{SR-S+A}{R}=V$.

85. Et, datis termino maximo, ratione communi, & terminorum omnium summa; V, R, S; datur minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR-S+A=VR$; erit (transponendo) $VR-SR+S=A$.

86. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum numero; A, R, T; datur terminorum omnium summa. S. Nam, per Pr. 19. $V=AR^d$, & $VR=AR^t$; Ergo per Prop. 68. $S=\frac{VR-A}{R-1}=\frac{AR^t-A}{R-1}$.

87. Et, datis termino minimo, ratione communi, & progressionis summa; A, R, S; datur numerus terminorum. T. Est enim (ut in Prop. 84.) $SR-S+A=VR=AR^t$ (per Pr. 19.) Adeoque $\frac{SR-S+A}{A}=R^t$. Quærendum igitur quota potestas Exponentis rationis communis R, æquatur quantitati cognitæ $\frac{SR-S+A}{A}$.

88. Et, Datis termino minimo, progreſſionis ſumma, & numero terminorum; A, S, T; datur communis ratio. R. Nam (ut in præced.) $SR-S+A=AR^t$. adeoque $SR-AR^t=S-A$. Et $\frac{S-A}{A}=\frac{S}{A}R-R^t$. Cujus æquationis radix eſt R, quæſita.

89. Et datis ratione communi, numero terminorum, & ſumma progreſſionis; R, T, S; datur terminus minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR-S+A=AR^t$. adeoque $SR-S=AR^t-A$. Erit $A=\frac{SR-S}{R^t-1}=\frac{R-1}{R^t-1}S$.

90. Pari modo; Dato termino maximo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; datur ſumma progreſſionis. S. Nam per pr. 20. $A=R^d)V$. Ergo per pr. 68. $S=\frac{VR-A}{R-1}=\frac{VR-R^d)V}{R-1}=\frac{VR^t-V}{R^t-R^d}$.

91. Et; Dato termino maximo, cum ratione communi, & progreſſionis ſumma; V, R, S; datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 85. $A=VR+S-SR$; adeoque per pr. 16. $\frac{V}{VR+S-SR}=\frac{V}{A}=R^d$. Quærendum itaque quota poteſtas exponentis datæ rationis R, æquatur datæ quantitati. Quippe iſtius poteſtatis index unitate auctus, eſt quæſitus numerus terminorum $T=D+1$.

92. Et; Datis termino maximo, progreſſionis ſumma, & numero terminorum; V, S, T; datur communis ratio. R. Eſt enim, per pr. 90. $S=\frac{VR^t-V}{R^t-R^d}$, adeoque $SR^t-SR^d=VR^t-V$, & $V=SR^d-SR^t+VR^t$, & $\frac{V}{S-V}=\frac{S}{S-V}R^d-R^t$. Cujus Æquationis radix R, eſt exponens communis rationis quæſitæ.

93. Et; Datis ratione communi, numero terminorum, & progreſſionis ſumma; R, T, S; datur terminus maximus. V. Eſt enim, (ut in præced.) $SR^t-SR^d=VR^t-V$. Ergo $\frac{SR^t-SR^d}{R^t-1}=V$.

94. Porro; (ut compendio utar,) Datis A, V, S; datur T. Nam, per pr. 78. $\frac{S-A}{S-V}=R$. Et, per pr. 16 $\frac{V}{A}=R^d$. Quærendum itaque, quota poteſtas R cognitæ, æquatur cognitæ R^d. ut habeatur $D=T-1$, adeoque $D+1=T$.

95. Idem habetur, ſi pro A, V, darentur A, $\sqrt{A}$. Nam habetur R, per pr. 79. Et T ut prius.

96. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nam habetur R, per pr. 80. & T, ut prius.

97. Vel V, $\sqrt{A}$. Nam habetur R, per pr. 81. & T, ut prius.

98. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe R, per pr. 82. & T, ut prius.

99. Vel denique $\sqrt{A}$, $\frac{V}{A}$. Nempe R, per pr. 83. Et T, ut prius.

100. Datis A, V, T, datur S. Nam per pr. 17. habetur $R=\sqrt[d]{\frac{V}{A}}$. Ergo per pr. 68. $\frac{V\sqrt[d]{\frac{V}{A}}-A}{\sqrt[d]{\frac{V}{A}}-1}=S$.

101. Idem habetur, ſi, pro A, V, darentur A, $\sqrt{A}$. Nempe $\frac{A)\sqrt{A}\sqrt[d]{A^a)\sqrt{A}:-A}}{\sqrt[d]{A^a)\sqrt{A}:-1}}=S$. Nam $A)\sqrt{A}(V$. Et $A^2)\sqrt{A}(\frac{V}{A}$.

102. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\frac{V}{A}A\sqrt[d]{\frac{V}{A}:-A}}{\sqrt[d]{\frac{V}{A}:-1}}=S$. Nam $\frac{V}{A}A=V$.

103. Vel V, $\sqrt{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt[d]{A:\sqrt{A})V^2:-V)\sqrt{A}}}{\sqrt[d]{A:\sqrt{A})V^2:-1}}=S$. Nam $\sqrt{A})V^2(\frac{V}{A}$. Et $V)\sqrt{A}(A$.

104. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt[d]{\frac{V}{A}}-\frac{V}{A})V}{\sqrt[d]{\frac{V}{A}}-1}=S$. Nam $\frac{V}{A})V(A$.

105. Vel

105. Vel denique $\mathcal{A}$, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\sqrt{d}\frac{V}{A}\sqrt{:\frac{V}{A}\mathcal{A}:}-\sqrt{:\frac{V}{A})\mathcal{A}:}}{\sqrt{d}\frac{V}{A}-1} = S$. Nam $\sqrt{:\frac{V}{A}\mathcal{A}:}=V$. Et $\sqrt{:\frac{V}{A})\mathcal{A}:}=A$.

106. Datis A, T, S; datur V. Nam habetur R, per pr. 88. adeoque V, per prop. 19.

107. Datis V, T, S; datur A. Nam habetur R, per pr. 92. Et A, per pr. 20.

108. Datis A, V, Z: datur S. Nam per pr. 48. habetur $T=\mathcal{A})Z$. Et deinde S per pr. 100.

109. Idem habetur, ſi pro A, V, dentur A, $\mathcal{A}$. per prop. 48, 101.

110. vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 102.

111. vel V, $\mathcal{A}$. per pr. 48, 103.

112. vel V, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 104.

113. vel $\mathcal{A}$, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 105.

114. Datis A, V, S; datur Z. Nam per pr. 78. habetur $R=\frac{S-A}{S-V}$. adeoque Z per pr. 56.

115. Idem habetur, ſi, pro A, V, dentur. A, $\mathcal{A}$, per pr. 79, 56.

116. vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 80, 56.

117. vel V, $\mathcal{A}$, per pr. 81, 56.

118. vel V, $\frac{V}{A}$, per pr. 82, 56.

119. vel denique $\mathcal{A}$, $\frac{V}{A}$. per pr. 83, 56.

120. Datis A, R, Z; datur S. Quippe habetur T, per pr. 64. & deinde S, per prop. 86.

121. Datis A, R, S; datur Z. Nam per prop. 84. habetur V. adeoque Z per prop. 56.

122. Datis A, T, Z; datur S. Nam per prop. 59. habetur R. adeoque S per prop. 86.

123. Datis A, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 88. adeoque Z per pr. 58.

124. Datis V, R, Z; datur S. Nempe T per pr. 66. adeoque S per pr. 90.

125. Datis V, R, S; datur Z. Nempe A per pr. 85. & Z per pr. 56.

126. Datis V, T, Z; datur S. Nempe R per pr. 61. & S per pr. 90.

127. Datis V, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 92. & Z per pr. 60.

128. Datis R, T, $\mathcal{A}$; datur A. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & A per pr. 54.

129. Datis iiſdem; datur V. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & V per pr. 55.

130. Datis iiſdem; datur S. Nempe A per pr. 128. & S per pr. 86.

131. Datis $\mathcal{A}$, R, Z; datur A. Nempe T per pr. 48, & A per pr. 128.

132. Datis iiſdem; datur V. Nempe T ut prius. & V per pr. 129.

133. Datis iiſdem; datur S. Nempe T, ut prius, & S per pr. 130.

134. Datis $\mathcal{A}$, R, S; datur A. Eſt enim per pr. 68. $R-1)VR-A$ (S. ideoque $SR-S=VR-A$. Et $SRA-SA=\mathcal{A}R-A^2$. adeoque $A^2+SRA-SA=\mathcal{A}R$. Cujus æquationis radix eſt $A=\frac{\sqrt{:S^2R^2-2S^2R+S^2+4\mathcal{A}R:}-SR+S}{2}$.

135. Datis iiſdem; datur V. Nam (ut in præced.) $SR-S=VR-A$. adeoque $SRV-SV=V^2R-\mathcal{A}$. Et $\mathcal{A}=RV^2-SRV+SV$. Et $R)\mathcal{A}=V^2-SV+R)SV$. Cujus æquationis radix eſt $V=\frac{\sqrt{:S^2R^2-2S^2R+S^2+4\mathcal{A}R:}+SR-S}{2R}$.

136. Datis iiſdem; datur T. Nempe per pr. 134, habetur A; adeoque T per prop. 87.

137. Datis iiſdem, datur Z. Nempe per præced. habetur T; adeoque Z per prop. 47.

138. Datis $\frac{V}{A}$, R, Z; datur A. Nam per pr. 18. habetur T; adeoque A per prop. 62.

139. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per prop. 63.

140. Datis iisdem; datur S. Nempe A & V per duas præcedentes. adeoque S per pr. 72.

141. Datis $\frac{V}{A}$, R, S; datur A. Nam per pr. 18. habetur T. adeoque A per prop. 89.

142. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per prop. 93.

143. Datis iisdem; datur Z. Nempe T ut prius, & A, V, per duas præcedentes; & tandem Z per pr. 47.

144. Datis $\frac{V}{A}$, T, Z; datur A. Nam habetur R per pr. 17. & VA per pr. 49. adeoque A per pr. 54.

145. Datis iisdem; datur V. Nempe VA ut in præced. adeoque V per prop. 55.

146. Datis iisdem; datur S. Nempe inventis R per pr. 17. & A, V, per duas præcedentes; habetur S per pr. 72.

147. Datis $\frac{V}{A}$, T, S; datur A. Nempe habetur R per pr. 17; adeoque A per pr. 89.

148. Datis iisdem; datur V. Nempe R ut prius; & V per pr. 93.

149. Datis iisdem; datur Z. Nempe inventis A, V, per duas præcedentes, habetur Z per pr. 47.

150. Datis R, T, Z; datur S. Nempe A per pr. 62. adeoque S per pr. 86.

151. Datis R, T, S; datur Z. Nempe A & V per pr. 89, & 93. adeoque Z per pr. 47.

Atque hactenus Progressionem Geometricam fusius explicavimus; & Problemata, pleraque saltem, eo spectantia expedivimus. Libet autem sequente capite (quod de Progressione Arithmetica supra factum est Cap. XXVIII.) in breviorem synopsin, quæ jam tradidimus, præcipua problemata compingere.

CAP. XXXIV.

Progressionis Geometricæ brevior Synopsis.

QUæ in præcedente Capite fusius tradidimus, de Progressione Geometrica, Problemata; libet hic in breviorem formam, sed & alio ordine, redigere: Retentis tamen iisdem quibus ibidem usi sumus Symbolis.

	Theoremata.
1	$D = T - 1.$
2	$V = A R^d.$
3	$A = \frac{V}{R^d}.$
4	$Z = TVA = TA^2 R^d = \frac{TV^2}{R^d}.$
5	$S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1} = \frac{R^t - 1}{R - 1} A = \frac{VR - : R^d) V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d} = \frac{R^t - 1}{R^t - R^d} V.$
6	$A = \frac{R - 1}{R^t - 1} S.$
7	$V = \frac{R^t - R^d}{R^t - 1} S.$
8	$SR - S = VR - A.$
9	$R = \frac{S - A}{S - V}.$
10	$A = VR + S - SR.$
11	$VR = AR^t = A + SR - S.$
12	$V = \frac{A + SR - S}{R}.$
13	$SR^t - SR^d = VR^t - V.$
14	$V = SR^d - SR^t + VR^t.$
15	$\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V} R^d - R^t.$

Proble-

Problemata.

	Data.	Quæsita.
1	A, V:	$\mathcal{V}A = VA$.
2		$\frac{V}{A} = A) V$.
3	A, $\mathcal{V}A$:	$V = A) \mathcal{V}A$. per 2.
4	A, $\frac{V}{A}$:	$V = \frac{V}{A} A$. per 1.
5	V, $\mathcal{V}A$:	$A = V) \mathcal{V}A$. per 2.
6	V, $\frac{V}{A}$:	$A = \frac{V}{A}) V$. per 1.
7	$\mathcal{V}A$, $\frac{V}{A}$:	$A^2 = \frac{V}{A}) \mathcal{V}A$.
8		$V^2 = \frac{V}{A} \mathcal{V}A$.
9	T, R: $\frac{V}{A}$.	Nam $\frac{V}{A} = R^d$
10	T, $\frac{V}{A}$: R.	
11	$\frac{V}{A}$, R: T.	
12	$\mathcal{V}A$, T:	$Z = T\mathcal{V}A$.
13	$\mathcal{V}A$, Z:	$T = \mathcal{V}A) Z$.
14	T, Z:	$\mathcal{V}A = T) Z$.
15	A, V, R:	$S = \frac{VR - A}{R - 1}$. $\mathcal{V}A$. per 1. $\frac{V}{A}$. per 2. T: per 11. Z. per 12.
16	A, V, T:	$\mathcal{V}A$. per 1. $\frac{V}{A}$. per 2. R. per 10. Z. per 12. S. per 15.
17	A, V, Z:	$\mathcal{V}A$. per 1. $\frac{V}{A}$. per 2. T. per 13. R. per 10. S. per 15.
18	A, V, S:	$\mathcal{V}A$, per 1. $\frac{V}{A}$. per 2. $R = \frac{S - A}{S - V}$. T. per 11. Z. per 12.
19	A, $\mathcal{V}A$, R:	V, per 3. $\frac{V}{A}$. per 2. T. per 11. Z. per 12. S. per 15.
20	A, $\mathcal{V}A$, T:	V. per 3. $\frac{V}{A}$. per 2. R. per 10. Z. per 12. S. per 15.
21	A, $\mathcal{V}A$, Z:	V. per 3. $\frac{V}{A}$. per 2. T. per 13. R. per 10. S. per 15.
22	A, $\mathcal{V}A$, S:	V. per 3. $\frac{V}{A}$. per 2. R. per 18. T. per 11. Z. per 12.
23	A, $\frac{V}{A}$, R:	V. per 4. $\mathcal{V}A$. per 1. T. per 11. Z. per 12. S. per 15.
24	A, $\frac{V}{A}$, T:	V. per 4. $\mathcal{V}A$. per 1. R. per 10. Z. per 12. S. per 15.
25	A, $\frac{V}{A}$, Z:	V. per 4. $\mathcal{V}A$. per 1. T. per 13. R. per 10. S. per 15.
26	A, $\frac{V}{A}$, S:	V. per 4. $\mathcal{V}A$. per 1. R. per 18. T. per 11. Z. per 12.
27	V, $\mathcal{V}A$, R:	A. per 5. $\frac{V}{A}$. per 2. T. per 11. Z. per 12. S. per 15.
28	V, $\mathcal{V}A$, T:	A. per 5. $\frac{V}{A}$. per 2. R. per 10. Z. per 12. S. per 15.
29	V, $\mathcal{V}A$, Z:	A. per 5. $\frac{V}{A}$. per 2. T. per 13. R. per 10. S. per 15.
30	V, $\mathcal{V}A$, S:	A. per 5. $\frac{V}{A}$. per 2. R. per 18. T. per 11. Z. per 12.
31	V, $\frac{V}{A}$, R:	A. per 6. $\mathcal{V}A$. per 1. T. per 11. Z. per 12. S. per 15.
32	V, $\frac{V}{A}$, T:	A. per 6. $\mathcal{V}A$. per 1. R. per 10. Z. per 12. S. per 15.

	Data.	Quæsita.	
33	V, $\frac{V}{A}$, Z:	A.	per 6.
		VA.	per 1.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
34	V, $\frac{V}{A}$, S:	A,	per 6.
		VA.	per 1.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
35	VA, $\frac{V}{A}$, R:	A.	per 7.
		V.	per 8.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
36	VA, $\frac{V}{A}$, T:	A.	per 7.
		V.	per 8.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
37	VA, $\frac{V}{A}$, Z:	A.	per 7.
		V.	per 8.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
38	VA, $\frac{V}{A}$, S:	A.	per. 7.
		V.	per 8.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
39	A, R, T:	V = AR^d.	
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
40	A, R, Z:	T.	
	Nam $A^2) ZR = TR^t$.		
		V.	per 39.
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		S.	per 15.
41	A, R, S:	$V = \frac{A + SR - S}{R}$.	
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
42	A, T, Z:	V = AT) Z.	
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
43	A, T, S:	R.	
	Nam $R^t = \frac{RS - S + A}{A}$.		
		V.	per 39.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.

	Data.	Quæsita.	
44	V, R, T:	A = R^d) V.	
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
45	V, R, Z:	T.	
	Nam $\frac{T}{R^d} = \frac{Z}{V^2}$.		
		A.	per 44.
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		S.	per 15.
46	V, R, S:	$A = VR + S - SR$.	
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
47	V, T, Z:	VA.	per 14.
		A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
48	V, T, S:	R.	
	Nam $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V} R^d - R^t$.		
		A.	per 44.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
49	R, T, Z:	$\frac{V}{A}$.	per 9.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
50	R, T, S:	$\frac{V}{A}$.	per 9.
		$A = \frac{R - 1}{R^t - 1} S$.	
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.
51	VA, R, T:	$\frac{V}{A}$.	per 9.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
52	VA, R, Z:	T.	per 13.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
53	VA, R, S:	A.	
	Nam $A^2 + SRA - SA = VAR$.		
		V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.

54

	Data.	Quæsita.	
54	$\frac{V}{A}$, R, Z : T.		per 11.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
55	$\frac{V}{A}$, R, S : T.		per 11.
		A.	per 50.
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.
56	$\frac{V}{A}$, T, Z : R.		per 10.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.

	Data.	Quæsita.	
57	$\frac{V}{A}$, T, S : R.		per 10.
		A.	per 50.
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.

Reliqui fere casus, parum aut nihil pandunt, ultra quod datum est.

CAP. XXXV.

Euclidis Elementum quintum Arithmetice demonstratur.

PRiusquam Rationum doctrinam dimittam, libet & Euclidis Elementum quintum, quod de Rationibus & Proportionibus agit breviter explicare. Cujus quidem utilitas in tota passim Mathesi, nemini vel leviter exercitato non innotescit.

Est autem illud Elementum quintum, ut & tota rationum Doctrina, Arithmetica potius quam Geometrica, (saltem prout Arithmetices fines nunc dierum ampliari solent, ut non solos numeros integros, sed & fractos, & surdos recipiant, totamque Algebræ, & Arithmeticæ (ut loquuntur) Speciosæ vel Symbolicæ praxin.) Quid quod & ipsa Arithmetica tota, si strictius spectetur, vix aliud videatur quam Rationum doctrina. Ipsique Numeri rationum totidem indicia quarum communis consequens est 1, Unitas. Ubi enim 1, sive Unitas, habetur pro *quantitate exposita*; reliqui omnes numeri (sive integri, sive fracti, sive etiam surdi) sunt rationum totidem aliarum ad expositam quantitatem indices sive exponentes.

Cur autem Lineis quam Numeris rationum doctrinam tradere maluerint veteres; causa fuit non una. Partim scilicet, quod illi, vix alios numeros quam Integros admiserint; (nec enim materiam Arithmeticam sicut Geometricam, in infinitum divisibilem admiserunt, sed in unitate sistendum voluere;) adeoque non pariter Numeris atque Lineis rationes omnes denotari posse perspexerint; Et propterea doctrinæ alioqui universalis, specimen saltem in lineis tradere maluerunt, eamque prout opus fuerit, inde in aliam quamvis materiam rationum capacem pro re nata transferre. Maxime autem uti mihi saltem videtur, quia non modo methodus Symbolica nondum obtinuerat, sed ne quidem figuræ numerariæ, quæ jam passim usitatæ sunt, ab Indis inventæ, fuerunt introductæ; ut non nisi difficulter admodum numerorum praxin exercere valuerint. Licet revera, ipsa sive linearum, sive figurarum planarum, vel etiam solidarum, aliarumve quantitatum, per literas alphabeticas designatio, (puta A, B, &c. quibus designantur in textu anguli lineæve &c. in schemate conspecta,) symbolica designatio non minus dici poterit, quam ubi similibus symbolis quantitates (non tam in charta conspectæ, quam) mente conceptæ indicantur.

Utut fuerit; nihil impedit quin nos, ut reliquam Rationum doctrinam, ita speciatim totum illud quod Elemento quinto de rationibus traditur, Arithmetice (adeoque simpliciter & Universaliter) tradamus, quod ut opus fuerit (sicut & Arithmetica universa) cuivis subjecto poterit accommodari.

Defi-

Definitiones autem quas illic præmissas habemus, hic libet intactas tranſire; quoniam illæ, partim ſuperius, Cap. XXV, XXIX, XXX, explicantur, partim etiam cum ipſa propoſitionum traditione, ubi opus fuerit, obiter exponentur.

Id ſaltem monendum erit de definitione 5ª, ſive juxta Clavium 6ª, quæ eſt *magnitudinum*, ſive quantitatum, *in eadem ratione* conſtitutarum: quam Euclides his verbis effert, Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα καταλλήλα. *In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, ſecundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt, inter ſe comparatæ.* Nos hanc definitionem, quamvis veram quidem & Euclidis ſuſcepto ſatis accommodam, in noſtris demonſtrationibus omittendam duximus; neque ad hoc κειμήλιον proportionalia examinamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeo forſan, tironibus præſertim, perſpicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate reſpicit, quam eorundem affectionem aliquam ſatis remotam. Nobis autem, qui Rationes ſuperius docuimus *Quoto* æſtimandas, ad rationum ſive æqualitatem ſive identitatem probandam ſufficere videtur, ſi fuerit æqualitas ſive identitas quotorum. Puta ſi ſit $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$, eſt & $a.\alpha::b.\beta$. Et contra. Quod nobis erit, definitionis loco, ejuſdem æqualiſve rationis. Ubi autem quotus major eſt, ibi & major ratio; ubi minor, minor. Puta, ſi $\frac{a}{\alpha}>\frac{b}{\beta}$, erit illa ratio major; ſi $\frac{a}{\alpha}<\frac{b}{\beta}$, hæc major erit, illa minor. Siquis tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonſtrationes commodius procedant; ego nullam potiorem novi quam quæ à nobis prop. 30. Cap. XXXIII. demonſtrata eſt; Et quidem (ſpeciatim de lineis) ab ipſo Euclide 16 e 6. Nempe *Si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis; & contra.* Puta ſi $A.\alpha::B.\beta$; erit $A\beta=\alpha B$, & contra, Quod ſic oſtenditur. Cum ſit $A.\alpha::B.\beta$. hoc eſt $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, erit (æqualiter utrinque multiplicando) $A=\frac{\alpha B}{\beta}$ & $A\beta=\alpha B$. Contra vero; ſi $A\beta=\alpha B$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A=\frac{\alpha B}{\beta}$, & $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, hoc eſt, $A.\alpha::B.\beta$. Atque ex hoc *Lemmate*, facilius quam ex illa Euclidis definitione memorata, demonſtrari poſſent omnes illæ propoſitiones ubi illam adhibet Euclides: quod itaque non incommode pro illa Euclidis definitione ſubſtitui poterit.

His præmonitis, Propoſitiones aggredior: poſtquam monuero, quod, pro *Magnitudinibus* (de quibus ſpeciatim agit Euclides) nos ſimpliciter *Quantitates* ubique ſubſtituimus. Quippe de quantitatibus aliis non minus procedunt tum propoſitiones tum demonſtrationes quam de magnitudinibus. Imo & Euclides ipſe, per *Magnitudinis* nomen, non tam magnitudines proprie dictas, ſeu ſtricte ſumptas, (qualia ſunt Linea, Superficies, & Corpus,) voluiſſe videtur intelligendas; quam omnia cujuſcunque fuerint generis, quæ vel *Magna* dici poſſunt, aut etiam aliud alio *Majus Minusve*: Quo ſenſu nos *Quantitatis* vocem intelligimus; nempe de omni eo de quo quæri ſolet, *Quantum* ſit.

1. *Si fuerint quotcunque quantitates, quotcunque quantitatum ſigillatim æque multiplæ; quotupla eſt una unius, totuplæ erunt & omnes omnium.* Puta ſi $A=M\alpha$, $B=M\beta$, $C=M\gamma$, &c. Erunt $A+B+C$ &c. $(=M\alpha+M\beta+M\gamma$ &c.$)=M$ in $\alpha+\beta+\gamma$ &c. ut multiplicando patebit. Idem igitur eſt communis multiplicator M, quod erat probandum. Hoc idem demonſtratur univerſaliter pr. 12. de ratione qualibet, non minus quam multiplici.

$$\begin{array}{c}\alpha+\beta+\gamma\\ \hline M\alpha+M\beta+M\gamma\end{array}\ \overset{M}{-}$$

2. *Si prima ſecundæ æque multipla fuerit, & tertia quartæ,* ($A=M\alpha$, $B=M\beta$,) *ſitque*

ſitque quinta ſecundæ æquemultipla ac ſexta quartæ; (C = Nα, D = Nβ:) *erunt item prima & quinta ſimul, ſecundæ*; *atque tertia & ſexta ſimul, quartæ, æque multiplices.* Nempe A + C = Mα + Nα, = M + N: in α. & B + D = Mβ + Nβ = M + N: in β. Communis itaque utrobique multiplicator, M + N. Idem oſtenditur in quacunque ratione, utut non multiplici. prop. 24.

3. *Si fuerit prima ſecundæ æque multipla atque tertia quartæ*, (A = Mα, B = Mβ,) *& ſumantur æque multiplices primæ & tertiæ* (NA, NB; hoc eſt NMα, NMβ,) *erunt & æque multiplices, illa ſecundæ, atque hæc quartæ.* Quippe utrobique eſt NM communis multiplicator. Eſtque hæc una ſpecies argumentationis *ex æquo*, ſive *ex æquali*, δι' ἴσου.

4. *Si prima ad ſecundam, eandem habeat rationem, atque tertia ad quartam*, (A. α :: B. β.) *Eandem item rationem habebunt æque multiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamlibet multiplicationem, reſpective ſumptæ.* Puta AM. αμ :: BM. βμ. Si enim A . α :: B. β. hoc eſt $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$; erit, æqualiter utrinque multiplicando ($\frac{A}{\alpha} \times M$, vel) $\frac{AM}{\alpha} = (\frac{B}{\beta} \times M$ vel) $\frac{BM}{\beta}$; &, æqualiter utrinque dividendo μ) $\frac{AM}{\alpha}$ vel $\frac{AM}{\alpha\,\mu} = \mu)\ \frac{BM}{\beta}$ vel $\frac{BM}{\beta\,\mu}$. adeoque AM. αμ :: BM. βμ. Quod erat demonſtrandum. Vel brevius, per Lemma noſtrum, Si A. α :: B. β, erit (Aβ = αB, adeoque AβMμ = αBMμ vel AMβμ = αμBM, & propterea) AM. αμ :: BM. βμ.

Euclides Corollarium hoc (ut in demonſtrationis ſuæ curriculo demonſtratum) adjungit; *Si quatuor quantitates proportionales ſint, ſunt & inverſe* (ἀνάπαλιν) *proportionales.* Hoc eſt, ſi A. α :: B. β. erit α. A :: β. B. (Præterquam quod ex ſe videtur manifeſtum, puta ſi utrobique eadem ſit Relatorum ad correlata, eadem erit & Correlatorum ad illa, reſpective ſumpta, relatio: vel, verbi gratia, ſi quoties A continet α, toties & B contineat β; vice verſa, quoties α continetur in A, toties & β in B.) Sequitur directe ex lemmate noſtro. Sive enim Aβ ſint extremæ, & α B mediæ; ſive hæ extremæ, & illæ mediæ; erit utroque modo, ſi utrovis, Aβ = αB; adeoque utrobique proportionalitas.

Hæc argumentatio ab Euclide definitur 13 d 5 (juxta Clavium;) *Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis, ſeu antecedentis, ad antecedentem velut ad conſequentem.*

5. *Si quantitas quantitatis æque multipla ſit, atque ablata ablatæ*; *erit & reliqua reliquæ æque multipla atque tota totius.* Puta ſi A + B = M in : α + β : = Mα + Mβ, ſitque A = Mα; erit & B = Mβ. Nam, propter æqualia æqualibus ablata, erunt & reliqua æqualia. Idem univerſaliter oſtenditur pr. 19. de quacunque ratione, utut non multiplici.

$$\begin{array}{rl} & A + B = M\alpha + M\beta \\ \text{mi:} & A = M\alpha \\ \hline & B = M\beta \end{array}$$

6. *Si duæ quantitates* (A + B, & C + D,) *ſint duarum quantitatum* (α, & γ,) *æque multiplæ*, (puta per M + μ,) *ſintque ablatæ quædam* (A, C,) *earundem* (α, γ,) *æque multiplæ*, (puta per M:) *erunt & reliquæ* (B, D,) *vel eiſdem æquales* (ſi nempe μ = 1) *vel ipſarum æque multiplæ*; (nempe per μ) Propter æqualia æqualibus ablata; ut patet.

$$\begin{array}{rl} & A + B = M\alpha + \mu\alpha \\ \text{mi:} & A = M\alpha \\ \hline & B = \mu\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & C + D = M\gamma + \mu\gamma \\ \text{mi:} & C = M\gamma \\ \hline & D = \mu\gamma \end{array}$$

7. *Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.* Puta ſi A = B, erit (æqualiter dividendo) $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\alpha}$, adeoque A. α :: B. α. Item $\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{B}$, adeoque α. A :: α. B. Vel ſic (ſi opus) per lemma noſtrum; Quia ſi A = B erit & Aα = αB.

8. *Inæqualium major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.* Nam $\frac{A+E}{\alpha}$ $(=\frac{A}{\alpha}+\frac{E}{\alpha})>\frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{\alpha}{A+E}<\frac{\alpha}{A}$. Quippe crescente Dividendo crescit quotus, sed crescente Divisore, minuitur.

9. *Quæ ad eandem eandem habent rationem, sunt inter se æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsæ item æquales sunt.* Nam si $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt (multiplicando per α) $B=A$. Item, si $\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha}{B}$ adeoque (per coroll. pr. 4.) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt & $A=B$, ut prius. Vel, per lemma nostrum, si $A.\alpha::B.\alpha$. vel $\alpha.A::\alpha.B$. erit $A\alpha=\alpha B$, adeoque $A=B$.

10. *Quantitatum rationem ad eandem habentium, quæ majorem habet rationem est major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est.* Nam si $\frac{A}{B}$ major quam $\frac{\alpha}{B}$, puta æqualis $\frac{\alpha+\varepsilon}{B}$; erit, æqualiter multiplicando, $A\,(=\alpha+\varepsilon)>\alpha$. Item si $\frac{B}{A}$ minor sit quam $\frac{B}{\alpha}$, puta æqualis $\frac{B}{\alpha+\varepsilon}$ (per pr. 8.) erit per cor. pr. 4. $\frac{A}{B}=\frac{\alpha+\varepsilon}{B}$, adeoque $A>\alpha$.

11. *Quæ eidem eædem sunt rationes, inter se sunt eædem.* Nam si $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ erit $\frac{A}{\alpha}=\frac{C}{\gamma}$.

12. *Si sint quotcunque quantitates proportionales, ut est una antecedentium ad suam consequentem, ita & omnes antecedentes ad omnes consequentes.* Esto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ &c. $=R$. Erit igitur $A=R\alpha$, $B=R\beta$, $C=R\gamma$ &c. adeoque $A+B+C$ &c. $=R\alpha+R\beta+R\gamma$ &c. $=R$ in $\alpha+\beta+\gamma$ &c. Ideoque (æqualiter dividendo) $\frac{A+B+C\,\&c.}{\alpha+\beta+\gamma\,\&c.}=R=\frac{A}{\alpha}$. Vel sic $A.RA::A+B+C$ &c. (R in $A+B+C$ &c. $=$) $RA+RB+RC$. ut patet. Aut per lemma nostrum, quia A in $RA+RB+RC$ &c. $=(ARA+ARB+ARC$ &c. $=)$ RA in $A+B+C$ &c. Est autem hæc universalis propositio ad prop. 1. Quod enim illic ostenditur speciatim de Ratione Multipla; hic ostenditur universaliter de qualibet ratione.

13. *Si prima* A, *ad secundam* α, *eandem habeat rationem quam tertia* B, *ad quartam* β; *tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta* C *ad sextam* γ: *habebit & prima ad secundam majorem rationem quam quinta ad sextam.* Nam $\frac{A}{\alpha}\,(=\frac{B}{\beta})>\frac{C}{\gamma}$. Vel sic, $\frac{B}{\beta}\,(>\frac{C}{\gamma})=\frac{C+E}{\gamma}=\frac{A}{\alpha}>\frac{C}{\gamma}$.

14. *Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, sitque prima major quam tertia; & secunda quam quarta major erit: si æqualis, æqualis; si minor, minor.* Esto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$. Si autem $A>B$, erit & $\frac{A}{\alpha}>\frac{B}{\alpha}$, ergo & $\frac{B}{\beta}\,(=\frac{A}{\alpha})>\frac{B}{\alpha}$, adeoque $\alpha>\beta$ per pr. 10. Vel sic, quia $A.B::\alpha.\beta$. ut infra ostenditur prop. 16.

15. *Partes* (aliquotæ) *inter se comparatæ, eandem habent rationem quam habent earum æque multiplices inter se.* Hoc est $\frac{A}{\alpha}=\frac{A+A+A\,\&c.}{\alpha+\alpha+\alpha\,\&c.}=\frac{MA}{M\alpha}$. per pr. 12. Vel, per lemma nostrum, $A.\alpha::MA.M\alpha$: quia $A\times M\alpha=\alpha\times MA$.

16. *Si*

16. *Si quatuor quantitates proportionales ſint, ſunt & alterne* (permutatim, viciſſim, ἐναλλὰξ,) *proportionales.* Hoc eſt, ſi $A.\alpha::B.\beta$, erit & $A.B::\alpha.\beta$. Per lemma noſtrum, nam utroque modo, ſi utrovis, erit $A\beta=\alpha B$.

Eſtque hæc ea argumentatio quam definit Euclides 12 *d* 5. *Alterna ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.*

Notandum autem eſt, hanc propoſitionem ſolummodo illic obtinere, ubi quatuor quantitates ſunt invicem homogeneæ; non autem ubi bina binis heterogenea. Puta, ſi ſit, ut pondus A, ad pondus α; ſic linea B ad lineam β, non tamen dicendum erit, ut pondus A, ad lineam B; ſic pondus α, ad lineam β. Quia ponderis ad lineam, quippe quantitatem illi heterogeneam, nulla eſt Ratio; ut quæ inter homogeneas ſolas conſiſtit. Atque eadem de cauſa, prop. 14. de ſolis homogeneis procedit; ut & prop. 1. 5. 7. 8. 9. 10. 12. 15. 19. 25. 27. 33. 34. proprie loquendo.

Verum ſiquando alternatione opus fuerit, ubi de quantitatibus invicem heterogeneis agitur: poterit utraque ratio aliis exponi terminis invicem homogeneis; in quibus alternatione inſtituta, aliiſque ut opus fuerit operationibus peractis, nova alternatione reſtituendi ſunt in priſtinum ordinem termini mutuati, & deinde deponendi, reſumptis à principio poſitis. Ut ad prop. 19. mox oſtendetur.

17. *Si quantitates compoſitæ* (μεγέθη συγκείμενα) *proportionales ſint, erunt & diviſæ* (διαιρεθέντα) *proportionales.* Puta ſi ſit $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. erit & $A.\alpha::B.\beta$. Manifeſtum enim eſt tum quantitatem $A+\alpha$ una vice pluries continere quantitatem α, quam eandem continet A: & ſimiliter $B+\beta$, una vice pluries quam B, continere β: Et propterea ab æqualibus quotientibus detracta utrobique unitate, manet adhuc æqualitas. Vel ſic. Quia $\frac{A+\alpha}{\alpha}=\frac{A}{\alpha}+1$, & $\frac{B+\beta}{\beta}=\frac{B}{\beta}+1$. Si ſit $\frac{A+\alpha}{\alpha}$ ſive $\frac{A}{\alpha}+1=\frac{B+\beta}{\beta}$ ſive $\frac{B}{\beta}+1$; erit (detracta utrinque unitate) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$. hoc eſt $A.\alpha::B.\beta$. Vel ſic, ſi $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit $\left(\frac{T}{A}-1=\frac{\tau}{\alpha}-1\right.$, hoc eſt) $\frac{T-A}{A}=\frac{\tau-\alpha}{\alpha}$. Vel etiam per lemma noſtrum, Si $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. erit ($A\beta+\alpha\beta=\alpha B+\alpha\beta$, adeoque $A\beta=\alpha B$, &) $A.\alpha::B.\beta$.

Definitur autem hæc argumentatio 15 *d* 5: *Diviſio rationis* (διαίρεσις λόγου) *eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſum conſequentem.*

Adjungit hic Clavius duas alias *Driviſionis Rationis* formas; Primam vocat *Diviſionem rationis converſam*; *quando conſequens ad exceſſum quo conſequentem ſuperat antecedens refertur.* Si $A.\alpha::B.\beta$. Erit $\alpha.A-\alpha::\beta.B-\beta$. Quæ non alia eſt, quam prop. 17. Euclidis inverſio. Nam per illam erit $A-\alpha.\alpha::B-\beta.\beta$. adeoque inverſe (per cor. prop. 4.) $\alpha.A-\alpha::\beta.B-\beta$. Vel ſic; ſi $A.\alpha::B.\beta$. Erit ($A\beta=\alpha B$, & $\alpha B-\alpha\beta=A\beta-\alpha\beta$, hoc eſt, α in $B-\beta:=A-\alpha:$ in β. & propterea) $\alpha.A-\alpha::\beta.B-\beta$.

Alteram vocat *Diviſionem Rationis contrariam*; *quando confertur antecedens cum exceſſu quo conſequens antecedentem ſuperat.* Si $A.\alpha::B.\beta$. Erit $A.\alpha-A::B.\beta-B$. Quæ continet Euclidis, diviſionem rationis, duaſque inverſiones. Nam primo invertendo erit $\alpha.A::\beta.B$. tum dividendo, ſive per diviſionem rationis, $\alpha-A.A::\beta-B.B$. Et tandem iterum invertendo $A.\alpha-A::B.\beta-B$. Vel ſic, per lemma noſtrum, Si $A.\alpha::B.\beta$. erit ($A\beta=\alpha B$, & $A\beta-AB=\alpha B-AB$, hoc eſt, A in $\beta-B:=\alpha-A:$ in B. adeoque) $A.\alpha-A::B.\beta-B$.

18. *Si quantitates diviſæ* (μεγέθη διηρημένα) *proportionales ſint, erunt & compoſitæ* (συνθεθέντα) *proportionales.* Si $A.\alpha::B.\beta$, erit item $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. Nam cum ſit $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, erit item (addendo utrobique 1,) $\frac{A}{\alpha}+1=\frac{B}{\beta}+1$. hoc eſt $\frac{A+\alpha}{\alpha}=\frac{B+\beta}{\beta}$; ideoque $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. vel ſic; Si $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$ erit $\left(\frac{T}{A}+1\right.$ $=\frac{\tau}{\alpha}+1$, hoc eſt) $\frac{T+A}{A}=\frac{\tau+\alpha}{\alpha}$. Imo vero, & $\frac{T}{A}+2=\frac{\tau}{\alpha}+2$, ſive $\frac{T+2A}{A}=\frac{\tau+2\alpha}{\alpha}$. Et quidem univerſim. Si ſit $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit etiam $\frac{T}{A}\pm M=$

$\frac{\tau}{\alpha} \pm M$, sive $\frac{T \pm MA}{A} = \frac{\tau \pm M\alpha}{\alpha}$. Quomodo tum hæc tum præcedens junctim & universaliter demonstrantur. Sed & per Lemma nostrum, hæc junctim cum præcedente, sic demonstratur; Si $A \pm \alpha . \alpha :: B \pm \beta . \beta$; erit ($A\beta \pm \alpha\beta = \alpha B \pm \alpha\beta$, & $A\beta = \alpha B$, ideoque) $A . \alpha :: B . \beta$.

Definitur hic argumentandi modus, præsente propositione demonstratus, ab Euclide 14 d 5. *Compositio rationis* (συνθεσις λογου) *est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius, ad ipsam consequentem.*

Atque hic etiam Clavius duas alias Rationis compositiones adjungit. Primam appellat *Compositionem rationis conversam*; *quando sumitur antecedens & consequens veluti una, quæ cum antecedente conferatur.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A + \alpha . A :: B + \beta . B$. Quæ duas involvit Euclidis operationes. Nam invertendo, erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $\alpha + A . A :: \beta + B . B$. vel $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. Vel sic; si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, &, $AB + A\beta = AB + \alpha B$, hoc est, $A + \alpha$ in $B = A$ in $B + \beta$, adeoque) $A + \alpha . A :: B + \beta . B$.

Alteram vocat *Compositionem rationis contrariam*; *quando refertur eadem antecedens ad antecedentem & consequentem ceu ad unam.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A . A + \alpha :: B . B + \beta$. Estque hæc præcedentis inversio; & tres Euclidis operationes conjungit. Nam invertendo erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $A + \alpha . A :: B + \beta . B$. iterumque invertendo $A . A + \alpha :: B . B + \beta$. Vel etiam per Lemma nostrum; Si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $AB + A\beta = AB + \alpha B$, hoc est A in $B + \beta = A + \alpha$ in B, ideoque) $A . A + \alpha :: B . B + \beta$.

19. *Si sit ut tota ad totam, sic ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam ut tota ad totam.* Esto enim $\frac{A+B}{\alpha+\beta} = \frac{A}{\alpha} = R$. Erit itaque tum $A + B = R$ in $\alpha + \beta = R\alpha + R\beta$, tum $A = R\alpha$. adeoque & residuum $B = R\beta$. Et (utrinque æqualiter dividendo) $\frac{B}{\beta} = R = \frac{A+B}{\alpha+\beta}$. Estque hæc propositio universalis ad prop. 5. Euclides illam sic demonstrat. Quoniam ut $A + B . \alpha + \beta :: A . \alpha$. erit alterne (seu permutando) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. Et dividendo (sive per divisionem rationis) $B . A :: \beta . \alpha$. iterumque permutando, $B . \beta :: A . \alpha :: A + B . \alpha + \beta$.

$$\begin{array}{r} A + B = R\alpha + R\beta \\ -A = -R\alpha \\ \hline B = R\beta \end{array}$$

Atque colligit hoc πόρισμα seu corollarium, *Si compositæ magnitudines sint proportionales; & per conversionem rationis proportionales erunt.* Cum enim ostenderit $A + B . \alpha + \beta :: B . \beta$. Erit permutando $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$. quæ sunt quantitates compositæ proportionales: sed & ostensum est $A + B . \alpha + \beta :: A . \alpha$. adeoque permutando $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. quæ est conversio rationis. Quippe 16 d 5, definitur *Conversio rationis* (ἀναστροφη λογου) *sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.*

Clavius hanc demonstrationem improbat, propter adhibitam alternationem, quæ in solis homogeneis obtinet, cum tamen conversio rationis etiam ubi bina binis sunt heterogenea locum habet; adeoque hanc substituit. Si $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$. erit (dividendo) $A . B :: \alpha . \beta$. & (invertendo) $B . A :: \beta . \alpha$. & tandem (componendo) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. quæ est conversio rationis. Nempe si ut tota prima ad sui partem ablatam, sic tota secunda ad sui ablatam; erit ut tota prima ad sui reliquam, sic tota secunda ad sui reliquam. Vel brevius, si ut tota ad ablatam, sic tota ad ablatam; erit & tota ad reliquam, ut tota ad reliquam.

More nostro sic demonstrabitur; Si $\frac{A+B}{B}$ $(= \frac{A}{B} + 1) = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$ $(= \frac{\alpha}{\beta} + 1;)$ erit ($\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, adeoque $\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$, & $\frac{B}{A} + 1 = \frac{\beta}{\alpha} + 1$, hoc est) $\frac{B+A}{A} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha}$.

Vel, si libet, sic; Si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A} - 1 = \frac{\tau}{\alpha} - 1$, hoc est $\frac{T-A}{A} = \frac{\tau-\alpha}{\alpha}$ adeoque $\frac{A}{T-A} = \frac{\alpha}{\tau-\alpha}$, & $\frac{A}{T-A} + 1 = \frac{\alpha}{\tau-\alpha} + 1$, hoc est $\frac{A+T-A}{T-A}$

$= \alpha + \tau$

$= \frac{\alpha+\tau-\alpha}{\tau-\alpha}$, vel) $\frac{T}{T-A} = \frac{\tau}{\tau-\alpha}$. Et similiter institui poterunt demonstrationes non modo prop. 17, & 18. ut supra, sed & earum quas illis subjungit Clavius. Quod obiter dictum esto.

Vel etiam per lemma nostrum; Si $A+B.B::\alpha+\beta.\beta$, erit ($A\beta+B\beta = B\alpha+B\beta$, adeoque $A\beta = B\alpha$, & $A\alpha+B\alpha = A\alpha+A\beta$, ideoque) $A+B.A::\alpha+\beta.\alpha$.

Sed & restitui poterit eadem hujusce propositionis demonstratio quam modo repudiavit Clavius, eo adhibito remedio quod ad prop. 16. innuimus. Puta, si sit, verbi gratia, ut A+B numerus pedum in linea tota, ad B numerum pedum in ablata; sic $\alpha+\beta$ numerus unciarum in toto pondere, ad β numerum unciarum in ablato; (ut Symbola jam non lineas & pondera, quantitates heterogeneas, immediate significent, sed utrobique numeros, adeoque homogeneas:) erit permutando $A+B.\alpha+\beta::B.\beta$. ut numerus totus ad totum, sic ablatus ad ablatum; ideoque &, per pr. 19. sic reliquus ad reliquum, nempe $A+B.\alpha+\beta$ $(::B.\beta)::A.\alpha$. iterumque permutando $A+B.A::\alpha+\beta.\alpha$. ut pedum numerus totus ad reliquum, sic unciarum numerus totus ad reliquum; & propterea etiam, ut linea tota ad reliquam, sic pondus totum ad reliquum. Quod erat probandum. Vel sic; si sit linea tota ad ablatam, ut numerus T ad A, & pondus totum ad ablatum, ut numerus τ ad α; sitque eadem utrobique ratio; hoc est $T.A::\tau.\alpha$; adeoque permutando (quippe jam de numeris agitur) $T.\tau::A.\alpha$; ideoque per pr. 19. $T.\tau::T-A.\tau-\alpha$. iterumque permutando $T.T-A::\tau.\tau-\alpha$. Ergo & (quia ponuntur numeri illic lineis, hic ponderibus proportionales) ut linea tota ad residuam, sic & pondus totum ad residuum. Quod erat probandum. Atque hoc pacto licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis. Ubi nempe secunda permutatione restituitur quod prima deturbatum erat: aut etiam, si plures, modo item quarta restituatur quod tertia deturbatur; & sic toties quoties. Hoc enim si caveatur, nihil absurdi sequitur in quantitatibus, utut heterogeneis, alternandis.

20. *Si sint tres quantitates*, A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*, (puta $A.B::\alpha.\beta$. & $B.C::\beta.\gamma$.) *ex æquali* (δἰ ἴσου) *autem prima major sit quam tertia*; *& quarta quam sexta major erit*: *Et si æqualis*, *æqualis*: *sin minor*, *minor*. Nam $A.C::\alpha.\gamma$. ut ostendemus ad prop. 22.

21. *Si sint tres quantitates*, A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*; *sit autem perturbata earum proportio* (puta $A.B::\beta.\gamma$. & $B.C::\alpha.\beta$.) *sitque ex æquali prima major quam tertia*; *erit & quarta quam sexta major*: *&*, *si æqualis*, *æqualis*; *sin minor*, *minor*. Nam & hic $A.C::\alpha.\gamma$. ut ostendemus prop. 23.

Sunt enim hæ duæ propositiones, Lemmata ad duas sequentes; quas cum nos sine harum ope demonstraturi simus, erunt eadem opera & hæ à fortiori demonstratæ. Quid autem significent illæ voces *ex æquali*, sive *ex æquo*, & *proportio perturbata*; ostenditur 17, 18, 19, def. 5.

Ex æqualitate ratio, (sive ex æquali, vel ex æquo, δἰ ἴσου) est, *ubi plures sunt quantitates*, *sumptio extremorum per subtractionem mediorum*; sive, omissis mediis. 17 d 5.

Ordinata proportio (τεταγμένη ἀναλογία) *est*, *quando est ut antecedens ad consequentem*, *sic antecedens ad consequentem*; *ut autem consequens ad aliam quampiam*, *sic consequens ad aliam quampiam*. 18 d 5. Cujus exemplum habemus pr. 20, & 22.

Perturbata vero proportio (ταραγμένη ἀναλογία) *est*, *quando*, *cum tres sint quantitates aliæque illis numero æquales*, *est*, *ut in primis quantitatibus antecedens ad consequentem*, *ita in secundis quantitatibus antecedens ad consequentem*; *ut autem in primis quantitatibus consequens ad aliam quampiam*, *ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem*. 19 d 5. Cujus exemplum habetur prop. 21, & 23. Vel sic; si ut in primoribus prima ad secundam, sic in alteris secunda ad tertiam; ut autem in primoribus secunda ad tertiam, sic in alteris prima ad secundam.

22. *Si sint quotcunque quantitates* A, B, C, &c. *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ, &c. *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*, (puta $A.B::\alpha.\beta$, & $B.C::\beta.\gamma$.

$\beta.\gamma$. &c.) *& ex æquali in eadem ratione erunt*; Nempe A . C :: $\alpha.\gamma$. Nam quia $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$ & $\frac{B}{C}=\frac{\beta}{\gamma}$ erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\left(=\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma}\left(=\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}.\right)$ adeoque, A . C :: $\alpha.\gamma$. Et similiter quotcunque fuerint utrobique quantitates. Habetur autem hic exemplum rationis compositæ; ut & prop. sequente.

23. *Si sint tres quantitates* A, B, C, *aliæque ipsis numero æquales* α,β,γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio*; (nempe A . B :: $\beta.\gamma$. & B . C :: $\alpha.\beta$.) *& ex æquali in eadem ratione erunt.* Nempe A . C :: $\alpha.\gamma$. Nam quia $\frac{A}{B}=\frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C}=\frac{\alpha}{\beta}$; erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\left(=\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}\right)=\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\alpha}{\beta}\left(=\frac{\beta\alpha}{\gamma\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}.\right)$ adeoque A . C :: $\alpha.\gamma$.

24. *Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam*; A . α :: B . β. *quinta item ad secundam eandem habuerit rationem quam sexta ad quartam*: C . α :: D . β. *habebit etiam composita ex prima & quinta ad secundam, eandem rationem quam tertia cum sexta ad quartam.* A + C . α :: B + D . β. Nam si $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, & $\frac{C}{\alpha}=\frac{D}{\beta}$: erit $\frac{A}{\alpha}+\frac{C}{\alpha}\left(=\frac{A+C}{\alpha}\right)=\frac{B}{\beta}+\frac{D}{\beta}\left(=\frac{B+D}{\beta}.\right)$ adeoque A + C . α :: B + D . β. Vel sic, si opus, per lemma nostrum; Si A . α :: B . ϵ. & & C . α :: D . β. erit (tum $A\epsilon=\alpha B$, tum $C\epsilon=\alpha D$, ergo $A\epsilon+C\epsilon=\alpha B+\alpha D$, ideoque) A + C . α :: B + D . ϵ. Estque hæc propositio universalis ad prop. 2.

25. *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint* A + B . $\alpha+\epsilon$ :: A . α. (sitque A + B omnium maxima, adeoque & α minima;) *maxima & minima reliquis duabus majores erunt.* ($A+B+\alpha>\alpha+\epsilon+A$.) Nam per prop. 19. A + B. $\alpha+\epsilon$ (:: A . α) :: B . ϵ. adeoque, ex hypothesi, $B>\epsilon$. Ideoque $A+\alpha+B>A+\alpha+\epsilon$.

Atque hactenus propositiones Euclidis tradidimus. Sequuntur aliæ quæ à Clavio aliisque, his subjungi solent; eadem facilitate demonstrandæ: quæ & Euclidæis virtualiter contentæ videantur.

26. *Si prima* A *ad secundam* B, *majorem habuerit rationem, quam tertia* α *ad quartam* ϵ; *habebit, invertendo, secunda ad primam minorem rationem quam quarta ad tertiam.* Nam quo major est ratio quævis, eo minor ipsius conversa. Vel sic. Quoniam $\frac{A}{B}>\frac{\alpha}{\epsilon}$, esto per prop. 8. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B+E}$; ideoque invertendo $\frac{\epsilon}{\alpha}=\frac{B+E}{A}>\frac{B}{A}$. vel $\frac{B}{A}<\frac{\epsilon}{\alpha}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B}>\left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\epsilon}$; erit inverse $\frac{B}{A+E}<\left(\frac{B}{A}=\right)\frac{\beta}{\alpha}$. per Cor. pr. 4.

27. *Si prima ad secundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit vicissim prima ad tertiam, majorem rationem quam secunda ad quartam.* Nam si $\frac{A}{B}>\frac{\alpha}{\beta}$, esto $\frac{A}{B+E}=\frac{\alpha}{\beta}$, ideoque, vicissim, $\frac{A}{\alpha}=\frac{B+E}{\beta}>\frac{B}{\beta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B}>\left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit alterne $\frac{A+E}{\alpha}>\left(\frac{A}{\alpha}=\right)\frac{B}{\beta}$. per pr. 16.

28. *Si prima ad secundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam, majorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.* Nam si $\frac{A}{B}>\frac{\alpha}{\beta}$, erit quoque $\left(\frac{A}{B}+1>\frac{\alpha}{\beta}+1,\right.$ hoc est $\left.\right)\frac{A+B}{B}>\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B}>\left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit componendo $\frac{A+E+B}{B}>\left(\frac{A+B}{B}=\right)\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. per pr. 18.

29. *Si composita prima cum secunda, ad secundam, majorem habeat rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam; habebit quoque dividendo prima*

ad

ad secundam, majorem rationem, quam tertia ad quartam. Nam si $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon}$, (hoc est $\frac{A}{B}+1, > \frac{\alpha}{\epsilon}+1,$) erit quoque $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\epsilon}$. Vel sic; Si $\frac{A+E+B}{B} > (\frac{A+B}{B}=) \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon}$; erit dividendo $\frac{A+E}{B} > (\frac{A}{B}=) \frac{\alpha}{\epsilon}$. per pr. 17.

30. *Si composita prima cum secunda, ad secundam, majorem rationem habeat, quam composita tertia cum quarta, ad quartam; habebit, per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem rationem quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Nam si $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon}$, adeoque dividendo (ut prop. præced.) $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\epsilon}$; erit inverse (per pr. 26.) $\frac{B}{A} < \frac{\epsilon}{\alpha}$, & componendo (ut prop. 28.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\epsilon}{\alpha}$.

31. *Si sint tres quantitates* A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales* α, ϵ, γ; *sitque major ratio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; item secundæ priorum ad tertiam* (sive æqualis, sive) *major quam secundæ posteriorum ad tertiam; erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Nam si $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\epsilon}$, & $\frac{B}{C} \geq \frac{\epsilon}{\gamma}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} (= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}) > (\frac{\alpha}{\epsilon} \times \frac{B}{C} \geq) \frac{\alpha}{\epsilon} \times \frac{\epsilon}{\gamma} (= \frac{\alpha\epsilon}{\epsilon\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}.)$ Hoc est $\frac{A}{C} > \frac{\alpha}{\gamma}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > (\frac{A}{B}=) \frac{\alpha}{\epsilon}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\epsilon}{\gamma}$; erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > (\frac{A}{C}=) \frac{\alpha}{\gamma}$. per pr. 22.

32. *Si sint tres quantitates* A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales* α, ϵ, γ. *Sitque major ratio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; item secundæ priorum ad tertiam* (sive æqualis, sive) *major quam primæ posteriorum ad secundam: erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Nam, si $\frac{A}{B} > \frac{\epsilon}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} \geq \frac{\alpha}{\epsilon}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} (= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}) > (\frac{\epsilon}{\gamma} \times \frac{B}{C} \geq) \frac{\epsilon}{\gamma} \times \frac{\alpha}{\epsilon} (= \frac{\epsilon\alpha}{\gamma\epsilon} = \frac{\alpha}{\gamma}.)$ Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > (\frac{A}{B}=) \frac{\epsilon}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\alpha}{\epsilon}$, erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > (\frac{A}{C}=) \frac{\alpha}{\gamma}$, per prop. 23.

33. *Si sit major ratio totius ad totam, quam ablatæ ad ablatam; erit & reliquæ ad reliquam major ratio quam totius ad totam.* Nam si $\frac{A+B}{\alpha+\epsilon} > \frac{B}{\epsilon}$, erit permutando (per pr. 27.) $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon}$, & per conversionem rationis, (per pr. 30.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\epsilon}{\alpha}$ iterumque permutando, $\frac{A+B}{\alpha+\epsilon} < \frac{A}{\alpha}$, vel $\frac{A}{\alpha} > \frac{A+B}{\alpha+\epsilon}$. Vel sic; Quoniam $\frac{A+B}{\alpha+\epsilon} > \frac{B}{\epsilon}$, adeoque $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon}$, & $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\epsilon}$, adeoque $\frac{B}{A} < \frac{\epsilon}{\alpha}$, erit quoque $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\epsilon}{\alpha}$, & $\frac{A+B}{\alpha+\epsilon} < \frac{A}{\alpha}$. Vel sic; Si $\frac{A+E+B}{\alpha+\epsilon} (= \frac{A+B}{\alpha+\epsilon} + \frac{E}{\alpha+\epsilon}) > (\frac{A+B}{\alpha+\epsilon}=) \frac{B}{\epsilon} (= \frac{A}{\alpha}$. per pr. 19.)

Erit

Erit $\frac{A+E}{\alpha}$ $(=\frac{A}{\alpha}+\frac{E}{\alpha}=\frac{A+B}{\alpha+\epsilon}+\frac{E}{\alpha}) > (\frac{A+B}{\alpha+\epsilon}+\frac{E}{\alpha+\epsilon}$ per pr.8. $=)$ $\frac{A+E+B}{\alpha+\epsilon}$.

Supereſt adhuc apud Clavium, alia propoſitio, quæ quorſum hic loci inſeratur, ego plane non video; Cum tamen illic reperiam, etiam & hic apponam.

34. *Si ſint quotcunque quantitates*, A, B, C, &c. *aliæque ipſis numero æquales*, α, ϵ, γ, &c. *ſitque major ratio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam, & hæc major quam tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps*: $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\epsilon} > \frac{C}{\gamma}$ &c. *Habebunt omnes priores ſimul, ad omnes poſteriores ſimul, majorem rationem quam omnes priores relicta prima, ad omnes poſteriores relicta prima; Minorem autem quam prima priorum ad primam poſteriorum; Majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam poſteriorum.*

Sunto primum utrinque duæ, A, B, & α, ϵ. Quoniam igitur $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\epsilon}$, adeoque permutando $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\epsilon}$, & componendo $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon}$; Erit, permutando, & per prop. 33. $\frac{A+B}{\alpha+\epsilon} (> \frac{B}{\epsilon}) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter probandum erit $\frac{B+C}{\epsilon+\gamma} (> \frac{C}{\gamma}) < \frac{B}{\epsilon} < \frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{C+D}{\gamma+\delta} (> \frac{D}{\delta}) < \frac{C}{\gamma} < \frac{B}{\epsilon} < \frac{A}{\alpha}$. Et ſic ubivis.

Secundo, ponantur utrinque tres, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\epsilon} > \frac{C}{\gamma}$. Quoniam per membrum primum $\frac{A}{\alpha} (> \frac{B}{\epsilon}) > \frac{B+C}{\epsilon+\gamma}$, erit permutando $\frac{A}{B+C} > \frac{\alpha}{\epsilon+\gamma}$, & componendo $\frac{A+B+C}{B+C} > \frac{\alpha+\epsilon+\gamma}{\epsilon+\gamma}$, iterumque permutando, & per membrum primum, & per pr. 33. Erit $\frac{A+B+C}{\alpha+\epsilon+\gamma} (> \frac{B+C}{\epsilon+\gamma} > \frac{C}{\gamma}) < \frac{A}{\alpha}$. quæ erant demonſtranda. Et ſimiliter probabitur $\frac{B+C+D}{\epsilon+\gamma+\delta} (> \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta}) < \frac{B}{\epsilon} < \frac{A}{\alpha}$.

Eodem modo, poſitis utrobique quatuor, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma} > \frac{D}{\delta}$. Erit per membrum præcedens, $\frac{A}{\alpha} (> \frac{B}{\beta}) > \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta}$. ideoque (permutando, & componendo, iterumque permutando, &c. ut prius,) $\frac{A+B+C+D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} (> \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} > \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta}) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter $\frac{B+C+D+E}{\beta+\gamma+\delta+\epsilon} (> \frac{C+D+E}{\gamma+\delta+\epsilon} > \frac{D+E}{\delta+\epsilon} > \frac{E}{\epsilon}) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$.

Et pari modo, poſitis utrobique, quinque, ſex, ſeptem, &c. demonſtratio gradatim procedet. Conſtat itaque propoſitum.

Atque hactenus Euclidis Elementum quintum, cum propoſitionibus adjunctis, expoſuimus: ſuccincte quidem, ſed nec propterea minus dilucide.

Si quem interim male habeat, quod in demonſtrationibus non raro, ea quæ ad Fractionum Diviſionem, Multiplicationem &c. attinent, adhibuerim; quarum doctrinam nondum ex profeſſo tradiderim: Poterit ille totum hoc caput, cum ſequente, Fractionum tractationi poſtponere, vel ſaltem quaſi eſſent poſtpoſita reputare.

putare. Quanquam revera vix quicquam eorum hic assumitur, quod non & in superioribus exponitur; præsertim ubi de Fractionum notatione dictum est, & de Multiplicatione Divisioneque Algebrica sive Speciosa.

CAP. XXXVI.

Elementi Quinti Synopsis.

QUod præcedente Capite fusius traditum est, in brevem Synopsin redigemus.

Ubi $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$, ibi $A.B::\alpha.\beta$. Definitio.

Ergo
- $A.B::\alpha(=A).B.$
- $A.B::A.\beta(=B).$ } prop. 7. 9.
- $A.B :: \alpha.\beta$ } $>$ / $=$ / $<$ { $C.D$. prop. 11. 13.
- $A.B::RA.RB$. prop. 15.

Item $\frac{A+E}{B}>\frac{A}{B}$. Et $\frac{A}{B+E}<\frac{A}{B}$. prop. 8. 10.

Suntque hæ propositiones Intellectui satis obviæ. Sequuntur aliæ.

Si
- $A.B::\alpha.\beta$.
- $A\times\beta=B\times\alpha$. Lemma.
- $B.A::C.\alpha$. Cor. pr. 4.
- $A.\alpha::B.C$. pr. 14. 16.
- $RA.B::R\alpha.C$.
- $A.\wr B::\alpha.\wr C$. } prop. 3. 4.
- $RA.\wr B::R\alpha.\wr C$.
- $A.B::\{A\ddagger\alpha.B\ddagger C$ / $RA\ddagger\wr\alpha.RB\ddagger\wr C$. } prop. 1. 5. 12. 19.

Erit
- $A\ddagger B.\{B/A\::\alpha\ddagger\beta.\{C/\alpha$.
- $\{A/B\}.A\ddagger B::\{\alpha/C\}.\alpha\ddagger C$. } pr. 17. 18. cor. pr. 19.
- $MA\ddagger RB.\{\wr A/\wr B\}::M\alpha\ddagger RC.\{\wr\alpha/\wr C\}$.
- $\{\wr A/\wr B\}.MA\ddagger RB::\{\wr\alpha/\wr C\}.M\alpha\ddagger RC$.

Suntque & hæ propositiones, earumque conversæ, vel per se satis obviæ, vel per Lemma nostrum facile demonstrantur; adeoque si de harum analogiarum una quavis constiterit, constabit & de omnibus. Sequuntur aliæ.

Si $\left\{\begin{matrix}A\\C\end{matrix}\right\}$. B :: $\left\{\begin{matrix}\alpha\\\gamma\end{matrix}\right\}$. ϵ .
Erit A $\ddagger_{\omega}$ C . B :: $\alpha \ddagger_{\omega} \gamma$. ϵ . } prop. 2. 24.

Si $\left\{\begin{matrix}A \ddagger_{\omega} C\\A\end{matrix}\right\}$. B :: $\left\{\begin{matrix}\alpha \ddagger_{\omega} \gamma\\\alpha\end{matrix}\right\}$. ϵ .
Erit C . B :: γ . ϵ . } prop. 6.

Si A $\ddagger_{\omega} \alpha$. B $\ddagger_{\omega} \beta$ :: A . B .
Erit A $\ddagger_{\omega} \alpha$. B $\ddagger_{\omega} \epsilon$ (:: A. B) :: α . ϵ . } prop. 5. 19.

Si A . B . C : α . ϵ . γ .

Vel A . B . C : α . ϵ . γ .

Erit A . C :: α . γ . pr. 20. 21. 22. 23.

Si maxima A . B :: α . ϵ . minim.
Erit A + ϵ > B + α . prop. 25.

Harum item propositionum demonstrationes, vel ex superiore Lemmate, vel aliunde, sunt satis obviæ, vel saltem ex supra traditis illarum expositionibus peti possunt. Adeoque Euclidis Elementum quintum, compendio traditum est; locis interim aliquammultis locupletatum.

Quæ sequuntur, apud interpretes, propositiones de non-proportionalibus; ad alias ab Euclide traditas facile reducuntur, in quibus quasi virtualiter continentur. Puta prop. 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33. In Cor. pr. 4. pr. 16. 17, 18, 19, 22, 23. Cor. pr. 19. Ut cap. præced. ostensum est.

De Marci Meibomii Dialogo, Monitio.

De Meibomii Dialogo. Ubi hactenus perveneram, incidi in *Marci Meibomii, De Proportionibus Dialogum*; anno superiori 1655 editum. Quo, novam de Proportionibus doctrinam spondet: Atque tum *Pythagoram, Eudoxum, Euclidem, & quotquot unquam Pythagorici floruere*; tum *Archimedem, Apollonium, Pappum*; *Theonem* item, atque *Eutocium*; *Commandinum* denique & *Clavium, omniumque juniorum Mathematicorum filios*; sive, summatim, tum *totam antiquitatem*, tum *recentiores omnes*; sive, *totam Mathematicorum cohortem ad nostra usque tempora*; *hallucinatos esse*, contendit: *Nec tantum ignorasse authores illos, quid sit Rationum Compositio*; *sed &, quid sit Ratio*: Quodque *ipse primus, omnem eruditam vetustatem, ingenti molimine, superaverit*; *Pluraque* tradiderit, *quam ab ullo Geometra expectari posse, putandum erat.* Quippe *is præcipuus*, inquit, *narrationis scopus est, ut totam antiquitatem ignoratæ in quibusdam Elementis Geometriæ convincat*; *deinde autem juniorum pravas explicationes, & monstrosas hallucinationes demonstret.* Cum enim, tum veteres, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarint*; tum, *quæ veteres recte docuerant, siniſtra recentiorum interpretatione sint depravata*: *Itaque*, inquit, *& recentiores omnes reprehendam*; *qui antiquos non intellexerunt*: *& antiquos corrigam*; *qui male quædam prodiderunt*: *utrosque insuper nova docturus.*

Totius

Totius autem novæ doctrinæ suæ, hoc est, erratorum suorum, originem, qui examinat, hanc esse deprehendet; quod inter λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα; sive, (ut loquuntur interpretes) inter *rationem duplam*, & *duplicatam*; vel nescíat, vel nolit, distinguere. Quæ cum ille pro eodem habere velit; tum separanda perperam commiscet; tum, quæ ab authoribus de utrisque vere tradita sunt, quasi inter se pugnantia committit. Adeoque Theonem, aliosque, graviter culpat, quod putaverint *tripli duplum esse sextuplum*: Dum ille, *tripli duplum, noncuplum esse*, contendit; quia nempe, rationis triplæ, ratio duplicata, est noncupla. *Ejusdem summa.*

Deinde; cum ratio $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$, sit *ratio duplicata*; quam ille pro eodem habet atque *rationem duplam*; nec interim dubitaverit, quin dupla sit major, quam simpla: statuit, *rationem* 1 *ad* 4, *majorem esse quam* 1 *ad* 2.

Adeoque rationem illam *majorem* esse vult, non quam definit Euclides, 8 *d* 5. sed, quæ ab æqualitate magis recedit; sive, ut loquitur ille, *cujus termini longius inter se distant*. (Quasi quidem, idem esset *Ratio*, atque *Inæqualitas*.) Ipsamque *Æqualitatis* rationem, *Rationem Nihili* appellat; utpote ubi nulla est Inæqualitas.

Et propterea *Prop.* 8. & 10. e 5. (& quæ inde dependent omnes) falsas esse contendit; quod per eas, dicenda esset ratio $\frac{1}{2}$, major quam ratio $\frac{1}{4}$. Adeoque & 8 def. 5. (cui innituntur) falsam esse.

Rationes autem $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$, item $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, (atque de aliis pariter,) æquales invicem dicendas vult. Tum; quod idem sit intervallum inter 1 & 2, atque inter 2 & 1; adeoque, secundum illum, eadem ratio: Tum quod utraque, ab æqualitatis ratione æque recedat. Sicuti enim + 1 & — 1 (si ipsi credamus) sunt inter se æquales; quia uterque ab 0, seu nihilo, (numeri omnis initio,) æqualiter distat: ita & ratio $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales erunt dicendæ; cum utraque ab æqualitatis (sive nihili) ratione $\frac{1}{1}$, æque recedat.

Estque hæc totius novæ suæ doctrinæ summa; breviter quidem, sed fideliter recensita; & magis forsan perspicue quam ipse vellet. Cujus quidem ego refutationem, putassem, primo, hic loci inseruisse; tum quod hanc novam suam doctrinam non antea viderim, quam præcedentia descripta fuerant, & prope omnia jam impressa; tum, quod locus hic sit satis opportunus. Cum vero refutationem, quam, currente prelo, paravi, prolixiorem videam, quam quæ uno capiti commode inseratur; totumque hoc de proportionibus negotium jam supra satis dilucide traditum sit, ut, qui à nobis tradita intelligat, non admodum solicitus sit futurus de nova ipsius traditione: Lectorem hic nimia digressione detinendum non censui. Adeoque Refutationem illam seorsim potius, vel, si opus sit, huic tractatui subjungendam reliqui. Ut sicui videatur illius nova doctrina quicquam in se habere ponderis; videre possit, & quid nobis illi reponendum esse duximus.

Interim vero dicimus 1°. Λόγον διπλάσιον, aliud plane esse quam Λόγον διπλασίονα, ut supra ostensum est; &, quid inter se distent. 2°. Λόγον διπλάσιον, rationem duplam, simpla majorem esse, agnoscimus: sed non ita semper Λόγον διπλασίονα· (quippe quoties exposita ratio, seu radix, supponitur minor quam 1 vel $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c. hoc est, Quadratum, Cubus, &c. perpetuo decrescunt.) 3°. Adeoque non inde sequi dicimus, rationem $\frac{1}{4}$ majorem esse quam $\frac{1}{2}$, utut illa sit hujus duplicata, adeoque tum 8 *d* 5, tum 8 & 10 *e* 5, (tum quæ hinc dependent,) satis constare. 4°. Æqualitatis rationem $\frac{1}{1}$, non rationem *nihili* dicendam esse, sed simplam: quippe, ut, ubi terminus antecedens consequentem bis continet, duplus dicitur; ubi ter, triplus, &c. ita, ubi semel, simplus dicendus est: adeoque $\frac{1}{1}$ ratio simpla. 5°. Negamus item, tum + 1 & — 1, esse æquales numeros; tum $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales esse rationes: quippe + 1, binario major est quam — 1, (nam + 1 = — 1 + 2) & ratio $\frac{2}{1}$ est rationis $\frac{1}{2}$ (non inquam, quadruplicata, sed) quadrupla: nempe $\frac{2}{1} = 4 \times \frac{1}{2}$. 6°. Negamus item, *Rationem* tantundem esse atque *Inæqualitatem*, (quippe & æqualium ad invicem est ratio, non minus quam inæqualium:) Aut etiam idem atque *Intervallum*. Uti enim, in ratione, ut loquuntur, Arithmetica; eadem est Differentia (quæ subductionem spectat) inter 5 & 3, atque inter 3 & 5; non autem eadem ratio Arithmetica, 5 ad 3, & 3 ad 5; quippe illic, Excessus binarii; hic, binarii Defectus: Ita, in ratione Geometrica; idem est intervallum (divisione æstimandum) inter 2 & 1, atque inter 1 & 2: non autem eadem ratio; sed illic, dupla; hic, subdupla: sive, *Refutatio brevis.*

illic innuitur duplo majus; hic, duplo minus. Et quidem, ut illic, licet eadem Differentia, non tamen idem Reſiduum; ſed $5-3=+2$, $3-5=-2$: ita & hic, licet idem Intervallum, non tamen idem Quotiens; ſed 1) 2 (2, 2) 1 ($\frac{1}{2}$. Neque magis ſequitur, quoniam inter 2 & 1, atque 1 & 2, eſt idem intervallum, ergo & eadem Ratio, ſive Relatio: quam, quoniam inter Patrem & Filium, atque Filium & Patrem, eadem eſt diſtantia, Ergo & eadem Relatio. Et quidem, ut, Generatio, commune Fundamentum eſt tum Paternitatis, tum Filiationis, relationum ſibi mutuo oppoſitarum: Ita & Intervallum idem, eſt commune Fundamentum Rationis (quæ ipſa eſt Relatio) tum Duplæ tum Subduplæ; quæ interim ipſæ ſunt Rationes oppoſitæ, ſive Inverſæ. Sed de his hactenus.

CAP. XXXVII.

De Aurea Regula. Ejuſdem Praxis & Demonſtratio. Exempla varia. Altitudinum per umbras menſuratio. Horæ diei, ſub diverſis meridianis, comparatio. Terminorum proportionalium præparatoria Reductio. Cautela, de non-proportionalibus. Gravium deſcenſus acceleratus. Effluentis aquæ vis langueſcens. Terminorum proportionalium ordinatio. Terminorum præparatio; per Diviſionem: per Multiplicationem. Dubii, de quantitatibus Heterogeneis, ſolutio. Operationis probatio.

Aurea Regula. AD Proportionum doctrinam, (quam in ſuperioribus fuſius tradidimus,) ſpectat, quæ dicitur, *Aurea Regula*; ſive *Regula Trium* (Quæ ob inſignem ſuum, quem, in tota Matheſi, uſum habet, *Aurea* dici ſolet.) Qua nempe, *Terminorum quatuor proportionalium, datis Tribus, Quartus inveſtigatur.*

Praxis. Si enim, *Tertius per ſecundum multiplicetur* (vel hic per illum,) *& productum dividatur per primum*; *Quotiens exhibebit Quartum quæſitum.*

Demonſtratio. Sunto enim quatuor termini proportionales A. B :: α. ε. Datis A, B, α, prodibit $\beta=\frac{B\alpha}{A}$. Cum enim ſit, ex hypotheſi, A. B :: α. β. adeoque (invertendo) B. A :: β. α. hoc eſt. $\frac{B}{A}=\frac{\beta}{\alpha}$. Utrinque multiplicando in α, prodibit $\frac{B\alpha}{A}=\beta$. vel A) B α (β.

Vel item (ab origine) ſic. Quoniam eſt, ex hypotheſi, A. B :: α. β. hoc eſt $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$; multiplicando utrinque in Bβ, erit Aβ = Bα. Adeoque, dividendo utrinque per A, erit $\beta=\frac{B\alpha}{A}$.

Vel, ut tironibus ſit magis adhuc perſpicuum, cum ſit A. B :: α. β. hoc eſt (per def. proportionalium, ſive, ejuſdem rationis) $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$. Si æqualia æqualiter multiplicentur, prodibunt æqualia. Adeoque ſi tum $\frac{A}{B}$, tum $\frac{\alpha}{\beta}$, ducantur in B; fiet, illic $\frac{A}{B}\times B=A$; hic, $\frac{\alpha}{\beta}\times B=\frac{B\alpha}{\beta}$. adeoque $A=\frac{B\alpha}{\beta}$. Iterumque, ductis utriſque in β; fiet, illic $A\times\beta=A\beta$; hic, $\frac{B\alpha}{\beta}\times\beta=B\alpha$: adeoque Aβ = Bα. (Hoc eſt;

est; Ex quatuor proportionalibus, factum ab extremis æquatur facto à mediis: quod & superius aliquoties demonstravimus.) Denique, si æqualia æqualiter dividantur, orta erunt æqualia. Adeoque, si tum $A\beta$, tum $B\alpha$, dividatur per A; erit, illic $A)A\beta(\beta$; hic, $A)B\alpha(\frac{B\alpha}{A}$. adeoque $\beta=\frac{B\alpha}{A}$. quod erat demonstrandum.

Per hanc Regulam solvi solent hujusmodi Problemata.

Si 3 pondo mercium constant 5 solidis, quot solidis constabunt earundem mercium pondo 15. Quoniam in quæstione supponitur, merces esse æque charas; erit, ut merx ad mercem, sic precium ad precium; Adeoque ut 3, numerus mercium emptarum; ad 15, numerum emendarum: ita 5 numerus pretii dati; ad numerum pretii quæsiti. Nempe *Exempla.*

pondo.	pondo.	sol.	sol.
3.	15 ::	5.	Q.

Vel, quia jam de numeris ubique agitur, erit, alternando, ut merx, ad pretium; sic merx, ad pretium. Nempe.

pondo.	sol.	pondo	sol.
3.	5 ::	15	. Q.

Solvitur autem, juxta præsentem regulam, ducendo terminum secundum in tertium, (sive, quod perinde est, tertium in secundum,) unde fit $5\times15=75$: & dividendo per primum, $3)75(25=Q.$ sive $75\frac{1}{3}=25=Q.$ Adeoque pretium quæsitum est, 25 solidorum.

15
5
3)75(25=Q.

Item, *Si 3 dierum stipendium, sint 2 solidi, dierum 12 stipendium quantum erit.* Hoc est $3^{d}.\ 2^{s}::12^{d}.\ Q^{s}.$ Multiplicentur invicem 2 in 12, fiet $2\times12=24$. tum dividendo per 3, prodibit $3)24(8=Q.$ Dierum itaque 12, stipendium est 8 solidorum.

12
2
3)24(8=Q.

Pariter, *Si Argenti unciæ duæ valeant (in moneta Anglicana) decem solidos; quæritur; quanti valebunt unciæ duodecim, sive una libra Argenti?* Solvitur, ut prius; invento termino quarto $Q=60$. Adeoque una libra argenti valere deprehenditur 60 solidos Anglicanos, sive tres libras monetæ.

2.10::12.Q.
10
2)120)60

Pariter, Sicui libeat *altitudinem Turris, in plano erectæ, per umbram æstimare*; id ita fiat. Erigatur in eodem plano (vel saltem parallelo) palus seu baculum, notæ longitudinis A (puta pedum 6;) umbram splendente Sole projiciens, cujus mensura sit B, (puta pedum 2.) Eodem tempore, mensuretur umbra Turris, quæ sit β, (puta pedum 20.) & quæratur, Quanta sit Turris altitudo α? Quoniam itaque in simili situ, umbræ sint Altitudinibus proportionales; erit $B.A::\beta.\alpha.$ hoc est $2.6::20.\alpha.$ Et, facta operatione, invenitur = 60 ped. Altitudo Turris. *Altitudinum per umbras mensuratio.*

$B.A::\beta.\alpha.$	$2.6::20.\alpha.$
A	6
$B)A\beta(\frac{A\beta}{B}=\alpha.$	$2)120(60=\alpha.$

Similiter, Si quæratur. *Quota sit hora Athenis, quando est, Oxoniæ, octava.* Præsciendum autem hic est, ex Geographia, Athenas magis ad Orientem positas, quam est Oxonia, gradibus (plus minus) triginta. Ideoque citius ad Athenarum Meridianum perventurus est Sol, quam ad nostrum Oxoniæ. Quæritur autem, quanto citius? Hoc autem ut expediatur, sciendum est insuper, Solem horis (circiter) 24, integrum diurnum circulum transigere, & ad eundem unde abierat Meridianum redire. Ponuntur autem, in circulo integro, gradus 360. His positis, sic instituitur Analogismus. *Si Sol, in horis 24, peragat gradus 360; quot horis peragit gradus 30?* Adeoque, cum eadem æquabili celeritate motum, transigat spatia temporibus proportionalia; erit, ut gradus 360. ad gradus 30:: ita tempus horarum 24. ad tempus quæsitum, nempe horarum 2, ut ex adjuncta operatione constabit. *Horæ diei, sub variis meridianis, comparatio.*

gr. gr. h. h. gr. h. gr. h.
360 . 30 :: 24 . Q = 2. 360 . 24 :: 30. Q = 2.
30 30
360) 720 (2 = Q. 360) 720 (2 = Q.

Horis itaque duabus (circiter) ad meridianum Athenienſem Sol citius pervenit, quam ad *Oxonienſem*; adeoque illorum meridies eſt, noſtro, duabus horis prior. Nempe illic, meridies eſt, ſive hora duodecima; dum hic, eſt decima. Adeoque illic hora decima, dum hic octava eſt.

Terminorum per Reductionem præparatio.

Si vero contingat, Homologos terminos, in quæſtione propoſitos, non ejuſdem (ut loquuntur) denominationis eſſe; reducendi prius erunt termini ad eandem denominationem, quam procedat peculiaris hujuſce regulæ praxis. Puta, Si proponatur hujuſmodi quæſtio; *Poſito, quod tres unciæ argenti valeant quindecim ſolidos Anglicanos, quanti valebunt argenti pondo quatuor?* Cum hic quatuor ſupponantur termini proportionales, quorum duo, pondus reſpiciunt; reliqui duo, valorem; qui autem pondus reſpiciunt, non eandem ſortiantur denominationem; ſed de unciis, ille; hic, de libris ſeu pondo, pronunciat; Reducendi ſunt hi duo termini ad eandem denominationem; priuſquam inſtituatur praxis hac regula imperata. Adeoque; vel, pro 3 unciis, ſubſtituendum $\frac{1}{4}$ libræ; (quippe, cum libra contineat duodecim uncias; erunt tres unciæ, libræ quadrans;) ut quæſtio ſic inſtituatur; *Ut* $\frac{1}{4}$ *libræ, ad* 4 *libras; ſic* 15 *ſolidi, ad valorem quæſitum.* Vel, pro 4 libris, ſubſtituendum, 48 uncias; (quippe, cum libra contineat 12 uncias, 4 libræ continebunt $4 \times 12 = 48$ uncias,) ut quæſtio ſic inſtituatur; *Ut 3 unciæ, ad* 48 *uncias; ſic* 15 *ſolidi, ad valorem quæſitum.* Utrovis modo, prodibit valor quæſitus, 240 ſolidorum; hoc eſt, 12 librarum monetæ Anglicanæ, ut ex operatione patet.

$\frac{1}{4} . 4 :: 15 . Q.$ $3 . 48 :: 15 . Q.$
4 15
$\frac{1}{4}$) 60 (240 = Q 3) 720 (240 = Q.

Quomodo autem hujuſmodi inſtituendæ ſint reductiones, ſuperius oſtenſum eſt, ubi de Multiplicatione & Diviſione verba fecimus: nec opus eſt hic repetere.

Cautela de non proportionalibus.

Verum hic cavendum eſt, nequando fraudi ſit, indeque error ſuboriatur; quod ea tanquam proportionalia habeantur, quæ proportionalia non ſunt.

Gravium deſcenſus accelerati.

Exempli gratia; Si, *poſito, quod pondus gravitate ſua motum, duobus temporis momentis* 20 *pedes deſcendat; quæratur, quot pedes deſcenſurum ſit momentis* 10. Si fiat hic multiplicatio numeri tertii per ſecundum, atque producti diviſio per primum, prodibit quartus 100. At ille numerus quæſito non ſatisfacit. Quamvis enim verum ſit, pondus illud eadem velocitate motum, 100 pedes, 10 momentis, peracturum, qua, 20 pedes, 2 momentis peragebat; quia tribus datis 2 . 10 :: 20. quartus proportionalis eſt 100: attamen haud recte ſic reſponſum iri dicimus; quia grave deſcendens, non æquabili procedit motu, ſed motu accelerato; atque eo quidem celerius quo diutius fuerit in motu. Dico, *quo diutius fuerit in motu,* non autem, (quod vulgo aiunt Phyſici,) *quo ſit centro propius.* Non enim propinquatio ad centrum, ſed ab initio motus elongatio, ſeu potius continuatio motus, eſt cauſa auctæ celeritatis. Nam ſi grave demiſſum à puncto C, cadat ad punctum D; atque idem grave à puncto A demiſſum cadat item ad punctum D, (per lineam A B C D;) utroque caſu tranſibit ſpatium C D, ſed non eadem celeritate; ſegnius enim per illud ſpatium movebitur, ſi moveri incipiat à puncto C, quam ſi motus, per ſpatium A C inchoatus, per reliquum C D continuetur. At vero ſpatium illud C D, eadem diſtantia abeſt à centro, ſive ab A, ſive à C, motus inchoetur. Porro, ſi ponantur æqualia ſpatia, A B, B C, C D: Pondus per ſpatium A B jam delapſum, continuabit motum per ſpatium B C, majori velocitate, quam per ſpatium C D moveretur, ſi motum à puncto C inchoaverit. Propius tamen à centro

t t p p
2 . 10 :: 20 . Q = 100
10
2) 200 (100 = Q.

A
B
C
D

centro abeſt ſpatium CD, quam BC: verum illud (BC) ab initio motus (à puncto A inchoati,) magis diſtat, quam ab initio motus (inchoati à C) diſtat ſpatium CD. Quæ omnia tum experienti erunt comprobata, tum ab iis tradita qui de motuum acceleratione acutiſſime ſcripſerunt. Omnes itaque rationes illæ, quæ apud Phyſicos paſſim occurrunt, de motus naturalis celeritate aucta, à propinquitate ad centrum ductæ, penitus evaneſcunt. Quippe non tam terminus ad quem, quam terminus à quo, in motuum acceleratione ſpectandus erit.

Effluentis æquæ vis languescens.

Idem peccabitur, ſi hujuſmodi proponatur problema quaſi hac regula ſolvendum; *Si vas 12 congiorum capax, aqua impleatur; atque, aperto in fundo foramine, exeant in duobus horæ minutis tres congii; quæratur autem, quanto tempore tota exibit aqua?* Propoſita quippe quæſtione, ſi 3 congii effluant in 2 minutis, 12 congii in quot minutis exibunt. Reſpondendum eſſet, juxta hujuſce regulæ tenorem, totam exituram aquam minutis octo; quia 3.2::12.8. Atque hoc quidem verum eſſet; modo aqua eadem pergeret velocitate exire qua cœperat. At ſecus omnino ſe res habet. Siquidem continue decreſcit exeuntis aquæ celeritas, & quo minus ſupereſt exhauriendum aquæ, eo ſegnius exit. Majore nempe & violentia & velocitate effluet aqua vaſe pleno, quam ſemipleno; quoniam aqua inferius exitura majore mole ſuperioris aquæ premitur. (Non obſtante, quod vulgo admitti ſolet, principio, *De gravi in loco ſuo*, hoc eſt, in rem vel æque vel magis gravem, *minime gravitante.*) Cui fidem facient ipſi oculi, ſi attendatur quanto majore vi & velocitate, ex dolio cerviſiæ pleno, per eundem canalem exeat cerviſia, quam cum propemodum evacuatur.

$$3.2::12.Q$$
$$\frac{2}{3)24(8=Q}$$

Quibus autem gradibus vel creſcit velocitas cadentis ponderis, vel decreſcit velocitas per canalem exeuntis aquæ non hujus loci eſt inquirere. Sufficit impræſentiarum monuiſſe, hanc, quam præ manibus habemus, regulam, non niſi de quantitatibus vere proportionalibus procedere. Docet enim, *Datæ quantitati aliam in data ratione ponere.* Nempe quæritur quantitas quarta, quæ, ad tertiam datam, eandem habeat rationem, quam habet ſecunda ad primam; vel, ad quam tertia data, eandem habeat rationem, quam habet prima ad ſecundam.

De Proportionis terminis rite ordinandis.

Cavendum porro, ut datarum trium quantitatum, quælibet ſuo loco ponatur. Non enim promiſcue quælibet in quolibet loco ponenda eſt, ſed in ſuo ſingulæ. Neque etiam illi ſemper primus debetur, quæ in quæſtione propoſita, primo occurrit. Sæpe enim quæſtio propoſita variis ambagibus & involucris involvitur; quæ prius tollenda ſunt, quam proportio rite conſtituta appareat: Ut in ea quam modo expoſuimus de differentia meridianorum Athenienſis & Oxonienſis. Sæpe etiam quæſtio minus directe proponitur. Uti ſi expoſita de Argenti valore quæſtio, ita proponeretur, *Si 10 ſolidi Anglicani tantundem valeant atque 2 unciæ argenti; quanti valebunt unciæ 12?* Non enim hic 10, ſed 2, eſt proportionis terminus primus; utut ille in quæſtione primum audiatur.

Ut igitur ſuo ponantur loco ſinguli termini; curandum eſt, ut quatuor quantitates (nempe tres datæ & quarta quæſita) ita diſponantur ut prima ſupponatur eam habere rationem ad reliquarum alteram, quam habet reliqua ad quartam. Secus enim non erunt quatuor proportionales. Adeoque, in quæſtione proxime expoſita, primus terminus nec erit 10, nec 12. ſed 2. Secundus autem, pro libitu, erit vel 10, vel 12. Nempe, Ut 2 unciæ, ad 10 ſolidos; ſic 12 unciæ, ad ſolidos quot? Nam ut numerus ponderis prioris, ad numerum valoris ſui dati; ſic ſupponitur numerus ponderis poſterioris, ad valorem ſuum quæſitum? Vel etiam, ut 2 unciæ, ad 12 uncias; Sic 10 ſolidi, ad ſolidos quot? Nam quæ ratio eſt ponderis ad pondus, ea ſupponitur & valoris ad valorem. Atque hæc de terminis ordinandis ſufficiant.

$$2^{unc}.10^{ſol}::12^{unc}.Q^{ſol}.$$
$$2^{unc}.12^{unc}::10^{ſol}.Q^{ſol}.$$

De praxios varietate.

Terminis ita rite ordinatis; perinde omnino eſt (quod & jam diximus) ſive terminum tertium in ſecundum, ſive hunc in illum ducamus. Non modo, quia (quod modo dictum eſt) perinde eſt utrum duorum ſecundo tertiove loco ponamus: ſed maxime, quia duorum invicem ducendorum, perinde eſt utrum duorum multiplicatorem eſſe faciamus, aut multiplicandum: quod de multiplicatione ſuperius univerſim dictum eſt.

Sed

Sed & perinde est, sive Multiplicationem, sive Divisionem, prius instituamus. Sive enim terminorum secundi tertiique invicem ductorum productum per primum dividamus; sive mediorum (secundi & tertii) utrovis per primum diviso, quotientem in reliquum ducamus; perinde omnino est: Idem enim utcunque prodibit terminus quartus. (Quod & superius de multiplicatione & Divisione tradidimus universim: Nempe, quoties plures continue faciendæ sunt Multiplicationes & Divisiones, perinde est quo ordine instituantur.) Nam si A.B::α.β, erit omnino $\frac{B\alpha}{A}=\frac{\alpha B}{A}=\frac{B}{A}\alpha=\frac{\alpha}{A}B=\beta$. Vel, speciatim in numeris, si sit verbi gratia, 3.9::6.18. erit $\frac{9\times 6}{3}=\frac{6\times 9}{3}(=\frac{54}{3})=\frac{9}{3}\times 6(=3\times 6)=\frac{6}{3}\times 9(=2\times 9)$ $=18$. Adeoque cujusvis arbitrio permittitur, ut, pro re nata, eo ordine instituat operationes, quo magis pro hic & nunc (ut loquuntur) videbitur accommodum.

Interim vero, in tradenda regula, nos (cum aliis) multiplicationem potius præposuimus, qua fractionum incommodum melius evitetur. Si enim verbi gratia, instituatur proportio 2.5::8.Q. velim autem secundum per primum dividere, prodibit 2)5(2½, adeoque terminus tertius 8 per 2½, (numerum fractionis adjectione impeditum) multiplicandus: Si vero mediorum productum $5\times 8=40$, dividam per primum, 2)40(20, prodibit utrobique numerus integer; eodem autem successu, (utut minori labore,) nam tum $8\times 2\frac{1}{2}=20$, tum $\frac{40}{2}=20=Q$. Item si instituatur proportio 2.5::7.Q. Et velim secundum per primum dividere, 2)5(2½, adeoque multiplicare $7\times 2\frac{1}{2}$; vel etiam tertium per primum dividere, 2)7(3½, adeoque multiplicare $5\times 3\frac{1}{2}$: operatio utrovis modo impeditior erit, quam si prius multiplicatis mediis, $5\times 7=35$, fiat tandem divisio per primum 2)35(17½ Quamvis enim & hic tandem prodeat fractio, tamen quæ ulteriorem difficultatem non procreabit; quippe illic sistendum est, nec alia secutura operatio quæ per fractionis adjectionem reddatur perplexior.

Si quando autem, jam ante peractas operationes, prospiciat quis mediorum alterum posse per primum ita dividi ut nulla supersit fractio; commodum erit divisionem illam præmittere; ita enim operationes minoribus numeris exercebuntur. Puta in analogia jam dicta 2.5::8.Q. commodum esse poterit, (non quidem secundum, sed) tertium, per primum dividere, 2)8(4; & quotientem in reliquum ducere, $4\times 5=20=Q$.

Terminorum præparatio, per Divisionem.

Nonnunquam item commodum erit, præcedanea terminorum expositorum diminutione, operationem expeditiorem reddere. Fit autem illud vel terminum primum & secundum, vel primum & tertium, ubi id fieri posse perspicitur, per communem divisorem dividendo: vel etiam eorum utrumque nonnunquam faciendo. Puta in proportione 6.9::8.Q. Si primum & secundum, per 3 dividamus; (eorumque loco quotientes substituamus;) habebitur proportio 2.3::8.Q. Sin primum & tertium dividamus per 2; prodibit 3.9.4.Q. Si denique utrumque fiat; puta tum primo primum & secundum dividamus per 3, tum primum (jam abbreviatum) & tertium per 2; prodibit 1.3::4.Q. Eodem ubique successu: Erit enim ubique terminus quartus quæsitus Q=12.

$$\overset{2}{\acute{o}}\ .\ \overset{3}{9}\ ::\ 8\ .\ Q=12.$$

$$\overset{3}{\acute{o}}\ .\ \overset{4}{9}\ ::\ 8\ .\ Q=12.$$

$$\overset{1}{\acute{o}}\ .\ \overset{2}{3}\ .\ \overset{4}{9}\ ::\ 8\ .\ Q=12.$$

Similiter in speciebus, sive symbolis: Si exponatur

Analogismus	A B C. A D E :: B E F. Q.
substituatur	B C. D E :: B E F. Q.
vel etiam	A C. A D E :: E F. Q.
vel denique	C. D E :: E F. Q.

Idem enim utcunque prodibit terminus quartus, vel qui tantundem valent; puta $\frac{ADE\times BEF}{ABC}=\frac{DE\times BEF}{BC}=\frac{ADE\times EF}{AC}=\frac{DE\times EF=DEqF}{C}=Q$. Et similiter alibi.

Aliquando

Aliquando item, multiplicatione, fiet accommoda terminorum præparatio. Si nempe vel primus & ſecundus, vel primus & tertius, eodem communi multiplicatore multiplicentur; (vel etiam utrumque fiat:) quo pacto fractionum moleſtia facile evitatur. Puta ſi exponatur analogiſmus, $\frac{3}{4}.4::3.Q.$ commode ſubſtituamus vel primi & ſecundi, vel primi & tertii duplum; puta $5.8::3.Q.$ vel $5.4::6.Q.$ Item pro $3)\frac{3}{4}.\frac{3}{3}::\frac{1}{3}.Q.$ ſubſtituamus vel $\frac{3}{4}.2::\frac{1}{3}.Q.$ vel $\frac{3}{3}.\frac{2}{3}::1.Q.$ vel etiam $5.2::1.Q.$ Similiter in ſymbolis pro *Per Multiplicationem.*

Analogiſmo $\frac{Aq}{BC}.\frac{DE}{BF}::\frac{GH}{CF}.Q.$

Subſtituamus (ductis primo & tertio in C) $\frac{Aq}{B}.\frac{DE}{BF}::\frac{GH}{F}.Q.$

vel (ductis primo & ſecundo in B) $\frac{Aq}{C}.\frac{DE}{F}::\frac{GH}{CF}.Q.$

vel potius (utroque facto) $Aq.\frac{DE}{F}::\frac{GH}{F}.Q.$

vel (ductis item primo & ſecundo in F) $AqF.DE::\frac{GH}{F}.Q.$

vel denique (ductis adhuc primo & 3° in F) $AqFq.DE::GH.Q=\frac{DEGH}{AqFq}$

Commune harum præparationum fundamentum eſt, quod Multiplorum ad æquimultipla, eadem eſt ratio atque ſimplorum ad ſimpla. Puta $3\times2.4\times2::3.4.$ Item $\frac{3}{3}.\frac{4}{3}::3.4.$ Item $3A.4A::3.4.$ Et $BA.CA::B.C.$ Et $\frac{B}{A}.\frac{C}{A}::B.C.$ Et ſimiliter alibi.

Unus adhuc ſupereſt, qui nonnullum morari poſſit, ſcrupulus. Nempe cum certum ſit analogias non raro inſtitui inter quantitates heterogeneas, (puta ut linea A, ad lineam B; ſic pondus α, ad pondus β;) quî poſſit una in alteram multiplicari, aut per eam dividi? item, quid ſit, verbi gratia, pondus α in lineam B multiplicare, aut per lineam A dividere? Quale enim factum illud erit cujus longitudo eſt Linea; latitudo Pondus? aut qualis quotiens, ubi quæritur quoties pondus α contineat lineam A? *Dubium, de Quantitatibus Heterogeneis.*

Dicimus itaque, non hic tam comparari lineam ad pondus; quæ quidem plane heterogenea ſunt, nec invicem comparanda: ſed rationem duarum inter ſe linearum, ad rationem duorum invicem ponderum: Quæ quidem rationes invicem homogeneæ ſunt, puta dupla, tripla, ſeſquialtera; ſumpta nempe denominatione à quotiente antecedentis per conſequentem diviſæ. Eſt autem quotiens ille, ut ſuperius traditum eſt, vel numerus, vel ſaltem in genere numeroſo aliquid, ipſiſque numeris homogeneum; puta numerus fractus, aut ſurdus, aut tale quid. Adeoque quum dicitur $A.B::\alpha.\beta.$ hoc tantum innuitur, rationem A ad B ſive $\frac{A}{B}$, æqualem eſſe rationi α ad β, ſive $\frac{\alpha}{\beta}$. Vel quod tantundem valet, quotientem quantitatis A per homogeneam B diviſæ, æqualem eſſe quotienti quantitatis α per ſibi homogeneam (utut prioribus heterogeneam) diviſæ. Puta, ſi A ſit linea bipedalis; B, pedalis; erit illa hujus dupla, ſive ut 2 ad 1. Item, ſi α ſit quadripondium; β, bipondium, erit illud hujus duplum, ſive ut 2 ad 1. Quippe erit, tum B) A (2, tum β) α (2. Adeoque $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}=2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$ &c. Cum itaque nihil hic aliud ſpectetur, quam ratio, ſive etiam quotiens: licebit, pro expoſitis quantitatibus, alias cujuſcunque generis ſubſtituere, quæ in eadem ſint ratione conſtitutæ, ſive eundem quotientem exhibeant; utut expoſitis ſint heterogeneæ. Arithmeticus itaque, quo operationes ſuæ rectius conſtent, pro expoſitis quantitatibus cujuſcunque generis, quarum tantum ratio conſideratur, numeros ſubſtituit (ſive quod numeri inſtar eſt) in eadem ratione conſtitutos. Puta, pro lineis A, B, bipedali & pedali, binos quoſvis in eadem ratione numeros, puta *Ejuſdem ſolutio.*

2, 1; vel 4, 2; vel 6, 3; &c. quia utcunque $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{A}{B}$: Et, pro expositis, æqualia substituendo, quantitas non immutatur; sed utrobique tantundem est. Proinde itaque est sive dicat, ut linea bipedalis A, ad pedalem B; sive, ut numerus 2 ad 1; sive ut 4 ad 2; &c. propter Quotientem, adeoque & Rationem, (quæ hic solum spectatur,) utrobique æqualem. Et quamvis, pro numeris his, nonnunquam & symbola iterum substituat, vel etiam quæ linearum erant retineat; ea tamen quasi pro numeris habet, eaque numerorum instar tractat versatque. Nec tam lineas & pondera, quam numeros, in iisdem, cum lineis & ponderibus, rationibus, constitutos, se versare cogitat. Itaque in exemplo exposito, si A, B, supponatur significare 4, 2: (quia nempe $\frac{A}{B}=\frac{4}{2}$) manentibus interim si placet α, β, ut ponderum symbolis: tantundem erit dicere $A.B::\alpha.\beta$; atque $4.2::\alpha.\beta$. Adeoque secundi & tertii rectangulum $B\times\alpha$, est $2\times\alpha$, sive ponderis α duplum: Et $\frac{B\times\alpha}{A}$, est $\frac{2\times\alpha}{4}$, sive istius dupli quadrans. At vero, pondus duplare, iterumque quadrifariam partiri, nihil absurdi sonat.

Vel etiam simplicius rem ita explicemus. Quoniam ponuntur tum A, B, tum α, β, quantitates utrobique homogeneæ, (utut hæ ad illas heterogeneæ;) divisa quantitate B per A, quotiens erit numerus (sive quod numeri instar est) rationem denominans; puta $N=\frac{B}{A}$. Adeoque $\frac{B\times\alpha}{A}$ hoc est $\frac{B}{A}\times\alpha$, tantundem est atque $N\times\alpha$. Et propterea $\frac{B}{A}\times\alpha=\beta$ vel $N\times\alpha=\beta$: significat quantitatem α (cujuscunque fuerit generis) ducta in N numerum qui denominat rationem B ad A, (quantitatem autem quamlibet, per numerum multiplicari, nihil est absurdi,) quod æquabitur quantitati β: vel quod tantundem est, quantitatis α totuplum, quotuplum B est $\overline{\text{ꝛ}}$ A, (vel etiam tantuplum quantuplum &c.) æquatur quantitati β.

Exæmen. Solent hic nonnulli Arithmetices practicæ Magistri, operationis hujus examen adjicere; ut nempe melius constet, si quod oriatur dubium, num probe peracta sit operatio. Potest autem id variis modis fieri.

Nonnulli sic instituunt. Ductis tum termino primo in quartum, tum secundo in tertium, si utrobique idem productum emergat, indicio est rem probe peractam esse. (Puta si propositis $3.5::9.Q$. prodeat quartus $Q=15$. Facto examine, reperietur $3\times15\,(=45)=5\times9$. adeoque $3.5::9.15$. proportionales esse, atque operationem recte institutam.) Nam si, quatuor terminorum, factum ex mediis æquetur facto ab extremis, sunt illi quatuor termini proportionales. Cujus Demonstratio superius aliquoties adducta est.

Vel sic. Si terminus quartus, modo inventus, jam fiat primus, atque operatio inverse instituatur: Nempe ut qui quartus erat ad tertium, ita qui secundus erat, ad quæsitum; factaque operatione prodeat qui fuerat primus, recte processit operatio; sin minus, alicubi erratum est. Puta, si, ut prius, expositis $3.5::9.Q$, & prodeat quartus $Q=15$. adeoque $3.5::9.15$. Examen instituo invertendo proportionem $15.9::5.Q$ (Nam si quantitates sint proportionales, erunt & inverse proportionales; ut supra ostensum est.) Et quoniam, sic facta operatione, prodit quæsitus $Q=3$, (qui prius fuerat terminus primus, jam autem quartus,) patet operationem recte peractam esse.

Vel sic potius $5.3::15.Q=9$. aut sic, $9.3::15.Q=5$. Ut 5 vel 3, qui prius fuerat Multiplicator, jam fiat Divisor. Sed aliis hujusmodi multis modis institui potest hoc examen: Nec tamen tanti est ut plures recensem.

Atque hactenus de *Aurea Regula* quæ dicitur *Directa*, dictum esto. De *Regula inversa* dicetur Capite sequente.

CAP.

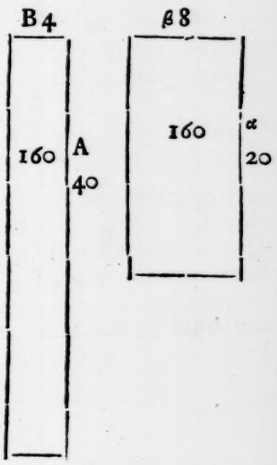
CAP. XXXVIII.

De Aurea Regula reciproca. Ejuſdem à Directa, diſcrimen. Praxis, & Demonſtratio. Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ. De operationum compendiis & probationibus. Reductio hujus ad regulam Directam.

AUrea quæ dicitur *Regula inverſa*, ſive *Reciproca*, eſt ubi *expoſitis tribus quantitatibus quæritur quarta reciproce proportionalis.* Dicimus autem *Reciproce Proportionalia, quando Rationum Comparatarum* (nempe primi ad tertium, & ſecundi ad quartum) *altera, eſt alterius Inverſa.* Ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$; vel $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$. Adeoque, verbi gratia, 4. 18; 6. 12. erunt Reciproce proportionalia; propter $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, & $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$. Atque in aliis ſimiliter. *Regula aurea Inverſa.*

Differt autem à *Regula Directa*, quam præcedente capite expoſuimus, quod ut illic ſpectatur æqualitas Rationum, vel Quotorum; ita hic, æqualitas Rectangulorum ſive Factorum. Nempe illic, ut terminus primus ad ſecundum, ſic tertius ad quartum quæſitum: adeoque idem emergit Quotiens tum ubi primus per ſecundum, tum tertius per quartum dividitur, (quod eſt æqualium ſive earundem rationum genuinum & ſimpliciſſimum criterion.) Hic autem, rectangulum ſive factum à primo in ſecundum ducto, æquatur Rectangulo ſive Facto à tertio in quartum quæſitum ducto. *Quomodo à directa differt.*

Exempli gratia *Si ager longus perticas* 40, *latus* 4, *contineat jugerum terræ*, (Acram, vulgo dicimus:) *quæritur, quam latus ſit oportet, qui nonniſi* 20 *perticas longus eſt, ut eadem terræ quantitas habeatur*? Manifeſtum hic eſt, cum utrobique æqualis terræ quantitas ſpectetur, quæ ex latitudine & longitudine comparatis emergit; quo in altero longitudo major ſit, eo minor ſit latitudo neceſſe eſt, & contra; ut alterius defectum alterius exceſſus compleat. Adeoque, ut prioris longitudo ad latitudinem ſuam, ſic poſterioris longitudo (non directe, nam ſic prodiret figura ſimilis, non æqualis, ſed) reciproce ad ſuam latitudinem. Sive, ut longitudo ſecundi ad longitudinem primi, ſic primi latitudo ad latitudinem ſecundi. Nam hoc eſt, *reciproce proportionales eſſe*, per. 2. *def.* 6. Adeoque ſi prioris longitudo ponatur A, latitudo B; ſecundi longitudo α, latitudo β: erit $A.\alpha :: \beta.B.$ ſive $C.B :: A.\alpha$. ut ſit $A \times B = \alpha \times C$.



Hujuſce Regulæ praxis hæc eſt. *Si, trium terminorum, quod fit ex primo in ſecundum ducto, dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.* *Ejus praxis.*

Adeoque, cum in expoſito exemplo, prioris agri longitudo A, ducta in ſuam latitudinem B, faciat rectangulum AB; facta diviſione per α ſecundi longitudinem, prodibit hujus latitudo quæſita $\beta = \frac{AB}{\alpha}$. Vel, in numeris, cum prioris longitudo 40, ducta in latitudinem ſuam 4, ſit $160 = 40 \times 4$. facta diviſione per datam ſecundi longitudinem 20, prodibit hujus latitudo $8 = \frac{160}{20}$. In hoc itaque differt praxis hæc, à praxi præcedentis regulæ, directæ; quod illic, terminus primus eſt diviſor; hic, tertius.

A
×B
α)AB(C

40
× 4
20)160(8

Demonſtratio. Demonſtratio praxeos hæc erit. Quoniam, ex hypotheſi, ponitur rectangulum primi in ſecundum, æquale rectangulo tertii in quartum; hoc eſt $A \times B = \alpha \times \beta$, ſive $AB = \alpha\beta$; erit utrinque dividendo per α, $\frac{AB}{\alpha} = \beta$.

Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ. Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ, ab iis quæ ſolvendæ ſunt per præcedentem; ſic diſtinguant Tirones. Si, ex natura quæſtionis, quo major ſit terminus tertius, eo major requiratur quartus; regulæ directæ opus eſt: Sin, quo major tertius eo minor requiritur quartus, ſive quo minor tertius, eo major quartus; inverſæ regulæ opus erit.

12.20::6.Q=10.
6
12)120(10=Q

Verbi gratia; *Si quis 12 horis conficiat milliaria* 20; *idem horis 6, quot conficiet.* Quoniam, hic manifeſtum eſt, longiori tempore plura conficienda milliaria; quo major eſt terminus tertius (numerus horarum) eo major erit & quartus, numerus milliarium quæſitus. Et propterea, per auream regulam directam, invenitur terminus quartus quæſitus, 10.

12.20:6.Q=40.
12
6)240(40=Q.

Contra vero; *Opus à viris 12, diebus 20 perficiendum; ſi aggrediantur viri 6, quot illi diebus hoc perficient?* Quoniam liquet, ex quæſtionis natura, pauciores viros nonniſi pluribus diebus idem opus confecturos; adeoque quo minor eſt terminus tertius, (virorum numerus;) eo major futurus ſit terminus quartus, (numerus dierum requiſitus;) per regulam itaque inverſam, quærendus eſt terminus quartus, 40.

Eodem modo: *Sit tapeti lato pedes 9, longo 20, obducendus pannus vilior, qui totum tegat, latus pedes 3; quæritur quot pedes longus eſſe debeat, ut negotio ſufficiat?* Quoniam hic manifeſtum ſit, quo minorem habeat latitudinem pannus hic, eo majorem requiri longitudinem, qua latitudinis defectus ſuppleatur: per regulam inverſam, reperietur longitudo quæſita, pedum 60. Atque in aliis pariter.

9.20:3.Q=60.
9
3)180(60=Q.

De operationum compendiis; & probationibus. Quæ autem operationum compendia, de Regula directa, in Capite præcedente oſtendimus, (ſive quoad ordinem operationum perficiendarum, ſive etiam terminorum præcedaneam reductionem,) etiam hic, mutatis mutandis, locum habent. Nec opus eſt ut ea ſigillatim hic repetam; ſed potius ut lectoris ſagacitati permittatur, quæ illic dicta ſunt hic aptare. Quod & de Probationibus illic traditis, intellectum velim; quas, qui tanti eſſe putet, etiam huc, mutatis mutandis, non difficulter transferat,

Reductio hujus Regulæ ad directam. Notandum denique, *Proportionem Reciprocam, in Directam converſum iri, ſi qui in reciproca eſt terminus tertius, ſtatuatur in directa primus.* Nempe ſi ſit

In proportione reciproca 9.20:3.Q=60.
Erit in proportione directa 3.20::9.Q=60.

Reciproce.	Directe.
9.20:3.Q=60.	3.20::9.Q=60.
9	9
3)180(60=Q.	3)180(60=Q.

Atque hactenus de Aurea Regula ſimplici; ſive Regula Trium; tam directa, quam Reciproca. Sequitur ut de Multiplici verba faciam; ubi nempe plures quam tres occurrunt termini, ipſaque Proportionis Regula ſæpius repetenda. Eſtque ea, vel, quæ vocatur *Aurea Regula compoſita*; vel quæ *Regula Societatis* dicitur. De quibus in ſequentibus Capitibus dicetur.

CAP.

CAP. XXXIX.

De Aurea Regula composita. Tum ubi omnes Analogiæ componentes, sunt directæ: tum ubi altera, vel etiam plures, sunt reciprocæ.

Regula Aurea Composita.

REgula quæ dicitur *Aurea Composita*, ex duabus vel pluribus Analogiis constat. Adeoque Regulæ simplicis operationem aliquoties iterandam esse (saltem virtualiter) postulat. Iisdem autem nititur principiis Regulæ compositæ, atque simplicis processus: ut non sit opus longa præparatione, sed exemplis aliquot operandi methodum exhibere.

Esto hoc Exemplum. *Si* 4 *Academici, in* 3 *Mensibus, expendant* 20 *libras*; *quot libras expendent Academici* 6, *in* 3 *mensibus* 12, *sive anno integro*?

4. 20 :: 6.
3. 12. Q.

Manifestum est, in hac quæstione, duplicem Analogiam reperiri. Comparantur enim tum personæ personis, tum tempus tempori, ut ex utrisque collatis reperiatur ratio expensarum.

Resoluta itaque hac Analogia composita in duas simplices; Dicimus Primo. *Si* 4 *Academici, expendant* 20 *libras*; *quot libras expendent* 6 *Academici eodem tempore*? (Adeoque seponimus paulisper diversorum in quæstione temporum considerationem.) Et, operatione peracta, patebit, 30 libras, à 6 Academicis, expendendas eodem tempore quo Academici 4 expendunt libras 20: hoc est, ex hypothesi, in 3 mensibus.

4. 20 :: 6. Q.
6
4) 120 (30 = Q.

Deinde, (resumpta jam temporis consideratione) *Si sex illi Academici expendant* (uti jam inventum est) *in* 3 *mensibus*, 30 *libras*; *quot libras expendent in mensibus* 12? (Ubi terminus quartus, priori analogia inventus; fit, in secunda analogia, secundus: ut tandem habeatur terminus ultimo quærendus.) Facta itaque operatione, prodibit Q = 120, numerus quæsitus principalis.

3. 30 :: 12. Q.
30
3) 360 (120 = Q.

Exposita itaque analogia composita resolvitur in has binas simplices.

Composita.	Simplices.
4. 20 :: 6.	4. 20 :: 6. q.
3 12. Q.	3. q :: 12. Q.

Idem autem omnino tandem prodiret, si prius temporis, deinde autem personarum collatio institueretur. Puta primo, si (quatuor expositi Academici) *expendant, mensibus* 3 *libras* 20; *iidem mensibus* 12 *expendent quot libras*? Respondendum, 80. Deinde, *si* (in 12 mensibus) 4 *Academici expendant* (ut jam ex priori quæsito liquet) 80 *libras*; *quot libras* (eodem tempore) *expendent* 6? Respondendum (ut ex operatione peracta liquet) libras 120.

3. 20 :: 12. q = 80.
12
3) 240 (80 = Q.

4. q = 80 :: 6. Q = 120.
6
4) 480 (120 = Q.

Resoluta nempe analogia composita; [Si 3 mensibus, 4 viri expendant libras 20; mensibus 12, viri 6, quot expendent?] in binas simplices; alteram de temporum, alteram de personarum, collatione.

Compoſita.	Simplices.
3.20::12	3.20::12. q=80.
4 6.Q.	4. q=80::6.Q=120.

Totius proceſſus ratio, ex ſe ſatis patet; cum non aliud ſit quam operatio ſimplex bis peracta; nec nova indigebit demonſtratione.

Praxis altera. Quod autem binis Aureæ Regulæ operationibus jam peractum eſt, *Poteſt id ipſum una operatione compoſita peragi: Si nempe utriuſque analogiæ ſimplicis primi termini invicem ducti, habeantur pro termino primo analogiæ compoſitæ: & ſimiliter ſimplicium termini tertii, invicem ducti, pro tertio compoſitæ: terminus autem alter, quæſito homologus, pro ſecundo.*

Verbi gratia; in exemplo prius expoſito: *Si 4 viri, 3 menſibus, expendant libras 20; 6 viri, 12 menſibus, expendent quot libras?*

Pro termino primo analogiæ compoſitæ, ſumatur $12=4\times3$, (nempe qui fit ex numero virorum primorum in numerum primorum menſium ducto;) pro tertio, $72=6\times12$, (qui fit ex numero ſecundorum virorum, in numerum ſuorum menſium ducto;) pro ſecundo autem, 20, numerus nempe librarum, hoc eſt, terminus quæſito homologus. Adeoque totus proceſſus ſic conſtabit

$$\begin{array}{l} 4.20::6 \\ \underline{\times 3 \qquad \times 12.\ Q.} \\ 12.20::72.\ Q=120. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 12)\,1440\,(120=Q. \end{array}$$

Similiter in Symbolis: *Si perſonæ P, tempore T, expendant libras L, perſonæ π, tempore τ, expendent quot?* puta λ, numerum quæſitum. Dico, erit ut PT ($=P\times T$) ad L; ſic $\pi\tau$ ($=\pi\times\tau$) ad λ, numerum quæſitum. Nempe $PT)\,\pi\tau\times L\,(\lambda$. Proceſſus hic erit.

$$\begin{array}{l} P.L::\pi \\ \underline{\times T \qquad \times\tau.\lambda.} \\ PT:L::\pi\tau.\lambda=\dfrac{\pi\tau\times L}{PT}. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times L \\ \hline PT)\,\pi\tau\times L\,(\dfrac{\pi\tau}{PT}\,L=\lambda. \end{array}$$

Ejuſdem demonſtratio. Operationis hujus compoſitæ Ratio, ſive Demonſtratio, dependet ab ejuſdem cum præcedente convenientia. Cum enim ut ſupra oſtenſum eſt, Analogia compoſita, reſolvitur in binas ſimplices

P.L::π	P.L::π.q.
T $\tau.\lambda$	T. q::$\tau.\lambda$.

Erit primo $q=\dfrac{\pi\times L}{P}$. Adeoque 2°, $\lambda=\dfrac{\tau\times q}{T}=\dfrac{\tau\times\pi L}{T\times P}=\dfrac{\pi\tau L}{PT}$. quod erat demonſtrandum.

Eodem plane modo ſtatuendum eſt, ſi exponatur Analogia etiam adhuc magis compoſita. Puta *Si trabis ligneæ, cujus longitudo, pedum* $4=A$; *latitudo, pedum* $3=B$; *altitudo, pedum* $2=C$; *pondus ſit librarum* $240=D$; *trabs alia longa pedes* $10=\alpha$; *lata, pedes* $4=\beta$; *alta, pedem* $1=\gamma$; *quanti erit ponderis?* (puta, librarum δ.) Dico, ut $A\times B\times C$, ad D; ſic $\alpha\times\beta\times\gamma$, ad δ, $=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{ABC}$ D. Hoc eſt $\dfrac{10\times4\times1=40}{4\times3\times2=24}\times240=400$. Quod patet, reſoluta analogia compoſita, in tres ſimplices.

A.

A . D :: α.	A . D :: α . q.	4 . 240 :: 10 . 600.
B . β.	B . q :: β . Q.	3 . 600 . : 4 . 800.
C. γ . δ.	C . Q :: γ . δ.	2 . 800 :: 1 . 400.

Nam primo $q = \frac{\alpha}{A}$ D. adeoque ſecundo $Q = \frac{\beta}{B} q = \frac{\alpha\beta}{AB}$ D. Et tertio $\delta = \frac{\gamma}{C} Q = \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC}$ D. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem, quod quem nos in præcedentibus ſecundum appellavimus terminum, fieri poteſt tertius ; adeoque quem tertium appellavimus, ſecundus : hos enim duos terminos, in Proportione directa, pro arbitrio ſedes mutare poſſe, jam ſupra univerſaliter diximus. Adeoque perinde omnino eſt ſive dicamus P T . L :: $\pi\tau$. λ . ſive P T . $\pi\tau$ :: L . λ. Item perinde eſt ſive dicamus A B C . D :: $\alpha\beta\gamma$. δ. ſive A B C . $\alpha\beta\gamma$ :: D . δ. Quod monuiſſe ſufficiat.

Atque hæc quidem dixiſſe ſufficiat de Proportionum Regula cómpoſita, dummodo ſingulæ Analogiæ componentes ſint directæ.

Fieri autem poteſt ut Analogiarum componentium altera directa ſit, altera Reciproca.

Exempli gratia. *Si* 36 = A *libræ panis, ſufficiant militibus* 3 = B, *in dies* 6 = C; *libræ* 180 = α, *militibus* 9 = β, *in quot dies ſufficient ?* puta in dies γ.

Eſt quidem hic analogiarum altera directa, nempe *Si libræ* 36 = A, *ſufficiant in dies* 6 = C ; *libræ* 180 = α, *ſufficient in dies quot?* puta q = 30. At altera eſt Reciproca, nempe *Si militibus* 6 = B *ſufficiant in dies* 30 = q; *militibus* 9 = C, *ſufficient in dies quot ?* certe non niſi in dies pauciores, propter plures milites, nempe, in dies 10. Adeoque illic, regula directa eſt adhibenda ; hic reciproca.

Nempe 36 . 6 :: 180 36 . 6 :: 180 . q = $\frac{6}{36} \times 180 = 30$.
3 . : 9 . Q 3 . q : 9 . Q = $\frac{3}{9} \times q = \frac{3}{9} \times 30 = 10$.

Item A . C :: α A . C :: α . q.
B : β . γ. B . q : β . γ.

Adeoque $q = \frac{\alpha}{A} C$. Et $\gamma = \frac{B}{\beta} \times q = \frac{B\alpha}{\beta A} C$.

Si autem libeat pro duabus his operationibus, unam compoſitam ſubſtituere : *Factus ex duobus diviſoribus* (puta termino primo analogiæ directæ, & tertio reciprocæ) *erit compoſitus diviſor* ; (*adeoque in analogia directa, terminus primus* :) *factuſque ex multiplicatoribus, compoſitus multiplicator* : (*adeoque, in eadem analogia terminus tertius, in ſecundum ducendus.*) Hoc eſt, (in expoſita quæſtione,) A β . C :: α B . $\gamma = \frac{\alpha B}{A\beta} C$. ut prius.

$$A\beta . C :: B\alpha . \gamma = \frac{B\alpha}{A\beta} C.$$

A . C :: α
B . β . γ.

Et quidem, quotcunque fuerint analogiæ componentes, ſive directæ item ſive reciprocæ, id univerſaliter dicendum : *Ex omnibus Diviſoribus* (nempe terminis primis analogiarum directarum & tertiis reciprocarum,) *continue ductis, fiat Diviſor* ; *ex reliquis omnibus continue ductis, Dividendus* ; *adeoque Quotiens exhibebit terminum quæſitum.* *Regula generalis.*

Atque hactenus de Regula Aurea Compoſita, ſequitur *Regula Societatis*, dicta.

CAP.

CAP. XL.

De Regula Societatis: Tum ſine Tempore; tum cum Tempore.

REgula quæ dicitur *Societatis*; cum nihil aliud ſit quam regula Aurea pluries repetita: non opus erit ut longa diſquiſitione illam exponam aut etiam novas exquiram operationum demonſtrationes.

Regula ſocietatis. Eſt autem ea hujuſmodi; *Ubi data in duobus terminis ratione, tertio loco quotlibet, ut res ferat, poſitis, totidem quæruntur quarti proportionales*; dici hæc ſolet *Regula ſocietatis*: Nomen ſuum inde forſan ſortita, quod in Mercatorum conſortiis, ſive ſocietatibus maximi uſus eſſe ſoleat.

Sine tempore. Exemplum eſt. *Si tres mercatores ſocietatem ineuntes ſortem ita componant, ut primus* A *conferat libras* 60; *ſecundus* B, *libras* 50; *tertius* C, *libras* 40; (Adeoque omnium aggregatum, lib. 150. = 60 + 50 + 40.) *Lucrum vero negotiando conquiſitum ſit lib.* 30. *Quæritur, quantum inde cuique debeatur*?

Quo autem huic quæſito ſatisfiat, nihil aliud requiritur quam ut Aureæ regulæ praxis toties repetatur quoties res ipſa poſtulat. Nempe ſi totius ſortis ſummæ lib. 150, lucrum ſit lib. 30. quantum erit lucrum partis A, ſeu 60? quantum partis B ſeu 50? quantum C ſeu 40? Et facta toties aureæ regulæ operatione, parti A convenire comperientur lib. 12. parti B lib. 10. parti C lib. 8. Nam ut 150, ad 30; ſic 60, ad 12; & 50, ad 10; & 40, ad 8. Vel, in ſymbolis, ut conjunctim A + B + C = Z, ad L; ſic, ſigillatim, A, B, C, ad $\frac{LA}{Z}, \frac{LB}{Z}, \frac{LC}{Z}$.

$$\left.\begin{matrix}60\\50\\40\end{matrix}\right\} = 150 . 30 :: \left\{\begin{matrix}60 . 12 .\\50 . 10 .\\40 . 8 .\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} = Z . L :: \left\{\begin{matrix}A . \frac{LA}{Z}\\B . \frac{LB}{Z}\\C . \frac{LC}{Z}\end{matrix}\right.$$

Atque hæc eſt quam vocant *Regulam Societatis ſine tempore.*

Cum tempore. Si autem, præter diverſitatem ſortis congeſtæ, accedat etiam diverſitas temporis, vocari ſolet *Regula ſocietatis cum Tempore.* Et ſicuti, prius, repetenda erat *Aurea Regula ſimplex*: Ita hic, *Aurea Regula Compoſita* erit repetenda.

Puta ſi collata ſors prima 60 = A, per menſes 4 = α; ſecunda 50 = B, per menſes 3 = β; tertia, 30 = C, per menſes 2 = γ: ſitque totius negotiationis lucrum 30 = L: quæritur quantum cuique debetur?

Cum itaque hic compoſita ratio ſit, nempe ex ratione ſortis ad ſortem, & temporis ad tempus: Multiplicandæ ſortes ſingulæ in ſuum tempus, puta A × α = 60 × 4 = 240. B × β = 50 × 3 = 150. C × γ = 30 × 2 = 60. Et numeri ſic facti, conjunctim ſumpti, conſtituent terminum primum, Aα + Bβ + Cγ = 240 + 150 + 60 = 450 = Z. Iidemque ſigillatim, totidem terminos tertios: Ipſumque lucrum, terminum ſecundum, adeoque convenient primo, 16; ſecundo, 10; tertio 4. Et in ſymbolis pariter.

$$\left.\begin{matrix}60\times4=240\\50\times3=150\\30\times2=60\end{matrix}\right\} = 450 . 30 :: \left\{\begin{matrix}240 . 16 .\\150 . 10 .\\60 . 4 .\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}A\alpha\\B\beta\\C\gamma\end{matrix}\right\} = Z.L :: \left\{\begin{matrix}A\alpha.\frac{A\alpha L}{Z}.\\B\beta.\frac{B\beta L}{Z}.\\C\gamma.\frac{C\gamma L}{Z}.\end{matrix}\right.$$

Atque ad eandem formam de aliis hujuſmodi quæſtionibus ſtatuendum erit. Quæ cum cuivis ſatis obvia ſint, non eſt cur illis diutius immoremur.

Regulas quas vocant *Alligationis*, & *Falſæ poſitionis*, intactas prætereo: tum aliis de cauſis; tum quod illa non adeo frequentis uſus ſit; hæc autem ſine magno diſpendio, poſt introductam Arithmeticam ſpecioſam, careri poſſit; quæ enim per eam ſolvi ſolebant quæſtiones, illæ quidem omnes, aliæque plures tum facilius, tum magis perſpicue, ſolvuntur per Arithmeticam ſpecioſam. Eas autem ſiquis ſcire expetat, ex vulgaribus Arithmeticæ Practicæ Magiſtris, petat licet.

Sed & aliæ etiam apud eoſdem practicos Arithmeticos paſſim exſtant *Regulæ* quas *Praxeos* vocant. Quæ compendio inſerviunt in Monetis, Ponderibus, Menſuris, &c. reducendis; & Mercatorum negotiationibus maxime inſerviunt. Cum vero illas pro variis variarum gentium Monetis, Ponderibus, Menſuriſque, eorumque ſigillatim rationibus, omnino varias eſſe neceſſe ſit: Non exſpectandum eſt, ut eas ego, dum quæ in Arithmetica ſunt communia trado, omnino attingam; ſed quæ cuique genti ſunt peculiaria, ſuis cujuſque ſcriptoribus tradenda permittam. Nec quidem etiam eſt neceſſe, cum earum omnium Regularum fundamenta, non aliunde quam ex iis quæ jam tradidimus petenda ſint; & unicuique interim, ut, pro ingenii ſui ſagacitate, & pro re nata, permittendum ſit, quæ ſuis negotiis maxime ſint accommoda, Regularum hujuſmodi compendia tum exquirere, tum etiam exercere.

His itaque omiſſis, ad Fractionum ſive Minutiarum doctrinam feſtinabo. Sed hoc prius monito; Quæ ſuperius de Rationibus ſive Proportionibus dicta ſunt, quæque inde ortæ Regulæ jam fuerunt traditæ; non minus in numeris fractis, ſive etiam ſurdis, (de quibus alibi dicetur,) locum habent, quam in Numeris Integris. Sicut enim numeri integri, invicem Addi, Subduci, Multiplicari, Dividique ſolent, variiſque modis Rationes ſive Analogias ſubire: ita & Fracti, Surdique, conſimiles ſubeunt operationes, & eaſdem leges. Quo pacto autem operationes illæ Arithmeticæ, puta Additio, Subductio, Multiplicatio, & Diviſio, in Fractis & Surdis ſint adminiſtrandæ; jam dicendum erit.

CAP. XLI.

De Fractionibus ſive Minutiis. Fractionum origo. Numeri fracti, an veri numeri. Fractionum Explicatio: Notatio. Denominator. Numerator. Fractiones Propriæ; Impropriæ. Fractionum explicatio altera. Diviſionum Quotientes indicant. Explicatio tertia; quæ & Irrationalibus conveniat. Fractionum æquipollentia. Earumque cum Rationibus comparatio.

Fractionum ori-go.

FRactionum, ſive *Minutiarum* doctrina, qui & *Numeri fracti* dici ſolent, poſt abſolutam Rationum traditionem, facile abſolvitur.

Fractionum Originem, in ſuperioribus jam ante tradidimus. Nimirum, cum ſupponat Arithmetica *Unitatem*, ſive *Unum*, numerorum primum eſſe, minimumque; (quod Uno Paucius, dici non poſſit:) reliquoſque omnes Unitatum col-

lectione componi: Siquando ſupponendum ſit (quod non raro fit) aliquid Uno minus, ſive Unum aliquod in partes dirimendum; quoniam illud vero aliquo numero deſignari non poteſt, *Numeris* (ut loquuntur) *Fractis*, illud utcunque deſignare latagunt. (Puta, ſi ſupponatur Unum aliquod biſecandum, totius Semiſſem ſic deſignant, $\frac{1}{2}$.) Quod ipſum etiam faciunt, ſiquando duobus quibuſvis numeris invicem proximis intermedium aliquod deſignandum eſt. Puta, ſi numerus Ternarius 3, ſupponatur biſecari; quoniam hujus Semiſſis, Unitate major eſt, & Binario minor, nec tamen inter hos numeros (Unitatem & Binarium) alius intercedat intermedius verus numerus; ſemiſſem illum utcunque ſic deſignant $\frac{3}{2}$, vel etiam $1\frac{1}{2}$. Et ſimiliter alias.

Numeri Fracti, non veri Numeri.

Adeoque numeri *Fracti* dicti, pro veris Numeris haberi non ſolent, neque ſub *Numeri* appellatione apud Euclidem alioſque cenſentur; (apud quos numerorum appellatione non niſi Integri inſigniuntur.) Quippe revera qui verbi gratia, *Horæ Semiſſem* ſive $\frac{1}{2}$, dicit; non tam ille *Quot horas* dicit, quam *Quantum horæ*: adeoque ex campo Arithmetico, in Geometricum tranſit. Quamvis enim, in Arithmetica, non reperiatur *Paucius Uno*; reperitur tamen, in Geometria, *Minus Integro*: Et quidem quemadmodum ſupponit Arithmetica, Unitatem in infinitum Multiplicabilem; ita Geometria, Integrum in infinitum Diviſibile: ſive, ut Unum Arithmeticum eſt multiplicabile, ſic Unum Geometricum, diviſibile, in infinitum.

Fractionum explicatio.

Hanc autem infinitam Geometriæ diviſibilitatem, cum quodammodo imitari velit Arithmetica; ſupponit Unitatem ſive Unum, quaſi jam quid integrum, in quotvis Partes diviſibile; eaſque demum Partes numerabiles, adeoque ſuæ conſiderationi ſubjectas. Quamvis enim illa Integri in partes Diviſio, Geometricum quiddam rite cenſeatur; Partium tamen illarum, in quas dividitur, Numeratio, eſt plane Arithmetica.

Fractionum notatio.

Cum itaque in fractionibus, ſive numeris Fractis, omnino duo deſignanda veniant; Puta, Unius ſive integri, in partes diremptio; (nunc plures, nunc pauciores;) Earumque partium, unius pluriumve aſſumptionem: Quo utrumque indicetur, Duobus propterea numeris Fractio ſignari ſolet, altero ſuperne, altero inferius, poſitis; ad hanc formam: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. Quorum Inferior indicat, in quot æquales partes Integrum aliquod ſive Unum, dirimi ſupponimus; & *Denominator* dici conſuevit: Superior, quot earum aſſumi volumus; dicique ſolet *Numerator*. Adeoque Fractio $\frac{2}{3}$, unius alicujus Integri, in tres æquales partes dirempti, duas aſſumendas innuit.

Denominator.

Numerator.

Denominator autem ille dicitur, quia partes in quas dirimitur integrum Denominat, ſeu quales dicit; puta Semiſſem, Trientem, Quadrantem, Sextantem, &c. ſive partem Dimidiam, Tertiam, Quartam, Sextam, &c. prout fractionis denominator eſt 2, 3, 4, 6, &c.

Numerator vero dicitur hic alter, quia partium (ſic denominatarum) aſſumendarum numerum indicat; puta, $\frac{2}{3}$, duos trientes; $\frac{3}{4}$, tres quadrantes; $\frac{5}{6}$, quinque ſextantes, ſive partes ſextas; $\frac{3}{5}$, tres quintas, &c.

Fractiones propriæ.

Eſtque hæc ſimpliciſſima Fractionum expoſitio, earumve naturæ explicatio; quæ *Fractionibus propriis*, uti dici ſolent, ſive proprie dictis, apprime quadrat: Quæ nempe quid Unitate minus innuunt.

Integro minores.

In his itaque Fractionibus propriis, Numerator ſemper Denominatore minor erit. Cum enim Denominator oſtendat quot omnino ſint vel ſupponantur iſtiuſmodi, in Integro, partes æquales; ſi Numerator Denominatori æqualis fuerit, indicabit ille tot ejuſmodi aſſumendas partes, quot omnino in integro continentur; adeoque totum integrum, non ipſius aliquam portionem, aſſumptum iri: (quippe partes ſimul omnes; tantundem ſunt atque ipſum integrum:) Sin Denominatore major eſſet Numerator, innueret illud jam plures iſtius Integri partes ejuſmodi aſſumendas, quam inibi omnino contineantur; quod eſſet impoſſibile: Supereſt itaque ut Numerator, ſive partium aſſumendarum numerus, minor ſit quam Denominator, ſive numerus partium omnium in integro contentarum.

Fractiones impropriæ.

Si quando itaque conſpiciatur (quod tamen uſu non raro obvenire ſolet) Numerator vel Denominatori æqualis, vel ipſo major; Hujuſmodi Fractio *Impropria* dici ſolet; ut quæ quid Unitati æquale vel etiam ipſa majus indicet. Sunt enim hujuſmodi Fractiones $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, &c. tantundem atque ipſa Unitas 1. Nempe tum duo ſemiſſes, tum tres trientes, tum quatuor quadrantes, &c. ipſum præciſe

Integrum

Integrum absolvunt. At $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}$, &c. etiam duo integra; quippe bis tot partes numerat fractio, quot denominator indicat integro contineri. Item $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}$, &c. tantundem valent atque 3, sive tria integra. Et in reliquis pariter. Similiter de $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$, &c. judicandum. Cum enim $\frac{3}{2}$, duo semisses, tantundem sint atque 1; erunt $\frac{3}{2}$, tres semisses, tantundem atque $1\frac{1}{2}$, unitas cum semisse. Item cum $\frac{6}{3}$, sex trientes, tantundem valeant atque 2; erunt $\frac{8}{3}$, octo trientes, tantundem atque $2\frac{2}{3}$, duo cum duobus trientibus. Et similiter in aliis, ubi Numerator Denominatore major, nec tamen hic illius aliquota pars. Si enim Denominator sit Numeratoris pars aliquota, fractio hæc impropria æquivalet numero integro: Sin minor, nec tamen pars aliquota; æquivalet impropria fractio numero integro cum adjuncta particula seu fractione propria.

Fractionum explicatio altera.

Cum vero prior illa Fractionum expositio, per Unius Integri in æquales aliquot partes diremptionem, ut ut fractionibus propriis explicandis satis accommoda, impropriis tamen haud usque adeo conveniat, (quippe Unius Integri plures assumi partes non possunt, quam in ipso omnino continentur; quod exigere videatur Impropriæ Fractionis numerator denominatore major:) Poterit secundo modo fractionum natura, commodius huic negotio, explicari, per diremptionem, non unius tantum, sed plurium simul Integrorum (quot nempe indicat Numerator) in partes aliquot æquales, (tot nempe quot Denominator postulat,) quarum unam aliquam assumendam fractio indicat. Perinde enim est sive dicamus fractionem $\frac{2}{3}$, Unius integri Duos trientes, sive Duorum integrorum Unum trientem significare: Tantundem enim utrovis modo indicatur. Exempli gratia. Cum Solidus Anglicanus contineat 12 Denarios; Unius solidi triens sunt denarii 4; adeoque ejusdem duo trientes, bis Quatuor, sive 8 denarii. Sed &, cum solidus unus contineat denarios 12; continebunt solidi Duo, denarios bis duodecim, hoc est 24: at denariorum 24 pars tertia, sunt item 8 denarii, ut prius. Perinde itaque est sive dicamus $\frac{2}{3}$ sol. indicare duos trientes unius Solidi, sive duorum solidorum trientem unum.

Fractiones indicant divisionum Quotientes.

Atque hæc quidem expositio perinde quadrat propriis atque impropriis fractionibus: Nempe $\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c. nil aliud indicant, quam numerorum 2, 3, 4, &c. trientes; Nec aliud sunt quam totidem Quotientes numerorum 2, 3, 4, &c. per numerum 3 divisorum; quod & superius, dum Divisionem tradidimus, dictum est. Et quidem, sicut ex imperfecta sive etiam impossibili subductione, oriuntur numeri negativi, (1—2, 2—3, &c.) ita ex imperfecta sive etiam impossibili Divisione, oriuntur numeri fracti, ($\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c.) sicut etiam ex imperfecta impossibilique radicum extractione, oriuntur numeri surdi, ($\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$, &c.) ut post dicetur.

Fractionum explicatio tertia quæ irrationalibus etiam conveniat.

Verum adhuc notandum est; cum Arithmeticæ Fractiones, Geometricas (ut dictum est) Continui Divisiones æmulentur, quæ non semper sunt in partes rationales, sed satis nonnunquam irrationales; Quo huic incommodo subveniatur, tertius adhuc Fractiones explicandi modus, prioribus universalior, tradi potest. Cum enim, verbi gratia, fractio $\frac{2}{3}$ indicet (ut prius dictum est) Unius integri in tres partes æquales secti partes duas; manifestum est, hac fractione indicari eam integri partem, quæ ad integrum illud eandem habeat rationem quam 2 ad 3. Quippe cum totum contineat partes 3, quales assumpta illius portio habet partes 2; erit portionis ad integrum ea ratio quæ est partium duarum, ad partes tres; hoc est, numeri 2, ad numerum 3. Dicimus itaque, *Fractione (propria) eam indicari unius alicujus integri* (vel expositæ quantitatis) *partem, quæ, ad totum, illam rationem habeat, quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.* Vel etiam universaliter *Fractione* (sive propria sive impropria) *tantundem quantitatis Homogeneæ designari, quantum ad unum Integrum, sive expositam quantitatem, eam rationem habeat quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.* Puta, si dicamus circuli Radium esse $\frac{1}{2}$ Diametri; tantundem est acsi diceremus, circuli Radium eam esse Diametri partem, quæ ad totam habeat rationem 1 ad 2: vel, Radium tantum esse, ut ad diametrum habeat rationem 1 ad 2. Et pariter, cum Latus quadrati esse dicimus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Diagonii, tantundem est acsi diceremus, Latus quadrati tantum esse ut ad illius Diagonium rationem habeat 1 ad $\sqrt{2}$. Item, Quadrati ambitum, esse $\frac{4}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem est atque, Ambitum

bitum quadrati tantum esse ut ad ipsius diagonium rationem habeat 4 ad $\sqrt{2}$. (Quo pacto satis commode exponuntur fractiones illæ irrationales, licet neque juxta methodum primam, neque etiam secundam, commode dici possit, vel 1 vel 4 diagonia, in $\sqrt{2}$ partes æquales dividi, quo earum una assumatur.) Atque eodem modo, sumptis duobus vel numeris, vel lineis, vel aliis quibusvis quantitatibus invicem homogeneis, *a*, *b*, fractio $\frac{a}{b}$, vel $\frac{a}{b}$ D, id innuit quod ad Unum Integrum, vel assignatam aliquam quantitatem D, eam rationem habeat quam habet *a* ad *b*; sive sit ea ratio rationalis sive irrationalis.

Fractionum Æquipollentia.

Atque hinc quidem sequitur, Tum *Eandem quoad valorem Fractionem, pluribus posse, & quidem infinitis modis, designari*: Tum *fractiones eas omnes, quarum Numeratores ad suos respective Denominatores eandem habent rationem, invicem æquales sive æquipollentes esse.* Quippe cum nihil aliud innuat Fractio, quam *Rationem* designandæ quantitatis ad expositam Homogeneam, sive unum Integrum: dummodo eadem ratio, quibuscunque id fiat quantitatibus, designatur, eandem & (quoad valorem) Fractionem designari, intelligendum erit. Adeoque, verbi gratia, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{10}{20}, \frac{100}{200}$, &c. eandem, quoad valorem, Fractionem designant, (puta semissem,) quia eadem est in singulis Numeratoris ad Denominatorem Ratio; (quippe, ea quæ est 1 ad 2;) Quod quidem non de numeris tantum, sed quibusvis etiam quantitatibus invicem homogeneis, intellectum velim. Puta

A ——— $\frac{A}{A+A}, \frac{A}{2A}, \frac{A}{B}$ (posito quod B sit duplum quantitatis A:)
B ———

sive numeri sint, sive Lineæ, sive etiam Superficies, Corpora, Pondera, Tempora, &c. quæ Symbolis A, B, designantur. Aut etiam $\frac{Pondo}{Bipond.}, \frac{Bipedal.}{Quadriped.}$, &c. Sic $\frac{1}{2}$ D, $\frac{2}{4}$ D, $\frac{A}{A+A}$ D, $\frac{A}{B}$ D, $\frac{Pondo}{Bipond.}$ D, &c. tantundem designant; Nempe id quod ad expositam quantitatem D (quæ pro uno Integro habetur) eam rationem habeat, quam habet 1 ad 2, vel 2 ad 4, vel A ad A + A, vel A ad B, vel Pondo ad Bipondium, &c. quæ quidem rationes omnes eædem sunt, sive æquales.

Fractionum & Rationum affinitas.

Sed & hinc etiam patet, Rationum & Fractionum, sive identitas, sive affinitas maxima. Cum enim omnino perinde sit, sive dicamus, verbi gratia $\frac{3}{4}$, indicare unius integri tres quadrantes, (juxta primam fractionis explicationem;) sive trium integrorum quadrantem unum, aut numeri 3 per 4 divisi quotientem, (quæ est explicatio secunda;) sive denique rationem 3 ad 4, aut eam integri portionem quæ ad totum eam rationem habeat, (qui est tertius explicandi modus:) manifestum est eadem opera tum Fractionem, tum divisionis Quotientem, tum Rationem, vel saltem Rationis Denominatorem, designari.

Adeoque, quæ de Fractionum Additione, Subductione, Multiplicatione, Divisione, aut etiam Proportione, &c. dicenda erunt: Eadem etiam de Rationibus, sive Rationum potius Denominatoribus, intelligenda velim. Quippe nil aliud sunt Fractiones (sive propriæ, sive impropriæ, sive etiam irrationales,) quam Rationum Denominatores.

Quod quidem si satis attenderat *Gregorius de Sancto Vincentio*, non erat cur ille totum ipsius *de Rationum Proportionibus*, aut etiam *Proportionalitatibus*, doctrinam, ut plane novam venditaret: nec *Rationum inæqualium* comparationem, quasi rem incognitam & inauditam plane exhibere videretur. Ecquis enim nescit, *Regulam Auream, in Fractionibus* exercere, nil aliud esse, quam *Rationum Rationes* invicem comparare? Et sicut idem est omnino opus Arithmeticum, partium summam (addendo) colligere, atque summarum summam; ita & ad eandem Rationum doctrinam spectat, sive Numerorum, Linearum, &c. rationes; sive ipsarum Rationum rationes, contemplemur. Quod autem ille quantitatum absolutarum rationes, *Rationes* simpliciter appellet; rationum autem rationes, *Proportiones*; & *Proportionum* rationes, *Proportionalitates*; (aut etiam, si rationibus proportionalitatum, novum indidisset nomen, & sic deinceps quousque libet:) licitum omnino est, si ita videbitur, ad pleniorem accuratioremque, ubi res postulat, distinctionem, ita loqui, & vitandæ confusionis ergo: At interim non inde nova magis dicenda est in Arithmeticam (vel, si libet, Geometriam,) introducta speculatio; quam si in Additione (ob continuas sæpe repetendas operationes) libeat

expositas

expositas aliquot minutas quantitates (distinctionis gratia) *Particulas* appellare; particularum autem collectiones, *Partes*; & collectiones partium, *Integra*; integrorum autem collectiones, *Summas*; & summarum denique, *Summam totalem*. Sicut enim eadem arte tum particularum in Partes, tum partium in Integra, & integrorum in Summas, &c. collectio instituitur: & collectiones omnes intermediæ, quanquam præcedentium respectu, sint Aggregata; sequentium tamen, pro Membris habeantur: Eodem modo per omnia, iisdem plane principiis eademque arte procedendum est, tum in simplicium sive absolutarum quantitatum rationibus contemplandis, tum in rationum rationibus, sive proportionibus, harumque proportionalitatibus, & sic deinceps: & quidem sicut intermediæ rationes sive comparationes, respectu quantitatum absolutarum primo expositarum, Relationes sive Respectivæ quantitates merito habeantur; illæ ipsæ tamen, cum invicem comparandæ sint, in sequentibus illis comparationibus, pro terminis quasi simplicibus sive absolutis sunt habendæ; ipsæque relationes, cum invicem comparantur, jam fiunt, ea comparatione, novæ relationis termini, ad instar aliorum Entium plane absolutorum. Neque aliud, credo, est, quod in tota illa tractatione satagit V. Cl. Sed de his hactenus.

Atque hactenus de Fractionum tum Natura, tum Æquipollentia, dictum esto; tum de illarum cum Rationibus affinitate.

CAP. XLII.

De Additione & Subductione Fractionum; tum Cognominum, tum non-Cognominum. Fractionum ad communem Denominatorem Reductio. Minimus communis Denominator. Maximus communis Divisor.

EXpositis, in præcedente Capite, quæ ad veram Fractionum naturam intelligendam necessaria videbantur: Ad operationes Arithmeticas in numeris fractis exercendas accedendum est. Quæ quidem eædem ipsæ sunt quæ in numeris veris, hoc est, Integris, superius exponuntur. Puta Additio, Subductio, Multiplicatio, Divisio, &c.

Ab Additione & Subductione, ordiemur.

Additio & Subductio.

Si *Fractiones* invicem Addendæ, aut Subducendæ, sint *Cognomines*, (hoc est, eundem habeant Denominatorem,) nulla difficultate res absolvitur; *Substituta nempe, pro Numeratoribus expositis, Numeratorum illorum Summa vel Differentia, retento communi qui prius erat Denominatore, habetur Summa vel Differentia fractionum expositarum.*

Fractionum cognominum.

Sic si Addendæ sint fractiones $\frac{2}{6}$ & $\frac{3}{6}$, prodibit summa $\frac{5}{6}$. Quippe numeri 2 & 3 simul additi constituunt 5, quæcunque res illæ sint quæ numerantur: puta, sive integræ, sive partes. Et qua ratione 2 & 3 homines, sunt 5 homines; aut 2 & 3 equi, 5 equi; vel 2 & 3 integra, 5 integra, &c. Eadem plane ratione 2 & 3 partes, sunt 5 partes; 2 & 3 semisses, 5 semisses: 2 & 3 sextantes, 5 sextantes; hoc est $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}=\frac{2+3}{6}$.

Ita, si ex $\frac{5}{6}$, auferantur $\frac{3}{6}$, manebunt $\frac{2}{6}$. Quippe universaliter verum est, $5-3=2$; sive res numeratæ integræ sint, sive partes. Sicut enim $5-3$ homines, sunt 2 homines; & $5-3$ decades, 2 decades; & $5-3$ centuriæ, 2 centuriæ: ita $5-3$ sextantes, sunt 2 sextantes; hoc est $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{5-3}{6}$.

Et similiter faciendum est ubi plures adhuc Fractiones cognomines, continue addendæ sunt, aut subducendæ. Puta $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$. quia $2+3+4=9$. Sic $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. quia $2+3-4=1$. Et similiter alibi.

Atque eodem plane modo in fractionum Additione & Subductione Speciosa, sive Symbolica. $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=\frac{A+B+C}{D}$. Et $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}$, &c.

Fractionum non cognominum.

Si vero Fractiones invicem Addendæ aut Subducendæ, non sint cognomines, adhibenda prius est præparatio, qua ad idem nomen reducantur, quam Additio illa vel Subductio instituatur. Et tum demum, facta hac ad idem Nomen sive Denominatorem reductione, Additio Subductiove instituenda est, ut prius. Puta si addendæ sint fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; aut etiam hæc ab illa subducenda: pro $\frac{1}{2}$, substituatur ipsi æquipollens $\frac{2}{4}$, (cum enim eadem sit ratio 1 ad 2, atque 2 ad 4, ostensum est cap. præced. fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ æquipollentes esse:) adeoque $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Et $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. Sic $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$. Et $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$.

Eodem modo, si numero 3, sive $\frac{3}{1}$, (quæ æquipollent; nam divisio per 1, neutiquam immutat divisi quantitatem;) addatur fractio $\frac{2}{5}$, potest quidem id fieri non mutatis terminis, sic $3+\frac{2}{5}$, vel etiam $3\frac{2}{5}$: sed etiam (quod nonnunquam fieri convenit) in fractionem impropriam coalescunt, puta $3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$: substituto scilicet, pro 3 vel $\frac{3}{1}$, (tribus integris;) $\frac{15}{5}$, hoc est, quindecim quintis, quippe tantundem valent; cum enim 5 quintæ constituant unum integrum, 15 quintæ, hoc est ter 5 quintæ, constituent integra tria.

Item si ex 3 auferre oporteat $\frac{2}{5}$: pro 3 integris substituatur $\frac{15}{5}$, vel etiam $2\frac{5}{5}$, aut $2+\frac{5}{5}$; & facta demum subductione, erit $3-\frac{2}{5}=\frac{15}{5}-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$. Vel etiam $3-\frac{2}{5}=2+\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=2+\frac{3}{5}$: (nam $\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, quibus si præponamus 2, fiet $2+\frac{3}{5}$ vel $2\frac{3}{5}$.)

Reductio ad communem Denominatorem.

Reducuntur autem fractiones quælibet duæ datæ, ad alias invicem cognomines, & datis æquales, si prioris tum Numerator tum Denominator, ducatur in posterioris Denominatorem; & contra, posterioris tum Numerator tum Denominator, in Denominatorem prioris. Cum enim utrobique fractionis uterque terminus per communem multiplicatorem multiplicetur, terminorum ad invicem ratio non immutatur, (quippe duplorum ad dupla, triplorum ad tripla, &c. eadem est ratio quæ simplorum ad simpla;) dum novus interim emergens Denominator, sit utrique communis, (quippe qui sit ex datarum Denominatoribus invicem ductis.) Sic in modo exhibitis, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$: si prioris uterque terminus ducatur in 4, fiet $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; item, si posterioris terminus uterque ducatur in 3, fiet $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$; adeoque junctim $\frac{4}{12}\pm\frac{3}{12}=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{4}$. Sic, pro 3 & $\frac{2}{5}$, vel $\frac{3}{1}$ & $\frac{2}{5}$; substituendum est $\frac{15}{5}=\frac{3}{1}=3$, & $\frac{2}{5}$: adeoque $\frac{15}{5}\pm\frac{2}{5}=3\pm\frac{2}{5}$. Et sic ubique.

Et pariter in Symbolis: pro expositis $\frac{A}{B}, \frac{\alpha}{\beta}$; substituantur $\frac{A\beta}{B\beta}, \frac{B\alpha}{B\beta}$: Eritque tum $\frac{A\beta}{B\beta}=\frac{A}{B}$, tum $\frac{B\alpha}{B\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$, tum denique $\frac{A\beta}{B\beta}\pm\frac{B\alpha}{B\beta}=\frac{A}{B}\pm\frac{\alpha}{\beta}$.

Atque eadem plane methodo utendum est, si plures quotcunque fractiones occurrant ad communem Denominatorem reducendæ. Nempe singularum tum Numeratorem tum Denominatorem in reliquarum omnium Denominatores continue multiplicando. Sic $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$, reducuntur ad $\frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{12}{30}$. Nam $1\times3\times5=15$, & $2\times3\times5=30$, adeoque $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$: Item $2\times2\times5=20$, & $3\times2\times5=30$, adeoque $\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$: Denique $2\times2\times3=12$, & $5\times2\times3=30$, adeoque $\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$. Et propterea junctim $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\pm\frac{2}{5}=\frac{15}{30}+\frac{20}{30}\pm\frac{12}{30}$. Et pariter in Symbolis pro $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \frac{d}{\delta}$, substituantur $\frac{a\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{b\alpha\gamma\delta}{\beta\alpha\gamma\delta}, \frac{c\alpha\beta\delta}{\gamma\alpha\beta\delta}, \frac{d\alpha\beta\gamma}{\delta\alpha\beta\gamma}$: quæ tum expositis sunt figillatim æquales, tum invicem cognomines; (nam denominatores $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\alpha\gamma\delta$, $\gamma\alpha\beta\delta$, $\delta\alpha\beta\gamma$, sunt invicem æquales, quippe ex iisdem factoribus compositi; alternatio enim situs æqualitatem non immutat, cum in continuis multiplicationibus perinde omnino est quo ordine fiant, ut superius suo loco traditum est.) Et pariter alibi.

Communis denominatoris diminutio.

At interim verum est (neque id vel dissimulandum vel ignorandum) minorem nonnunquam Denominatorem communem assumi posse, quam qui hoc pacto ex datorum Denominatorum omnium continuo ductu emergit. Nempe quoties Denominatores dati non sunt *inter se primi*, hoc est, in eadem ratione minimi, sed communem aliquem Divisorem admittunt. Sic in pridem expositis, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; quæ reduci possunt, non modo ad communem denominatorem $8=2\times4$ (ex datis denominatoribus factum,) puta $\frac{4}{8}, \frac{2}{8}$; sed etiam ad minorem, nempe 4, puta $\frac{2}{4}, \frac{1}{4}$, ut supra ostensum est: Cujus rei causa est, quod denominatores, dati, 2, 4, non sunt numeri inter se primi, sive in eadem ratione minimi, sed uterque per communem

divisorem

diviſorem 2, præciſe dividi poterit; Eſt enim 2)2(1. & 2)4(2. Sic fractiones duæ $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$; reduci poſſunt, non modo ad $\frac{21}{36}, \frac{12}{36}$; ſed etiam ad $\frac{7}{12}, \frac{4}{12}$: quia tum 12, tum 3, communem admittunt diviſorem 3. nam 3)12(4. & 3)3(1. Et pariter in Symbolis; $\frac{A}{BC}, \frac{E}{C}$, reducuntur non modo ad $\frac{AC}{BCC}, \frac{EBC}{BCC}$; ſed & ad $\frac{A}{BC}, \frac{BE}{BC}$; quia nempe tum BC, tum C, communem admittunt diviſorem C; nam C)BC(B, & C)C(1.

Sed neque hoc ſemper fit; (ſunt enim non raro denominatores dati, inter ſe primi:) neque etiam tanti eſt, ut minimum ſemper denominatorem communem ſtudioſius prima vice inveſtigemus; ſed potius, ſi opus ſit, fractionum tandem ſumma vel differentia ad minimos terminos reducatur. (Nam revera etiamſi illud prius præſtitum fuerit, hoc alterum nihilominus deinceps aliquando præſtandum erit. Puta, ſi ex fractione $\frac{7}{12}$ auferenda ſit $\frac{1}{3}$; nec acquieſcamus in æquipollentibus $\frac{21}{36}, \frac{12}{36}$; ſed ad minores adhuc deprimere cupiamus: minimi ad quos reduci poſſunt termini, commùnem denominatorem habentes, ſunt $\frac{7}{12}$ & $\frac{4}{12}$. Reſiduum itaque $\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12}$. At vero reſiduum hoc nondum eſt in minimis terminis, ſed ad minores adhuc reduci poterit, nempe $\frac{1}{4}$. Si autem, omiſſa depreſſione prima, ſumptis, pro $\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$, æquipollentibus $\frac{21}{36} - \frac{12}{36}$, ut habeatur reſiduum $\frac{9}{36}$; deprimi tandem, ſive abbreviari, ſemel poterit hoc reſiduum ad terminos $\frac{1}{4}$, in eadem ratione minimos.) Si tamen ſe ſponte offerat ejuſmodi communis denominator, qui minor ſit quam qui ex datorum continua multiplicatione emergit; poterit quidem ille non incommode aſſumi; Ea tamen lege, ut quotupluſcunque ſit vel quamcunque habeat rationem, denominator ille communis, ad cujuſque fractionis datæ denominatorem, totuplus omnino ſit, ſive eandem rationem obtineat, aſſumendus Numerator ad numeratorem datum: ne fractionum ſcilicet valor immutetur. Puta ſi fractiones $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$, ad eundem denominatorem 12, reducendæ ſint; ſicut pro 3, poſterioris fractionis denominatore, ſubſtituitur 12, ipſius quadruplus; ita pro numeratore 1, ponendus erit numerator 4, dati quadruplus; ut $\frac{4}{12}$ & $\frac{1}{3}$ eandem retineant terminorum ad invicem rationem.

Minimus communis Denominator.

Si vero, antequam inſtituatur Additio vel Subductio, libeat fractiones expoſitas non modo ad communem aliquem denominatorem, ſed ad communem denominatorem minimum reducere: id fiet hac regula. *Expoſitarum duarum Fractionum Denominatores, per maximum communem diviſorem dividantur; & per alternos quotientes, multiplicentur utriuſque uterque terminus: & prodibunt termini Fractionum cognominum, datis æqualium.* Exemplum eſto in Symbolis, id ipſum quod antea expoſuimus; $\frac{A}{BC}, \frac{E}{C}$: Denominatorum BC, & C, maximus communis Diviſor, (ſaltem quantum ex Symbolis liquet,) eſt C: per hoc ſi dividatur Denominator prior, quotiens eſt B; nam C)BC(B; per quem ſi multiplicentur poſterioris fractionis uterque terminus, prodibit $\frac{BE}{BC} = \frac{E}{C}$: Si per eundem C, diviſorem communem, dividatur denominator poſterior, C; quotiens eſt 1; nam C)C(1: per quem quotientem ſi præcedentis fractionis uterque terminus multiplicetur, prodibit eadem quæ prius fractio, $\frac{A}{BC}$, (quippe 1, multiplicando nihil immutat:) adeoque fractiones inventæ cognomines $\frac{A}{BC}, \frac{BE}{BC}$, datis ſunt æquales; & quidem in minimis terminis. Pariter in numeris; Si fractionum $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}$, denominatores 6, 4, per communem maximum diviſorem 2 dividantur, prodibunt quotientes 3, 2; Si autem per poſteriorem 2, multiplicentur fractionis prioris uterque terminus, prodibit, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; & per quotientem priorem 3, ſi multiplicentur poſterioris fractionis terminus uterque, prodibit fractio $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$: adeoque pro expoſitis $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}$, habentur æquales minimæ cognomines $\frac{2}{12}, \frac{9}{12}$. Eodem modo, pro $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$, habentur minimæ cognomines, iſtis æquales $\frac{7}{12}, \frac{4}{12}$. Et ſimiliter alibi.

Maximus communis Diviſor.

Duorum autem numerorum *maximus communis Diviſor*, hac methodo invenietur. *Si major per minorem dividatur, & deinde diviſor hic per diviſionis ſi quod ſit reſiduum; & ſic deinceps, donec eo tandem perveniatur ut reſiduum nullum*

lum ſit; diviſor ille ultimus, eſt datorum numerorum maximus communis diviſor. (Uti ab Euclide oſtenſum eſt, 2 e 7.) Si autem non prius ſiſtatur quam ad Unitatem deveniatur; argumento eſt expoſitos numeros in eadem ratione minimos eſſe: quippe 1, utrumque dividendo, non minuit. Sic numerorum 12 & 3, maximus communis diviſor (intellige, qui dividendos numeros ita dividat, ut nullum ſuperſit reſiduum,) invenitur 3; quia nempe 3) 12 (4 ſine ullo reſiduo. Sic numerorum 12 & 34, maximus communis diviſor eſt 2: Nam 12 in 34 bis continentur, & ſuperſunt 10; Deinde 10 in 12 continentur ſemel, & ſuperſunt 2; Tandem 2 in 10 continentur quinquies præciſe: poſtremus itaque hic diviſor 2; eſt duorum expoſitorum 12, 34, maximus communis diviſor. Numerorum autem 13 & 34, maximus communis diviſor eſt 1; (adeoque ipſi jam inter ſe primi, ſive in eadem ratione minimi;) ut ex adjunctis operationibus patet.

$$\begin{array}{rrrr

$$
\begin{array}{l|l}
a-b & a^2+ac-b^2-bc \,(\, a+b+c \\
\hline
 & a^2-ab \\
\hline
 & ab+ac-b^2-bc \\
 & ab\quad\quad -b^2 \\
\hline
 & \quad ac\quad\quad -bc \\
 & \quad ac\quad\quad -bc \\
\hline
 & \quad 00
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a-b & ab+af-b^2-bf \,(\, b+f \\
\hline
 & ab\quad\quad -b^2 \\
\hline
 & \quad af\quad\quad -bf \\
 & \quad af\quad\quad -bf \\
\hline
 & \quad 00
\end{array}
$$

Adeoque communis illius Diviſoris ope reducentur expoſitæ quantitates a^2+ac-b^2-bc, & $ab+af-b^2-bf$, ad terminos in eadem ratione minores $a+b+c$, & $b+f$. Adeoque $\frac{a^2+ac-b^2-bc}{ab+af-b^2-bf}=\frac{a+b+c}{b+f}$.

In hujuſmodi itaque caſibus, atque hiſce ſimilibus, ſagacitate opus erit, & conſilium in arena capiendum, ut expoſitæ quantitates compoſitæ, ad ſimpliciſſimas in eadem ratione reducantur.

Sed de Additione & Subductione hactenus.

CAP. XLIII.

Fractionum Multiplicatio & Diviſio: per numerum Integrum; per numerum fractum. Multiplicationis, & Diviſionis inverſæ, æquipollentia. Producti, & Quotientis, in minimis terminis exhibitio. Operationum præcedentium (Additionis, Subductionis, Multiplicationis, & Diviſionis) brevis Synopſis.

SEquitur Fractionum Multiplicatio & Diviſio.

Fractionis per numerum integrum Multiplicatio.

Si *Numerus fractus per Integrum multiplicandus* ſit, nihil hic difficultatis ineſt: Quippe id *ſola Numeratoris multiplicatione peragitur.* Sic $\frac{3}{5}\times 2=\frac{6}{5}$. Nam bis duo ſunt quatuor, quæcunque demum ea ſint quæ numerantur: ſive integra ſint, ſive partes. Qua enim ratione, bis duo homines, ſunt quatuor homines; bis duo corpora, quatuor corpora; bis duo integra, quatuor integra; bis duo millia, quatuor millia, &c. (nempe, quia bis duo ſimpliciter, ſunt quatuor:) eadem, & bis duæ partes, quatuor partes; bis duo quadrantes, quatuor quadrantes; bis duo quintantes, quatuor quintantes, (ſive partes quintæ.) &c. Sic $\frac{2}{3}\times A$, vel $\frac{2}{3}A$, erit $\frac{2A}{3}$. Sic $D\times\frac{A}{B}$, vel, $\frac{A}{B}\times D$, vel $\frac{A}{B}D$, erit $\frac{AD}{B}$. Et ſic in aliis.

Vel etiam, quoties id commode fieri poteſt, pro *Multiplicatione Numeratoris*, ſubſtitui poterit *Denominatoris Diviſio.* Quippe idem omnino fit, quoad fractionis valorem, ſive multiplicemus Numeratorem, ſive Denominatorem dividamus: & contra. Si enim verbi gratia, duplandus ſit numerus fractus $\frac{3}{4}$: perinde eſt ſive duplicetur numerator, ut fiat $\frac{6}{4}$; ſive denominator biſecetur, ut fiat $\frac{3}{2}$: eadem enim utrobique prodibit fractionis quantitas, $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, quoniam eadem eſt utrobique nu-

 meratoris

meratoris ad denominatorem ratio, quippe 6 . 4 :: 3 . 2. Sic alibi ; $\frac{4}{8} \times 3 = \frac{12}{8} = \frac{4}{2} = 2$. Et $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$. $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ &c. Et pariter in Symbolis. Est $\frac{A}{BC} \times B = \frac{BA}{BC} = \frac{A}{C}$.

Fractionis per numerum integrum Divisio.

Contra vero: Si *per numerum integrum dividendus sit numerus fractus: diviso numeratore per divisorem datum, dividitur fractio.* Puta si dividenda sit fractio $\frac{4}{5}$, per 2: prodibit quotiens $\frac{2}{5}$. quia nempe 2) 4 (2. Cum enim universaliter semissis numeri 4, sit 2; quæcunque sint quæ numerantur: qua ratione semissis quatuor integrorum, sunt duo integra; & semissis quatuor decadum, duæ decades; &c. eadem & semissis quatuor partium, sunt duæ partes; semissis quatuor quintantum, duo quintantes, &c.

Vel etiam, si ejusmodi divisio commode fieri non possit; (puta, cum divisor datus, non est Numeratoris aliquota pars, adeoque non illum præcise metiatur sine residuo:) pro *Divisione numeratoris*, substituatur, *Denominatoris multiplicatio*; tantundem siquidem valet, ut modo dictum est. Quo enim major est denominator, eo minores supponuntur integri partes; adeoque, manente eodem numeratore, minuitur fractio. Et perinde est sive sumatur partium numerus, verbi gratia, duplo minor, hoc est, semissis; sive idem numerus partium duplo minorum, hoc est, dimidiatarum: utrobique enim assumitur designatæ quantitatis dimidium. Sic 2) $\frac{4}{5}$ ($\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$. Et 2) $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{10}$. Et in Symbolis similiter A) $\frac{AB}{C}$ ($\frac{B}{C} = \frac{AB}{AC}$. Item C) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{BC}$. Et A) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{AB} = \frac{1}{B}$. Et potest quidem posterior hæc methodus (per denominatoris multiplicationem) sat commode ubivis adhiberi: prior autem illa (per numeratoris divisionem) haud ita commode nisi cum divisor est numeratoris aliquota pars.

Fractionis per fractionem, Multiplicatio & Divisio.

Cum vero *Fractio* proponitur, sive *Multiplicanda sive Dividenda*, non per numerum integrum, sed *per aliam fractionem*: operatio paulo magis intricata est, nec nisi duabus operationibus distinctis absolvitur. Nempe, *postquam per dati Multiplicatoris vel Divisoris Numeratorem, tanquam per numerum integrum* (ut modo ostensum est) *fuerit multiplicata vel divisa; quantitas inde prodiens per dati multiplicatoris aut divisoris Denominatorem, contraria operatione afficienda est.* Quippe hæc posterior operatio quasi corrigit priorem, quæ numeratorem fractionis, tanquam si esset numerus integer, assumpserat.

Sic si multiplicetur $\frac{4}{5}$ in 2, prodibit $\frac{8}{5}$; at si in $\frac{2}{3}$ (nempe prioris multiplicatoris trientem) prodibit 3) $\frac{8}{5}$ ($\frac{8}{15}$, (nempe prioris producti triens,) adeoque $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Ratio satis patet. Nam qui multiplicat per 2, petit duplum; at qui multiplicat per $\frac{2}{3}$, petit dupli trientem (sive trientis duplum,) adeoque quod ex duplicatione prodit, est trisecandum, ut habeatur dupli triens. Sic $\frac{A}{B} \times C = \frac{AC}{B}$, & D) $\frac{AC}{B}$ ($\frac{AC}{BD}$; ergo $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$.

Eodem modo, si dividenda sit fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$: Divisa prius $\frac{4}{5}$ per divisoris Numeratorem 2; nempe 2) $\frac{4}{5}$ ($\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$: quæ provenit fractio $\frac{2}{5}$ vel $\frac{4}{10}$: multiplicanda erit in divisoris Denominatorem 3; puta $\frac{4}{10} \times 3 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{2}{5} \times 3$: adeoque $\frac{1}{3}$) $\frac{4}{5}$ ($\frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$. Ratio patet. Nam qui dividit per 2, petit quasi quoties in numero dividendo contineatur numerus 2: quod ubi ex quotiente resciverit, multiplicando porro per 3, cognoscet quoties contineatur $\frac{2}{3}$, nempe numeri 2 triens: quippe numerus trientum binarii, triplo major sit necesse est quam binariorum numerus, cum quilibet binarius contineat sui tres trientes. Sic in Symbolis, D) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{BD}$, & $\frac{A}{BD} \times C = \frac{AC}{BD}$, ergo $\frac{D}{C}$) $\frac{A}{B}$ ($\frac{AC}{BD}$.

Multiplicationis & Divisionis inversæ, æquipollentia.

Atque hinc statim constat, (quod apprime notandum est,) *Idem omnino fieri sive multiplicemus per* $\frac{C}{D}$, *sive dividamus per* $\frac{D}{C}$: quippe eadem utrobique prodibit quantitas. Item sive multiplicemus per $\frac{1}{2}$, sive dividamus per 2 vel $\frac{2}{1}$; quippe utrobique quæritur expositæ quantitatis semissis. Item, sive per $\frac{2}{3}$ multiplicemus, sive

sive per $\frac{3}{2}$ dividamus. Et sic ubique; sit licet quantitas (sic dividenda aut multiplicanda) vel integrum quid, vel fractum.

$$\frac{D}{C})A(\frac{AC}{D}=A\times\frac{C}{D}.\quad \frac{D}{C})\frac{A}{B}(\frac{AC}{BD}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C})AD(\frac{ADC}{D}=AC=AD\times\frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C})\frac{A}{C}(\frac{AC}{CD}=\frac{A}{D}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{D}.$$

$2)\frac{4}{5}(\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}.\quad \frac{3}{2})\frac{4}{5}(\frac{8}{15}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}:$

$\frac{3}{2})4(\frac{8}{3}=4\times\frac{2}{3}.$ vel $\frac{3}{2})\frac{4}{1}(\frac{8}{3}=\frac{4}{1}\times\frac{3}{3}.$

$\frac{3}{2})9(\frac{18}{3}=\frac{6}{1}=6=9\times\frac{2}{3}.\quad \frac{3}{2})\frac{9}{1}(\frac{18}{3}=6=\frac{9}{1}\times\frac{2}{3}.$

Breviter; Multiplicationis & Divisionis (in Fractionibus) doctrina, hujusmodi est (ut ex prædictis liquet:)

Numeratoris { Multiplicatio, Multiplicat / Divisio, dividit }
Denominatoris { Multiplicatio, dividit / Divisio, multiplicat } Fractionem.

Quia vero numerus quilibet per quemlibet multiplicari potest commode, at non ita per quemlibet dividi (ut nempe nullum sit residuum:) utraque igitur operatio, tum Multiplicatio scilicet, tum Divisio Fractionis, per solam Multiplicationem à plerisque institui solet; illic quidem Numeratoris, hic Denominatoris. Adeoque

Multiplicando { Numeratorem, multiplicant / Denominatorem, dividunt } Fractionem.

Si itaque ejusdem alicujus fractionis (vel etiam quantitatis integræ) tum Multiplicatio tum Divisio simul instituenda sit, (quod quidem, ubi expositus multiplicator aut divisor est fractio, contingit,) utrumque faciendum est. Nempe qui multiplicat per $\frac{2}{3}$; ille revera multiplicat per 2, & dividit per 3: qui autem per $\frac{2}{3}$ dividit; ille dividit per 2, & per 3 multiplicat. Et propterea, illic numerator (quantitatis expositæ) hic Denominator est per 2 multiplicandus: atque etiam Denominator illic, hic Numerator, multiplicandus per 3. (Eodem plane modo, atque in Additione & Subductione contingit: Puta qui addit $2-3$; ille revera addit 2, & 3 demit: & qui subducit $2-3$; ille revera 2 tollit, & addit 3.) Atque hæc quidem ad fractionum tum Multiplicationem tum Divisionem rite intelligendam, dicta sufficiant.

Producti & Quotientis exhibitio in minimis terminis.

Si autem id expetat aliquis, non modo verum ut habeat sive Productum Multiplicationis, sive Divisionis Quotientem; sed in minimis terminis: Potest quidem illud obtineri, vel Productum aut Quotientem jam inventum reducendo; (eo nempe modo quem in præcedente capite indicavimus; puta tum numeratorem, tum denominatorem maxima communi mensura dividendo:) vel etiam, si id potius expetatur, præparatione facta antecedanea: nempe hoc modo. Reducantur primo, expositæ fractiones ad terminos suos minimos; Numeratores scilicet singulos, suosque respective Denominatores communi mensura maxima dividendo. Deinde vero, in Multiplicatione, Numeratores singuli, cum Denominatoribus alternis, sic comparentur & reducantur; at, in Divisione, tum Numeratores invicem, tum etiam Denominatores invicem, sic comparentur & reducantur: Et præparatione sic facta, tum tandem fiat ea quæ præcipitur terminorum Multiplicatio;

Nempe fractionis Multiplicandæ, Numerator in Numeratorem, & Denominator in Denominatorem Multiplicantis ducatur; fractionis autem Dividendæ, Numerator in dividentis Denominatorem, & Denominator in Numeratorem. (Quod ſic breviter enunciat Oughtredus, *Multiplicatio comparat heterologos terminos, & multiplicat homologos: Diviſio comparat homologos, & multiplicat heterologos.*) Sic ſi fractio $\frac{4}{18}$ in $\frac{15}{32}$ ducenda ſit: Reducta prius $\frac{4}{18}$ ad $\frac{2}{9}$; comparo adhuc 2 numeratorem prioris, & 32 denominatorem poſterioris, proque illis ſubſtituo 1 & 16: tum etiam pro 9 denominatore prioris, & 15 numeratore poſterioris, ſubſtituo 3 & 5. Adeoque tandem prodibit $\frac{5}{48}$.

$$\begin{matrix}1\\2\\4\\18\\9\\3\end{matrix} \times \begin{matrix}5\\15\\32\\16\end{matrix} = \frac{5}{48}. \quad \text{Sic} \quad \begin{matrix}1\\a\\a^2\\ab\\b\end{matrix} \times \begin{matrix}d\\a\\1\end{matrix} = \frac{1}{b} \times \frac{d}{1} = \frac{d}{b}.$$

Similiter, ſi dividenda fractio $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, per $2\frac{2}{15} = \frac{32}{15}$: operatio ſic procedet.

$$2\tfrac{2}{15} = \begin{matrix}16\\32\\15\\5\end{matrix}) \begin{matrix}1\\2\\4\\18\\9\\3\end{matrix} (\frac{5}{48}. \quad \text{Sic} \quad \begin{matrix}1\\a\\a\\d\end{matrix}) \begin{matrix}1\\a\\a^2\\ab\\b\end{matrix} (\frac{d}{b}.$$

Operationum in numeris fractis, Synopſis.

Totum itaque tum Additionis & Subductionis, tum Multiplicationis & Diviſionis negotium, in numeris Fractis; duobus his capitibus abſolvimus. Quod brevi hac Synopſi conſpiciendum ſubjicimus.

$\frac{a}{b} \pm \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta \pm \alpha b}{b\beta}$ Additio & Subductio.

$\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$ Multiplicatio.

$\frac{\alpha}{\beta}) \frac{a}{b} (\frac{a\beta}{\alpha b}$ Diviſio.

CAP. XLIV.

De Fractionum Reductionibus variis. Impropriæ fractionis ad numerum integrum vel miſtum reductio: & contra. Reductio ad minimos terminos: Ad communem Denominatorem: Ad Denominatorem datum: Ad communem datumve Numeratorem. De fractionum fractionibus reducendis. De fractionibus Sexagenariis & Decimalibus, tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reducendis.

CUm eadem quoad valorem fractio, mille modis deſignari poſſit, uti ſuperius traditum eſt: Expedit nonnunquam ex una in aliam formam fractiones tranſmutare;

mutare; variaſque illarum Reductiones inſtituere: quarum præcipuas hoc ſumus capite tradituri.

Fractionis impropriæ ad numerum integrum vel miſtum Reductio: & contra.

Fractionem Impropriam, ad Numerum Integrum, vel ſaltem Miſtum reduci poſſe; ex ſuperioribus patet. Nempe, Numeratorem per Denominatorem dividendo. Sic $\frac{24}{8}=4$, quia 6) 24 (4. Et $\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$, quia 7) 24 (3 $\frac{3}{7}$. Item $\frac{4a}{a}=4$, quia a) $4a$ (4. Et $\frac{4a}{2a}=2$. quia $2a$) $4a$ (2. Sic $\frac{AB}{A}=B$. $\frac{2a+b}{a}=2+\frac{b}{a}$, &c. Cum enim (ut ſuperius dictum eſt) Fractio, (ſive propria ſive impropria,) non ſit niſi Diviſionis imperfectæ indicium: Diviſio illa, actu præſtita, id ipſum efficit, quod Fractio indicabat faciendum.

Et Contra, Numerus quilibet vel Integer vel Miſtus, ad Fractionem impropriam reducitur. Nempe multiplicando numerum integrum, in datum denominatorem. Sic $3=\frac{12}{4}$. $2=\frac{6}{3}$. &c. (quia nempe $3\times4=12$. & $2\times3=6$.) Cum enim in ſingulis integris, contineantur *quatuor* quadrantes; in tribus integris continebuntur quadrantes *ter quatuor*, hoc eſt duodecim: ſic de cæteris. Item $1\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. $6\frac{1}{3}=\frac{18}{3}+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$. &c. eadem plane de cauſa. Et in Symbolis pariter $A=\frac{AB}{B}$. Et $3a+\frac{b}{c}=\frac{3ac+b}{c}$. Et $a+\frac{a^2}{c}=\frac{ac+a^2}{c}$ &c. Atque hæc quidem numeri integri miſtive in fractionis formam reductio non raro uſui eſt, præſertim in addendis, ſubducendis, comparandis, hiſce numeris fractionibus immiſtis: Sicut, è contra, fractionis impropriæ ad numerum integrum miſtumve reductio, ad earundem æſtimationem facilius & clarius mente aſſequendam maxime conducit.

Fractionis reductio ad minimos terminos.

Fractionis ad minimos terminos reductio, ex dictis Cap. XLII. ſatis innoteſcit. Diviſo nempe utroque termino per maximam communem menſuram (quæ ex ibidem traditis inveniatur,) prodeunt termini in eadem ratione minimi, ſive inter ſe primi: adeoque minimi qui eundem fractionis valorem exhibere poterunt. Sic $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, diviſo ſcil. tum numeratore tum denominatore per 3. Et $\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, & $\frac{42}{49}=\frac{6}{7}$, (diviſis nempe tum numeratore, tum denominatore, illic per 5, hic per 7.) Sic $\frac{18}{12}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ &c. Item $\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}$. $\frac{AB}{B}=\frac{A}{1}=A$. (dividendo utrinque per B.) Sic $\frac{AC+BC}{DC}=\frac{A+B}{D}$ (diviſione facta per C.) Et $\frac{ab+bb-ac-cb}{b-c}=a+b$. Item $\frac{ab+b^2-ac-bc}{b^2-c^2}=\frac{a+b}{b+c}$. (facta utrobique diviſione per $b-c$.) Et ſimiliter in aliis. Eſtque hæc fractionum ad minimos terminos reductio, ad faciliorem valoris æſtimationem apprime utilis. Ecquis enim non facilius intelligit & mente concipit fractionem ſive rationem $\frac{1}{2}$, vel 1 ad 2; quam $\frac{783}{1566}$, vel 783 ad 1566? Adeoque tum fractiones tum Rationes commodius exprimuntur (cæteris paribus) in minoribus quam in majoribus terminis; & propterea, (niſi quid ſpeciatim aliquando altioris momenti impediat,) ad terminos minimos reducendæ.

Fractionum reductio ad communem Denominatorem.

Fractionum duarum pluriumve ad communem denominatorem reductio, (quæ quam ad Additionem & Subductionem neceſſaria ſit, jam ſupra dictum eſt,) oſtenditur Cap. XLII. Nempe denominatoribus omnibus continue ductis, habetur communis Denominator; cui conveniant Numeratores, ex numeratorum expoſitorum ſingulis, in reliquorum omnium denominatores continue ductis, emergentes.

Puta, $\frac{a}{\alpha}$. $\frac{b}{\beta}$. $\frac{c}{\gamma}$. ſic reductæ, fiunt $\frac{a\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$. $\frac{b\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$. $\frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$.

Item $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, reducuntur ad $\frac{20}{40}, \frac{30}{40}, \frac{16}{40}$.

Si autem non modo ad communem ſaltem aliquem, ſed ad minimum communem denominatorem, reducendæ ſint expoſitæ quotlibet fractiones: Habetur communis ille denominator, ſi datorum denominatorum illi omnes qui communem aliquam menſuram patiuntur, per illam dividantur, &, pro ipſis denominatoribus, quotientes ex ea diviſione emergentes aſſumantur; ut ex horum quotientum, reliquorumque ſiqui ſunt denominatorum, ipſiuſque communis diviſoris maximi

(aut etiam maximorum omnium, si plures fiant comparationes,) continua multiplicatione habeatur communis denominator minimus: (ad quem quærendi Numeratores congrui, modo mox ostendendo.) Sic in modo expositis, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$; quia 2 & 4 communem patiuntur divisorem 2; uterque per 2 dividatur 2) 2 (1, 2) 4 (2; & quotientes ea divisione emergentes, 1, 2, cum tertio denominatore 5, ipsoque communi divisore 2, continue multiplicati, exhibent minimum communem denominatorem $1 \times 2 \times 5 \times 2 = 20$. Cui denominatores congrui (modo mox ostendendo) assumpti 10, 15, 8, exhibent expositis $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, æquales cognomines $\frac{10}{20}, \frac{15}{20}, \frac{8}{20}$, & quidem minimum communem denominatorem habentes.

Sic $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$; divisis tum 2 & 10 per communem mensuram 2, prodibunt quotientes 1, 5; tum iterum 5 (quotientum jam inventorum altero, qui propterea etiam eliminandus erit, ejusque loco novus per sequentem divisionem substituendus,) & 5 (denominatore tertio) per communem divisorem 5, unde prodibunt quotientes 1, 1, & (ex prioribus duobus) resumendus 1, qui in duos communes divisores 2, 5, continue ducti, dant $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10$ communem denominatorem minimum; quibus respondent denominatores congrui 5, 3, 8; adeoque fractionibus expositis $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$, æquales sunt, cognomines $\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}$.

Sic $\frac{a}{\alpha\beta}, \frac{b}{\beta\gamma}, \frac{c}{\gamma\delta}$, reducuntur ad cognomines minimos $\frac{a\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{b\alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Invento autem communi denominatore minimo, Numeratores congrui inveniantur, hoc est, fractiones expositæ ad datum Denominatorem reducuntur, hoc modo:

Fractionis ad Denominatorem datum reductio.

Ad datum denominatorem reducitur data fractio, si novus assumatur Numerator, qui, ad datum Denominatorem, eam habeat rationem, quam habet fractionis datæ numerator ad denominatorem suum. (Ratio manifesta est; quoniam dum servatur eadem Numeratoris ad Denominatorem ratio, eadem manet fractionis quantitas.) Sic si fractionem $\frac{1}{2}$, reducere velim ad æqualem aliam, quæ denominatorem habeat 10; quærendus est Numerator, qui sit ad 10, ut est 1 ad 2. Sive, ad quem, eam habeat rationem 10, quam 2 ad 1. Quod per auream regulam peragitur: Puta 2 . 1 :: 10. $q = \frac{10}{2} = 5$. Adeoque $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Pariter si ad eundem denominatorem 10, reducere velim fractionem $\frac{4}{5}$; sumendus est Numerator 8: (quia 5 . 4 :: 10 . 8.) Adeoque $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Et propterea (quod modo dictum erat) fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$, ad communem denominatorem 10 reductæ, erunt $\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}$. Eodem modo, fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, ad communem denominatorem 20 reductæ, erunt $\frac{10}{20}, \frac{15}{20}, \frac{8}{20}$: (Nam 2 . 1 :: 20 . 10. Item 4 . 3 : 20 : 15. Item 5 . 2 :: 20 . 8.) Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad denominatorem bc reducta, erit $\frac{ac}{bc}$. (Quia $b . a :: bc . \frac{abc}{b} = ac$.) & fractio $\frac{ac}{bc}$, ad denominatorem b reducta, erit $\frac{a}{b}$. (quia $bc . ac :: b . \frac{acb}{bc} = a$.) Et sic ubique.

Atque hujus reductionis magna est utilitas, (ut alibi, sic) in partibus expositis alicujus integri, ad partes nobis notiores, vel usitatiores, reducendis. Exempli gratia; si exponatur $\frac{2}{3}$ *Solidi* Anglicani; & scire velim, quot ea fractio valeat nummos *Denarios* dictos, sive partes duodecimas. Reducenda quippe erit exposita fractio $\frac{2}{3}$, ad æqualem aliam quæ denominatorem habeat 12. Adeoque (quia 3 . 2 :: 12 . 8.) invenio $\frac{8}{12}$, bessem, sive duos trientes, tantundem valere atque $\frac{8}{12}$, octo duodecimas, hoc est, octo denarios.

Verum hic intelligendum est; quod non possit ita semper ad datum denominatorem reduci fractio data, quin pro quæsito numeratore emergat nonnunquam vel fractio vel numerus mistus; adeoque non possit fractione simplici, quæ datum habeat denominatorem, data fractio designari, sed fractione composita opus erit. Puta si fractionem $\frac{2}{3}$, ad partes duodecimas reducere velim, (hoc est, ad fractionem æqualem, cujus denominator sit 12) quoniam est 5 . 2 :: 12 . $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$, quæsita fractio esset $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$. Hoc est, 4 duodecimæ, atque insuper $\frac{4}{5}$ unius duodecimæ. Adeoque, verbi gratia, $\frac{2}{3}$ solidi Anglicani, valebit denarios Anglicanos $4\frac{4}{5}$; hoc est

quatuor

quatuor denarios, atque insuper $\frac{4}{5}$ unius denarii. Sic, fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ denominatorem habeat c, erit $\frac{b)ac}{c}$.

Fractionum reductio ad datum Numeratorem, vel Numeratorem communem.

Quæ autem jam tradita sunt de Fractionis ad datum Denominatorem reductione; vel etiam plurium fractionum reductione ad Denominatorem communem: Eadem non difficulter de reductionibus ad Numeratorem datum, atque ad numeratorem communem, exponi possunt. Vix enim aliud ad hoc factu opus est, quam ut pro *Denominatoris* voce substituatur *Numeratoris*, & contra. Sic fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, æquipollent hisce $\frac{3}{6}, \frac{3}{4}$. Item fractionibus $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$, æquipollent $\frac{6}{12}, \frac{6}{8}, \frac{6}{13}$. Et fractionibus $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$, æquipollent $\frac{abc}{\alpha bc}, \frac{abc}{\beta ac}, \frac{abc}{\gamma ab}$. Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ numeratorem habeat, c, erit $\frac{c}{a)bc} = \frac{a}{b}$. Et sic alibi.

De fractionum fractionibus reducendis.

De Fractionum fractionibus, sive minutiarum minutiis, reducendis; nonnihil etiam dicendum est. Quippe nonnunquam fractionem aliquam ulterius frangi contingit; cujus, tanquam Integri, partes, Minutiæ minutiarum, sive fractionum fractiones dici solent. Puta trientis semis, vel bessis dodrans, &c. quos sic notare solent, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}$. &c. vel sic, $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{3}$. &c. Mallem ego sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$. &c. (quippe nihil aliud est hujusmodi fractionis fractio, quam fractio ex duabus invicem multiplicatis composita.) Uti enim $\frac{1}{2}$ A vel $\frac{1}{2} \times$ A, est semissis quantitatis A; & $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2} \times 1$, semissis unius integri; $\frac{1}{2} \times 2$, semissis duorum; $\frac{1}{2} \times 3$, semissis trium: ita $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, est semissis trientis; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, dodrans bessis, sive tres quartæ duarum tertiarum, &c.

Atque hinc statim patet methodus, ejusmodi fractiones compositas ad simplices reducendi. Nempe multiplicatione sola id peragitur. Puta ductis invicem $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$, erit (per tradita in superiore capite) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. &c. Similiter si pluries adhuc componatur; puta semis dodrantis duarum tertiarum, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Et sic alibi.

Eodem plane modo reducenda est, hujusmodi fractio $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$, hoc est $4\frac{4}{5} \times \frac{1}{12}$, sive $\frac{24}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$. aliæque similes ubi Numerator fractionem adjunctam habet.

Quod etiam sic tradi possit: Ductis tum numeratore $4\frac{4}{5}$, tum Denominatore 12, in communem multiplicatorem 5, prodibit (non mutata quantitate) $\frac{24}{60}$, vel $\frac{2}{5}$.

Nec dissimilis erit reductio fractionis hujusmodi (cujus Denominatori adjungitur fractio) $\frac{3}{12\frac{1}{2}} = \frac{6}{25}$: Ductis nempe tum Numeratore tum Denominatore, in communem multiplicatorem 2, non immutatur quantitas.

Sic $\frac{4\frac{4}{5}}{12\frac{1}{2}} = \frac{48}{125}$; ductis nempe tum numeratore tum denominatore, in $10 = 5 \times 2$.

Eademque plane methodo utendum erit, in fractionibus (si id obtingat) etiam adhuc ulterius fractis, sive in Numeratore, sive Denominatore, sive etiam utroque. Ut non sit opus hisce diutius immorari.

De fractionibus Sexagenariis & Decimalibus.

Supereſt ut de Fractionibus Sexagenariis, & Decimalibus verba faciamus; earumque tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reductione; atque harum ad illas. Ex omnibus enim fractionum Reductionibus, hæ duæ præ reliquis celebres sunt; nempe reductio ad partes Sexagenarias, & ad partes Decimales: & vice versa. Illa veteribus admodum familiaris erat & frequens; hæc maxime Recentioribus.

In fractionibus Sexagenariis, supponitur integrum quodvis in partes 60 dividi, quas vocant πρῶτα, minuta prima, scrupulos primos; Et eorum quodlibet in 60 minuta secunda; & quodvis horum in totidem minuta tertia; & sic deinceps, in continua ratione subsexagecupla. Sic, verbi gratia: *Hora* dividitur in 60 minuta prima, & quodlibet minutum primum in 60 secunda; & quodlibet secundum in totidem tertia, &c. Item circuli, sive quadrantis, aut etiam Signi Gradus quilibet eadem ratione dividitur in Minuta prima, secunda, tertia, &c.

In Recentiorum partibus Decimalibus, supponitur Integrum quodvis dividi in 10 par-

10 partes decimas; & decima quælibet, in 10 Centesimas; quælibet centesima in 10 Millesimas; & sic deinceps; in continua ratione subdecupla infra Unitatis locum descendendo, sicut supra Unitatis locum continua ratione decupla ascenditur, ad decades, centurias, millia, &c. Quæ quidem ratio dividendi integrum, multo accommodatior est, quam veterum Sexagenaria; quia fractiones decimales eodem plane modo tractantur, quo numeri integri, (ut suo loco dictum est,) nullamque calculi difficultatem involvunt; cum Sexagenaria illa progressio perplexa nimium sit, variasque reductiones postulet. De utrisque autem seorsim dicetur.

Reducitur fractio quælibet ordinaria ad partes decimales, si numeratorem (additis post lineam separatricem quot opus est ciphris, quæ gradus infra Unitatem descendentes designent,) per denominatorem dividamus. (Quippe hoc pacto divisio, quam indicat fractionis notatio, actu peragitur: Quomodo autem ea instituenda est per locos descendentes divisio, jam supra suo loco ostensum est, ubi de integrorum divisione verba fecimus.) Sic $\frac{4}{5} = 0|8$. $\frac{3}{8} = 0|375$. ut divisione patebit.

5) 4, ø o (o, 8.

64
8) 3, ø ø ø o (o, 375.
888

Si autem (quod non raro contingit) ejusmodi occurrat fractio, quæ vel non omnino, vel non nisi longiori operatione, accurate possit partibus decimalibus exprimi: possumus operationem quousque libet instituere, donec quod superest tam sit exiguum ut tuto negligi possit. Sic $\frac{1}{3} = 0|3333$ &c. $\frac{2}{3} = 0|6666$ &c. $\frac{1}{6} = 0|1666$ &c. $\frac{5}{6} = 0|8333$ &c. $\frac{10}{11} = 0|909090$ &c. $\frac{5}{11} = 0|454545$ &c. $\frac{3}{7} = 0|428571428$ &c. (In quibus omnibus, aliisque similibus observare licet eorundem numerorum recursum, quousque libet continuandum.) Item $\frac{3}{32} = 0|09375$. $\frac{23}{64} = 0|359375$. (In quibus, aliisque similibus, exhauritur quidem, sed sero, exposita fractio partibus decimalibus.) ut dividendo patebit.

xxi
x, ø ø ø o (o, 333 &c.
3, 3 3 3

444
x, ø ø ø o (o, 166 &c.
6, 6 6 6

6 3 6 3
3, ø ø ø ø o o (o, 4545 &c.
xx, x x x x
x x x x

2 x
x 2 4 6
3, ø ø ø ø ø (o, 09375.
3 2, 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3

In his, inquam, aliisque ejusmodi casibus, ubi partes decimales vel in longum nimis, vel in infinitum excurrunt; sufficit vero proximum pro vero accipere; adeoque operatione quousque libet continuata, quod supereſt negligere. Puta, pro $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{3}{32}$, &c. sumatur $0|3333$. $0|8333$. $0|90909$. $0|0937$. Vel etiam $0|333$. $0|833$. $0|909$. $0|094$. Vel forte $0|33$. $0|83$. $0|91$. $0|09$. prout major minorve accuratio requiratur.

Fractiones autem Decimales, ubi opus est, eodem plane modo ad alias reducuntur, quo reliquæ fractiones ab una ad aliam denominationem. Puta $0|5$, hoc est $\frac{5}{10}$, ad $\frac{1}{2}$, dividendo tum Numeratorem tum Denominatorem, per maximum communem divisorem 5. Sic $0|09375 = \frac{9375}{100000} = \frac{3}{32}$, nempe dividendo per maximam communem mensuram 3125. Et sic in reliquis. Si autem ea reperiatur mensura quæ non quidem accurate, at saltem quam proxime utrumque terminum mensuret; poterit illius ope assumi fractio ordinaria, quæ, licet non accurate, quam proxime tamen æquabitur expositæ Decimali: adeoque pro hac assumi possit; præsertim si supponatur fractio illa decimalis (quod non raro fit, præsertim in tabulis Astronomicis, Trigonometricis, &c.) non præcise Geometricam veritatem, sed vero proximum, designare. Sic, pro $0|33333$, hoc est $\frac{3333}{10000}$ assumi poterit tanquam æqualis $\frac{1}{3}$, cum tamen hæc aliquanto major sit, (quippe æqualis huic $\frac{3333}{9999}$,) sed tantillo ut ea differentia tuto negligi possit, ubi Geometrica ἀκρίβεια non exigitur.

Si

Si Fractio ordinaria quævis, ad partes Sexagesimales reducenda sit: Ducto Numeratore in 60, per Denominatorem fiat Divisio; & Quotiens indicabit Minuta: Residuum autem divisionis, si quod sit, in 60 ductum, & per Denominatorem (fractionis datæ) divisum, exhibebit in Quotiente Minuta secunda: Et sic deinceps minuta tertia, quarta, &c. prodibunt, si divisionum residua semper in 60 ducantur, & producta per communem fractionis datæ Denominatorem dividantur: Quod eousque faciendum erit, donec vel nullum superfit residuum, vel quod (ob operationem jam satis continuatam) negligi possit. Quod enim de Decimalibus modo dictum est, idem & in Sexagenariis fractionibus sæpissime fit; nempe nunc in infinitum, nunc saltem in nimis longum procedendum esse, priusquam tota fractio exposita plane exhauriatur: quo casu, pro accurate vero, saltem vero proximum assumendum erit. *Reductio fractionis ordinariæ ad partes Sexagesimales. Et contra.*

Sic $\frac{5}{24}$ = Min: 12′. 30″. præcise. Ut calculo patet. Hoc modo.

5	12
×60	×60
24) 300 (12′ $\frac{12}{24}$.	24) 720 (30″.

Vel etiam.

5	1
×60	×60
24) 300 (12′ $\frac{12}{24}$ = 12′ $\frac{1}{2}$	2) 60 (30″.

Sic $\frac{7}{11}$ = Min. 38′. 10″. 54‴. 32⁗. &c. = Min. 38′. 11″. fere. Nam

7	2
×60	×60
11) 420 (38′ $\frac{2}{11}$.	11) 120 (10″ $\frac{10}{11}$.
10	6
×60	×60
11) 600 (54‴ $\frac{6}{11}$.	11) 360 (32⁗ $\frac{8}{11}$.

Partes autem Sexagesimales ad fractiones ordinarias, reducuntur: si reductis omnibus ad scrupulorum ultimam denominationem, eorumque numero pro numeratore sumpto, congruus scribatur Denominator; nempe numerus ille qui ostendit quot istius ordinis scrupuli in uno integro continentur. Sic 12′. 30″. reducuntur ad fractionem ordinariam $\frac{5}{24}$. Hoc modo

12′	1	
×60	×60	
720″	60′	
+30″	×60	$\frac{750}{3600} = \frac{75}{360} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$.
750″	3600″	

Cum enim singula minuta prima contineant 60 secunda, 12 prima continebunt 720 secunda, quibus additis aliis secundis 30, erit secundorum numerus 750. At vero in uno Integro continentur Minuta prima 60, adeoque minuta secunda 3600: Sunt ergo illa ad unum integrum; ut 750 ad 3600, hoc est (reductione facta ad minimos terminos) ut 5 ad 24. Adeoque 12′. 30″. = $\frac{750}{3600} = \frac{5}{24}$.

Est autem usus partium decimalium incredibili fere differentia magis compendiosus, quam partium sexagesimalium. Quod vel unico hoc exemplo satis indicabitur. *Decimalium usus, quam Sexagesimalium, quanto expeditior.*

Posito quod Solis cursus annuus, per integrum Zodiaci circulum, absolvatur diebus 365, horis 5, minutis 49′, 16″, 46‴: quæritur quantus sit illius motus diurnus medius. Hoc est, juxta leges Regulæ aureæ; Ut tempus annuum, 365 d, 5 h, 49′, 16″, 46‴; ad tempus diurnum, 24 h: sic motus annuus medius, graduum 360; ad motum diurnum, graduum quot?

Quoniam autem hic terminus primus, qui futurus est divisor, ex pluribus denominationibus constat; quo melius instituatur divisio, reducendus est ille primo ad unam denominationem. In quem finem, numerus dierum 365, per 24 (numerum horarum in singulis diebus) multiplicandus, atque adjiciendæ insuper horæ 5 (in quæstione adjunctæ) ut habeatur numerus horarum in tempore expositio, nempe 8765; Hæ horæ in minuta prima reductæ (multiplicando per 60) adjunctis insuper 49′ expositis; exhibent minuta prima, 525949: His autem minutis primis in secunda reductis, (multiplicando per 60,) & adjunctis insuper 16″ expositis, habentur minuta secunda 31556956: His denique in tertia pariter reductis, & adjunctis item 46‴, habentur minuta tertia 1893417406: quæ expositum tempus æquant.

Reducto autem tempore annuo in horaria minuta tertia; in eadem etiam reducendum erit tempus diurnum; nempe primum in 24, & deinde in 60 ter, continue multiplicando, adeoque dies unus reperietur minutis tertiis 5184000 æqualis.

Atque hac præparatione facta; constituatur quæstio ad hanc formam. Si in anno integro, hoc est in minutis tertiis horariis 1893417406, absolvatur integer circulus, hoc est gradus 360: in uno die, hoc est, minutis tertiis horariis 5184000, absolventur quot gradus? Et, operationibus Aureæ regulæ rite peractis, reperietur, ne unum quidem gradum integrum uno die absolvi; sed $\frac{1866240000}{1893417406}$ unius gradus. Ut ex adjuncto totius processus typo patet.

365ᵈ, 5ʰ, 49′, 16″, 46‴. 1ᵈ :: 360 gr. quot?

×24	×24
1460	24ʰ
730	×60
+5	1440′
8765ʰ	×60
×60	86400″
525900	×60
+49	5184000
525949′	
×60	
31556940	
+16	
31556956″	
×60	
1893417360	
+46	
1893417406‴.	

5184000‴ :: 360 gr. quot?

360

31104

15552

1893417406) 1866240000 (0 $\frac{1866240000}{1893417406}$

Denique, ut inventus motus diurnus medius, ordinaria fractione designatus, nempe grad: 0 $\frac{1866240000}{1893417406}$, partibus sexagesimalibus exhibeatur; reducenda est fractio modo superius ostenso, multiplicando Numeratorem per 60, & productum per datum denominatorem dividendo: atque hoc continue quousque opus erit. Sive etiam (quod eodem recidet) repetitis Aureæ regulæ operationibus; Nempe, ut Denominator fractionis datæ, ad suum Numeratorem, sic 60 Denominator fractionis quæsitæ, ad Numeratorem quæsitum; hoc est ad numerum partium sexagesimalium loci proxime inferioris. Adeoque tandem multiplici calculo comperietur, motum solis diurnum medium, esse, grad: 0 $\frac{1866240000}{1893417406}$ = grad: 0, 59′, 8″, 19‴, 37⁗, proxime.

1893417406 . 1866240000 :: 60 . 59′ $\frac{262773046}{1893417406}$
1893417406 . 262773046 :: 60 . 8″ $\frac{619043512}{1893417406}$
1893417406 . 619043512 :: 60 . 19‴ $\frac{1167680006}{1893417406}$
1893417406 . 1167680006 :: 60 . 37⁗ $\frac{4356338}{1893417406}$

Totum autem hoc negotium, per partes decimales, leviſſimo ſtatim labore peragitur. Poſito nempe quod Solis curſus Annuus, per integrum Zodiaci circulum abſolvatur, diebus 365|242555; motus diurnus, unica diviſionis operatione peracta, reperietur, grad. 0|9856463735 proxime. Quod calculus indicabit.

365|242555 . 360 :: 1 . 0|9856463735.

1

365|242555) 360|000000 (0|9856463735.

Hanc autem quæſtionis tum propoſitionem tum reſolutionem in partibus Decimalibus, tantundem plane valere, atque operoſam illam in partibus Sexageſimalibus; ſtatim apparebit, ubi oſtendero methodum has ad illas, & vice verſa, reducendi.

Reductio partium Sexageſimalium ad Decimales & contra.

Reducuntur autem partes Sexageſimales, (& quidem eadem methodo, mutatis mutandis, aliæ item quantitates pluribus denominationibus deſignatæ,) ad partes Decimales hac methodo. Quoniam, verbi gratia, quodvis Minutum Tertium, eſt $\frac{1}{60}$ unius ſecundi, & quodvis ſecundum, $\frac{1}{60}$ unius primi, & quodvis minutum primum $\frac{1}{60}$ unius horæ; & hora quævis $\frac{1}{24}$ unius diei: Erunt, (in expoſita quantitate annua, dierum 365, hor. 5, Min. 49′, 16″, 46‴.) minuta tertia 46‴, æqualia $\frac{46}{60}$ unius ſecundi; hoc eſt (dividendo 46 per 60) ſecund. 0|7666 &c. adeoque 16″, 46‴, = 16|7666″. Cumque hæc Secunda, ſint totidem Sexageſimæ unius Primi; dividendo 16|76666″ per 60; reperietur 16|7666″ = 0|2794′ & propterea 49′, 16″, 46‴, = 49′, 16|7666″ = 49|2794′. Et ſimiliter, cum minuta prima ſint totidem ſexageſimæ unius horæ; dividendo iterum pur 60; erunt Min. prima 49|2794′ = 0|8213 horæ: adeoque 5ʰ, 49′, 16″, 46‴, = 5|8213 horæ. Et, quia hora eſt $\frac{1}{24}$ diei; dividendo per 24 reperientur horæ 5|8213 = d : 0|2425; adeoque 365ᵈ, 5ʰ, 49′ 16″, 46‴, = diebus 365|2425 proxime. Operationis proceſſum hic ſubjecimus.

365ᵈ, 5ʰ, 49′, 16″, 46‴.

60) 46,0000 (0,76666 &c. — 16|76666 ſecund.
60) 16,76666 (0,279444 &c. — 49|2794444 prim.
60) 49,27944 (0,821324074 &c. — 5 821324074 horæ.
24) 5,82132407 (0,242555 16975. &c. — 365|242555 16975 dies.

Contra vero; Partes Decimales, ad Sexageſimales (aliaſve hiſce ſimiles) methodo contraria reducuntur. Nempe reſiduas ubique fractiones decimales multiplicando per 60, (aut per alium, quicunque fuerit, quæſitæ fractionis denominatorem.) Sic, verbi gratia, Motus Solis diurnus, grad. 0|9856463735, reducitur ad partes ſexageſimales 59′, 8″, 19‴, 37⁗. quam proxime. Ut ex adjuncta operatione patet.

0	9856463735	
59′	13878241	×60
8″	3269446	
19‴	616676	
37⁗	00056	

Atque hoc pacto partes Sexageſimales, aliæque pluribus denominationibus conſtantes, ad Decimales reduci poſſunt; & rurſus (ubi opus fuerit) hæ ad illas. Et quidem de Fractionum Reductionibus hactenus.

CAP. XLV.

De Fractionum, & Rationum Rationibus. Totius operis Epilogus.

De Fractionum Rationumve Rationibus.

ATque hactenus quidem cum Fractionum, sive etiam Rationum, (quippe perinde est utra sub notione considerentur,) Additionem, Subductionem, Multiplicationem, & Divisionem, variasque etiam Reductiones, quantum opus videtur, tradidimus: Non erit opus, ut quæ de Aurea Regula (ut loquuntur) aliave de Rationum aut Proportionum doctrina superius tradita sunt universaliter, jam iterum de Fractionibus speciatim repetantur. Quippe nihil hic novi occurrit de Fractionum, sive etiam Rationum, (sunt enim & illæ quantitates) rationibus dicendum; præter ea quæ universaliter de Quantitatum simpliciter (cujuscunque sint generis) Rationibus jam sunt tradita. Et quidem ut numeri integri (puta 2, 3, &c.) sunt Rationum Multiplicium (duplæ, triplæ, &c.) denominatores; sic fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. sunt denominatores rationum submultiplicium (subduplæ, subtriplæ, &c.) reliquæque fractiones, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. aliarum item rationum denominatores. Et quidem, sicut dupli ad triplum, puta 2 A ad 3 A, eadem est ratio quæ denominatorum suorum 2, ad 3. Sic, sesquialterius ad sesquitertium, $\frac{3}{2}$ A ad $\frac{4}{3}$ A, eadem est ratio quæ denominatorum suorum $\frac{3}{2}$ ad $\frac{4}{3}$. Item subduplum ad subtriplum; subsesquialterum ad subsesquitertium, &c. eadem omnino ratio atque suorum respective denominatorum.

Dupl. Tripl :: 2 A. 3 A :: 2. 3.
Subdupl. Subtripl :: $\frac{1}{2}$ A. $\frac{1}{3}$ A :: $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 2.
Sesquialt. Sesquitert :: $\frac{3}{2}$ A. $\frac{4}{3}$ A :: $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ :: 9. 8.
Subsesquialt. Subsesquiter :: $\frac{2}{3}$ A. $\frac{3}{4}$ A :: $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ :: 8. 9.

Item;	Dupl.	Tripl	::	Quadrupl.	Sextupl.
Hoc est;	2 .	3	::	4 .	6
Et,	Subdupla.	Subtripl	::	Subquadri.	Subsext.
Hoc est,	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$	::	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$ :: 3. 2.

Atque hæc quidem, cum apertissima sint; mirum mihi plane videtur Recentiorum aliquos, doctrinam de Rationum Rationibus, quasi jam plane novam venditare, atque à se jam primum in Matheſin introductam; cum tamen Aureæ Regulæ (ut vocant) praxis in numeris fractis, nil aliud plane sit quam illa de Rationum rationibus doctrina, eaque omnibus notissima; saltem si specierum sive Symbolorum usus etiam adhibeatur; quæ non minus quantitates Irrationales quam rationales respiciunt. Quique easdem plane leges de rationibus addendis, componendis, dividendis, alternandis, &c. in numeris fractis valere docent, atque in numeris integris; eadem opera docent etiam Rationum rationes easdem subire leges, atque rationes Absolutarum quantitatum.

Totius operis Epilogus.

Supereſt adhuc ad perfectam Arithmetici negotii traditionem, *Analytices* doctrina. Quam quidem statueram præsenti operi adjunxisse. Verum cum videam jam ultra quam speraveram molem crevisse; nec interim posse totum illud negotium ita in compendium redigi, ut huic commode subjungi possit: Placuit potius rem illam totam hic intactam præterire; adeoque & Potestatum Analysin, sive (ut loquuntur) Radicum extractionem, quæque huic conjuncta est de Radicibus Surdis doctrinam. Quæ omnia aliquando forsan, modo Deus ita voluerit, peculiari seorsim volumine absolvenda spero. Adeoque pedem hic figo.

Quæ hic secutura erat pars altera, Algebram spectans, propter alia quæ intercesserunt negotia, non nisi sero post plures annos prodiit.

FINIS.

ADVERSUS

MARCI MEIBOMII,

De Proportionibus Dialogum,

Tractatus Elencticus.

Honoratiſſimo Domino,

D. *Guilielmo Brouncker*

Equiti Aurato, Vicecomiti *Brouncker* de Lions, Baroni *Brouncker* de Newcaſtle.

JAM quintus agitur Menſis, Honoratiſſime Domine, Ex quo quam offero tractationem abſolverunt operæ. Quam ideo Tibi potius offerendam duxi, quod probe ipſe intelligas, tum quanti eſt ad Matheſin rite intelligendam *Rationes* callere, tum quam nihili eſt quem refutandum ſuſcepimus, *Dialogus Meibomii.*

Sub id temporis, cum Clariſſimum quendam Virum & Mathematicum Oxoniæ convenire contigerit, ex Dania oriundum, (qui Angliam tranſiens, Oxoniæ nos inviſere & ſalutare dignatus eſt,) facto de hoc Meibomii tractatu ſermone, intellexi, non ſibi ſoli ſed & D. *Auzotio* cuidam, Gallo, hanc novam placuiſſe doctrinam: Et quidem eo uſque ut vix inter ſe convenerit, cujus illud inventum cenſeatur, aut quo vulgante primo reſciſcat Orbis. Quippe cum Auzotius ſcriptum ſuum editurus in Belgium miſiſſet, idque Meibomio mature ſatis innotuerit; haud æquo animo tulit hic, ut ſub Auzotii nomine nova hæc prodiret doctrina, quam ſibi ipſe vendicavit, ſibique jam ante aliquot annos originem debuiſſe contendit: Et fieri quidem poteſt ut non minori zelo erga prolem ſuam, quam & ſibi genuinam fuiſſe præ ſe tulit, affectus fuerit Auzotius: quem partum ſuum non minus deperiſſe, putandum eſt.

Utut ſit, Meibomii ſaltem Dialogus prius prodiit, &, credo, adhuc ſolus.

Ex eo autem tempore prodiit etiam, ſaltem ad manus meas pervenit, *Xaverii Ainſcombe*, Jeſuitæ, Tractatus, hoc ipſo anno editus: qui *Gregorii a S. Vincentio* tetragoniſmum ſtabilire fruſtra ſatagens, ejuſdem ſaltem de Rationibus & Proportionibus doctrinam ſatis, adverſus *Meibomium*, defendit; ſed & Auzotium etiam ὁμώνυμον (cujus ille opus MS nactus erat) junctim refellit.

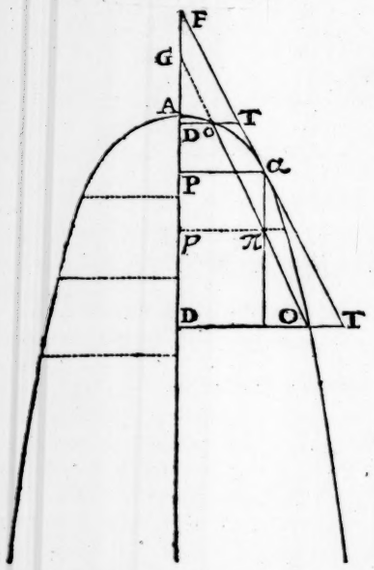
Nos autem, qui tum Auzotii opus non vidimus, tum Ainſcomii ſuſceptum ignoravimus, Meibomii ſaltem Dialogum, quia neſcio quid & Novi & Magni præ ſe ferre videbatur, examinavimus & refutavimus.

Quam autem jam tum abſolverant operæ, nunc ſerius ea prodit in publicum Refutatio; partim quod cui ſubjungitur opus nondum perfectum erat penituſque ab operis abſolutum; partim etiam quod interea temporis occurrebat *Hobbius* ſecundo caſtigandus, ob convitia & maledicta quæ ſcripto Anglicano in me effutivit ob *Elenchum* meum quo ipſius Geometriam refutaveram. Quæ quidem Hobbii caſtigatio, tum me tum Typographos (qui, cum vel minime impediti, ſunt ſatis tardi) aliquandiu occupatos tenuit; ne hoc cum opere præcedente citius prodiret, in ipſo fere partus momento impeditum.

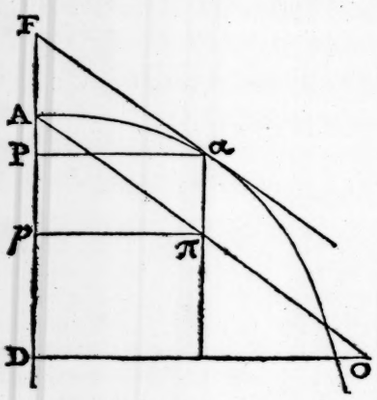
Atque hactenus quidem expoſita præſentis operis ratione, tacere poſſem, neque ulterius Dominationi Veſtræ moleſtus eſſe; niſi quod alia nonnulla ſint, quæ licet à præſenti negotio ſatis ſint aliena, nequaquam tamen aliena D^ni^ Veſtræ, quæque hic loci minime reticenda duxi.

Dignata eſt D. V. pro ea qua polles humanitate atque in me benevolentia, ſcripta mea non modo ſupra quam ipſa mereantur æſtimare, ſed & rimari curioſius, atque etiam ultra quam ipſe fecerim inventa noſtra promovere. Hinc factum eſt ut quantitatis ſatis quidem irrationalis, quam ad Tetragoniſmum meum commode explicandum deſignandam habui, præter eam quam ipſe exhibueram deſignationem, aliam adhuc invenit D. V. accuratam quidem & ſubtiliſſimam; quam ad mentem tuam, quam potui proxime, ad prop. 191. *Arithmet. Infinit.* expoſui. Neque hoc contentus, ex principiis noſtris, quæ ad Circuli quadraturam deſiguan-

designandam adhibueram, talem etiam quadraturam Hyperbolæ deduxisti, quam non absimili methodo designari posse docuisti: quod ex te tandem, uti spero, aliquando discet Orbis literatus.



Verum aliud est quod impræsentiarum adhuc dicendum habeo. Propositione 47ª (cui affinis & prop. 49.) tractatus mei de *Sectionibus Conicis*, hanc ego Propositionem, *In Paraboloeide Cubicali, Diametri sunt invicem parallelæ; & cujuscunque diametri ordinatim-applicatæ, sunt rectæ in ipsius vertice contingenti parallelæ*: analytice examinandam proposueram. Tentata autem Analysis, in hanc desinit Æquationem Cubicam, $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$: quo legitime, sine ullo paralogismo, vel ἀγεωμετρησία, perventum est. Concludebam itaque, (quod quidem inde omnino concludendum videbatur,) *Istius Æquationis radix* q, *si quo modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta* D, D; *adeoque propositi veritatem.* Atque hac assertione hypothetica contentus, (adjuncta quæ huic hypothesi conveniat demonstratione Synthetica,) ulteriori disquisitioni (negotiis aliquot tum temporis ex improviso supervenientibus impeditus quo minus huic vacare tum licuerit,) supersedebam; nec eousque examen deducebam, ut inquirerem *Numquo modo possit ejusmodi radix singularis exhiberi*: An potius *impossibilis* plane sit, & casum impossibilem innuat; adeoque & propositi impossibilitatem: Vel saltem *Varia*, nec utrobique eadem; ut non æquales sint pD sursum, & pD deorsum, sumendæ; adeoque propositi falsitatem.



Ex eo tempore (monente quidem, ex Gallia, sed sine ulla in contrarium demonstratione, D. Robervallio) propositionem illam accuratius ad examen revocans, inveni quidem, utut verum sit quod hypothetice affirmaveram, propositionem tamen haud ita veram esse.

Et quidem quod sine Demonstratione innuit D. Robervallius; Tu justa demonstratione evicisti. Retenta siquidem constructione nostra; sumptaque ea parallela quæ per verticem A transit, (ut puncta GA coincidant, adeoque & DO superiora) rem sic absolvis breviter.

Est $AP(=\frac{1}{3}FP)=\frac{1}{3}Ap.$
Et $Ap=\frac{1}{2}AD.$ (*adeoque* $p\pi.DO::1.2.$)
Ergo $AP=\frac{1}{6}AD.$ (*adeoque* $P\alpha.DO::\sqrt{c}1.\sqrt{c}6::1.\sqrt{c}6.$)
Sed $p\pi=P\alpha.$
Esset ideo $2=\sqrt{c}6.$ *Quod est impossibile.*

Hoc autem cum non aliunde evenire posse videbatur, quam ob radicem æquationis nostræ quærendam q, impossibilem, vel saltem variam: Utrum horum esset, inquirendum putabam. Quamvis enim nulla omnino sit æquatio cubica quæ saltem

tem aliquam non habeat radicem poſſibilem: attamen interea fieri poſſe putabam, ut radicum illa quam noſtrum exigat negotium impoſſibilis foret. Si autem non impoſſibilis, ſaltem ut varia ſit, putandum videbatur; & propterea propoſitionem expoſitam haud eſſe veram, utpote quæ ſupponit lineam D D biſectam in p, (adeoque & inſcriptam O O biſecari in π:) quod ſi p D ſurſum, & p D deorſum, ſumendæ (quarum indifferenter utraque radice q deſignatur) non ſint invicem æquales; neque erit D D biſecta in p, nec O O in π; adeoque nec vera erit propoſitio.

Radicem itaque illam more meo inquirendam ſuſcipiebam; ut viderem num in ἀδύνατον exiret; vel aliud aliquod quod nondum obſervaveram myſterium panderet. (Quippe non raro contingit, ut ipſa æquationis reſolutio, inexſpectatum quid ex improviſo prodat.) Quod ſic aggredior.

Æquatio expoſita $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$

ſive $q^3 \pm 9dq^2 = \pm 27d^2g$,

ſubſtituto $r \mp 3d = q$,

adeoque $q^3 = r^3 \mp 9dr^2 + 27d^2r \mp 27d^3$

& $\pm 9dq^2 = \pm 9dr^2 - 54d^2r \pm 81d^3$

Erit $q^3 \pm 9dq^2 = r^3 - 27d^2r \pm 54d^3 = \pm 27d^2g$

ſive $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$.

Et quidem in caſu tuo, (ubi G A coincidunt, adeoque $g = 2d$,)

$r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3 = 00$

adeoque $r^3 = 27d^2r$.

& $r^2 = 27d^2$.

& $r = \sqrt{27d^2} = 3d\sqrt{3}$.

adeoque $q = r \mp 3d = 3d\sqrt{3} \mp 3d$.

Atque hinc quidem concludendum ſtatim videatur radicem q, non utrobique eandem eſſe; ſed quoad punctum D inferius, p D $= q = 3d\sqrt{3} - 3d$; quoad ſuperius vero, p D $= q = 3d\sqrt{3} + 3d$, adeoque rectam D D non eſſe biſectam in p. Atque id ipſum concludi etiam poſſe videatur, ex æquatione primum propoſita $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$; cum enim ſit tum $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, tum $9dq^2 + q^3 = 27d^2g$, non poſſe hoc omnino fieri videatur, niſi vel ſit $q = 0$, vel non eadem utrobique quantitas.

Verum lubricus adhuc eſt hic locus, nec ei temere fidendum; quique mihi jam ſemel impoſuit, caute proſpiciendum eſt ne nobis imponat denuo. Et quidem, utut id verum ſit quod concluditur, non tamen inde tam facile concludi poteſt. Utrobique enim conſequentia haud ſatis firma eſt, nec niſi aliunde ſumptis indiciis ſtabiliri poteſt.

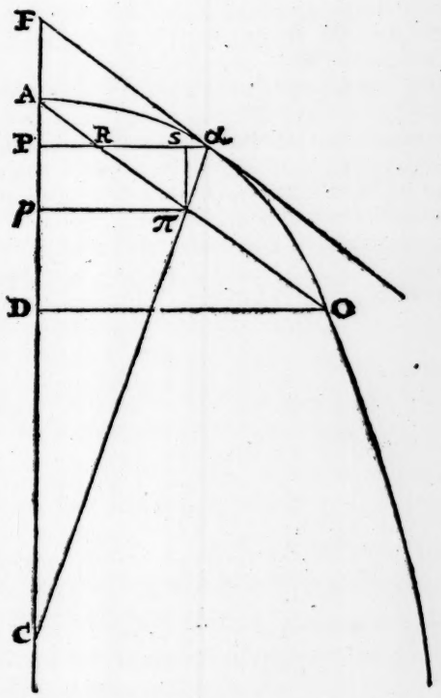
Non enim ex eo quod ſit $r^2 = 27d^2$, ſtatim ſequitur ponendum eſſe $r = 3d\sqrt{3}$; cum non minus eſſe poſſit $r = -3d\sqrt{3}$: utrovis enim poſito, erit $r^2 = 27d^2$. (Nam radix quadrati affirmativi, poteſt quidem eſſe affirmativa; ſed & poteſt eſſe negativa, cum enim ſit ea æquatio quadratica, utut ſimplex nec omnino affecta, geminam tamen propterea radicem habet, alteram affirmativam, alteram negativam: utra autem ſumenda ſit, tanquam præſenti negotio accommoda, an etiam indifferenter utravis, non ſtatim ex ipſa æquatione reſolvenda, ſed ex aliis primarii quæſiti circumſtantiis determinandum erit.) Et quidem utraque hic loci radix eſt genuina, (utut non plane indifferenter & promiſcue utravis pro libitu adhibenda ſit, ſed nunc hæc nunc illa prout res poſtulat, ut infra rectius patebit, ubi totum quod hic latet myſterium expoſuero:) atque hoc quidem eo magis ſuſpicandum erat, quia ex æquatione expoſita duplici huc deventum eſt. Cum ſit itaque $r = \pm 3d\sqrt{3}$, quidni & $r \mp 3d = \pm 3d\sqrt{3} \mp 3d$, vel $r \mp 3d = \mp 3d\sqrt{3} \mp 3d$, ut nempe radix ſurſum & deorſum æſtimanda, quod mutata ſigna indicant, ſit utrobique vel eadem ſumma vel eadem differentia quantitatum $3d\sqrt{3}$, & $3d$. Quid enim hic ſtatuendum ſit, non niſi ex collatis aliunde rei circumſtantiis, eoque quo huc deventum eſt proceſſu, æſtimandum eſt.

Sed & altera conſequentia non minus lubrica eſt. Non enim ex eo quod ſit tum $9dq^2+q^3$, tum $9dq^2-q^3$, eidem quantitati æqualis, concludendum eſt, quantitatem q vel nihil eſſe, vel non utrobique eadem; cum ad hoc nil aliud requiratur quam ut alibi affirmetur alibi negetur eadem quantitas, (quod ipſum in præſenti quæſtione exſpectandum magis quam metuendum videatur;) Nam, verbi gratia, poſito $q=\pm 2d$, erit $9dq^2\pm q^3=44d^3$. Cum enim ſit utrobique $9d\times 4d^2=36d^3$, perinde erit ſive addamus $+8d^3=C:+2d$, ſive auferamus $-8d^2=C:-2d$. Non interim ignoro quid huic replicationi ſolide reponi poſſit, ſi rem preſſius perpendamus, (nempe, radices utrobique affirmativas invicem eſſe comparandas, & æquales eſſe debere ut conſtet propoſitum; non æquationis unius affirmativam, negativæ alterius;) Nec enim negamus æquationibus illis id ſubeſſe quod rem præſentem determinet; ſed accuratius adhuc illas contemplandas eſſe dicimus, quo illud quicquid ſit eliciatur. Quod & nos facturi ſumus.

Ut itaque de præſenti negotio rectius ſtatuatur, ſeparabimus, quas hactenus conjunctim tractavimus, duas æquationes; nempe, $9dq^2+q^3=27d^2g$, quæ reſpicit pD deorſum ſumendam; & $9dq^2-q^3=27d^2g$, quæ reſpicit pD ſurſum ſumendam, (ut ex propoſitæ quæſtionis analyſi liquet;) Et quidem in æquatione illa reſolvenda ponitur $r-3d=q$, in hac $r+3d=q$. Utrobique autem (poſito $g=2d$) provenit $r^2=27d^2$, adeoque $r=\pm 3d\sqrt{3}$. Et propterea illic $r-3d=q=\pm 3d\sqrt{3}-3d$, hic vero $r+3d=q=\pm 3d\sqrt{3}+3d$. Hoc eſt, ſi de pD deorſum quæratur, duæ proveniunt radices, altera affirmativa, $+3d\sqrt{3}-3d$, quæ propterea revera deorſum prout ſupponitur ſumenda eſt; altera negativa, $-3d\sqrt{3}-3d$; quæ propterea in partem ſuppoſitioni contrariam tendit, (nam deorſum $-3d\sqrt{3}-3d$, tantundem eſt atque ſurſum $+3d\sqrt{3}+3d$.) Contra vero, ſi (juxta ſecundam æquationem) quæratur de pD ſurſum; duæ ſunt & hic radices; altera affirmativa $+3d\sqrt{3}+3d$, quæ propterea revera ſurſum tendit; altera negativa $-3d\sqrt{3}+3d$, quæ, in contrariam partem exponenda, revera deorſum tendit; (quippe ſurſum $-3d\sqrt{3}+3d$, tantundem eſt atque, deorſum $+3d\sqrt{3}-3d$.) Adeoque utramvis æquationem reſolvamus, perinde omnino eſt, quippe eædem utrobique proveniunt radices: cum hoc ſolo diſcrimine, quod quæ in una æquatione radix eſt affirmativa, eadem in altera eſt negativa, & contra. Utrovis modo, id conſtat, pD ſurſum ſumendam, eſſe $+3d\sqrt{3}+3d$; deorſum vero, $+3d\sqrt{3}-3d$; adeoque nec DD biſectam eſſe in p, nec OO in π; & propterea $\alpha\pi$, diametro AP parallelam, non & ipſam eſſe diametrum.

Atque hactenus videamur æquationis nodum ſatis ſolviſſe. Ne tamen ea de re nimis ſecuri ſimus; en nova ſtatim hinc prodit difficultas. Annon enim quam hactenus conſideravimus recta DD, eadem plane eſt, in caſu à te poſito, atque AD? Omnino, inquies; quippe, cum inſcripta OO per verticem tranſeat, eodem ipſo verticis puncto confunduntur, tum punctum G, tum etiam puncta D, O, ſuperius ſumenda. Bene eſt. At, inquam, ergo recta pA, eadem eſt atque pD ſurſum ſumenda. Quidni, inquies, eſſet? Ergo, inquam, (utut de pD deorſum ſumenda ſecuri ſimus,) erit ſaltem ſurſum $pA=pD=q=+3d\sqrt{3}+3d$: id enim inventa modo docet æquationis radix, ſatis, uti videbatur, ſtatuminata. Omnino, inquies; & quidni? At, inquam, eſt $Ap=3AP=3d$, (hoc enim aſſumit tua demonſtratio; atque eſt veriſſimum:) ſi itaque ſit eadem $pA=+3d\sqrt{3}+3d$, quod jam obtendi videatur; erit $3d=3d\sqrt{3}+3d$, hoc eſt $1=\sqrt{3}+1$, quod eſt impoſſibile. Videntur itaque necdum omnia ſatis inter ſe cohærere, aut ex votis noſtris ſuccedere. Quippe aliud adhuc latet, quod forte ne ſuſpiceris quidem, myſterium adhuc detegendum.

Dum hoc ago; ſupervenit ſecunda tua demonſtratio, Quæ, rem ulterius proſecuta, non modo oſtendit, Rectam $\alpha\pi$ quæ inſcriptam AO biſecat, non eſſe diametro AP parallelam; ſed, ipſi aliquando occurſuram, ipſumque tandem concurſus punctum C: adeoque & veram diametrum polliceri videatur; ſaltem ſi ulla omnino recta, ad punctum α pertingens, iſtius curvæ diameter eſſe poſſit.



In Paraboloeide Cubicali A α,

Quoniam est AP.PF::1.3.

Ergo & PR.Pα::1.3.

Et posito PR.DO::1.*a*.

Erit Pα.DO::3.*a*::1.$\frac{1}{3}a$.

Quia vero Pα.DO::$\sqrt{c}$AP.$\sqrt{c}$AD::$\sqrt{c}$PR.$\sqrt{c}$DO.

Erit Pα.DO::$\sqrt{c}$1.$\sqrt{c}a$::1.$\sqrt{c}a$.

Et propterea $\frac{1}{3}a=\sqrt{c}a$. *&* $a=3\sqrt{c}a=\sqrt{c}27a$

adeoque $a^3=27a$. $a^2=27$. *&* $a=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

Ideoque Pα.DO::3.$3\sqrt{3}$::1.$\sqrt{3}$.

Et AP.AD::PR.DO::1.$3\sqrt{3}$.

Porro; Quia AP.AD::1.$3\sqrt{3}$.

Ergo AP.A*p*::1.$\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Et AP.P*p*::1.$\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$.

Et quia Pα.DO::1.$\sqrt{3}$.

Ergo Pα.*p*π::1.$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Tum quia Sα.*p*π::Sπ.*p*C.

hoc est Pα—*p*π.*p*π::P*p*.*p*C.

ergo $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}::\frac{3}{2}\sqrt{3}-1.\frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}::$P*p*.*p*C.

Ideoque AP.*p*C::1.$\frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$.

Et AP.PC::1.$\frac{3}{2}\sqrt{3}-1+\frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$.

::1.$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}-1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$.

::1—$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.$\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$.

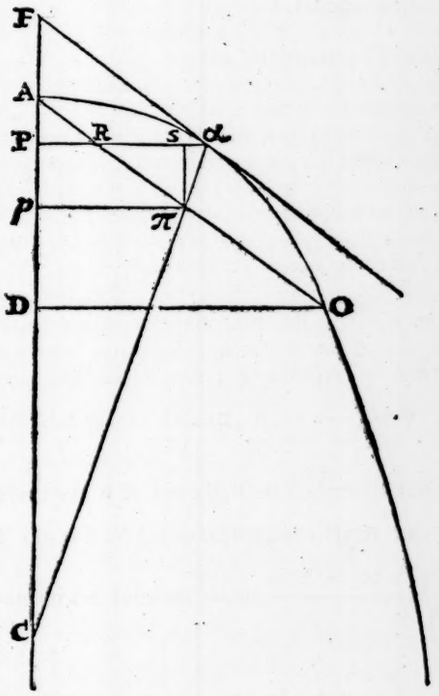
Et propterea AP.AC::1—$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.$\sqrt{3}$::1.$4\sqrt{3}+6$.

Sed & altera consequentia non minus lubrica est. Non enim ex eo quod sit tum $9dq^2+q^3$, tum $9dq^2-q^3$, eidem quantitati æqualis, concludendum est, quantitatem q vel nihil esse, vel non utrobique eadem; cum ad hoc nil aliud requiratur quam ut alibi affirmetur alibi negetur eadem quantitas, (quod ipsum in præsenti quæstione exspectandum magis quam metuendum videatur;) Nam, verbi gratia, posito $q=\pm 2d$, erit $9dq^2\pm q^3=44d^3$. Cum enim sit utrobique $9d\times 4d^2=36d^3$, perinde erit sive addamus $+8d^3=C:+2d$, sive auferamus $-8d^2=C:-2d$. Non interim ignoro quid huic replicationi solide reponi possit, si rem pressius perpendamus, (nempe, radices utrobique affirmativas invicem esse comparandas, & æquales esse debere ut constet propositum; non æquationis unius affirmativam, negativæ alterius;) Nec enim negamus æquationibus illis id subesse quod rem præsentem determinet; sed accuratius adhuc illas contemplandas esse dicimus, quo illud quicquid sit eliciatur. Quod & nos facturi sumus.

Ut itaque de præsenti negotio rectius statuatur, separabimus, quas hactenus conjunctim tractavimus, duas æquationes; nempe, $9dq^2+q^3=27d^2g$, quæ respicit pD deorsum sumendam; & $9dq^2-q^3=27d^2g$, quæ respicit pD sursum sumendam, (ut ex propositæ quæstionis analysi liquet;) Et quidem in æquatione illa resolvenda ponitur $r-3d=q$, in hac $r+3d=q$. Utrobique autem (posito $g=2d$) provenit $r^2=27d^2$, adeoque $r=\pm 3d\sqrt{3}$. Et propterea illic $r-3d=q=\pm 3d\sqrt{3}-3d$, hic vero $r+3d=q=\pm 3d\sqrt{3}+3d$. Hoc est, si de pD deorsum quæratur, duæ proveniunt radices, altera affirmativa, $+3d\sqrt{3}-3d$, quæ propterea revera deorsum prout supponitur sumenda est; altera negativa, $-3d\sqrt{3}-3d$; quæ propterea in partem suppositioni contrariam tendit, (nam deorsum $-3d\sqrt{3}-3d$, tantundem est atque sursum $+3d\sqrt{3}+3d$.) Contra vero, si (juxta secundam æquationem) quæratur de pD sursum; duæ sunt & hic radices; altera affirmativa $+3d\sqrt{3}+3d$, quæ propterea revera sursum tendit; altera negativa $-3d\sqrt{3}+3d$, quæ, in contrariam partem exponenda, revera deorsum tendit; (quippe sursum $-3d\sqrt{3}+3d$, tantundem est atque, deorsum $+3d\sqrt{3}-3d$.) Adeoque utramvis æquationem resolvamus, perinde omnino est, quippe eædem utrobique proveniunt radices: cum hoc solo discrimine, quod quæ in una æquatione radix est affirmativa, eadem in altera est negativa, & contra. Utrovis modo, id constat, pD sursum sumendam, esse $+3d\sqrt{3}+3d$; deorsum vero, $+3d\sqrt{3}-3d$; adeoque nec DD bisectam esse in p, nec OO in π; & propterea $\alpha\pi$, diametro AP parallelam, non & ipsam esse diametrum.

Atque hactenus videamur æquationis nodum satis solvisse. Ne tamen ea de re nimis securi simus; en nova statim hinc prodit difficultas. Annon enim quam hactenus consideravimus recta DD, eadem plane est, in casu à te posito, atque AD? Omnino, inquies; quippe, cum inscripta OO per verticem transeat, eodem ipso verticis puncto confunduntur, tum punctum G, tum etiam puncta D, O, superius sumenda. Bene est. At, inquam, ergo recta pA, eadem est atque pD sursum sumenda. Quidni, inquies, esset? Ergo, inquam, (utut de pD deorsum sumenda securi simus,) erit saltem sursum $pA=pD=q=+3d\sqrt{3}+3d$: id enim inventa modo docet æquationis radix, satis, uti videbatur, statuminata. Omnino, inquies; & quidni? At, inquam, est $Ap=3AP=3d$, (hoc enim assumit tua demonstratio; atque est verissimum:) si itaque sit eadem $pA=+3d\sqrt{3}+3d$, quod jam obtendi videatur; erit $3d=3d\sqrt{3}+3d$, hoc est $1=\sqrt{3}+1$, quod est impossibile. Videntur itaque necdum omnia satis inter se cohærere, aut ex votis nostris succedere. Quippe aliud adhuc latet, quod forte ne suspiceris quidem, mysterium adhuc detegendum.

Dum hoc ago; supervenit secunda tua demonstratio, Quæ, rem ulterius prosecuta, non modo ostendit, Rectam $\alpha\pi$ quæ inscriptam AO bisecat, non esse diametro AP parallelam; sed, ipsi aliquando occursuram, ipsumque tandem concursus punctum C: adeoque & veram diametrum polliceri videatur; saltem si ulla omnino recta, ad punctum α pertingens, istius curvæ diameter esse possit.



In Paraboloeide Cubicali A α,

Quoniam est AP.PF::1.3.

Ergo & PR.Pα::1.3.

Et posito PR.DO::1.*a*.

Erit Pα.DO::3.*a*::1.$\frac{1}{3}a$.

Quia vero Pα.DO::$\sqrt{c}$AP.$\sqrt{c}$AD::$\sqrt{c}$PR.$\sqrt{c}$DO.

Erit Pα.DO::$\sqrt{c}$1.$\sqrt{c}a$::1.$\sqrt{c}a$.

Et propterea $\frac{1}{3}a=\sqrt{c}a$. *&* $a=3\sqrt{c}a=\sqrt{c}27a$

adeoque $a^3=27a$. $a^2=27$. *&* $a=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

Ideoque Pα.DO::3.$3\sqrt{3}$::1.$\sqrt{3}$.

Et AP.AD::PR.DO::1.$3\sqrt{3}$.

Porro; Quia AP.AD::1.$3\sqrt{3}$.

Ergo AP.Ap::1.$\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Et AP.Pp::1.$\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$.

Et quia Pα.DO::1.$\sqrt{3}$.

Ergo Pα.$p\pi$::1.$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Tum quia Sα.$p\pi$::Sπ.pC.

hoc est Pα$-p\pi$.$p\pi$::Pp.pC.

ergo $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}::\frac{3}{2}\sqrt{3}-1.\frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}::Pp$.$p$C.

Ideoque AP.pC::1.$\frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$.

Et AP.PC::1.$\frac{3}{2}\sqrt{3}-1+\frac{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$.

::1.$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}-1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$.

::1$-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$.

Et propterea AP.AC::1$-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{3}$::1.$4\sqrt{3}+6$.

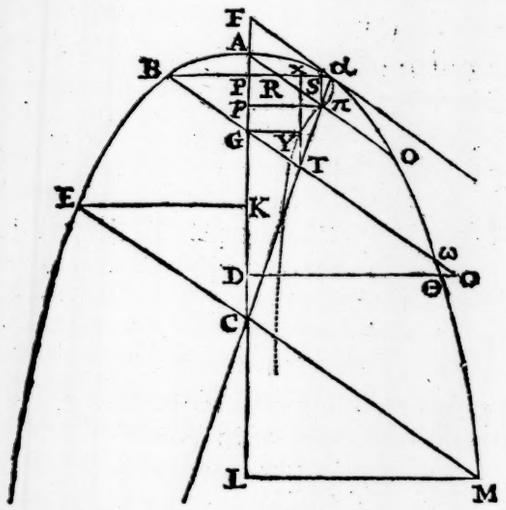
Et ſimili demonſtratione, in Paraboloeidibus reliquis, adhibita; reperietur.

In Parabol.	*Quadratic.*	*Cubic.*	*Biquadrat.*	*Surdeſol.*	
Pα.DO::	1 . 2	1 . $\sqrt{3}$	1 . $\sqrt{c}4$	1 . $\sqrt{qqs}$	&c.
AP.AD::	1 . 2×2	1 . $3\sqrt{3}$	1 . $4\sqrt{c}4$	1 . $5\sqrt{qqs}$	
AP.AC::	$1-\frac{1}{2}\times 2.\frac{1}{2}\times 2$	$1-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{2}{2}\sqrt{3}$	$1-\frac{1}{2}\sqrt{c}4.\frac{3}{2}\sqrt{c}4$	$1-\frac{1}{2}\sqrt{qqs}.\frac{4}{2}\sqrt{qqs}$	

Atque hactenus acutiſſime & ſubtiliſſime procedit Dominationis Veſtræ demonſtratio. Qua quidem hæc duo evincis; Tum rectam $\alpha\pi$, quæ inſcriptam AO biſecat, diametro occurrere in puncto C; (quod quidem aliud atque aliud eſt, prout punctum P propius aut remotius à vertice diſtat; quippe ſemper AP. AC:: $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{3}$.) Tum, ſi omnino ulla ſit recta quæ ad verticem α diameter eſſe poſſit, rectam αC eam eſſe, ut quæ inſcriptam AO biſecat.

At interim, cum ad Diametri rationem ſpectet, non modo ut unam aliquam ex inſcriptis biſecet, ſed & omnes eidem parallelas: quærendum inſuper reſtat, an & hoc faciat eadem AC recta. Fieri enim omnino poteſt, non obſtante jam allata demonſtratione, ut nulla omnino recta id faciat, ſed linea potius aliquomodo incurvata.

Huic itaque ut ſatisfacias ſcrupulo, adeoque totum abſolvas negotium; adjuncta tertia demonſtratione, oſtendis; non modo non rectam illam αC, ſed nec ullam quidem rectam, imo nec (uti videtur) regularem aliquam curvam, diametri hujuſmodi vices ſupplere poſſe. Nempe hoc modo.



In Paraboloeide Cubicali (*erecta*) Aα,
Eſt AP.PR:: 1.*b*.
Adeoq; PR.AR:: *b*.$\sqrt{}$:b^2+1.
Et, quia PR.Pα:: 1.3:: *b*.3*b*.
Erit AP.Pα:: 1.3*b*.
Et, quia PR.AR::BP(=Pα).BG:: *b*.$\sqrt{}$:b^2+1:: 3*b*.3$\sqrt{}$:b^2+1.
Erit AP.BG:: 1.3$\sqrt{}$:b^2+1.
Et, quia PR.Pα:: 1.3.
Erit Pα.Rα:: 3.2.
Et Bα.Rα:: 6.2:: 3.1.
Ergo, quia Bα.Rα:: Tα.$\pi\alpha$:: Xα.Sα=P$\alpha-p\pi$.
Et Pα.$p\pi$:: 1.$\frac{1}{2}\sqrt{3}$. (*ut in demonſtr. præced.*)

Adeoque

Adeoque P α . S α :: 1 . 1 − ½√3.
Erit B α = 2P α . X α = 3S α :: 2 . 3 − ¾√3.
Et B α . BX :: 2 . ¾√3 − 1.
Ergo P α . PX :: 1 . ¾√3 − 2 :: 3*b* . ¾*b*√3 − 6*b*.
Ideoque PA . PX :: 1 . ¾*b*√3 − 6*b*.
Tum, quia PR . AR :: GY = PX . GT :: *b* . √ : b^2 + 1.
:: ¾*b*√3 − 6*b* . ¾√3 − 6 : *in* √ : b^2 + 1.
Ideo AP . GT :: 1 . ¾√3 − 6 : *in* √ : b^2 + 1.
Ergo AP . BT (= BG + GT) :: 1 . 3√ : b^2 + 1 : *pl.* ¾√3 − 6 : *in* √ : b^2 + 1.
:: 1 . ¾√3 − 3 : *in* √ : b^2 + 1.
Adeoque AP . Go (= BT + GT) :: 1 . 9√3 − 9 : *in* √ : b^2 + 1.
Tum, quia PR . PA :: BX (= Pα + PX) . XT ::
:: *b* . 1 :: ¾*b*√3 − 3*b* . ¾√3 − 3.
Erit AP . XT :: 1 . ¾√3 − 3.
Et AP . PD (= 2XT) :: 1 . 9√3 − 6.
Et AP . AD :: 1 . 9√3 − 5.
Et quia AR . PR :: Go . Do :: √ : b^2 + 1 . *b* ::
:: 9√3 − 9 : *in* √ : b^2 + 1 . 9*b*√3 − 9*b*.
Ergo AP . Do :: 1 . 9*b*√3 − 9*b*.
Sed eſt Pα . DⓄ :: √*c* AP . √*c* AD :: √*c* 1 . √*c* : 9√3 − 5.
:: √*c* 27 b^3 (= 3*b*) . √*c* : 243 b^3√3 − 135 b^3.
Ergo AP . DⓄ :: 1 . √*c* : 243 b^3√3 − 135 b^3.
At vero, √*c* : 243 b^3√3 − 135 b^3 : *eſt minus quam*
9*b*√3 − 9*b* = √*c* : 4374 b^3√3 − 7290 b^3.
Nam 243√3 − 135 < 4374√3 − 7290.
hoc eſt 243√3 < 4374√3 − 7155.
hoc eſt 243√3 + 7155 < 4374√3.
hoc eſt 7155 < 4131√3.
hoc eſt √51194025 < √51195483.
Ergo & DⓄ *minus quam* Do.

Adeoque punctum medium inſcriptæ Bω, non eſt ipſum T punctum, ſed aliud aliquod inter B & T.

Sed neque medium inſcriptæ EM, eſt in puncto C, (ſed inter C & M;) cum enim KE minus ſit quam LM, erit & EC minus quam CM.

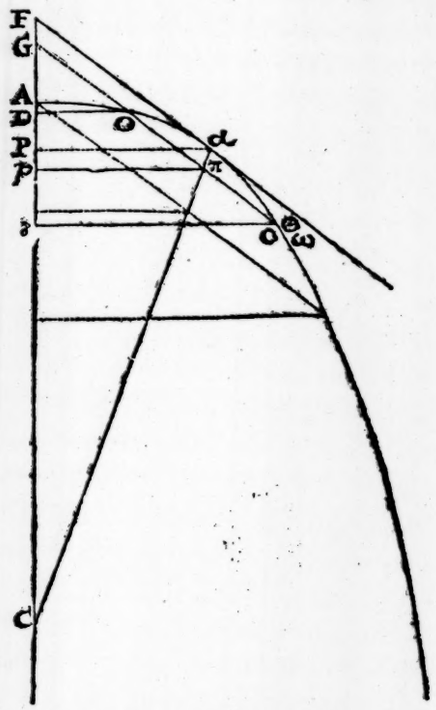
Non itaque vel recta αC, vel quidem alia ulla recta (quippe nulla alia recta tranſit per puncta α, π.) diameter eſſe poteſt ad verticem α.

Sed neque (ut videtur) regularis curva; ſed quæ rectæ απTC occurrat tum in α, tum iterum in π, & poſtea inter T & C, (incidit enim ſupra T, verſus B; at infra punctum C, verſus M;) adeoque rectam αC ſæpius ſecet neceſſe eſt. Quæ cum admodum irregularis videatur, utpote circa rectam αC tortuoſe incedens, non videtur operæ pretium in illius naturam ſtudioſius inquirere.

Iſtius autem curvæ (qualiſcunque demum fuerit) ſitus eſt hujuſmodi; Nempe, Rectæ αC occurrens in α, hinc ſubtus tendit ad uſque π (punctum medium inſcriptæ per verticem); tranſiens autem rectam in π, deinceps ſupra incedit uſque dum præteriverit punctum T; tum demum non procul ab illo puncto T rectam jam tertio tranſiens, deinceps deorſum tendit; neque poſtea vel rectam illam αC attingit uſquam, vel etiam diametrum AP. Quo enim argumento concludit tua demonſtratio, ad punctum C non attingere curvam illam, eodem concludi poterit, neque ad ullum aliud diametri punctum pertingere, nedum ad eam rectæ αC partem quæ eſt ultra C.

Ne autem id gratis dictum videatur, quod, ab α ad π (punctum medium rectæ per verticem inſcriptæ) curva ſubtus tendat; facit demonſtratio tua quarta, quæ

hoc evincit: Ubi ſupponitur recta $\alpha\pi$ non jam παραλλήλως incedere, ſed ad diametrum convergere, eique tandem occurrere, ut in figuris duabus præcedentibus, in puncto C. Punctum autem D inferius (quod tantundem deorſum à p diſtare ſupponitur quantum inde diſtat D alterum ſurſum) appello, diſtinctionis ergo, δ. Eique ordinatim applicata $\delta\odot$, occurrere ſupponitur curvæ in $\odot$, rectæque OO in O, quod intra curvam cadere evincit hæc demonſtratio.



Sumpto $AD=\frac{1}{8}AP$. (*Adeoque* $PD=\frac{3}{8}AP$.)

Erit $P\alpha.DO::\sqrt{c}\,AP.\sqrt{c}\,AD::\sqrt{c}\,1.\sqrt{c}\,\frac{1}{8}::1.\frac{1}{2}$.

Cumque ſit $P\alpha.DO::PF.DG::1.\frac{1}{2}::3.\frac{3}{2}$.

ſitque $AP.PF::1.3$.

Erit $AP.DG::1.\frac{3}{2}$.

Et $AP.FG(=PF-PD-DG)::1.(3-\frac{3}{8}-\frac{3}{2}=)\frac{9}{8}$.

Tum quia $AP.PC::1-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{3}{2}\sqrt{3}-1::1.4\sqrt{3}+5$. (*ut ſup. demonſt.*)

Erit $FP.PC::3.4\sqrt{3}+5$.

Et $AP.FC(=FP+PC)::1.4\sqrt{3}+8$.

Et quia $FC.FG::\alpha C.\alpha\pi::PC.Pp::4\sqrt{3}+8.\frac{9}{8}::$

$$::4\sqrt{3}+5.\left(\frac{\frac{9}{8}in:4\sqrt{3}+5}{4\sqrt{3}+8}.=\right)\frac{15\sqrt{3}-10}{32}.$$

Erit $AP.Pp::1.\frac{15\sqrt{3}-10}{32}$.

Ergo $AP.Dp(=DP+Pp)::1.(\frac{1}{8}+\frac{15\sqrt{3}-10}{32}=)\frac{15\sqrt{3}+18}{32}$.

Et $AP.D\delta=2pD::1.\frac{15\sqrt{3}+18}{16}$.

Et $AP.G\delta(=GD+D\delta)::1.(\frac{3}{8}+\frac{15\sqrt{3}+18}{16}=)\frac{15\sqrt{3}+42}{16}$.

Et

Et quia $GD.G\delta :: DO.\delta O :: \frac{3}{2}.\frac{15\sqrt{3}+42}{16}$.

Ergo $P\alpha.\delta O :: 3.\frac{15\sqrt{3}+42}{16} :: 1.\frac{5\sqrt{3}+14}{16}$.

Item $P\alpha.\delta\odot :: \sqrt{c}AP.\sqrt{c}A\delta (=\sqrt{c}:AD+D\delta :)$

$:: \sqrt{c}1 = 1.\sqrt{c}(\frac{1}{8}+\frac{15\sqrt{3}+18}{16} =) \frac{15\sqrt{3}+20}{16}$.

Sed est $\sqrt{c}\frac{15\sqrt{3}+20}{16} > \frac{5\sqrt{3}+14}{16} = \sqrt{c}\frac{3315\sqrt{3}+5894}{4096}$

Hoc est, $\frac{3840\sqrt{3}+5120}{4096} > \frac{3315\sqrt{3}+5894}{4096}$.

Sive $3840\sqrt{3}+5120 > 3315\sqrt{3}+5894$.

Hoc est, $525\sqrt{3} > 774$.

Vel $\sqrt{826875} > \sqrt{599076}$.

Ergo $\delta\odot > \delta O$.

Adeoque & $\pi\omega > \pi O$.

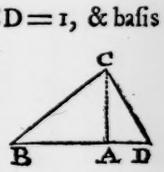
Et propterea punctum biſectionis inſcriptæ eſt infra punctum π. *Quod erat oſtendendum.* Et ſimiliter oſtenditur de alia quavis inſcripta, quæ ſuperior ſit ea quæ per verticem tranſit.

Cumque hæc omnia ſint legitime demonſtrata; Quid interim, inquies, de Æquatione noſtra dicendum erit, quæ demonſtrationibus hiſce tuis ſubverti plane videatur. Quamvis enim utrobique conveniat propoſitionem examinandam falſam eſſe: At tamen de ſitu puncti D ſuperioris, pugnare mutuo videantur Quippe per Æquationis noſtræ radicem ſupra inventam, eſſet pD ſuperius $= 3d\sqrt{3} + 3d$; at in demonſtratione tua prima, habetur pA (hoc eſt pD ſurſum) $= 3d$. Item cum ſit pD ſuperius $= 3d\sqrt{3} + 3d$, & pD inferius $= 3d\sqrt{3} - 3d$, eſſet utriuſque aggregatum, hoc eſt, recta $DD = 6d\sqrt{3}$: at in demonſtratione tua ſecunda, eſt AD (hoc eſt, in præſenti caſu, DD) ad AP, ut 1 ad $3\sqrt{3}$; adeoque cum ſit $AP = d$, erit $AD = DD = 3d\sqrt{3}$, non $6d\sqrt{3}$.

Quid itaque dicemus; Num utraque vera eſſe? (tum Analyſin noſtram, tum demonſtrationes tuas?) At quî illud fieri poſſit? ſiquidem ἀλήθη συμβαλλόμενα. Num itaque vel has vel illam falſi accuſabimus? atque alicubi erratum eſſe dicemus? Sed neque videtur hoc dicendum. Eccubi enim? Num igitur dicemus tandem (quod tamen ut dicam non niſi extrema neceſſitate adigar) Analyſeos leges non ſatis ratas habendas eſſe? adeoque Analyticen ipſam (quod faciunt nonnulli, ipſius parum gnari,) accuſabimus, quaſi quid falſum doceat? At ab hoc ego D. V. ſatis abhorrere non dubito; quippe quo Analyſin accuratius nemo, nemo ſubtilius, exercet. Fateor equidem fieri nonnunquam poſſe (quod tamen nemo quem ſcio Analyſta hactenus prodidit,) ut in caſu impoſſibili, non eam ſtatim detegat analyſis impoſſibilitatem, ſed rem quaſi poſſibilis eſſet ſolvat; & vice verſa, videatur aliquando analyſis in ἄδυνατον exire, quum interim res expoſita non ſit plane impoſſibilis: At nihil ego tale hoc in caſu dicendum autumo.

Ne autem ego temere illud falſus videar, & cui Tu forſan haud ſtatim aſſentiendum eſſe putaveris; non abs re fore autumo, utut πάρεργον videatur, eorum utrumque exemplo indicare.

Si ſupponatur Triangulum cujus duo crura ſint $BC = 2$, $CD = 1$, & baſis $BD = 4$, petatur autem, ſi à vertice C demittatur ad baſin perpendicularis CA, quodnam illa baſis punctum deſignet; ſive, quanta futura ſit recta BA. Analyſis ſic procedit. Eſt $CBq - BAq = CAq = (CDq - ADq = CDq - Q : BD - BA :) CDq - BDq + 2BD \times BA - BAq$. Adeoque $CBq = CDq - BDq + 2BD \times BA$. Hoc eſt $CBq - CDq + BDq = 2BD \times BA$. Ideoque $\frac{CBq - CDq + BDq}{2BD} = BA$. Hoc eſt $\frac{4 - 1 + 16}{8} = \frac{19}{8} = 2\frac{3}{8} = BA$. quod erat inquirendum. Quin caſus autem ille ſit impoſſibilis, ecquis



quis dubitet? quippe ponitur Basis utrisque simul cruribus major. Tentata tamen Analysis non secus procedit quam si casus esset maxime possibilis.

At alteram concessionis partem quod attinet; Nempe quod Analysis aliquando ad quid impossibile nos deducere videatur, cum interim casus expositus minime sit impossibilis: Quo hoc rectius ostendam, opus erit de Æquationibus Cubicis resolvendis pauca præmittere; quæ tum huic negotio, tum etiam inquisitioni nostræ primariæ subserviant.

Æquationes omnes cubicas vel tales esse vel ad tales saltem reduci posse, quæ non nisi sub Radice (ut loquuntur) sint affectæ, notum est. (Quippe si sub quadrato sit affecta æquatio, gradum supremo proximum tolli posse docuit Cartesius, atque ante illum Vieta, Harriotus, aliique.) Possunt autem illæ omnes vel ad hanc formam $Ac - BqA = \pm Dc$, vel ad hanc reduci $Ac + BqA = \pm Dc$.

Hujusmodi vero ego Æquationes Cubicas, adeoque solutu difficiliores, memini me olim conatum (exercitii gratia, postquam Analytices rudimenta imbiberam) ad quadraticas reducere. Idque hac methodo.

Positis, $Z = A + E$. $Æ = AE$. $\mathfrak{Z} = Ac + Ec$.
Erit, $Zc = Ac + Ec + 3AAE + 3AEE = \mathfrak{Z} + 3ÆZ$.
Adeoque, $Zc - 3ÆZ = \mathfrak{Z}$.

Item positis $X = A - E$. $\mathfrak{X} = Ac - Ec$.
Erit $Xc = Ac - Ec - 3AAE + 3AEE = \mathfrak{X} - 3ÆX$.
Adeoque $Xc + 3ÆX = \mathfrak{X}$.

In Æquationibus itaque cubicis ad hanc formam constitutis, $Zc - 3ÆZ = \mathfrak{Z}$, animadvertebam, *Æquationis radicem* Z, *esse summam duarum quantitatum* A, E, *quarum rectangulum* Æ (*tertia pars coefficientis intermedii termini*;) *&, cuborum aggregatum* $\mathfrak{Z}$, *terminus absolutus.*

Item, in Æquationibus Cubicis ad hanc formam constitutis, $Xc + 3ÆX = \mathfrak{X}$; *est æquationis radix* X, *duarum quantitatum differentia, quarum rectangulum est* Æ (*tertia pars coefficientis*;) *&, cuborum differentia,* $\mathfrak{X}$, *terminus absolutus.*

Adeoque redacta est illarum Æquationum difficultas, ad hoc problema; *Datis duarum quantitatum, tum Rectangulo, tum Cuborum summa vel differentia, ipsarum quantitatum vel summam vel differentiam aut ipsas etiam quantitates investigare.* Quod sic efficitur,

$$\text{Est } \frac{Æ}{A} = E. \quad \frac{Æc}{Ac} = Ec.$$

$$\text{Ergo } Ac + \frac{Æc}{Ac} = Ac + Ec = \mathfrak{Z}.$$

$$\text{Et } Acc + Æc = \mathfrak{Z}Ac.$$

$$\text{Sive } \mathfrak{Z}Ac - Acc = Æc.$$

$$\text{Similiter } \frac{Æ}{E} = A. \quad \frac{Æc}{Ec} = Ac.$$

$$\text{Adeoque } \frac{Æc}{Ec} + Ec = \mathfrak{Z} = Ac + Ec.$$

$$\text{Et } \mathfrak{Z}Ec - Ecc = Æc.$$

Resolutis itaque æquationibus (quadraticis quidem, sed ex radice solida ortis,)

$$\mathfrak{Z}Ac - Acc = Æc = \mathfrak{Z}Ec - Ecc.$$

$$\text{Erit } \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z} \pm \sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}q - Æc.} = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{array}{l} \sqrt{c.}\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z} + \sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}q - Æc.} \\ + \sqrt{c.}\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z} - \sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}q - Æc.} \end{array}\right\} = A + E = Z.$$

Ad

Ad quam regulam exigendæ sunt Æquationes Cubicæ hujus formæ $Zc-3ÆZ=+Z$: (vel etiam hujus $Zc-3ÆZ=-Z$, quæ ab illa hoc solo differt, quod quæ illic affirmative exponendæ sint quantitates $+A+E, =Z$; hic interpretandæ sint negative, $-A-E=-Z$.) Quam, *Regulam primam* jam appellabimus.

Eodem modo, cum sit $Ac-\frac{Æc}{Ac}=Ac-Ec=\mathfrak{X}$.

Erit $Acc-Æc=\mathfrak{X}Ac$.

sive $Acc-\mathfrak{X}Ac=Æc$.

Item $\frac{Æc}{Ec}-Ec=Ac-Ec=\mathfrak{X}$.

& $Æc-Ecc=\mathfrak{X}Ec$.

hoc est $Ecc+\mathfrak{X}Ec=Æc$.

Resolutis itaque æquationibus

$$Acc-\mathfrak{X}Ac=Æc=Ecc+\mathfrak{X}Ec.$$

Erit $\sqrt{:\frac{1}{4}\mathfrak{X}q+Æc:}\pm\frac{1}{2}\mathfrak{X}:=\begin{cases}Ac.\\Ec.\end{cases}$

Adeoque $\sqrt{c}.\sqrt{:\frac{1}{4}\mathfrak{X}q+Æc:}+\frac{1}{2}\mathfrak{X}.$
$-\sqrt{c}.\sqrt{:\frac{1}{4}\mathfrak{X}q+Æc:}-\frac{1}{2}\mathfrak{X}.\Big\}=A-E=X.$

Atque ad hanc regulam exigendæ sunt hujus formæ $Xc+3ÆX=+\mathfrak{X}$ æquationes omnes. Vel etiam hujus $Xc+3ÆX=-\mathfrak{X}$: cum hoc solo discrimine, quod cum illic quantitas major A, sit affirmativa; minor E, negativa; & $X=A-E$ quantitas affirmativa; hic, major A erit negativa, minor E affirmativa, adeoque & $X=-A+E$ quantitas negativa. Atque hanc jam appellabimus *Regulam Secundam.*

Exemplum posterioris Regulæ hoc esto $Xc+12X=63$. Hoc est, inquam, $Xc+3ÆX=\mathfrak{X}$. Ergo $\frac{12}{3}=4=Æ$. $\frac{4}{A}=\frac{Æ}{A}=E$. Et $Ac-\frac{64}{Ac}=Ac-Ec=\mathfrak{X}=63$. Adeoque $Acc-64=63Ac$. vel $Acc-63Ac=64$. (Et similiter $\frac{64}{Ec}=Ac$. & $\frac{64}{Ec}-Ec=Ac-Ec=\mathfrak{X}=63$. Adeoque $64-Ecc=63Ec$. vel $64=Ecc+63Ec$.) Ergo $\sqrt{:\frac{3969}{4}+64:}\pm\frac{63}{2}=\sqrt{\frac{4225}{4}}\pm\frac{63}{2}=\frac{65}{2}\pm\frac{63}{2}=\begin{cases}64=Ac.\\1=Ec.\end{cases}$

Et propterea $\sqrt{c}64-\sqrt{c}1=4-1=3=X=A-E$. Vel etiam, (si principio positum esset -63) mutatis ubique signis numeri 63, proveniret $-4+1=-3=X=-A+E$.

Vel sic (immediate ad regulam exigendo) Æquatio est $Xc+12X=\pm63$. Ergo $3)12(4=Æ$. adeoque $64=Æc$. Et $\frac{63}{2}=\frac{1}{2}\mathfrak{X}$. adeoque $\frac{3969}{4}=\frac{1}{4}\mathfrak{X}q$. & propterea,

$$\sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{X}q+Æc:}\pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{X}=\sqrt{:\tfrac{3969}{4}+64:}\pm\tfrac{63}{2}=\begin{cases}64=Ac.\\1=Ec.\end{cases}$$

Adeoque $\pm\sqrt{c}64\mp\sqrt{c}1=\pm4\mp1=\pm3=X$.

Exemplum prioris hoc esto, $Zc-12Z=65$. Hoc est, inquam, $Zc-3ÆZ=Z$. Ergo $3)12(4=Æ$. & $\frac{4}{A}=E$. & $Ac+\frac{64}{Ac}=Ac+Ec=(Z=)65$. Et $Acc+64=65Ac$. vel $64=65Ac-Acc$. (& similiter $\frac{64}{Ec}+Ec=Ac+Ec=Z=65$. adeoque $64=65Ec-Ecc$.) Ergo $\frac{65}{2}\pm\sqrt{:\frac{4225}{4}-64:}=\frac{65}{2}\pm\sqrt{\frac{3969}{4}}=\frac{65}{2}\pm\frac{63}{2}=\begin{cases}64=Ac.\\1=Ec.\end{cases}$

Et propterea $\sqrt{c}\,64+\sqrt{c}\,1=4+1=5=Z$. Vel etiam, (si principio positum esset -65,) mutatis ubique signis numeri 65, proveniisset $-4-1=-5=-Z$.

Vel sic (immediate ad regulam exigendo;) Æquatio proposita est $Zc-12Z=\pm 65$. Ergo $3)12(4=Æ$. adeoque $64=Æc$. Et $\frac{65}{2}=\frac{1}{2}Z$. adeoque $\frac{4225}{4}=\frac{1}{4}Zq$. Et propterea

$$\tfrac{1}{2}Z\pm\sqrt{:\tfrac{1}{4}Zq-Æc:}=\tfrac{65}{2}\pm\sqrt{:\tfrac{4225}{4}-64:}=\begin{cases}64=Ac.\\1=Ec.\end{cases}$$

Adeoque $\pm\sqrt{c}\,64\pm\sqrt{c}\,1=\pm4\pm1=\pm5=Z$.

Postquam has ego Regulas inveneram; nec illis simile quidquam apud eos quos tum videram Analystas notaveram (Cardanum siquidem non tum videram,) apud quos de Æquationibus Cubicis resolvendis altum erat silentium: In Cartesii Geometriam, (quæ sub id temporis aut paulo serius, Gallice primum prodiit, necdum enim tunc temporis exstabat Latine, sed post annos aliquot,) incidebam. Apud quem duas itidem inveni regulas, quas *Cardani Regulas* appellat, easdem plane cum nostris, utut paulo aliter designatas, nulla tamen demonstratione munitas, nec vel leviſſimo dato indicio, quo de illarum fundamento constare possit. Cardanum tandem nactus, (qui illas *Scipioni* cuidam *Ferreo* acceptas refert,) easdem apud eum inveni alia quidem methodo demonstratas, (longa satis & perplexa, quæque rei originem neutiquam explicat,) quas ego ex Analyseos principiis, ut dictum est collegeram. Quæ quidem investigatio, si nihil aliud novi in se contineat, saltem eo nomine Dni Vestræ non ingrata forsan est futura, quod earum originem patefaciat.

Jam itaque posita æquatione resolvenda, $r^3+27r=172$: Quoniam r^3, & $27r$, eodem signo notantur, pertinebit ea ad regulam secundam. Adeoque cum sit $3)27(9$, & $9\times9\times9=729$, item $2)172(=86$, & $86\times86=7396$;

$$\text{Erit } \sqrt{:7396+729:}\pm86=\sqrt{8125}\pm86=\begin{cases}Ac.\\Ec.\end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \sqrt{c:}\sqrt{8125}\pm86:=\sqrt{13}\pm2=\begin{cases}A.\\E.\end{cases}$$

Adeoque $A-E=r=4$.

$$r^3+27r=172.$$

$$\begin{array}{rr} 2)172(86 & 3)27(9\\ \times86 & \times9\\ \hline 516 & 81\\ 688 & \times9\\ \hline 7396 & 729\\ +729 & \end{array}$$

$$\sqrt{c:}25\sqrt{13}(=\sqrt{8125})\pm86:=\begin{cases}\sqrt{13}+2=A.\\\sqrt{13}-2=E.\end{cases}$$

Ergo Æquationis $r^3+27r=+172$, rad. $r=+4=A-E$.

Et Æquationis $r^3+27r=-172$, rad. $r=-4=-A+E$.

Et eodem modo de Æquationibus hujusce formæ omnibus statuendum: Nulla enim omnino est istius formæ æquatio, quæ non unam aliquam radicem habet realem: Sed & unicam; nam quas expectes duæ reliquæ, sunt tantum imaginariæ, & impossibiles.

Pari methodo; Si exponatur æquatio resolvenda $r^3-27r=154$. quæ, propter duarum potestatum contraria signa, ad regulam primam exigenda est. Adeoque cum sit $2)154(77$, & $77\times77=5929$; item $3)27(9$, & $9\times9\times9=729$: Erit

$$77\pm\sqrt{:5929-729:}=77\pm\sqrt{5200}=\begin{cases}Ac.\\Ec.\end{cases}$$

Adeoque

Adeoque $\sqrt{c:77\pm\sqrt{5200}:=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}=}\begin{cases}A.\\E.\end{cases}$

Adeoque $A+E=7=r$.

$r^3-27r=154$

2) 154 (77
×77
539
539
5929
−729

3) 27 (9
×9
81
×9
729

$\sqrt{c:77\pm(\sqrt{5200}=)\ 20\sqrt{13}:=}\begin{cases}\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}=A.\\\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}=E.\end{cases}$

Ergo æquationis $r^3-27r=154$, *radix* $r=7=A+E$.
Et æquationis $r^3-27r=-154$, *radix* $r=-7=-A-E$.

Sic æquationis $r^3-27r=\pm 296$, invenietur radix ± 8; ſunt enim Ac, Ec, $=148\pm(\sqrt{21175}=)55\sqrt{7}$. adeoque A, E, $=4\pm\sqrt{7}$. & $A+E=8=r$. Atque ad hanc formam æquationes aliæ innumeræ reſolvendæ, radicem exhibebunt realem unam; & quidem unicam. Nam quas exſpectes duæ reliquæ erunt tantum imaginariæ; unicum ſaltem ſi excipias caſum, nempe quando quadratum ſemiſſis termini abſolutę cogniti, æquatur cubo trientis coefficientis termini medii; tunc enim tum $\pm A$ tum $\pm E$, (quæ erunt invicem æquales,) tum $\pm A\pm E$, erunt radices reales. Puta $r^3-27r=\pm 54$, cujus radices ſunt $\pm 6, \mp 3, \mp 3$.

Verum ſi exponatur æquatio reſolvenda $r^3-27r=\pm 44$, ejuſdem cum illis formæ; eaque ad eandem regulam primam exigatur: res ſtatim tranſibit ad impoſſibile. Cum enim, ex methodo iſtius regulæ, cubus trientis coefficientis, auferendus ſit ex quadrato ſemiſſis termini abſoluti, atque reſidui latus quadraticum tum addendum tum auferendum ſemiſſi termini abſoluti, ut habeantur Ac, Ec, hoc eſt $\frac{1}{2}Z\pm\sqrt{:\frac{1}{4}Zq-Æc}$. Id fieri omnino nequit; quia 729 (Æc cubus trientis coefficientis) ex 484 ($\frac{1}{4}Zq$ quadrato ſemiſſis termini abſoluti) non poteſt auferri (major ex minori,) vel ſaltem (ſi utcunque auferatur) reſiduum ($484-729=-245$) erit negativa quantitas, cujus itaque nulla poteſt eſſe radix quadratica, (quippe quadratum omne, ſive ex radice affirmativa, ſive negativa, ſemper eſt affirmativum,) adeoque cum $\sqrt{:\frac{1}{4}Zq-Æc:=\sqrt{:-245}}$. ſit quid impoſſibile, erunt etiam (propter ipſius radicis impoſſibilitatem) $\frac{1}{2}Z\pm\sqrt{:\frac{1}{4}Zq-Æc}$, (nempe $22\pm\sqrt{-245}$,) hoc eſt, Ac, Ec, impoſſibilia.

$r^3-27r=\pm 44$.

2) 44 (22
×22
44
44
+484
−729

3) 27 (9
×9
81
×9
729

$22\pm(\sqrt{-245}=)\ 7\sqrt{-5}$. Impoſſibile.

(Atque idem continget quotieſcunque cubus trientis coefficientis, major eſt quam quadratum termini abſoluti. Sicut in æquatione quadratica $-Aq+BA=Æ$, quoties contingit Æ majus eſſe quam $\frac{1}{4}Bq$, quod illic ſemper putatur indicium caſus impoſſibilis.)

Quid autem? Num itaque dicemus æquationem $r^3-27r=\pm 44$, plane impoſſibilem eſſe? nullamque omnino habere radicem? Nullo modo. Habet ſiquidem omnino tres radices, nempe, $\pm\sqrt{15}\pm 2, \mp\sqrt{15}\pm 2, \mp 4$; hoc eſt, æquationis $r^3-27r=+44$, radices ſunt, $+\sqrt{15}+2, -\sqrt{15}+2, -4$; & æquationis $r^3-27r=-44$, radices ſunt $-\sqrt{15}-2, +\sqrt{15}-2, +4$.

Eodem modo, æquationis $r^3 - 27r = \pm 10$, radices ſunt $\pm\frac{1}{2}\sqrt{33} \pm \frac{5}{2}$, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{33} \pm \frac{5}{2}$, ∓ 5.

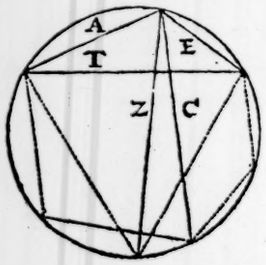
Item, æquationis $r^3 - 27r = \pm 26$, radices ſunt, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{105} \pm \frac{1}{2}$, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{105} \pm \frac{1}{2}$, ∓ 1.

Sic, æquationis $r^3 - 27r = \pm 46$, radices ſunt $\pm 2\sqrt{6} \pm 1$, $\mp 2\sqrt{6} \pm 1$, ∓ 2.

Item, æquationis $r^3 - 7r = \pm 6$, radices ſunt ∓ 1, ∓ 2, ± 3.

Atque in aliis pariter. Non itaque, ex eo quod Analyſis nos ducat aliquando ad impoſſibile, concludendum protinus erit, & caſum eſſe impoſſibilem: Sive, (quod tantundem valet,) quod oſtendit Analyſis juxta unam aliquam ſuppoſitionem impoſſibile eſſe, eſſe propterea impoſſibile ſimpliciter.

Porro ſub id ipſum tempus, quo Regulas illas duas inveniebam; De Angulorum ſectionibus (exercitii cauſa) nonnulla commentatus eram. Atque illic, inter alia, ad Anguli Triſectionem has obſervabam æquationes; $3RqA - Ac = RqC = 3RqE - Ec = -3RqZ + Zc$; quarum Radices recepto aliquo notationis modo explicare fruſtra conatus, non aptiorem videbam modum illud exprimendi; (ſed nec Carteſius, qui, ut poſtea reperi, eandem ſibi rem tractandam propoſuerat,) quam quod, *Poſito R circuli radio, recta C circulo inſcripta peripheriam totam in duo ſegmenta divideret, quorum unius trientem ſubtenderet A, alterius E, (ejuſdem æquationis duæ radices,) & radix tertia Z, ſubtenderet totius peripheriæ trientem utrovis arcuum A vel E auctum, (nam & hujus arcus triplum ſubtendit C:) Ea tamen lege, ut ubi A, E, ſunt quantitates affirmativæ, tertia Z ſit utrique ſimul æqualis, ſed negative interpretanda: ubi autem Z affirmativa, ibi A, E, negativæ.* (Quippe illud ubique obtinet, in æquationibus cujuſcunque gradus; ſi omnino deſit poteſtas ſupremæ proxima, radices omnes affirmativæ ſimul ſumptæ, negativis omnibus ſimul ſumptis, neglectis ſignis, æquales erunt, ſive radices illæ reales ſint ſive ſaltem imaginariæ; adeoque ſervatis ſignis, ſe mutuo deſtruunt: unde fit quod poteſtas illa ſupremæ proxima, cujus coefficiens ſemper eſt radicum ſimul omnium mutatis ſignis, aggregatum; hoc caſu, propter radices affirmativas & negativas ſe mutuo perimentes, prorſus excidat.) Puta Æquationis hujus $3RqL - Lc = RqC$, vel $Lc - 3RqL = -RqC$: exponitur radix, L, de tribus radicibus puta $+A$, $+E$, & $-Z = -A - E$. Hujus autem $+Lc - 3RqL = RqC$, vel $+3RqL - Lc = -RqC$, radix L, de tribus radicibus exponetur $-A$, $-E$, $+Z = +A + E$. Atque hanc Regulam *tertiam* jam appellabimus.



Quo pacto ad hanc regulam perveneram, non opus eſt ut jam oſtendam; quippe longius illud eſſet quam ut hic commode inſeratur, quodque alibi forſan aliquando ſumus demonſtraturi.

Interim; ſi ad hanc regulam exigatur hujuſmodi æquatio, $r^3 - 27r = \pm 44$ hoc eſt, inquam, $Lc - 3RqL = \pm RqC$. Erit triens coefficientis $\frac{27}{3} = 9 = Rq$, ergo $3 = R$. Item quia $44 = RqC$, erit $\frac{44}{9} = C$. Scribatur itaque circulus cujus radius $R = 3$, eique aptetur recta $C = \frac{44}{9}$, peripheriam dirimens in duo ſegmenta; quorum majoris trienti ſubtendat A, minoris trienti E, atque his ſimul æqualis ſumatur Z. Erunt, per expoſitam Regulam, Æquationis expoſitæ radices $\pm Z$, $\mp A$, $\mp E$.

$r^3 - 27r = \pm 44$. $\quad Lc - 3RqL = \pm RqC$.
$3)27(9 = Rq$. $\quad \sqrt{9} = 3 = R$.
$9)44(4\frac{8}{9} = C$, ſubtenſa arcus tripli.
$\mp A$, $\mp E$, $\pm Z$, (ſubtenſæ ſimpli) radices.
∓ 4, $\mp\sqrt{15} \pm 2$, $\pm\sqrt{15} \pm 2$.

Et eodem modo, Æquationes $r^3 - 27r = \pm 10$, $r^3 - 27r = \pm 26$, $r^3 - 27r = \pm 46$, $r^3 - 7r = \pm 6$, aliæque innumeræ, ſolvi poſſunt per triſectionem arcus.

Verum

Verum si ad eandem regulam exigatur æquatio, $r^3 - 27r = \pm 154$: res statim ad impossibile deveniet: Quippe $3)27(9 = Rq$, adeoque $\sqrt{9} = 3 = R$. Atque $9)154(17\frac{1}{9} = C$. At circulo cujus Radius est 3, non poterit inscribi subtensa $17\frac{1}{9}$, cum hæc sit duobus radiis, hoc est diametro, major.

Similiter si ad eandem regulam exigatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 296$; omnino idem obtinget. Quippe $9)296(32\frac{8}{9} = C$, major esset quam duplum $R=3$. Adeoque recta illa huic circulo non inscriptibilis.

$r^3 - 27r = \pm 154$.	$r^3 - 27r = \pm 296$.
$3)27(9 = Rq$.	$3)27(9 = Rq$.
$\sqrt{9} = 3 = R$.	$\sqrt{9} = 3 = R$.
$9)154(17\frac{1}{9} = C$.	$9)296(32\frac{8}{9} = C$.
Subtensæ impossibiles.	

Quid autem? num æquationes has (& ejusmodi mille alias) omnino impossibiles dicemus? Nullo modo. Habet etenim illa radicem $r = \pm 7$; hæc, radicem $r = \pm 8$; Ut modo ostensum est, easdem ad Regulam primam exigendo.

Et quidem æquationes omnes hujusce formæ, quæ ad regulam primam examinatæ radicem realem habent (vel affirmativam, vel saltem negativam,) illæ ad hanc regulam si exigantur, ad impossibile nos deducunt; (hoc est, illæ omnes in quibus quadratum semissis quantitatis absolutæ, majus est cubo trientis coefficientis termini medii:) contra vero, quæ videbantur illic impossibiles, (nempe ubi quadratum semissis quantitatis absolutæ, minus est cubo trientis coefficientis,) radices hic habebunt reales. Nec ulla interim æquatio utrobique exhibebit radices reales, nisi illæ solæ ubi quadratum semissis termini absoluti, æquatur cubo trientis coefficientis. Qualis est $r^3 - 27r = \pm 54$; item $r^3 - 12r = \pm 16$. (quippe illic $9 \times 9 \times 9 = 729 = 27 \times 27$; hic $4 \times 4 \times 4 = 64 = 8 \times 8$.) aliæque similes. Cujus quidem ratio est, quia coefficiens medii termini in prima regula supponitur $3Æ$ (triplum rectanguli duarum quantitatum A, E;) in secunda vero, (non $3Æ$, sed $3Rq$ hoc est) $Aq + Æ + Eq$, (nam, in circulo, $3Rq = Tq = Aq + Æ + Eq$, quod nos alibi demonstravimus, estque cognitu non inutile:) adeoque quoties contingit æquales invicem esse A, E, (quod tunc evenit quando dictum Quadratum dicto Cubo æquatur, nec alias unquam,) perinde erit sive dicatur coefficiens $3Æ$, sive $Aq + Æ + Eq$; adeoque perinde erit ad utram exigatur regulam æquatio illa; Secus autem, ubi non æquantur. Atque hæc quidem utut digna sint quæ fusius explicentur; non tamen id erit hujus loci; cum videam me jam satis ne dicam nimium) prolixum esse.

At quorsum, inquies, tendunt hæc omnia? Num ut Analyticen fallacem ostendam? (ut quæ nec casus impossibiles detegat, & possibiles interim tanquam impossibiles perhibeat.) Nullo modo: Sed, caute tractandam; ne nos ipsos decipiamus dum ea quasi inde tradita reputemus quæ non sunt; & pro determinatis habeamus quæ Analysis in ambiguo relinquit, & indeterminata.

At quid, inquies, de Æquatione nostra dicendum est? aut quomodo solvenda sunt ista ἀναπορῶν?

Dicam brevi. Nempe vexanda adhuc est æquatio illa, quæ nos vexavit hactenus; ut tandem quid certi prodat. Quippe simile omnino non raro patitur Æquatio Analytica, atque Proteus Homericus, (Odyss. δ.)

——γέρων ἅλιος νημερτὴς.
Ἀθάνατος Πρωτεὺς Αἰγύπτιος ὅς τε θαλάσσης
Πόντου βένθεα οἶδε.

Utut enim νημερτὴς sit, *veridica*, nec plane fidem fallat; suas tamen habet *insidias*,

——λοχᾶν δεῖσιο γέροντος,

Et *formidabiles astutias*,

——δολοφρόνα τοῖο γέροντος·

nec nisi fortius tandem pressa verum fatebitur. Comprimendus itaque est Proteus, & prensandus fortius, ne elabatur.

Τὸν μὲν ἔπειτ' οὐ πρῶτα καθευνηθέντα ἴδηαι,
Καὶ τότ' ἔπειτ' ὔμμιν μελέτω κάρτος τε, βίη τε,
Αὖθι δ' ἔχειν, μεμαῶτα καὶ ἐσσύμενόν περ ἀλύξαι,

Et varias licet formas induat verſipellis, variaſque ſubire tentet latebras & vel inſidias ſtruere; quo ſe ſubducat incautis, vel etiam imponat;

Πάντα δὲ γενόμενον, ἑρπετά τε, θῆρας ὅσ' ἔπι χθὼν
Ἕρπετά γίνονται, καὶ ὕδωρ, καὶ δαπτὸς πῦρ·

premendus tamen adhuc, & quidem fortiter

Τμεῖς δ' ἀσφαλέως ἐχέμεν, μᾶλλόν τε πιέζειν·

nec prius hic dimittendus eſt

——γέρων ἁλοφώϊα εἰδὼς,

quam, latebris exutus omnibus, palam eloquatur. totumque pandat negotium;

Τόν γ' εἴ πως δολίοισι λοχησάμενος λελαβέσθαι,
Ὡς κέν τοι εἴπησιν ὁδὸν καὶ μέτρα κελεύθου.

Nec quidem Analyticen Homerus rectius depingere potuiſſet, ſi vel maxime fuiſſet Analyſta.

Eſto itaque quod nobis hactenus moleſtus fuerit hic Proteus noſter;

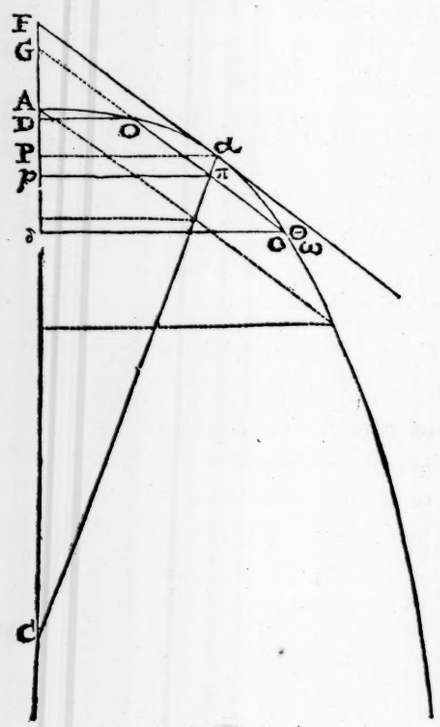
——ὣς δ' ὁ γέρων δολίης ἐπελήθετο τέχνης·
Ἀλλ' ἦτοι πρῶτόν γε λέων γένετ' ἠυγένειος.
Αὐτὰρ ἔπειτα δράκων, καὶ πάρδαλις, ἠδὲ μέγας σῦς,
Γίνετο δ' ὑγρὸν ὕδωρ, καὶ δένδρεον ὑψιπέτηλον.

Ne tamen animum deſpondeamus. Quippe dum

Ἡμεῖς ἀσφαλέως ἐχόμην τετληότι θυμῷ,

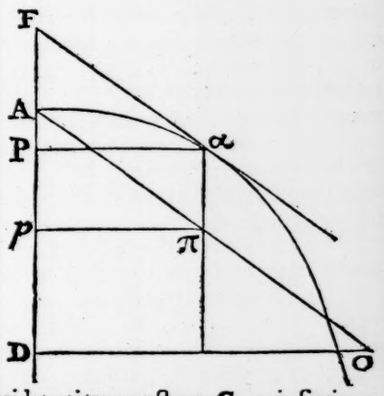
non dubitandum eſt, quin, vi tandem adactus, id eloquatur, quod forte quæſiiſſe non pigebit.

Reſumamus itaque æquationem noſtram (ut, quid factum ſit, diſtincte perpendamus;) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$, hoc eſt $q^3 \pm 9dq^2 = \pm 27d^2g$, (variatis nempe ſignis +, —, prout pD vel deorſum vel ſurſum, à puncto p, ſumenda ſupponatur.) Eam autem in hanc protinus æquationem mutavimus $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$: ſubſtituta nova radice $r = q \pm 3d$ (quod quidem pD, quatenus ſupponimus deorſum ſumendam, auget; ſurſum vero, minuit, quantitate $3d$:) Quod quidem tantundem eſt, atque, pro puncto p, aliud diametri punctum ſumere quod ſit tribus diametris altius quam eſt p punctum; (quippe hoc tanto tum auget pD deorſum ſumendam tum pD ſurſum ſumendam minuit.) Punctum autem ſic ſumendum, id ipſum eſt quod hactenus G diximus, (communis interſectio Diametri AP, & inſcriptæ OO, ſaltem productarum;) quippe $pG = PF = 3d$; adeoque $GD = pD \pm pG = q \pm 3d = r$. (Adeoque jam licebit, ſi libeat, quantum ad puncta D deſignanda, punctum p negligere; adeoque linearum $\alpha\pi$, πp, conſtructionem, quæ ad deſignandum p punctum inſtituta eſt; cum non minus poſſit punctum



punctum D per ipsius à puncto G distantiam designari, quam per distantiam à puncto p.) Nec interim hinc aliquid mali metuendum quod nonnunquam $3d$ major sit quam q. Nam ubi hoc accidit, $GD=q-3d=r$ (hoc est, quatenus supponitur sursum sumenda) est quantitas negativa, adeoque punctum D (quod supponitur supra) cadit infra G. Quod quidem, quoad D infimum, semper contingit, &, quoad aliud D tum quum G est supra A. Adeoque priori casu æquatio quæ respicit D sursum, unam habet radicem negativam, posteriori, duas; (nempe quoad radicem r; nam harum una, adjectione $3d$, ut habeatur $q=r+3d$, evadet affirmativa; puta si $r=-d$, erit $r+3d=-d+3d=+2d=q$. adeoque, licet r sit hoc casu quantitas negativa, erit q positiva; hoc est, punctum D erit infra G, sed supra p) contra vero in æquatione quæ respicit D deorsum, ut post patebit. Sed hoc obiter.

Porro, cum sit $r^3-27d^2r=\pm 27d^2g\mp 54d^3=27d^2in:\pm g\mp 2d:=\pm 27d^2h$ (posito scilicet $h=g-2d$:) quoties contingit esse $g=2d$ (quod tunc fit cum punctum G puncto A coincidit, qui tuus casus est; quippe tum $FG=FA=2d$;) erit $h=g-2d=0$. Adeoque, $r^3-27d^2r=\pm 27d^2g\mp 54d^3=\pm 27d^2\times 0=\pm 0$. Et propterea $r^3=27d^2r$, & $r^2=27d^2$, adeoque $r=\pm\sqrt{27d^2}=\pm 3d\sqrt{3}$. (potest enim quadrati simplicis radix exponi tum affirmative tum negative.) Adeoque sive sursum sive deorsum sumatur, erit $GD=3d\sqrt{3}$. Et propterea utriusque aggregatum, $DD=6d\sqrt{3}$.



Verum, inquies, cum ex hypothesi inscripta OO, hoc est, in præsenti casu, AO, occurrat curvæ in A, erit & ipsum punctum A, punctorum D alterum, nempe superius: cumque eidem puncto A, coincidat etiam punctum G, qui fieri potest, ut GD superius, hoc est AA, seu potius ipsum A punctum, æquari possit $3d\sqrt{3}$? (nisi saltem sit $d=0$, quod non supponitur.) Et quidem, cum antea demonstratum sit, AD (hoc est DD) $=3d\sqrt{3}$; quî fieri potest ut jam sit $DD=6d\sqrt{3}$?

Dicam brevi quî hoc fiat. Nempe; æquationis $r^2=27d^2$. radices duas (nec enim plures habet) $+3d\sqrt{3}$, $-3d\sqrt{3}$, duo designare puncta D (nempe rectas GD, GD, terminantia,) quorum alterum tanto superius est, quanto alterum est inferius puncto G, vel (in præsenti casu) A: verum aliud adhuc esse punctum D quod ipsi A coincidit, præter duo illa D, hac æquatione designata. Quod ne miremur, animadvertendum est, utut æquatio $r^2=27d^2$ quadratica cum sit, non nisi duas habeat radices, eam tamen unde huc deventum est, $9dq^2\pm q^3=27d^2g$, cubica cum fuerit, omnino tres habuisse, (vel reales vel saltem imaginarias;) quarum cum in processu perierit una, non tamen ea propterea prorsus negligenda est, sed solicite potius inquirenda. Non autem ea prius perierat, quam positum fuerit tum $q\pm 3d=r$, tum etiam (nam nisi & hoc etiam ponatur nondum periit) $g=2d$. Cum itaque, tum in æquatione $9dq^2\pm q^3=27d^2g$, tum etiam in $r^3-27d^2r=\pm 27d^2g\mp 54d^3$ (extra præsentem casum) radices omnino tres sint; ex tribus autem radicibus r, r, r, cum (posito $g=2d$,) evanescat una, erit harum saltem una $r=0$. (Quod quidem semper obtinet in æquationibus cujuscunque gradus, quando absoluta quantitas evanescit, sive $fit=0$; nempe radicum saltem unam esse $=0$: reliquæ autem radices, depressione facta per communem partium omnium divisionem, in ea quæ prodit inferioris gradus æquatione manebunt involutæ.) Cum enim in æquationibus omnino omnibus id universaliter verum sit, quod quantitas absoluta, æqualis sit facto ex omnibus radicibus invicem ductis, (neglectis saltem utrobique signis $+-$,) fieri non potest, ut sit $\pm 27d^2g\pm 54d^3=\pm 27d^2h=r\times r\times r=0$, nisi ex tribus r, sit saltem una $r=0$; adeoque, quoad hanc, $q\pm 3d=r=0$, hoc est $q=\mp 3d$. Hoc est; si supponatur pD deorsum sumenda, erit (præter duas alias) radix una $q=-3d$; adeoque sumpta in contrarias partes (nempe sursum) $pD=3d$ habebitur punctum illud D, (quod propterea puncto A coincidit, cum sit etiam $pA=3d$:) si vero supponatur

ſupponatur pD ſurſum ſumenda, erit radix una $q = +3d$ (quod duorum ſignorum inferius denotat,) adeoque ſumpta in eaſdem partes (hoc eſt ſurſum) $pD = 3d$, habebitur iterum punctum illud D, idem cum A. Quoad autem reliqua duo puncta D; cum ſit $r = \pm 3d\sqrt{3}$, (ſive ſupponatur D ſurſum ſive deorſum poni, quippe utrobique duæ ſunt radices altera affirmativa, altera negativa,) & ($q \pm 3d = r$, ſive) $r \mp 3d = q$, (nempe ſi ſupponatur pD deorſum, $r - 3d = q$; ſi ſurſum, $r + 3d = q$;) erit, quæ ſupponitur deorſum, $\pm 3d\sqrt{3} - 3d = q - pD$; quæ ſurſum, $\pm 3d\sqrt{3} + 3d = q = pD$; (utrobique ſcilicet duæ radices; affirmativa, quæ juxta ſuppoſitionem contingit, & negativa, quæ in partes ſuppoſitioni contrarias, quæ igitur eadem eſt cum contrariæ ſuppoſitionis affirmativa.)

Ut dicta igitur recolligam. Poſita æquatione $9dq^2 + q^3 = 27d^3$, ſive $q^3 + 9dq^2 = 27d^2g$. (quæ ſupponit punctum D deorſum, adeoque ipſius radices affirmativæ deſignant D deorſum, negativæ ſurſum;) poſito $r = q + 3d$, erit $r^3 - 27d^2r = +27d^2g - 54d^3$; adeoque (ſi $g = 2d$) eſt $r^3 - 27d^2r = 0$; cujus tres radices $+3d\sqrt{3}$, $-3d\sqrt{3}$, ± 0, (quibus deſignantur GD, GD, GD, ſive AD, AD, AA. hoc eſt $AD = 3d\sqrt{3}$ deorſum, $AD = 3d\sqrt{3}$ ſurſum, & $AD = AA = 0$) & propterea, æquationis $q^3 + 9dq^2 = 27d^2g$, (cum ſit $r = q + 3d$, hoc eſt $q = r - 3d$) erunt tres radices $+3d\sqrt{3} - 3d$, $-3d\sqrt{3} - 3d$, $0 - 3d$; quibus deſignantur tres rectæ pD, pD, pD; hoc eſt $pD = 3d\sqrt{3} - 3d$ deorſum, $pD = 3d\sqrt{3} + 3d$ ſurſum, itemque $pD = 3d$ ſurſum $= pA$.

Atque id ipſum plane eveniet, poſita æquatione $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, vel $q^3 - 9dq^2 = -27d^2g$, (quæ ſupponit punctum D ſurſum, adeoque hujus radices affirmativæ deſignant D ſurſum, negativæ deorſum.) Poſito $r = q - 3d$, hoc eſt $q = r + 3d$, erit $r^3 - 27d^2r = -27d^2g + 54d^3$; adeoque (ſi $g = 2d$,) erit $r^3 - 27d^2r = 0$: cujus æquationis tres radices ſunt $+3d\sqrt{3}$, $-3d\sqrt{3}$, ± 0; quibus deſignantur GD, GD, GD, ſive AD, AD, $AD = AA$; hoc eſt $AD = 3d\sqrt{3}$ ſurſum, $AD = 3d\sqrt{3}$ deorſum, & $AD = AA = 0$. Et propterea, cum ſit $q = r + 3d$, erunt æquationis $q^3 - 9dq^2 = -27d^2g$ tres radices $q = +3d\sqrt{3} + 3d$, $q = -3d\sqrt{3} + 3d$, $q = 0 + 3d$; hoc eſt $pD = 3d\sqrt{3} + 3d$ ſurſum, $pD = 3d\sqrt{3} - 3d$ deorſum, & $pD = 3d$ ſurſum $= pA$.

Habemus itaque in utraque æquatione (quæ nempe ſupponit D deorſum, & quæ ſupponit D ſurſum) tres radices eaſque utiles omnes, ſed & (mutatis ſignis ob ſuppoſitiones contrarias) eaſdem utrobique. Eſt enim r hoc eſt GD, id eſt (hoc caſu) AD. Nempe

$$AD \begin{cases} \text{ſuprema} = \text{ſurſum } +3d\sqrt{3} = \text{deorſum } -3d\sqrt{3}. \\ \text{media} = AA = \text{ſurſum } 0 = \text{deorſum } 0. \\ \text{infima} = \text{ſurſum } -3d\sqrt{3} = \text{deorſum } +3d\sqrt{3}. \end{cases}$$

Adeoque (cum ſit pD, hoc eſt q ſurſum $= r + 3d$, & q deorſum $= r - 3d$,) erit

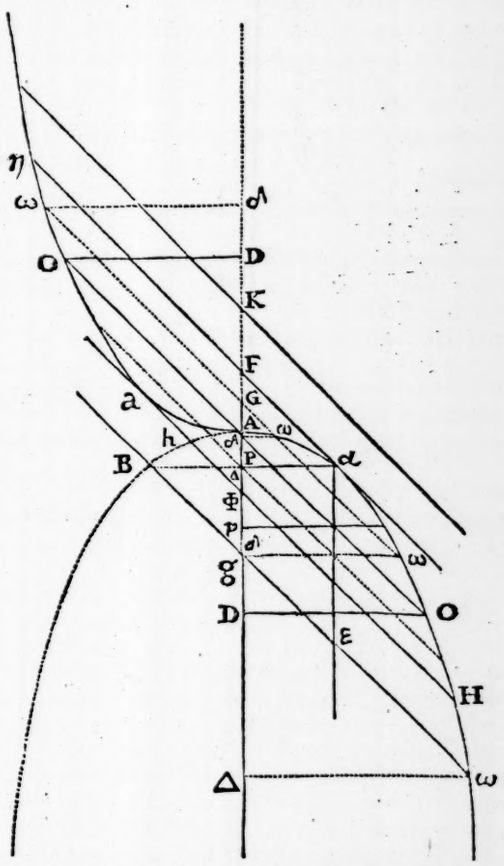
$$pD \begin{cases} \text{ſuprema} = \text{ſurſum } +3d\sqrt{3} + 3d = \text{deorſum } -3d\sqrt{3} - 3d. \\ \text{media} = pA = \text{ſurſum } 0 + 3d = \text{deorſum } 0 - 3d. \\ \text{infima} = \text{ſurſum } -3d\sqrt{3} + 3d = \text{deorſum } +3d\sqrt{3} - 3d. \end{cases}$$

Vides itaque jam probe convenire omnia. Nempe tum $pA = 3d$ quod ſupponit tua prima demonſtratio; tum $Ap + pD$ deorſum $= AD$ deorſum $= 3d\sqrt{3} - 3d$, *pl*: $+3d = 3d\sqrt{3}$, quod habet demonſtratio tua ſecunda; tum rectam AD non eſſe biſectam in p, (non quidem quia $3d\sqrt{3} + 3d > 3d\sqrt{3} - 3d$, uti primum videbatur, ſed) quia $3d > 3d\sqrt{3} - 3d$. Et propterea neque rectam $\alpha\pi$ eſſe diametrum.

Verum adhuc inquies, nova hic emergit difficultas, (quaſi non tam Proteus ſit quam

quam Hydra quicum nunc agatur.) Cum enim D punctum, ſit, per conſtructionem, diametri punctum illud cui ordinatim applicatur recta OD in curva αA terminata: quî omnino fieri poſſit, ut ejuſmodi ullum reperiatur punctum ſupra verticem A? quod tamen inſinuat hæc æquatio: cujus ſiquidem ſaltem una radix, ſurſum ſumenda, ſupra verticem excurrit, (nam $pD = 3d\sqrt{3} + 3d$ ſurſum, major eſt quam $pA = 3d$, adeoque verticem ſuperat recta $AD = 3d\sqrt{3}$.)

Dicendum itaque (quod quidem hæc evincit inſtantia) curvam Paraboloeidis Cubicalis αA, ſupponendam eſſe ultra verticem A non deorſum flecti ad B, ſed ſurſum potius ad a: Adeoque ipſius genuinum ſitum eſſe (quod parum forſan putaveris) non αAB, ſed αAa. (Atque hoc illud eſt myſterium quod pridem inſinuabam poſt detegendum.) Cui quidem curvæ occurrit recta OO in tribus



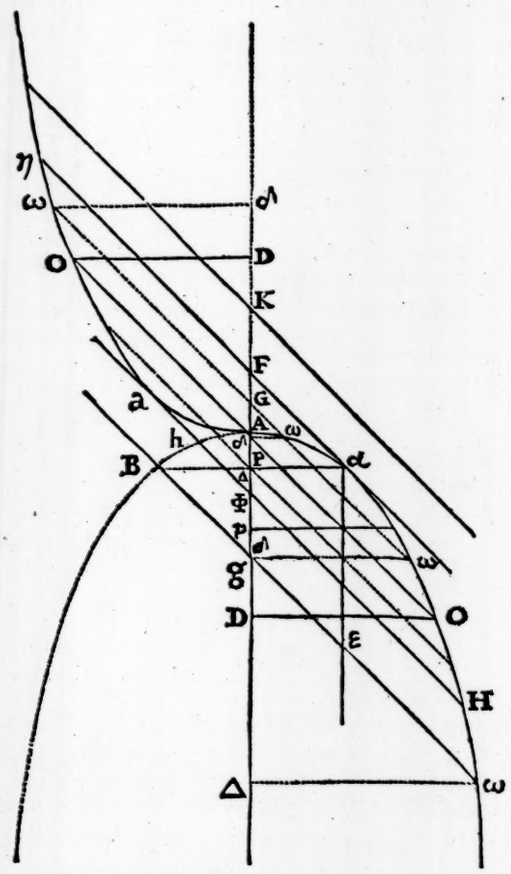
omnino punctis; nempe O, A, O: unde ordinatim-applicatæ, diametro occurrunt in punctis D, A, D; coincidentibus ſiquidem OD mediis, ipſi puncto A, quoties ſcilicet per ipſum verticem tranſit ea recta: (Similiter, mutatis mutandis, recta ωω, occurrit curvæ in punctis tribus ω, ω, ω; quibus in diametro reſpondent δ, δ, δ.) Quæ tria puncta, tribus æquationis cubicæ radicibus indicantur.

Ne autem hunc (inexpectatum forſan) curvæ ſitum mireris nimium; eundem plane poſtulat, ſi paulo accuratius perpendatur, ipſa Paraboloeideos Cubicalis natura; utpote cujus ordinatim-applicatæ, ponuntur, in diametrorum ratione ſubtriplicata; adeoque diametri in ordinatim-applicatarum ratione triplicata. Quod ſic colligimus.

Si, verbi gratia, ordinatim applicata DO, quæ deſignat puncti O à diametro diſtantiam dextrorſum, dicatur $+a$; diſtantia huic æqualis ſiniſtrorſum, dicenda erit $-a$: atque harum cubi, $+a^3 = +a \times +a \times +a$, & $-a^3 = -a \times -a \times -a$.

adeoque diametri AD, AD, quibus conveniunt hæ ordinatim applicatæ, erunt ut $+a^3$, $-a^3$, (quippe in ordinatim-applicatarum ratione triplicata,) hoc eſt, ut quantitas affirmativa, eique æqualis negativa, ſive ut AD deorſum, & huic æqualis AD ſurſum. Adeoque ſi curvæ punctum O dextrorſum, reſpondeat diametri puncto D deorſum; ejuſdem curvæ punctum O ſiniſtrorſum, reſpondebit diametri puncto D ſurſum. Unde ſequitur curvæ ſitus ille quem indicavimus ∝Aa.

Quod autem in Parabola ſe res ſecus habeat (quæ ſitum huic ſimilem non poſtulat) ratio eſt; quia parabolæ ordinatim-applicata DO dextrorſum $=+a$, & DO ſiniſtrorſum $=-a$, eundem plane diametri ſitum poſtulabunt: cum utriuſque tum $+a$, tum $-a$, quadratum ſit $+a^2$, (quippe $+a\times+a=+a^2=-a\times-a$,) erunt diametri AD, AD, quibus hæ conveniunt ordinatim-applicatæ, ut $+a$, $+a$; adeoque tum magnitudine æquales, tum in eodem ſitu; adeoque idem utrobique punctum D: non autem, ut in Paraboloeide cubicali, æquales magnitudine ſed contrario ſitu. (Quod autem de Parabola jam dictum eſt, pariter obtinet in Paraboloeidibus, Biquadraticali, aliiſque à poteſtate ſexta, octava, decima, &c. denominatis; nempe quando dimenſionum numerus eſt Par: ſicut &, ex



adverſo, quod de Paraboloeide Cubicali dictum eſt, perinde etiam obtinet in Paraboloeide Surdeſolidali, aliiſque à poteſtate ſeptima, nona, &c. denominatis; nempe quando dimenſionum numerus eſt Impar; imo, inquam, eadem de cauſa, etiam in linea recta, quæ haberi poterit linea Paraboloeidis Lateralis, ab una dimenſione dicta, hoc eſt, Trianguli; quippe & hæc ad verticem uſque ducta, ſi continuetur, continuabitur ſurſum. Quæ monuiſſe ſufficiat.)

Sin porro urgeas; Annon poſſit ea curva ∝A, ubi ad A perventum eſt, etiam deorſum

deorsum flecti ad B, æque ac sursum ad a? Potest, inquam: sicut &, si esset Parabola, posset non minus sursum flecti ad a, quam deorsum ad B; nam ut ejusmodi duæ lineæ Parabolicæ sic componantur nihil impedit. An vero, dices? si id fiat, annon esset ea linea αAB, curva Paraboloeideos cubicalis? Esset, inquam; eodem sensu quo linea Parabolica dici possit, quæ ad instar αAa recurvata sit. Verum, accuratius loquendo, dicendæ videantur (saltem quod ad hoc negotium) tum hic duæ semiparabolæ, tum illic duæ semiparaboloeideos curvæ. Quippe, cum situs ille subcontrarius αAa (ob jam dicta) sit non minus Paraboloeideos Cubicalis curvæ genuinus, quam Parabolæ genuinus sit situs suus αAB ad ejusdem rectæ AB partes oppositas: non minus judicandus esset αAB situs Paraboloeideos cubicalis præternaturalis, quam esset situs αAa præternaturalis Parabolæ.

Verum, utut sit, (sive situ naturali, sive præternaturali;) cum utcunque non incommode supponi possit hujusmodi curva BA$\alpha\omega$, eique inscribi recta Bω, tangenti Fα parallela; annon æquatione aliqua indagari possunt, diametri puncta, puta Δ, Δ, ad quæ pertingant ordinatim-applicatæ BΔ, $\omega\Delta$? Possunt inquam. Et quidem quod ad $\omega\Delta$, ea quam hactenus tractavimus æquatione investigabitur, (uti mox videbitur,) quoad autem BΔ non quam hactenus versavimus æquatione, sed longe alia. Quippe ad æquationem illam ponendum est, non AP. AΔ::Pαc.ΔBc (quod præsentis indaginis fundamentum est,) sed AP.—AΔ::Pαc.ΔBc. Verum cum illa indagatio a præsenti negotio sit aliena; intermittendam illam hic loci sentio, donec eam quam hactenus tractavimus æquationem penitius absolvero.

Cum itaque hactenus æquationis $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$, adeoque $q^3 - 9dq^2 = \pm 27d^2g$ radices, unico saltem casu determinavimus, scilicet, cum $g = 2d$, hoc est cum inscripta per verticem transit: Supereſt, ut alios adhuc casus perpendamus; nempe, cum $g < 2d$, (hoc est cum intersectionis punctum G est supra verticem;) &, cum $g > 2d$; adeoque G infra verticem. Priori casu, erit $+g-2d$ quantitas negativa; posteriori, quantitas affirmativa.

Ne autem æquationis geminæ $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$, juncta consideratio confusionem pariat, separare libet; eamque seorsim perpendere quæ punctum D deorsum spectat $r^3 - 27d^2r = +27d^2g - 54d^3$, cujus propterea radices negativæ interpretandæ erunt in contrarias partes, hoc est sursum (quæ autem de hac dicentur omnia, eadem mutatis mutandis de altera quæ D sursum spectat intelligantur, cum hoc solo discrimine, quod quæ in una sunt radices affirmativæ, eædem in altera sunt negativæ, & contra.) Tum pro differentia duarum g, $2d$, substituo b; adeoque $g-2d = \pm b$, nempe $+b$=AG deorsum, hoc est, si $g > 2d$, hoc est, FG>FA, adeoque G infra verticem: & $-b$=AG sursum, si sit $g < 2d$, hoc est FG<FA, adeoque G supra verticem, (non modo si inter F & A, ubi saltem FG erit quantitas affirmativa, sed multo magis si sit supra F, ubi ipsa FG erit per se quantitas negativa, (supponitur enim G infra F) adeoque $g-2d$ erit multo magis negativa, (nempe —FG—FA.) denique, pono $d=1$ (licet enim diametrum quocunque numero designare, adeoque reliquas quantitates ad hunc numerum comparare,) ut liceat, tum d, tum ipsius omnes potestates omittere. Adeoque æquatio punctum D deorsum spectans, erit $r^3 - 27r = \pm 27b$ (prout scilicet G contingat infra suprave verticem.)

His positis, ut æquationem expositam $r^3 - 27r = \pm 27b$, resolvamus; Videndum primo num $b=0$; quippe si hoc contingat, tum res jamjam absoluta est; nempe evanescente $\pm 27b$, erit $r^3 - 27r = 0$, (adeoque radicum altera $r=0$) & $r^2 = 27$, (adeoque radices duæ reliquæ, $r = +\sqrt{27}$, $r = -\sqrt{27}$.) quippe casus hic, ille est quem hactenus tractavimus; ubi nempe inscripta per verticem transit.

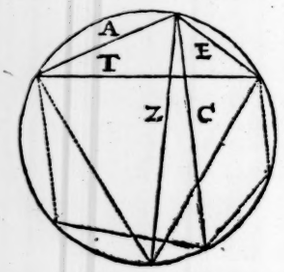
Sin illud non contingat, sed b quantitatem habeat (sive addendam sive auferendam;) Videndum secundo; utrum Quadratum semissis numeri $27b$; majus sit, an minus, an æquale, Cubo Trientis numeri 27: Hoc est, utrum $\frac{729}{4}b^2$, plus sit, an minus, quam 729, aut etiam æquale. Hoc est, utrum b^2 sit majus, minus, an æquale, 4: Sive b majus, minus, an æquale 2.

2) $27b$	$\times 9$
2) $27b$	9
4) $729b^2$ ($\frac{729}{4}b^2$	81
	$\times 9$
	729

Si quadratum minus sit, exigenda est æquatio ad (supra memoratarum) Regu-

lam Tertiam : Si majus, ad Primam ; Sin æquale, ad utramvis; ſcilicet indifferenter vel ad Tertiam vel ad Primam.

Eſto itaque primo, hujuſmodi æquatio $r^3 - 27r = -26$. (Hoc eſt, ſit $26 = 27h$, adeoque $\frac{26}{27} = h = AG$, & quidem AG ſurſum, propter ſignum $-$: adeoque $FG = g = 2 - \frac{26}{27} = 1\frac{1}{27}$.) quæ reſpondet inſcriptæ $\omega G \omega \omega$. Hæc cum exigenda ſit ad Regulam tertiam (eſt enim $13 \times 13 = 169$, minus quam $9 \times 9 \times 9 = 729$,) Scribatur circulus cujus radius ſit 3 (radix quadratica trientis coefficientis 27) hoc eſt, ſcribatur circulus cujus radius æquetur rectæ $PF = 3d$. Huic circulo aptetur recta $C = \frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}$ (quod emergit ex diviſione quantitatis abſolutæ per trientem coefficientis,) hoc eſt, ſit $C = \frac{26}{9}d$. Triſectis itaque duobus arcubus quibus ſubtenditur C, erunt trientum ſubtenſæ A, E, æquationis duæ radices affirmativæ ; (nempe $G\delta$, $G\delta$, deorſum ;) & $-Z = -A - E$, radix negativa, (hoc eſt $G\delta$ ſurſum.) Et quidem $A = \frac{1}{3}\sqrt{105} - \frac{1}{2} = G\delta$ infimæ, $E = 1 = G\delta$ deorſum mediæ, $-Z = -\frac{1}{2}\sqrt{105} - \frac{1}{2} = G\delta$ ſurſum.



Et quidem idem omnino accideret ſi poſita eſſet æquatio $r^3 - 27r = +26$, (quod fieret ſi recta tranſiiſſet tanto infra verticem quanto illic ſupra, hoc eſt prope punctum P, cui inſcriptæ literas ſuas non appoſui ne nimia foret confuſio,) niſi quod tunc radices quæ prius erant affirmativæ jam eſſent negativæ, & contra; adeoque trium radicum, ſive rectarum $G\delta$, $G\delta$, $G\delta$, maxima, & quidem ea ſola, deorſum tenderet, reliquæ duæ ſurſum.

Atque hæc quidem contingunt, quoties h minus eſt quam $2d$; hoc eſt, quoties G incidit vel inter AF, vel inter, $A\Phi$. Poſito ſcilicet, $A\Phi = AF = 2d$.

Eſto tum æquatio hujuſmodi $r^3 - 27r = +154$ (hoc eſt $h = 5\frac{19}{27} = AG$ deorſum, puta Ag.) Exigenda eſt hæc æquatio ad regulam primam ; (propter quadratum ſemiſſis termini abſoluti, majus Cubo trientis coefficientis termini medii, nempe $72 \times 72 = 5184 > 729 = 9 \times 9 \times 9$.) Hujus autem æquationis, eſt radix unica poſſibilis affirmativa ; nempe $7 = g\Delta$ deorſum (ut ſupra oſtenſum eſt;) reliquæ duæ impoſſibiles. Quod argumento eſt rectam ωB non niſi in uno puncto expoſitæ curvæ occurrere. Quamvis enim verum ſit quod recta ωg occurrat etiam in B, curvæ AB ; non tamen illud ad præſens negotium omnino ſpectat: quippe hæc æquatio non ſpectat curvam αAB, ſed curvam αAa, ut ſupra dictum eſt. Atque idem intelligendum erit de puncto h, iiſque omnibus quibus interſecatur BA, etiam ultra verticem ex altera parte ſurſum continuata.

Pari modo, ſi poſita eſſet æquatio $r^3 - 27r = -154$. niſi quod illic radix quæ unica eſt poſſibilis, eſſet negativa, adeoque ſurſum ſumenda : & conveniret hæc æquatio rectæ per K ductæ ; ſi nempe AK, ſive AG ſurſum, ponatur $5\frac{19}{27}$.

Atque hoc contingit quoties h, vel AG (ſive ſurſum ſive deorſum) major eſt quam $2 = AF$. Hoc eſt, quoties g vel eſt minus quam 0, vel plus quam $4d$: Quippe ſi illud, erit G ſupra F ; ſi hoc, erit infra Φ.

Denique ; ſi ponatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 54$. (adeoque $h = \pm 2$.) perinde eſt ad utramvis regulam exigatur ; (quia quadratum ſemiſſis termini abſoluti, æquatur cubo trientis coefficientis, $27 \times 27 = 9 \times 9 \times 9 = 729$.) Si ad tertiam exigatur ; ſcripto circulo cujus radius $3 (= \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9},)$ inſcribatur recta quæ ſit $6 (= \frac{54}{9};)$ hæc autem (cum ſit diameter, quippe $6 = 3 + 3$) dirimet circulum in duos ſemicirculos ; utriuſvis autem ſemiperipheriæ trienti ſubtendit recta radio æqualis ; adeoque tum $A = 3$, tum $E = 3$; item $Z (= A + E) = 6$. Hoc eſt, ſi $r^3 - 27r = +54$, (poſito nempe G, in Φ,) radix affirmativa $+6$ deorſum ſumenda ; & negativæ -3, -3, (ſumendæ ſurſum,) quæ propter æqualitatem ſuam coincidunt, adeoque pro duabus curvæ interſectionibus indicant unum contactum, nempe a. Si vero ſit $r^3 - 27r = -54$, (poſito nempe G in F,) radicum maxima 6 erit negativa, ſurſum ſumenda ; & duæ minores 3, 3, affirmativæ, ſumendæ deorſum, & (propter æqualitatem, adeoque coincidentiam,) indicabunt punctum contactus, α.

(Inventis autem omnibus radicibus r ; ſi illis ſigillatim auferatur (quippe jam in ea ſola verſamur æquatione quæ ſupponit D deorſum poni) $3d$, habentur totidem

tidem radices $q=r-3d=$ pD. puta, ſi ſint radices r, ut in exemplo primo, $+\frac{1}{2}d\sqrt{105}-\frac{1}{2}d$, $+1d$, $-\frac{1}{2}d\sqrt{105}-\frac{1}{2}d$: erunt totidem radices q; $+\frac{1}{2}d\sqrt{105}-3\frac{1}{2}d$, $-2d$, $-\frac{1}{2}d\sqrt{105}-3\frac{1}{2}d$. Et ſimiliter in reliquis. Ubi interim notandum eſt, quod hac ſubductione fieri poteſt, ut quæ fuerat radix affirmativa tranſeat in negativam. Puta, quoties punctum D, eſt infra G, ſed ſupra p.)

Adeoque hujuſce æquationis caſus omnes ſolvimus. Atque eadem opera, hujuſmodi curvæ ope, methodum oſtendimus æquationes cubicas, hujuſce formæ omnes $r^3-mr=\pm n$, Geometrice ſolvendi. Nempe ſumpta diametro $d=$AP$=\sqrt{\frac{1}{27}m}$ (cui ordinatim-applicata ſit Pα; adeoque, ſumpta PF$=3$PA$=\sqrt{\frac{1}{3}m}$, Fα tangens,) & AG$=\frac{n}{m}=b$ (deorſum quidem ſi ſit $+n$, ſurſum vero ſi $-n$;) ducatur per G recta, tangenti Fα parallela, occurrens curvæ in puncto (uno, aut pluribus, prout contigerit,) O; ducta ordinatim-applicata OD, determinabit æquationis radicem GD$=r$; & quidem, ſi occurſus puncta O plura ſint, totidem erunt & puncta D, adeoque Æquationis totidem radices poſſibiles; affirmativæ quæ deorſum, negativæ quæ ſurſum, tendunt.

Tandem, ut totum aliquando abſolvamus negotium; Quoniam jam facta eſt mentio puncti B, aliorumque ſimilium, in curva BA, etiam ſurſum continuanda; adeoque & punctorum diametri quæ his reſpondeant: Libet & eam rem aliquatenus intueri. Diximus jam ſupra; ſi Pα dextrorſum ſit $+p$, ejuſmodi recta ſiniſtrorſum erit $-p$; adeoque ut illius cubus $+p^3$, ſic hujus $-p^3$; & propterea, ſi diametri ſitus deorſum, puta AP dicatur $+d$, ſurſum erit $-d$: adeoque licet ſit $d.d::p^3.p^3$. non tamen (ſumptis ordinatim applicatis in contrariam partem) $d.d::+p^3.-p^3$. ſed $+d.-d::+p^3.-p^3$. Hoc eſt, licet ſit (quoad Δ inferius) AP.AΔ:Pαc.$\Delta\omega$c, non tamen (quoad ſuperius) AP.AΔ::Pαc.ΔBc. ſed AP.$-$AΔ::Pαc.ΔBc.

His autem conſideratis; eadem methodo qua uſi ſumus (mutatis mutandis) ad prop. 47. Con. Sect. rem ad æquationem perducemus. Nempe AP$=d$. A$\Delta=d+g-q$ (nam Δ ſuperius inquirimus;) adeoque $-$A$\Delta=-d-g+q$. Pαc$=p^3$. ergo, propter analogiam indicatam, $d.--d-g+q::p^3.\frac{-d-g+q}{d}p^3$ $=\Delta$Bc.

Sed etiam eſt FP.Pα::gΔ.ΔB. hoc eſt, (ut ibidem oſtenditur,) $3d.p::3d-q.\frac{3d-q}{3d}p=\Delta$B. ubi ΔB eſt quantitas negativa, ſicut ipſa $3d-q$, quippe q major eſt, hoc caſu, quam $3d$.) ejuſque cubus $\frac{27d^3-27d^2q+9dq^2-q^3}{27d^3}p^3$ $=\Delta$Bc$=\frac{-d-g+q}{d}p^3$.

Adeoque (facta reductione) $27d^3-27d^2q+9dq^2-q^3=-27d^3-27d^2g+27d^2q$. Hoc eſt, $q^3-9dq^2+54d^2q=+27d^2g+54d^3$. Quæ, ſubſtituendo $r+3d=q$: reducitur ad æquationem hanc $r^3+27d^2r=27d^2g-54d^3$. Nam

$$\begin{array}{r} r^3+9dr^2+27d^2r+27d^3=q^3. \\ -9dr^2-54d^2r-81d^3=-9dq^2. \\ +54d^2r+162d^3=+54d^2q. \\ \hline r^3+27d^2r+108d^3=27d^2g+54d^3. \end{array}$$

Et $r^3+27d^2r=27d^2g-54d^3$.

Atque idem plane eveniet, ſi punctum B fuerit in curvæ AB continuatione ſurſum ultra verticem A, (nam, ut nunc ordinatim-applicata negativa, nempe ſiniſtrorſum, applicatur diametro affirmativæ, puta deorſum: ita, caſu iſto, ordinatim-applicata affirmativa, hoc eſt dextrorſum, applicabitur diametro negativæ, puta ſurſum; applicabitur enim ſupra verticem A: adeoque utrobique mutanda erunt diametri AΔ ſigna, ut analogia rite inſtituatur:) cum hoc unico diſcrimine, quod cum illic $b=g-2d=$AG ſit quantitas affirmativa (deor-

ſum ſumenda:) adeoque æquationis quantitas abſoluta, affirmativa; $+27d^2h$: hic erit negativa (ſurſum ſumenda) adeoque abſoluta quantitas $-27d^2h$ negativa: (illic enim g, major erit, hic minor quam, $2d$.) Et proinde quæ illic eſt radix affirmativa, g Δ ſurſum, ſuppoſitioni conſona, (nam de Δ ſurſum inſtituebatur hæc inquiſitio:) hic erit negativa, g Δ deorſum, ſuppoſitioni contraria. Nempe illic Δ altius erit quam g, hic inferius. Quæ omnia ſatis intelligentur, ſi ſupponatur curva B A continuari ultra verticem ſurſum, (eo modo quo α A continuatur ad a,) quam ego continuationem, in ſchemate, conſulto omiſi ne reliqua turbaret, ſed imaginatione facile ſupplebis. Ut enim curvam B A infra verticem ſecant rectæ ω g, H Φ, in punctis B, h; quæ puncta ſpectat æquatio $r^3+27d^2r=+27d^2h$: ſic continuationem illam ſupra verticem ſecabunt in aliis punctis rectæ ω G, » F; quæ puncta ſpectabit æquatio $r^3+27d^2r=-27d^2h$.

Hujus autem æquationis $r^3+27d^2r=\pm 27d^2h$, radix (unica quidem; quippe reliquæ quas exſpectes duæ non ſunt, niſi imaginariæ; quod indicio eſt rectam quamlibet tangenti F α parallelam, non poſſe curvæ B A, utut ſicut dictum eſt ſurſum continuatam, niſi in uno ſolo puncto occurrere,) Arithmetice inveſtigatur per regulam noſtram ſecundam, ſuperius allatam: Geometrice vero (ſi ſaltem permittas ut hanc curvam appellem Geometricam) hujus curvæ beneficio. Nempe, conſtructis reliquis ut prius, ſicut rectæ per G tranſeuntis puncta, curvæ α A a occurrentia (ſive plura ſint ſive unicum) deſignant radices æquationis hujus $r^3-27d^2r=\pm 27d^2h$ (ductis nempe à punctis illis ad diametrum ordinatim applicatis;) ita ejuſdem rectæ occurſus curvæ B A (ſi opus, continuatæ,) deſignat æquationis $r^3+27d^2r=\pm 27d^2h$ radicem (poſſibilem unicam) nempe ducta inde ad diametrum ordinatim-applicata.

Inventa autem hac radice $r=g\Delta$, addendo $3d$ habebitur radix $q=r+3d=p\Delta$: ſi & hanc libeat inquirere.

Sin libeat adhuc conjuncta æquatione utrumque rectæ Bω terminum indicare; (vel etiam Sectionum puncta B, O, omnia, ejuſdem rectæ occurſu facta:) id ſic faciendum erit $r^3\mp 27d^2r=+27d^2h$, ſi nempe punctum B ſit in curva A B infra verticem, (hoc eſt, ſi punctum G ſit infra verticem A;) ſi autem in ejus continuatione ſupra verticem (hoc eſt, ſi G ſupra A;) erit $r^3\mp 27d^2r=-27d^2h$. Quippe æquatio $r^3-27d^2r=\pm 27d^2h$ reſpicit omnia puncta O; & reliqua $r^3+27d^2r=\pm 27d^2h$, puncta B.

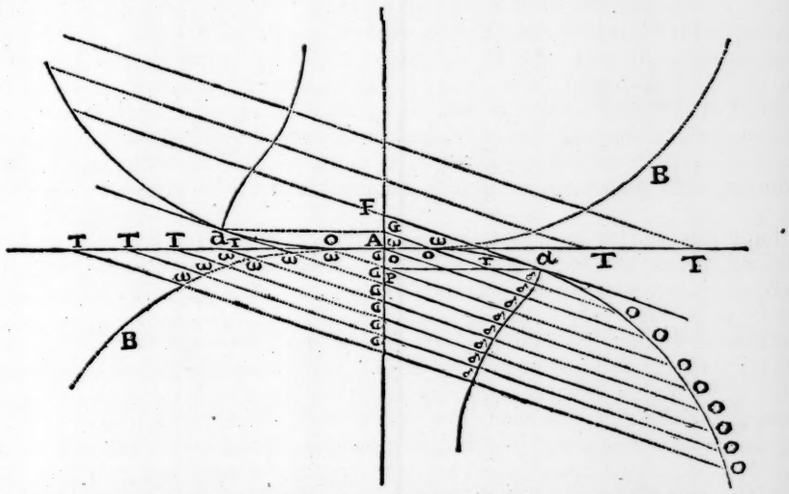
Æquationes itaque omnes utriuſque formæ, (adeoque æquationes cubicæ ad unam omnes, quippe ad harum alteram æquationes omnes cubicæ facile reducuntur,) $r^3-27d^2r=\pm 27d^2h$, & $r^3+27d^2r=\pm 27d^2h$; Unius hujus curvæ ope facile reſolvuntur. Quippe prioris radices omnes occurſu rectæ G O curvæque α A a, indicantur; ut ſuperius oſtenſum eſt: Poſterioris, occurſu ejuſdem rectæ, curvæque B A (continuatæ) radix innoteſcit, uti jam oſtendimus.

Et quanquam fatendum ſit, eaſdem omnes Coniſectionum ope ſolvi poſſe, cum interim ſit hæc noſtra curva uno adhuc gradu magis compoſita, (adeoque videamur ex problemate, ut loquuntur, Solido, feciſſe Lineare;) cum tamen hæc ipſa curva ſit ex ita compoſitis ſimpliciſſima, & quidem vix difficilior (ne dicam facilior) factu quam Coniſectionum aliquæ (puta Hyperbola, vel etiam Ellipſis;) eaque ſemel ducta, quodcunque habeat latus rectum (cujus hic nulla habetur ratio,) ad æquationes mille diverſiſſimas (ne dicam omnes) una inſerviat; nec aliud inſuper poſtulet ad totum negotium abſolvendum, quam parallelarum aliquot rectarum ductum: ſi non ſimplicior, ſaltem expeditior methodus videri poſſit, quam quæ per Sectiones Conicas adhibetur.

Eodem fere modo unius Parabolæ, ejuſque inverſionis, ope, ſolvi poſſent æquationes omnes quadraticæ. Et Paraboloeidium ſuperioris ordinis ope, æquationes altiores, (ſi non omnes, multæ ſaltem,) ſolvi poterunt; verum hæc omnia proſequi, non eſt hujus loci.

Verum ſi libeat adhuc, menſuras in diametro jam inventas, ad ipſas inſcriptas transferre, adeoque rectarum G O, G O, G O, vel etiam G O, G B, (ſumpto ubivis in diametro, puncto G) ipſis G D, G D, G D, vel etiam G D, G Δ, (fig. præced.) proportionalium, quantitates habere; Id facili negotio obtinebitur. Nempe ſumptis P F. F α :: (A P. T α :: G A. G T ::) $d.e::h.k$ (adeoque) $::r.h::$ G D. G O. Prodibunt pro æquationibus jam exhibitis $r^3-27d^2r=\pm 27$

$= \mp 27\,d^2 h$, & $r^3 + 27\,d^2 r = \mp 27\,d^2 h$, hæ omnino ſimiles $b^3 - 27\,e^2 b = \mp 27\,e^2 k$, & $b^3 + 27\,e^2 b = \mp 27\,e^2 k$; quarum prioris radices indicabunt inſcriptarum parallelarum ſegmenta puncto G & curva α A a intercepta; poſterioris vero earundem ſegmenta eodem puncto G & curva B A &c. intercepta.



Atque hinc quidem licebit ipſam, quam ſupra indicavimus, diametrum curvam (ſic enim libeat dicere) quæ rectas parallelas curvæ B A α inſcriptas biſecat (quæ toti huic negotio anſam porrexit) ulterius explicare, ejuſque puncta ſingula per eorum à diametro AD diſtantiam Gδ in ipſis GO parallelis menſurandam exhibere.

Siquidem inſcripta oO, vel ωO, (punctum inferius diſtinctionis gratia, dicimus O; ſuperius, ſi in curva Aα, o; ſi in A B, ω:) vel eſt GO — Go, vel GO + Gω. Adeoque, quoties G eſt ſupra A, eſt oO differentia duarum radicum affirmativarum æquationis hujus $b^3 - 27\,b = -27\,k$, puta b, b, (quas radices diſtinctionis item gratia dicemus B = GO, & b = Go:) Quoties autem G eſt infra A, eſt ωO ſumma duarum radicum (affirmativarum) æquationum $b^3 \mp 27\,b = 27\,k$, (quarum alteram B, alteram β dicemus,) nempe, æquationis $b^3 - 27\,b = 27\,k$ radix (vel poſſibilis, vel ſaltem) affirmativa unica B = GO, & æquationis $b^3 + 27\,b = 27\,k$ radix unica poſſibilis β = Gω. Et propterea ſemiſſis inſcriptæ oO = GO — Go = B — b, erit, $\frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}$b; & inſcriptæ ωO = GO + Gω = B + β, ſemiſſis $\frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}\beta$. Adeoque Gδ diſtantia puncti G à puncto inſcriptæ medio, erit illic $\frac{1}{2}$oO + oG = $\frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}b$; hic vero, $\frac{1}{2}\omega$O — ωG = $\frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}\beta - \beta = \frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}\beta$. Quod vel ex ipſo ſchematis inſpectu liquet.

Cognitis itaque, ex ſupra traditis, tum B, b, illic; tum B, β, hic; habetur diſtantia diametri curvæ, à diametro recta, in ipſis GO parallelis menſuranda; (quod pariter etiam obtinet in aliis cujuſcunque gradus Paraboloeidibus inventis, ſuo in ſingulis modo, B, b, β ut mox docebitur:) adeoque verus iſtius curvæ ſitus ſinuoſus quoad ipſius ſingula puncta. Quæ quidem primo partem ſuam concavam (à puncto α aliquouſque deorſum) ad rectam A P diametrum obverſam habet; deinde vero, flexione in contrarias partes facta, partem convexam: Et quidem hoc eo pacto fit, ut non modo ad rectam eam non pertingat unquam; ſed & ita interim appropinquet, ut omni aſſignabili diſtantia propius accedat; adeoque eam ſibi habeat vere Aſymptoton. Quod ſic oſtenditur.

1. Cum ſit (quod modo dictum eſt) inſcripta ωO = ωG + GO = β + B; ſitque (quod jam ſupra oſtenſum eſt) GO major ubique quam Gω; manifeſtum eſt medium inſcriptæ, à puncto G, ad partes O ſemper vergere, nec ad punctum ipſum G aut rectam AG uſpiam accedere. (Quæ quidem intelligenda ſunt, ut & ſequentia, ubi G incidit infra punctum A: ubi enim ſupra illud punctum contingit, non eſt quod ſimus ſoliciti; quippe tum, non modo inſcriptæ oO punctum medium, ſed & ipſa tota ad eaſdem partes poſita eſt.)

2. Manifeſtum item eſt, diſtantiam puncti G, à puncto medio, æqualem eſſe ſemi-differentiæ rectarum GO, Gω; ſive B, β, (Quippe ſi linea ſecetur tum in partes

partes duas æquales, tum in totidem inæquales, inter-ſegmentum erit ſemi-differentia partium inæqualium: ut notum eſt.) Hoc eſt $G\delta = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\beta$. Adeoque decreſcente vel etiam evaneſcente illa differentia, decreſcet pariter, vel evaneſcet ea diſtantia.

3. Poſito autem $e = 1$ erit B æquationis hujus $b^3 - 27b = 27k$ radix affirmativa; ut oſtenſum eſt; adeoque per regulam noſtram primam (ſaltem quoad parallelam Ga omneſque ipſi inferiores ut dictum eſt, de ſuperioribus autem non eſt cur dubitemus.)

$$B = \sqrt{c.\ \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:\tfrac{729}{4}k^2 - 729}:} + \sqrt{c.\ \tfrac{27}{2}k - \sqrt{:\tfrac{729}{4}k^2 - 729}.}$$
$$\text{hoc eſt } \sqrt{c.\ \tfrac{27}{2}k + 27\sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 - 1}:} + \sqrt{c.\ \tfrac{27}{2}k - 27\sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 - 1}.}$$
$$\text{hoc eſt } 3\sqrt{c.\ \tfrac{1}{2}k + \sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 - 1}:} + 3\sqrt{c.\ \tfrac{1}{2}k - \sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 - 1}.}$$

Et ſimiliter cum ſit β æquationis hujus $b^3 + 27b = 27k$ radix poſſibilis unica, erit (per Regulam ſecundam ſuperius traditam,)

$$\beta = \sqrt{c.\ + \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:\tfrac{729}{4}k^2 + 729}:} - \sqrt{c.\ - \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:\tfrac{729}{4}k^2 + 729}.}$$
$$\text{hoc eſt } \sqrt{c.\ + \tfrac{27}{2}k + 27\sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 + 1}:} - \sqrt{c.\ - \tfrac{27}{2}k + 27\sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 + 1}.}$$
$$\text{hoc eſt } 3\sqrt{c.\ + \tfrac{1}{2}k + \sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 + 1}:} - 3\sqrt{c.\ - \tfrac{1}{2}k + \sqrt{:\tfrac{1}{4}k^2 + 1}.}$$

4. Quo autem harum quantitatum ab invicem differentiam, (adeoque & ſemi-differentiam quæ eſt ipſa de qua agitur diſtantia,) tum ſenſim decreſcere, tum tandem ſi in infinitum procedatur evaneſcere oſtendam; aſſumo (quod & notiſſimum eſt) Æqualem Quadratorum differentiam (quod & de aliis poteſtatibus verum erit) in quadratis majoribus, minorem quam in minoribus, radicum differentiam poſtulare. (Puta $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ majus quam $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, &c. ut notum eſt:) & quidem eouſque augeri poſſe quadrata, ut data illorum differentia differentiam radicum poſtulet minorem quavis aſſignata. (Quod & tum alibi, tum ubi de Hyperbolæ Aſymptotis agitur, Con. Sect. prop. 39. monuimus.)

5. Adeoque differentia duarum $\frac{1}{2}k, \sqrt{:\frac{1}{4}k^2 \pm 1}$, hoc eſt, $\sqrt{\frac{1}{4}k^2}, \sqrt{:\frac{1}{4}k^2 \pm 1}$, creſcente quantitate k, (adeoque creſcentibus quadratis, dum interim eadem manet quadratorum differentia 1,) tum perpetuo decreſcit, tum tandem aſſignata quavis minor evadit.

6. Et propterea, tum $\frac{1}{2}k - \sqrt{:\frac{1}{4}k^2 - 1}$; tum $-\frac{1}{2}k + \sqrt{:\frac{1}{4}k^2 + 1}$; creſcente ut dictum eſt k, decreſcunt ſenſim & evaneſcunt; adeoque & eorum latera cubica, & horum tripla; hoc eſt, quantitatum B, β membra poſteriora.

7. Sed &, iiſdem de cauſis, in ipſarum membris prioribus decreſcit pariter atque ſenſim evaneſcit, differentia duarum $\sqrt{:\frac{1}{4}k^2 - 1}$, & $\sqrt{:\frac{1}{4}k^2 + 1}$, (creſcentibus ſcilicet ut dictum eſt, quadratis, eadem interim manente quadratorum differentia 2.) eaque quæ hinc dependet membrorum item primorum differentia: Et propterea ipſarum item quantitatum B, β, differentia; adeoque & puncti G ab inſcriptæ medio diſtantia. Quod erat oſtendendum.

Sed & eadem puncta omnia, tum O, o, ω, tum δ, δ, &c. non minus deſignari poſſunt per ſuam a recta T T diſtantiam, quam a G G; nempe addita, ablatave, prout res exigat, recta $GT = k$.

In reliquis autem cujuſcunque gradus Paraboloeidibus, habentur tum B, b, (quando G ſupra A) tum B, β, (quando G infra A,) ordinando & reſolvendo has æquationes. Nempe

In Parab.	Quadrat.	Cubic.	Biquadr.	
b (pro B, b,) =	$2\sqrt{q : b - k}$:	$3\sqrt{c : b - k}$:	$4\sqrt{qq : b - k}$:	&c.
b (pro B, β,) =	$2\sqrt{q : k \pm b}$:	$3\sqrt{c : k \pm b}$:	$4\sqrt{qq : k \pm b}$:	

Quod probabitur eodem fere modo cum demonſtratione tua ſecunda.

Atque hæ ſunt tandem, Illuſtriſſime Domine, per quas deduxit nos ambages Æquatio illa. Supereſt ut Honoratiſſimam Dominationem Veſtram patientiæ veſtræ jam nimium læſæ veniam exoremus: (in quam quidem eo peccavi audacius, non modo quod noverim quam tu ſis ad condonandum facilis, faciliſque petenti; verum eo maxime quod neque hæc tibi forſan ingrata fore autumaverim:) Atque ut me digneris ultra reputare,

Illuſtriſſime Domine,

In D. V. obſequium Paratiſſimum,

JOH. WALLIS.

Oxonii Dec. 5.
1656.

DE
PROPORTIONIBUS, DIALOGI;
A
Marco Meibomio
Conſcripti; Refutatio.

CUM, currente prelo, ad Operis Arithmetici Cap. XXXVII perveneram, incidi in *Marci Meibomii* De Proportionibus *Dialogum*, anno ſuperiori *Hafniæ* magna quidem cum pompa ſed infeliciter editum: Cumque illius Refutationem aliquam illic haud incommode inſerendam putaveram, adeoque hanc quæ ſequitur meditatus eram; vidi molem eouſque excreviſſe ut vix opportune uno Capite coerceri poſſet; nec etiam, citra injuriam, Lectoris patientiam nimia digreſſione detineri poſſe. Adeoque, levi illic commonefactione habita, integram ejuſdem Refutationem, in hunc locum, ſeorſum rejiciendam putavi.

Virum equidem autumo haud indoctum; Adeoque num quæ illic edidit ſerio protulerit, an joco potius, & quaſi ludendo, dubitandum forſan erit. Novimus enim & magnos viros nonnunquam ludendo quaſi, & tanquam ironice, illud proferre, quod ne quidem ipſi per omnia verum putant. Ut, qui *Moriæ Encomium* ſcripſit, vir ipſe interim prudentiſſimus; Item, qui *de Umbra Aſini*; qui, *in laudem Podagræ*; & quæ ſimilia. Quo referenda ſunt *Kepleri ſomnium*; aliuſque *de Novo Orbe*, (ſive Incolis Lunæ,) tractatus; & quæ ſunt hujuſmodi. Ubi ingenioſe multa dicta ſunt, & quidem non parum ſubeſt veri; at interim nemo ſobrius authores illos per omnia ſerio loquutos ſuſpicabitur, ſed ſaltem ſeria ludis immiſcuiſſe.

Et quidem ſi hoc pacto ſe intellectum velit Clariſſimus Vir; exiguum eſt admodum quod ego in contrarium dicendum habeo: Niſi quod nollem ſacratiſſimum Dei nomen, quod in Præfatione ſua aliquoties uſurpatum video, ludendo uſurpari. Quippe ſacratius illud eſt quam ut jocis noſtris ironice immiſceatur. Cætera quod ſpectat; poſſum quidem ego ſive ludos ſuos, ſive joco-ſeria, atque ingenioſe dicta in re ludicra, æquo animo ferre. Nec enim ego quicquam video, quidni & in Mathematica, utut ſevera diſciplina, etiam ludere quantiſper liceat; &, reliquorum aſperitatem, lepide, faceteque traditis, nonnunquam demulcere.

Verum ſi omnino ſerio agat Vir Clariſſimus, (quod nonnullos arbitrari video,) veroſque ſe de Pythagora, Eudoxo, Euclide, Ptolemæo, Archimede, Apollonio, Theone, Pappo, Eutocio reliquiſque ex veteribus Choragis (ne & recentiores nominem Mathematicos,) triumphos agere cenſeri velit: Duo omnino ſunt quæ me impediunt ne ipſi poſſim hac ex parte conſentire. Alterum, quod quicquid ipſe veri ſubſtratum habet, minime novum ſit; ſed & veteribus olim cognitum, & recentioribus etiamnum Mathematicis probe perſpectum. Alterum, quod quæ ipſe in Matheſin videtur introducturus nova; ea plane falſa ſint, & res nihili.

Non interim ignoro, quam de hoc invento ſuo altum ſentire videatur. Quod vel in limine cuivis obvium eſt. Tum ex eis quæ ad Regem habet, Epiſt. pag. 5. *In traditis autem illis* (de Rationum doctrina) *Elementis quanquam Divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, & quotquot unquam Pythagorici floruere, deſudarunt; primus omnium eruditam vetuſtatem, quantum ex ſcriptis illius ſcitur, ingenti molimine, quod præfiſcini dixerim, ſuperavi.* Tum ex ipſius ad Lectorem præfatione, quam (quaſi univerſus orbis ipſi gratulari debeat) his verbis orditur; *Quod Orbis literatus gaudeat! Poſteritas grata memoria recordetur!*

Primi novas Geometricarum rationum leges in natura deteximus; *& falsas propositiones in eo libro invenimus, quem ultimæ antiquitatis Divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, ex Ægyptiorum & Patriarcharum inventis condiderunt, omnium autem seculorum præcipui Philosophi & Sapientes legendo examinarunt.* (Quod quidem quot parasangis inventum Columbi, novum orbem indicantis, antecellat; deinceps multis exponit.) Egregium equidem facinus! & Viro dignum! Cui, si libet, Prologum faciamus, *Magna petis Phaeton* ——— Metuo enim ne & congruum sortiatur Epilogum,

——— *Magnis tamen excidit ausis.*

Quid autem tanti moliminis opus susceпturo animos fecerit, si dubitemus; exponit ipse, pagina sequente; nempe quod nihil sibi arduum fore aut inaccessum, experimento jam sæpius edoctus fuerit. Quippe huc spectare videntur quæ illic habet: nempe, Jam *Illo tempore tot locorum in desperatis auctoribus restitutione, quasi perpetuis victoriis, animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum in scientiis, quæ quidem ratione aliqua constitutæ essent, inveniri arbitrabar, ut, si ingenii nervos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem.* Virum itaque jam videtis facinori parem.

Hoc animo fretus, (quod præfat. pag. 3. indicat,) *Principia quædam Geometrica convellere suscepit.* Et quidem, *ut sciolum vulgus, etiam intelligendi difficultate, ab his arceret*; *breviter & presse omnia primum conceperat.* Et quanquam, *mutata deinde sententia, interpolata multa fuerint & late explicata, quæ ad intelligendam doctrinam ipsam pertinere viderentur*: *Ut tamen sciolos* adhuc *torqueret, multa concinne admodum & jucunde excogitata,* etiamnum *omisit.*

Nequis autem, *audaciores* jam *fieri homines, non sapientiores,* causetur, qui veterum tradita, *adamantinis fundamentis* suffulta, ausint sollicitare; ipsumque, *nugis suis animatum, Sisyphi saxo majus volvere,* suspicetur; adeoque vel *Josephi Scaligeri* infortunio monitum, qui *impotenti animo divini Archimedis nomini insultarat,* ab his inceptis deterreri posse, vel etiam debere: Ille potius, *immortalitatem ex novis suis in hoc pulvere inventis consequi anhelans, omnem sibi posteritatem demereri posse,* confidit; Neque tantum Euclidis *præcipua quædam Geometriæ Elementa* convulsum iri; sed & simul *Archimedis*; veterumque *omnium, famam, & doctrinæ soliditatem, ineluctabili quodam fato, hoc tempore ruituram.* Nempe huc spectant, libri sui paginæ primores septem.

Quum itaque non modo, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarunt,* sed & *quædam, quæ veteres recte docuerant, siniſtra recentiorum interpretatione sunt depravata*: Utrique malo succurrendum statuit, pag. 9. *Itaque & recentiores omnes,* inquit, *reprehendam, qui antiquos non intellexerunt*; *& antiquos corrigam, qui male quædam prodiderunt*; *utrosque insuper nova docturus.* Atque hæc quidem est suscepti ratio.

Quanta vero hoc cura præstitum fuerit, successu quanto; non item gravabitur indicare. Quamvis enim, pro eo quo erat acumine, & sagacitate, *duarum horarum spacio illius doctrinæ fundamenta excogitaverit,* quam tum Veteres tum Recentiores omnes hactenus ignorarunt: attamen, ne, nimis festinans, aut cæcos parturiret catulos, aut informes; lambendo, & relambendo, satis prospexit: quippe *in quibus deinde examinandis integro quinquennio fuit occupatus,* Præfat. p. 2. quod & subinde itidem monet pag. seq. Successu autem eo factum est, ut & *Deo opt. max. humillimas,* inquit, *gratias agere deberem, qui, ad inveniendum, ingenium suffecit*; *& disciplinis Mathematicis gratulari, quod certiora in posterum tradere possint*: Ideoque eo magis, quo *majus est falsum invenisse, quod omnes sapientes verum credebant*; *quam novi aliquid in eo reperisse, de quo multi ante dubitarant,* quod monet præf. p. 1. Et propterea, non tantum *Eutocium, Theonem, totamque antiquitatem,* nedum *juniores omnes,* crassissimæ incusat ignorantiæ, pag. 88, 89, 99, 100, 101, 127, 161, 165, 166, 167, 169, 173. Verum &, *ut Euclides,* tanquam *in hac causa victus, circinum & regulam* sibi *tradat,* modestus petit. pag. 148. Atque, se judice, *immortalem sibi inventionis gloriam comparavit.* pag. ult.

Quoniam autem, utut *sciolum vulgus arceat,* quid tamen *lector candidus & eruditus judicaverit,* audire non refugiat; præf. pag. 3. satis forsan securus, te album inde calculum reportaturum; nec adversam metuens sententiam, *quod,* inquit,

quit, *judicium contra quinquennale examen magno molimine intercedet*: Non abs re fore judicavi, hanc novam ipsius doctrinam ad examen vocare; ne sibi opus sit, quod facturus videtur, *Elementorum librum quintum, editione sua*, commaculare. Quippe ego me *Lectorem candidum* spondere aulim, quam interim *eruditus*, penes alios esto judicium.

Et quoniam, *Harmonicorum ignoratione, recentiorum errores succrevisse* (ibidem) suspicatur; quod & subinde aliquoties repetit: præsertim pag. 196, nempe *Juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam considerassent, adeoque, quid Ratio esset, ignorarent, monstrosam, & contra naturæ decreta natam, Rationis Compositionem*, excogitasse: Et pag. 101. *Illos*, inquit, *errores, ob neglectum Musices studium, Mathematicis Deus immisit; uti olim Deliis Apollo pestem, quod Geometriæ nullam illi operam darent.* Et quæ sequuntur. (Quasi quidem ex Harmonice statuminanda esset Geometria, potius quam, ex hac, illa.) Et proinde (ut ait, præf. pag. 3.) *Hoc maxime optaret, tam sua quam Lectoris gratia, qui ad hæc legenda & examinanda accedet, ut antequam censoria virgula quidquam damnare suscipiat, exempla hujus novæ doctrinæ, quæ in Harmonicis natura monstravit, probe perpendat, &c.* Sciat, velim, etiam hac ex parte optioni suæ satisfactum iri. Neque me ab Harmonicis eousque abhorrere, quin quæ inde protulerit probe intellexerim, & quantum satis est perpenderim. Utut ego interim nihil ex Harmonicis productum video, quod vel profundæ admodum sit speculationis, vel sensis suis impense faveat.

Priusquam autem novæ hujus doctrinæ medullam attingam, occurrit in limine, quod monet, præf. p. 6. de *Authorum locis* aliquot, quæ *Græce & Latine edenda censuit. Quantum*, inquit, *in vertendis illis & emaculandis* (utinam non & commaculandis aliquoties) *præstiterim, illi demum cognoscent, qui aliorum versiones inspexerint. Nam &* (quod quidem verum est, nec vel ipse hac ex parte excusandus est) *doctissimi quidem viri, in his interdum hallucinati sunt.*

Quam enim, inquit, *turpe est, quod Jos. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis summus,* ὀρθογώνιον ὑπὸ AB, BΓ, *interpretatus sit, Clavium aliosque, etiam doctos viros, sequendo,* [Rectangulum sub AB, BC,] *cum vertendum esset* [Rectangulum ab AB, BC,] *nempe* contentum, παραλληλόγραμμον. Quod quidem, utut censuram forte aliquam mereri possit, (nam revera, τὸ ὑπὸ AB, BΓ, vel ut brevius dici non raro solet, τὸ ὑπὸ ABΓ, latinius dicendum esset, *quod rectis* AB, BC, vel simpliciter, *quod ab ABC, continetur rectangulum*;) tamen nec adeo *turpe* est hoc Sphalma, (cum sensum haud omnino immutaverit,) nec etiam ab ipso primo detectum. Id enim jam olim, ante annos plus triginta notaverat Honoratissimus D. *Henricus Savilius*, (à me non sine honore nominandus,) in suis ad Euclidem prælectionibus.

Verum id omnino turpius est, quod ab hoc authore sæpissime peccatur; dum nempe, (illud Scaligeri mendum vitare volens,) τὸ ὑπὸ, & τὸ ἀπὸ, (quæ apud Euclidem, reliquosque, accuratissime distinguenda sunt, quippe diversi admodum significatus,) ille plane confundit; utramque exponens per Latinorum *a*, vel *ab*. Exemplum esto, pag. 48. l. 17. φημὶ δή, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ AΘ ὅλῃ τῇ ΘH, μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΓΘ ὅλῃ τῇ ΘZ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ AΘ πρὸς τὸ ὑπὸ BΘΓ· τετέσται, τὸ ἀπὸ AΘ ὅλῃ τῇ ΘH, πρὸς τὸ ὑπὸ BΘΓ, ὅλῃ τῇ ΘH. Ubi ni accuratissime distinguantur τὸ ἀπὸ, & τὸ ὑπὸ, (quorum illud Quadratum innuit, hoc Rectangulum,) nihil inde sensus elicietur, sed confundentur omnia. At horum ille utrumque per *a*, vel *ab* indiscriminatim reddit; Et, nisi ex abundanti suppleviſſet voces *Quadratum* & *Rectangulum*, quæ in Græco textu non habentur, confudisset omnia. Sic enim reddit (neglecta plane præpositionum vi,) *Atque hinc quoque dico*, quadratum *a AH in HG*, ad quadratum *a CH in HF, majorem rationem habere, quam* quadratum *ab AH ad* rectangulum *a BHC*: hoc est, Quadratum *ab AH in HG, ad* Rectangulum *a BHC in HG.* (Et sic multoties tum illic, tum alibi passim.) At omnino potius esset (quod fecerunt quos ille culpat) ut ὑπὸ *sub*, & ἀπὸ *ab*, reddatur, (utut minus Latine forsan, at magis distincte, quod quidem hic spectandum erat,) quam ut utrumque per *ab* efferatur. Vel saltem, si (ut genuina vis præpositionis ὑπὸ retineatur) τὸ ὑπὸ BΘΓ, hoc est, τὸ ὑπὸ δή BΘ, ΘΓ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, reddatur *quod* (*rectis*, vel) *a rectis BH, HC, continetur Rectangulum*, (nam ὑπὸ, cum Genitivo constructum, agentem ut plurimum indicat, sicut apud Latinos *ab*:) tum nullo modo commodum est, ut & ἀπὸ sic

 reddatur;

reddatur; puta, τὸ ἀπὸ Α Θ, hoc est τὸ ἀπὸ τῆ Α Θ γραφόμενον τετράγωνον, reddatur *quod a recta AH describitur quadratum.* At inquiet, Annon ἀπὸ significat *ab*? Omnino, inquam, (sicut & ὑπὸ significat *sub.*) At non, sicut *quod rectis BH HC continetur rectangulum*, illæ rectæ continent; sic *quod recta AH describitur quadratum*, illa describit recta; sed potius Geometra *ad* illam rectam, vel *super* eam. Vertendum igitur esset τὸ ἀπὸ Α Θ, *quod ad*, vel *super*, *AH describitur*, aut fit, quadratum: vel etiam per *ex*, ut τὸ ἀπὸ ξύλε (γενόμενον) Latine dicitur, *quod ex ligno fit*: vel denique, citra præpositionem, quadratum rectæ A H: Non autem, quod hic author ubique facit, quadratum *ab AH*, ob causam jam supra dictam. Atque hoc quidem ad ipsius Criticismum critice reponendum duxi.

At interim non nego quin hac ex parte laudandam nonnunquam præstiterit operam. Sed & non raro, quæ vel maxime erant emendanda, ille minime animadvertit. Non raro etiam, quæ prius erant sat recte constituta, reddidit depravata.

Ejusmodi quidem ego ipsius παρεσίαν reputo, quod, dum in rationis definitione, 3 *d* 5. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ κάσις, magna disquisitione inquirit, quid sit illud ἡ κατὰ πηλικότητα· (de quo post videbitur.) quid interim illud ποιὰ κάσις significet, neutiquam est solicitus. Sed (alios, fateor sequutus) exponit *quædam relatio p.* 9. *l.* 24. vel, ad summum, *certa quædam relatio, p.* 10. *l.* 27. Et alibi, (ut & similem Aristoxeni definitionem *pag.* 83. *l.* 20.) quasi quidem ποιὰ tantundem significet atque τὶς *quædam*, vel *certa quædam.* (Sic in Euclidis Introduct. Harmonica; *pag.* 1, 2, 43, 49.) Cum certum sit ex perpetuo istius vocis usu, ποιὸν, qualitatem respicere: neque tam indefinite *aliquam*, quam *aliqualem*, seu potius *qualitativam* habitudinem hic innuat; quæ nempe prædicamentum Qualitatis spectet. Et quidem in accurate definiente, nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinite *relatio quædam*, sed determinandum erat; *quænam* relatio. Cum enim ut est notissimum varia sint admodum relationum sive habitudinum genera, determinandum erat (siquid definite proferre vellet) quod genus relationis hic spectetur.

Nec quidem sufficit, quod dixerit Euclides ἡ κατὰ πηλικότητα *secundum quantitatem*; nam vel ipsi κατὰ πηλικότητα κάσιων sunt etiam varia genera. Atque hoc quidem potuisset ille (ni maluisset depravare) ex scholiaste didicisse, quem citat *pag.* 11. *l.* 25. λέγεται δὲ καὶ ἄλλη κάσις, κατὰ τὸ ἔχειν (*lege* ὑπερέχειν) καὶ ἐλλείπειν. *Est autem & alia* (inquit) *quæ dicitur relatio, secundum excessum & defectum.* Nempe, præter eam, de qua illic agitur, relationem, quæ *Ratio* appellatur, est & alia, inquit, Relatio sive habitudo, quæ *Differentiam* spectat, sive excessum & defectum: quæ & ipsa quidem est ἡ κατὰ πηλικότητα κάσις, (prout hic ille intelligit πηλικότητα,) sed non ποιὰ κάσις: quippe illic solummodo excessus, quantitas spectatur, non qualitas; sive, *quanto* sit hoc illo majus, non *quantuplo.* Dum autem hic Author, pro ἄλλη legendum vult ἄλλως, prorsus hallucinatur. Non enim (quod ille putat) de qua agitur relatio, quæ *Ratio* dici solet, eadem & alio nomine dicitur *Relatio secundum excessum & defectum*; sed plane alia. Estque hoc suorum διαλογισμάτων unum.

Sin quæratur, Ecquid hic Qualitatum sit, in Ratione sive Proportione? Notissimum certe est, ut figurarum Magnitudinem ad Quantitatem spectare, ita & figurarum Speciem ad Prædicamentum Qualitatis, nempe ipsius (ut loquuntur) speciem quartam. Constat autem Figuratio, sive specierum figuræ determinatio, duabus potissimum partium ad invicem habitudinibus; puta Ratione, & Inclinatione. Quarum itaque utraque est ποιὰ κάσις, ut quæ Quantitatis Qualitatem, puta Figuram determinant. Illa quidem κατὰ πηλικότητα, hæc autem κατὰ τὸ κεῖσθαι· quippe ex comparatorum Quantitate (secundum Quotientem æstimanda) dependet illa, hæc ex Situ. Atque hæc quidem si probe intellexisset hic Author, non tantum sibi facessere negotium opus haberet, ut, quid sit ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ κάσις, magno molimine exponeret.

Alterum ejusdem παραδόξωμα, (quo *pag.* 13. *l.* 2. & 9. pro ἀριθμοῖς perperam substituisset λόγοις,) cum ipse in erratorum catalogo revocaverit, ego pro restituto habeo, adeoque prætereo.

Dum vero *pag.* 10. & 11. (& alibi passim.) pro *Quanto* substituit *Quotum*; & pro *Quantitate*, *Quotitatem*; id admodum absurde factum videtur. Ecquis enim mortalium τὸ ποσὸν *p.* 10. *l.* 17. (quod in συνεχὲς & διωρισμένον mox est distribuendum) interpre-

interpretatus esset *Quotum*? Et quis, quæso, non plane mirabitur, dum hæc verba, (*lin.* 23.) πηλικότης τὸ πέρας ὅτι τῆ συνεχοῦς ποσοῦ καὶ ποσότης τῆ διωρισμένης· exponi videat, *Quantitas est terminus continui quoti, & quotitas discreti*? Cui & simile mox occurrit, (*pag.* 11. *l.* 3.) *Differunt* τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν. *quod* τὸ πηλίκον, *ad quotitatem continuam referatur.* τὸ ποσὸν *ad discretam.* Dic, o bone, quis unquam ita *continuum quotum*, dixerit, aut *quotitatem continuam*? Solemus quidem non raro *Quantitatem*, tum de continuo, tum de discreto dicere; de magnitudine, inquam, perinde atque de multitudine. At qui ita *Quotitatem* dixerit, tu certe primus es mortalium. *Quantus numerus*, interrogabit quilibet; at *quot magnitudo*, quærit nemo; sed *quantum magnitudinis.*

At, inquit, ποσὸν *verti* quotum *potius quam* quantum, *ne cum* πηλίκον *id confunderem. Differunt enim mathematicis* τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν, *quod* τὸ πηλίκον, *ad quantitatem, seu potius quotitatem, continuam referatur*; τὸ ποσὸν, *ad discretam*: *quomodo & in hoc Scholio accipiuntur* πηλικότης & ποσότης; *adeoque hoc ultimum novo vocabulo, necessitate adductus, verti* Quotitas.

Miror equidem, quam hæc parum critice, à viro Critico, sint prolata! De *quotitate continua*, modo dictum est. Si enim, quod ille vult, *quotitas* ad discretam tantummodo spectat quantitatem, quî poterit ille sine absurdo dicere *quotitatem Continuam*? Deinde, dum innuit, τὸ ποσὸν *ad discretam quantitatem referendum*, non item ad continuam; iterum hallucinatur. Non enim τὸ ποσὸν (*quantum*,) sed τὰ πόσα (*quot*,) de quantitate discreta speciatim dicitur. Ποσὸν autem, vel de quantitate in genere, prout utrique speciei (continuæ & discretæ) indifferenter se habet, vel etiam speciatim de continua dici solet. Et ποσότης in scholio (prout πηλικότητι opponitur, & ad discretam quantitatem restringitur) sat quidem recte *quotitas* vertitur; non autem tam à ποσὸν, quam à πόσα, dici intelligendum est. Quod autem ille inter τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν discrimen assignat, omnino suum est, non Mathematicorum. Sunt enim vel plane idem, (quoties nempe τὸ ποσὸν de continuo speciatim dicitur;) vel saltem τὸ ποσὸν tanquam genus tum de continuo tum discreto indifferenter dicitur; τὸ πηλίκον, speciatim de continuo. Dum vero se ποσὸν, *quotum* vertisse dicit, ne cum πηλίκον id confunderet; admodum & hoc imprudenter factum est; vertisset siquidem (suo sensu) ποσὸν *quantum*, & πηλίκον *quam magnum*, (ut genuina utriusque vocis vis conservaretur;) πόσα denique *quam multa.* Quippe τῆ ποσοῦ *quanti*, duæ sunt species, πηλίκον *quam magnum*, & πόσα *quam multa.* Vel, si abstractis potius uti placeat, *Quantitatis* duæ sunt species, *Magnitudo* & *Multitudo.* Sin metuat, ne hinc πηλικότης & μέγεθος confundantur; Dico, primo, non magnum illud esse incommodum, si (quod contendit hic author, *p.* 86. *l.* 9. & alibi) tantundem significent. Deinde, ut accuratius respondeamus, dico vocem μέγεθος, nonnunquam sensu concreto significare *rem magnam*, nonnunquam sensu abstracto *rei magnitudinem*, seu grandoris mensuram; priori sensu, per *magnum* exponi poterit; posteriori, plane idem esse atque πηλικότης seu πηλίκον, *magnitudinem*, seu *quam magnum.* Denique, sin adhuc duabus vocibus Græcis, utut synonymis, duas Latinas aptare volet, poterit alteram, *magnitudinem* appellare; alteram, *grandorem.* Ut nullo modo opus sit *quoti* aut *quotitatis* vocem, pro *quanto* aut *quantitate*, præter omne exemplum, substituere, ubi vel de *quantitate* continua, vel etiam quantitate in genere, verba fiant. Ubi vero, quod non raro fit, τὸ ποσὸν, generis appellatio, attribuitur quantitati discretæ, (quo sensu *Equus* dicitur *animal*, aut etiam *sentiens*,) ferri quidem potest, ut *quoti* voce vertatur: Nec tamen interim necessario fit; nam & *quantus numerus*, & *quanta multitudo*, sine solœcismo dici consuevit; & quidem melius quam *quotus numerus*, *quota multitudo*; quippe *quotus*, potius ad numeros (ut loquuntur) Ordinales quam Cardinales respicit; & quærenti *quotus*? respondendum potius *primus, secundus, tertius, &c.* quam *unus, duo, tres, &c.* Et quidem vel magnitudinum voces omnes, etiam Multitudini non raro attribuuntur; puta dum numerus alius alio *major* dicitur, aut *minor*; item *maximus*, & *minimus*; sed & *magnus, parvus, &c.* ut nullo modo mirandum sit, numerum dici, ποσὸν *quantum*; nec opus sit ut *quotum* substituamus.

Ejusdem commatis est, quod *pag.* 87. *l.* 9. Ἐπειδὴ τῆ ποσοῦ, τὸ μὲν ὅζιν ἐν τοῖς συνεχέσι σώμασιν, ὃ δὴ μέγεθος καλεῖται, ἀεὶ ὅ ὅζι μάλιστα ἡ γεωμετρία· τὸ δ' ἐν διεζῶσιν, ὅσῳ ἀριθμὸς κατέσηκε, ἀεὶ ὧν ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται. Exponit, *Quoniam Quoti aliud est in corporibus continuis, quod Magnitudo vocatur, circa quam imprimis versatur Geometria*; *aliud*

in discretis, quod Numerus existit, circa quem Arithmetica occupatur. Quasi quidem *quotum* genus esset ad *quam magnum*, & *quam multa*. Neque hilo melior est, quam subjungit, correctio, *lin.* 17. *Rectius forte* τὸ ποσὸν *verteretur* Aliquotum, *quia* πόσον est *Quotum.* Imo, inquam, rectius verteretur *Aliquantum*, quia non *quotitas*, sed *quantitas*, genus est ad magnitudinem & multitudinem.

Sed nimius essem si ipsius omnia vel παραράματα vel παραδιορθώματα, quæ passim admisit, notare velim. Utut enim Criticus admodum videri velit, aut etiam Hypercriticus, (alioqui *ignorantiam* & *neglectam Græcæ literaturæ culturam*, quasi ipse solus intelligat, multoties exprobret;) quin potius Παραχριλικὸς non raro habendus sit, ego nullus dubito; nec, credo, dubitabunt alii, si vel censuras ejus critice expendant. Ego, omissis aliis, eorum unum aut alterum, quæ ad præsens spectent negotium, adhuc expendam.

Horum alterum, Archimedis *prop.* 8. *lib.* 2. de sphæra & cylindro, spectat, cum Eutocii in illam commentarius, p. 41. & seqq. Cum enim se alibi, in librariorum mendis expurgandis, diligentissimum ostendit; & laudandam aliquando operam impendit: hic, vel data opera, negligens videtur. Nam *p.* 41. *l.* 27. pro διπλάσιον (quod librariorum incuria irrepserat) restituendum erat διπλασίονα. (Sic Euclid. Sect. Canonis. p. 28. 66.) Quod quidem librarii mendum esse, vel hinc patet, quod in hujus propositionis, tum ἐκθέσει *p.* 42. *l.* 4. tum συμπεράσματι *p.* 45. *l.* 16. (ubi ipsa propositionis verba erant recitanda,) legitur διπλασίονα, non διπλάσιον, quod indicio est, ita in ipsa propositione lectum fuisse. Sed & sic legitur sæpius in demonstrationis curriculo, *p.* 44. *l.* 6, 9, 11. & in commentariis Eutocii, *p.* 49. *l.* 29. & *p.* 55. *l.* 22. & *p.* 60. *l.* 18. 29. & *p.* 62. *l.* 15. 23. & τριπλασίονα *p.* 55. *l.* 19. Similiter *p.* 43. *l.* 9. ubi item mendose legitur διπλάσιον, restituendum erat διπλασίονα. Quod quin librarii mendum sit, minime dubitandum est; quoniam ubi hic ipse textus ab Eutocio recitatur *p.* 49. *l.* 29. recte legitur διπλασίονα. Atque eadem etiam adhibenda erat correctio, *p.* 43. *l.* 3. & *p.* 45. *l.* 29. & *p.* 60. *l.* 13. Similiter ubi in editione Basileensi mendose legeretur λόγῳ διπλάσιον, ille non minus mendose substituit, λόγος διπλάσιος, *p.* 55. *l.* 6. cum omnino substituendum esset λόγος διπλασίων, quod quidem vel ex *l.* 9. satis est manifestum ubi διπλασίων legitur, ut & *p.* 64. *l.* 4. Eodem modo ubi alibi in eadem editione Basileensi, corrupte legitur διπλάσιον, substituit ille διπλασίω, *p.* 47. *l.* 14. cum potius substituendum esset διπλασίονος. Sed & alibi pro διπλάσιος, substituendum διπλασίων. *p.* 60. *l.* 32. & *p.* 92. *l.* 11. & *p.* 63. *l.* 7. Et pro τριπλάσιος, τριπλασίων, *p.* 63. *l.* 10. & *p.* 64. *l.* 9. & pro διπλάσια, διπλασίονα, *p.* 54. *l.* 15. Quanquam enim, huic quidem authori, perinde forsan sint λόγος διπλάσιος & λόγος διπλασίων: non tamen veteribus Geometricis perinde significant: quod sive ille neget, sive ignoret, probe norunt alii.

Parem emendationem desidero, Scholii *pag.* 30. Nempe *l.* 32. pro διπλάσιος; substituendum διπλασίων· & *pag.* 31. *l.* 35. pro τριπλάσιον, τριπλασίονα· & contra *l.* 16. pro τριπλασίονα, substituendum τριπλάσιον. Sed & ibidem ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν δύο, exposuisset potius *rationem ex binis compositam*, quam *rationem ex binis constantem.* Adeoque sensus, qui jam plane turbidus est, perspicuus esset; Οὐ λέγει, ὅτι δύο λόγοι τῷ ἑνὶ διπλάσιοί εἰσι· καὶ τοῦτο μὲν γὰρ. ἀλλ' ὅτι ὁ λόγος, ὁ ἐκ τῶν δύο, διπλασίων ἐστίν. Hoc est, *Non dicit* Euclides (10 *d* 5) *duas rationes unius esse duplas*, (puta $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\times 2=\frac{6}{2}$,) *quod etiam verum*: *sed rationem, ex binis compositam esse duplicatam*; puta $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ esse duplicatam rationis $\frac{3}{2}$. quo quid esse potest magis perspicuum? Hoc autem, dum ille sic exponit, *Non dicit, duas rationes unius esse duplas*; *quod etiam verum*: *sed rationem ex binis constantem esse duplam*; ecquis inde sensum ullum commodum eliciet? (quam frigide autem hoc interpretetur Meibomius *pag.* 171. *l.* 10. qui volet, videat.) Sed & sequente *pag. l.* 35. pro τριπλάσιον, legendum τριπλασίονα, & contra *l.* 15. pro τριπλασίονα, legendum τριπλάσιον.

Supereſt adhuc aliud, quod & omnium turpissimum est, παραδιορθωμα. quo perpetuo peccat; & quidem data opera. Nempe, cum apud Euclidem, reliquosque, λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος, &c. atque λόγος διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. immane quantum discrepent; Ille hæc ubique, vertendo, confundit; nec aliter hæc quam illa exponit. Neque solum ipse negligit, sed nec ab aliis observari discrimen patietur. Adeoque cum interpretes Latinos videat, *Campanum*, *Clavium*, &c. (quo discrepantiam illam utcunque retineant) illic rationem *duplam*, *triplam*, &c. dixisse; hic *duplicatam*, *triplicatam*, *quadruplicatam*, &c. *quam deinde* (ut ait pag. 173.) *loquendi formulam omnes Mathematici usurparunt*: exclamat

clamat ille, (quasi horrendum aliquod facinus accidisset,) *O stupendam Græcæ Linguæ ignorantiam*! (quod nempe nesciverint homines τὸ ἅπαξ, & τὸ ἅπαξ, iisdem vocibus Latinis efferre : neque λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα confundere :) *atque erroris fæditatem*! (quod nempe malint distinctius loqui :) *qua non vulgus Mathematicorum, sed Duces atque Principes inclaruerunt*! Nempe non modo interpretes Latini, sed & ipsi Græci, Euclides, Theo, Eutocius, &c. quibus diversa sonant διπλάσιος & διπλασίων· quippe nesciebant pariter, tum hi, Græce loqui ; tum illi, intelligere : utpote ab *Euthymio*, *Hermotimo*que, (quæ sibi fecit nomina *Meibomius*) nondum edocti.

Dicet fortasse ; διπλάσιος & διπλασίων, si Etymon spectemus, perinde significare ; nec esse cur hæc vox magis quam illa reddatur *duplicatus*. Fortasse quidem. Sed nec, inquam, si derivationem spectemus, differre videbuntur *duplus* & *duplicatus*, (atque alibi forsan, extra hunc casum, promiscue usurpantur,) at saltem usu differunt, tum λόγος διπλάσιος & διπλασίων, tum *ratio dupla* & *duplicata*.

Dicet porro, Lexicographos, & nominatim Stephanum, pro Synonymis habere. Nec mirum, inquam, Lexicographos, (utut viros doctos, & Græcæ Linguæ peritos, si non & peritos Mathematicos,) haud semper Lynceos esse in vocabulis Mathematicis interpretandis : (præsertim dum quid ex usu Mathematicis peculiari, magis quam ex vocis Etymo, dependeat :) Neque enim tam à Lexicographorum interpretationibus, quam à Mathematicorum definitionibus, petendæ sunt ejusmodi vocum interpretationes. Et quidem, iisdem Lexicographis, ὁπιμόριος & ὁπιμερὴς tantundem significant : Nec tamen interim volet, credo, Meibomius, ut λόγος ὁπιμόριος, & λόγος ὁπιμερὴς, apud Mathematicos, promiscue usurpentur.

Missis autem his criticismis, (qui ad Grammaticam magis pertinent, quam Geometriam,) ipsius de Rationibus & Proportionibus novam doctrinam perpendamus.

Ratio, inquit, *quæ Græcis* λόγος *dicitur, secundum quam hoc ad illud rationem habere adfirmamus, Duorum ejusdem generis terminorum inter se certa relatio, definitur*. pag. 9. At, inquam, mutila est hæc definitio ? Annon enim Pater & Filius, sunt *termini ejusdem generis* ? Annon eorum inter se relatio, puta Paternitas & Filiatio, est *certa relatio* ? At ea certe *Ratio* non est, de qua jam agitur. Claudicat itaque hæc definitio. Sed vel *Magnitudinum* ad invicem *relatio*, aut etiam *certa relatio*, non omnis, est *Ratio* : nam λέγεται ἡ ἄλλη σχέσις, κατὰ τὸ ὑπερέχειν ἢ ἐλλείπειν, ut ex Scholiaste modo audivimus ; quæ & ipsa non minus est *certa relatio*, quam quæ *Ratio* dicitur.

Deinde Rationem distribuens, pag. 13. &c. aliam vult esse *Rationem Æqualem* ; aliam *Inæqualem* ; & quidem vel *Majorem*, vel *Minorem*. Cum dixisset potius, *Rationem æqualitatis, inæqualitatis, majoritatis, minoritatis* ; vel etiam *Rationem æqualium, inæqualium, majoris, minoris*. Nempe hoc vellet, loquitur tamen minus accurate. Quippe Rationum nulla non est tum æqualis, tum inæqualis, & quidem tum major, tum minor, prout illa cum aliis aliisque comparatur. Puta ratio 3 ad 2, æqualis est rationi 6 ad 4, major autem ratione 6 ad 5, minor tamen quam 6 ad 3. Rationem autem *majorem* (intellige, rationem majoritatis,) subdividit in *multiplicem, superparticularem*, (superpartientem, sive, ut ille loqui malit,) *superpertem, multiplicem-superparticularem*, (multiplicem superpartientem, sive) *multiplicem-superpertem* ; recepto more. Et rationem *minorem* (seu potius, minoritatis) similiter in *submultiplicem, subsuperparticularem &c.* eodem modo quo alii. Quibus dum ille *certiora tradi posse* insinuat ; metuo ne quæ ille pro certioribus habet, pro magis incertis sint habenda, quod suo forsan loco, cum ipsa protulerit, videbitur.

Dum autem huic distributioni hoc subjungit (p. 15.) *Porro & hoc monendum, numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum : cujus rationis est limma in Harmonicis, contentum his minimis numeris, 256 ad 243* : Omnino somniasse videtur. Nam neque id verum est ; nec quam adfert instantia hujusmodi quicquam suadet. Est enim ratio 256 ad 243, superpartiens ; nempe supertredecupartiens ducentesimas quadragesimas tertias : ut dividendo patet. Nempe 243) 256 ($1\frac{13}{243}$. Verum quidem est ; in quantitatibus *Irrationalibus* (ut loquuntur) Rationes esse innumeras quæ ad hæc genera non reducuntur. At in numeris, (sive integris, sive etiam fractis,) qui quidem sunt rationales inter se omnes, nulla est quæ ad illorum generum aliquod non reducatur.

Sed,

Sed, his missis, ad ea quæ sibi potissimum tradenda suscepit properabimus. Sunt autem ea saltem hæc quatuor. 1. Eutocium, cæterosque, non intellexisse quid sit πολλαπλότης: & *rationum* πολλαπλότητας male per divisionum quotientes æstimasse. Adeoque quid sit *rationum compositio* parum intellexisse. 2. Non aliam esse rationis *duplationem, triplationem*, &c. quam quæ definitur *duplicatio, triplicatio*, &c. 10 *d* 5. Adeoque perperam locutum Theonem, aliosque, qui *sextuplum* esse volunt *tripli duplum*. Et non nisi ob stupendam Græcæ Linguæ ignorantiam, alio sensu usurpari rationem *duplicatam, triplicatam*, &c. atque *duplam, triplam*, &c. quo nempe διπλασίων, τριπλασίων, &c. & διπλάσιος, τριπλάσιος, &c. distinguantur. 3. Non eam semper rationem majorem dicendam esse, quæ majorem quantitatem innuit, (puta $\frac{2}{3}$ quam $\frac{1}{4}$,) sed eam quæ ab æqualitate magis recedit, seu cujus termini magis inter se distant, (puta rationem $\frac{1}{4}$ majorem esse quam $\frac{2}{3}$,) & propterea, quæ æqualiter ab æqualitate recedunt (puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$) invicem æquales esse. 4. Et propterea, dum Euclides, reliquique ad unum omnes Geometræ, rationem, verbi gratia, $\frac{1}{4}$ minorem habent quam $\frac{1}{2}$; tum Euclidis aliorumque nonnullas, tum Gregorii à Sancto Vincentio, *plus centum & triginta propositiones* hoc nomine *falsas* esse clamitat.

His ut viam sternat, continuis 55 paginis (nempe à pag. 16, ad p. 70. inclusive.) Ex Eutocio, Euclide, Archimede, &c. loca quædam Græce & Latine recitat, quæ secuturæ tractationi materiam administrent.

Tum p. 70. 71. rationem $\frac{81}{80}$, *quam*, inquit, *Commatis rationem recentiores faciunt*, ille centies & duodecies componit; hoc est, $\frac{81}{80}$ toties positam continue multiplicat; sive, quod tantundem est, radicis $\frac{81}{80}$, tot continue sequentes potestates investigat. Cui bono, ipse viderit.

Deinde, totis continuis quatuor paginis, docet, in Minutiis, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$ (quod quis nescit?) Item $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}+\frac{7}{12}=\frac{24}{12}=2$. Sed & $\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$. Et $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{8}{6}+\frac{9}{6}=\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}$. Quæ siquis antea nescíverit, ab Euthymio, per me licet, discat.

Verum (inquit p. 66.) *si Rationum magnitudo sit exploranda, illa major est, cujus termini longius inter se distant.* Pulchra quidem definitio! atque Eythymio digna!

At interim longe aliud est sua *major ratio*, quam Euclidis & cæterorum omnium. Quippe illi, per *rationem majorem*, eam intelligunt, *quæ expositæ quantitatis plus indicat.* (Prout ex perpetuo istius appellationis usu, satis abunde constat.) Adeoque triplum duplo majus esse volunt, non quod 3, 1, magis distant quam 2, 1; (quanquam & illud verum sit;) sed quia 3 A plus indicat quam 2 A. Et pari de causa semissem quadrante majorem esse volunt, (hoc est, subduplum subquadruplo,) non quod 1, 2, plus distent, quam 1, 4, (quod falsum est,) sed quia $\frac{1}{2}$A plus designat quam $\frac{1}{4}$A. Et quidem, sicut integrum est semissis duplum, sic & semis est duplum quadrantis; quod quidem (ante Meibomium) omnes sani senserunt.

Ideoque Meibomius vel perperam nova sua definitione explicat quod illi *Majoris rationis* nomine voluere, quippe definitio definito non congruet; vel, si ipse iisdem vocibus aliud quid intellectum velit quam quod illi innuebant, non loquitur ad idem; adeoque absurde admodum eorum propositiones falsitatis incusat, quod novæ suæ nomenclaturæ non conveniant, (de qua nemo sobrius antehac cogitaverit,) si interim veræ sint (quod vel ipse nulla fronte negabit) eo sensu quo tum ipsos loquutos esse constat, tum sani omnes illos intelligebant. Loquebantur siquidem eo sensu quem voces illæ tunc temporis obtinebant, & quidem per omnia retro secula hucusque obtinuerunt, nec alio sensu intelligebantur, aut etiamnum à sobriis intelliguntur: quo sensu si vera sint quæ protulerunt, falsitatis minime sunt accusanda; quis enim illud juste postulet, ut Euclides, ante bis mille forsan annos, conjiceret quo novo sensu has voces usurpaturus esset Meibomius, eique sua dicta accommodaret.

Quo autem sensu loquutus sit Euclides, (reliquique,) nequis dubitet; illud 7ª definitione V^i, (quam ipse refert Meibomius p. 30. l. 4.) determinatur. Ea siquidem definitio, utut aliis verbis, eodem tamen quoad rem sensu quo nos jam diximus, quæ ratio sit apud illos habenda major, ostendit.

Quod autem ille pag. 126. l. 11. *falsam esse* contendat illam libri quinti definitionem *septimam*; omnino ridiculum est. Definitionibus enim suis Mathematici hoc tantum volunt, ut sciat Lector quo sensu hæc aut illa nomina apud se intelligenda

genda velint. Definitionem itaque illam falsam dicere, perinde est atque dicere, Euclidem nolle ut eo sensu vox illa intelligatur, quo intelligendam se velle dicit. Quod ne quidem *Meibomius* dicere sustinebit. Sed neque dicere potest, verbis ita intellectis, ut ea intelligenda se velle dicit Euclides, Propositiones sequentes falsas esse. Hoc tantum ait; *majoris rationis* appellatione se quidem aliud quid intelligere quam quod intellexerat Euclides, (aut etiam alius quispiam sive Veterum sive Recentiorum,) quod nec Euclidis definitioni, nec propositionibus huic definitioni consentaneis congruit; & propterea cum Euclidis definitio & propositiones utut inter se satis consentaneæ, ipsique (eo sensu) veritati, non tamen consentiant novæ Meibomii nomenclaturæ (de qua quidem illi ne per somnium cogitarunt, aut cogitasse debuerunt,) falsæ omnino (per logicam Meibomii) sunt dicendæ. Nempe sicut (quantum ad rationes minoris, ut loquuntur, inæqualitatis) per *rationem majorem* id ille intelligit, quod alii per *minorem*; sic & fortassis per *propositionem falsam*, id ipse intelligit, quod per *veram* alii.

Sed exempla videamus quibus hanc suam doctrinam exponit. *Quomodo* (inquit, *p.* 76. *l.* 3.) *ratio* $\frac{9}{6}$ *major est ratione* $\frac{8}{6}$; (Recte.) *quia nempe inter* 9 *&* 6 *majus est spatium, nempe ternarii; quam inter* 8 *&* 6, *nimirum binarii.* Non, inquam, Ideo. Sed potius quia illic antecedens superat consequentem majore sui parte, puta semisse; hic autem minore, nempe triente. (Saltem si per Meibomium liceat, Semissem majorem dicere, quam Trientem.) Non enim excessus ternarii, determinat rationem 9 ad 6; aut binarii, rationem 8 & 6, (Nam in 10 ad 7, & 11 ad 9, comparatis, id ipsum cernitur;) sed illic excessus semissis; hic, trientis. Porro, 8 & 6, longius invicem absunt, quam 2 & 1; at non item ratio $\frac{8}{6}$ major est ratione $\frac{2}{1}$.

Dicit; intelligendum illud de rationibus tantum ad communem consequentem reductis: vel saltem ad communem antecedentem. Puta $\frac{8}{6}$ & $\frac{12}{6}$. Vel $\frac{8}{6}$ & $\frac{8}{4}$, non autem $\frac{8}{6}$ & $\frac{2}{1}$. Esto.

At, inquam, 1°. Cur non igitur hujus conditionis facta est mentio in definitione? Nempe nihil illic dictum de communi vel antecedente vel consequente. 2°. Etiam ante illam reductionem, non minus sunt illæ rationes, æquales aut inæquales, quam ubi ad eundem terminum consequentem reducuntur. 3°. Fieri etiam omnino potest ut ad communem vel consequentem vel antecedentem minime reduci possint rationes comparandæ; puta, quando termini rationis unius ad rationis alterius terminos sunt heterogenei. Verbi gratia; si ratio ponderis ad pondus, comparetur ad rationem lineæ ad lineam: possunt quidem rationes illæ, (ne refragante, credo, Meibomio,) vel æquales esse, vel inæquales; & quidem vel hæc vel illa major: quî autem possint ad eundem consequentem reduci, nondum ostendit doctissimus vir: neque facile est ostensurus. Si enim volet vel alterius vel utriusque terminos commutandos in alios alius generis; exempli gratia ut ratio ponderis ad pondus, puta quadripondii ad bipondium, numeris exprimatur, ut 4 ad 2; & ratio item lineæ ad lineam, puta tripedalis ad bipedalem, ut 3 ad 2; atque has demum rationes comparandas, ut constet utra major: Hoc, inquam, est petere principium; nam etiamnum interrogabitur, quo criterio juxta hanc doctrinam innotescet rationem 4 ad 2 eandem esse vel æqualem rationi quadripondii ad bipondium, an majorem, minoremve. Nam, propter numeros & pondera invicem heterogenea, comparatio ad eundem terminum consequentem non poterit institui, quod solum est (juxta Meibomii definitionem) rationis æqualis, majoris, minorisve criterium. 4°. Sunt, credo, Semissis, Triens, Quadrans, &c. Sive subduplum, subtriplum, subquadruplum, &c. non minus Rationum nomina quam duplum, triplum, quadruplum, &c. Semissem vero Quadrante majorem esse, nemo sobrius negare debet, quippe qui duobus quadrantibus æquatur; *Omnes autem homines totum quavis sua parte majus esse, communi ratione percipiunt,* (vel Meibomio judice *pag.* 141. *l.* 16.) adeoque semissem Quadrante, utpote sui parte. At vero, per hanc Meibomii definitionem, subquadruplum $\frac{1}{4}$, subduplo $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{4}$, (hoc est, quadrans semisse,) majus esset, cum 1 & 4 plus distent quam 1 & 2, vel 2 & 4. Quod quidem utut Meibomio haud absurdum videatur; vix tamen alii, credo, dictu commodum judicabunt. Sed progrediamur.

Differentia autem, inquit, *illarum* ($\frac{2}{6}$, $\frac{8}{6}$,) *est ratio* $\frac{8}{8}$ *quæ in utriusque rationis antecedentibus spectatur.* Nempe quia $\frac{8}{8}$) $\frac{2}{6}$ ($\frac{8}{8}$, quod sano sensu admitti potest: scilicet, si de Differentia divisionali, seu Quoto, intelligatur. At interim non mi-

nus ſane, alio ſenſu, dicetur differentiam eſſe $\frac{1}{6}$ quia nempe $\frac{8}{6} - \frac{8}{6} = \frac{1}{6}$. Sin de hoc dubitet; velim ut exponat mihi hos Horatii verſiculos. *de Art. Poet.*

Romani pueri longis rationibus aſſem
Diſcunt in partes centum diducere: dicat
Filius Albani, Si de quincunce remota eſt
Uncia, quid ſuperat? poteras dixiſſe, triens: Eu,
Rem poteris ſervare tuam. redit uncia: quid fit?
Semis. ——————

Quod, ſiquid ego intelligo, hoc eſt $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Et $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. At *Semiſſem, Trientem, Unciam, Quincuncem &c.* non magis negabit, credo, Rationum eſſe nomina, quam *Duplum, Triplum, Duodecuplum, Duplum ſuperbipartiens quintas &c.* nempe illorum correlata.

Eadem *pag. 76. l. penult. Menſura rationibus applicanda, nonniſi ratio eſſe poteſt,* (Recte.) *Uti enim longitudines menſuramus longitudinibus; ſuperficies, ſuperficiebus; corpora, corporibus, &c.* (Recte. Sed & Rationibus. Puta, linea tripedalis pedalem ſuperat, linea quidem bipedali, ſed in ratione tripla.) *Sic rationes rationibus.* Omnino. Puta ratio ſextupla $\frac{6}{1}$, ſuperat triplam $\frac{3}{1}$, ratione tripla $\frac{3}{1}$, (quia $\frac{6}{1} - \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$;) ſed in ratione dupla; quia $\frac{3}{1})\frac{6}{1}(\frac{2}{1}$. Eodem plane modo quo linea ſex pedum, 6 P, ſuperat lineam trium pedum, 3 P, linea trium-pedum, 3 P, (quia 6 P — 3 P = 3 P;) ſed in ratione dupla, quia nempe 3 P) 6 P (2 vel $\frac{2}{1}$.

Similiter, quod *pag. 77, 78.* colligit. *Dico igitur, rationem* $\frac{8}{9}$, *in qua tonus major ſpectatur, minorem eſſe decem commatis: majorem commatis novem*: ſuo ſenſu verum eſt, (ſumpta commatis quantitate $\frac{81}{80}$;) quia nempe novem commata, hoc eſt ratio $\frac{81}{80}$ novies compoſita, (multiplicando;) ſive radicis $\frac{81}{80}$ poteſtas nona, (λόγος ἐννεαπλασίων,) $\frac{150094}{134217}$, minor eſt quam $\frac{8}{9}$; at ejuſdem poteſtas decima, $\frac{984770}{858993}$ major quam $\frac{8}{9}$. Sive in continua progreſſione Geometrica, $\frac{81}{80} . \frac{81}{80} \times \frac{81}{80} . \&c. \therefore$ terminus nonus ($\frac{150094}{134217}$) minor eſt quam $\frac{8}{9}$, decimus autem ($\frac{984770}{858993}$) major. Si quid autem aliud hic velit Meibomius; fruſtra eſt.

His præmiſſis (inquit *pag. 78.*) *ad Rationum compoſitionem accedimus.* Et longa diſquiſitione, per multas deinceps paginas, inquirit, quid πηλικότης voce intelligendum ſit. Et quidem *quid πηλικότης eſſet, ex interpretibus nullum percepiſſe*, contendit *p. 87. l. 20.* (*Nimirum ex Græcæ literaturæ, in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura, quid non ubique*, inquit, *errorum eſt enatum? p. 89. l. 5.*) Imo ne quidem *Eutocium & Theonem*, (utut Græci fuerint) *p. 89. l. 12.* Imo, inquit *p. 169. l. 24. perſpicuum eſt, non tantum ignoraſſe illos authores, quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit Ratio.*

Adeoque multis oſtendit, *p. 79, 80, 81, 82, 83.* πηλίκον & πηλικότης de quantitate continua, ſive magnitudine dici, (quod nemo neſcit, ſed non de hac ſola;) ποσὸν autem & ποσότης, de multitudine, ſive quantitate diſcreta.

Dicimus nos, verum quidem eſſe, quod ſoleant πηλίκον & πηλικότης, proprie & prima ſignificatione, reſpicere quantitatem continuam, & quidem localiter extenſam; puta quoad longitudinem, latitudinem, profunditatem; quæ eſt proprie dicta magnitudo: Vel ſaltem, id quod ad inſtar magnitudinis conſideratur, utut revera (proprie loquendo) magnitudo non ſit; ubi nempe quæritur *Quantum*; non *Quot*. Quo enim ſenſu, non modo proprie dicta *magnitudo*, hoc eſt, quantitas localiter extenſa, ſed & *tempus, pondus*, & ipſe *numerus &c.* dici ſolent *magnum, parvum, majus, minus, &c.* Eodem etiam de horum quolibet, πηλίκον, *quantum* ſeu *quam magnum*, dici poterit. Sed & ſimiliter haud inconcinne dicitur *quanta eruditio, quantus calor, quanta ætate, quanto honore, quanta authoritate vir, quanta multitudo &c.* non minus quam *eruditio magna, parva, major, maxima &c.* item *multitudo magna, magnus numerus, &c.* Sed & *Ratio major, minor*, adeoque & *quanta ratio.* Et quidem univerſim, quicquid tanquam menſuræ capax proponitur, de illo haud incommode interrogamus non modo πόσον, *quantum ſit*, ſed & πηλίκον, *quam magnum.* Quod confirmabunt, ſiquis dubitet, tum authores Græci paſſim, tum Lexicographi; in vocibus ἡλίκος, πηλίκος, τηλίκος, τηλικοῦτος &c. Sed nec ipſe, credo, refragabitur Meibomius, quippe qui de φθόγγοις, ſonis, πηλικότητα *ſignificanter admodum dici*, affirmat *p. 83. l. 16, 20.* Ubi autem non menſuranda, ſed numeranda proponuntur aliqua; non quidem πηλίκον, *quam magnum* quærimus; neque πόσον, *quantum*; ſed πόσα, *quot.*

Et

Et quidem numerus utrovis modo conſiderari poteſt. Ubi enim, verbi gratia dicitur, *Numerum ternarium, majorem eſſe binario*; atque *Tria, plura eſſe quam Duo*; tantundem utrobique, quoad rem, dicitur: At illic, conſideratur utervis numerus ut Unum quid; & dicitur, Quantum illud; ad inſtar quantitatis continuæ: Hic vero, ut plura; & dicitur Quot ſunt; ad inſtar Quantitatis diſcretæ.

Quod autem ille, ποσὸν ad quantitatem diſcretam, ſeu numerum reſtringere velit; quod facere videtur, *pag.* 11. *l.* 5. *pag.*83. *l.* 2. *pag.*95. *l.*23. item *p.*86. *l.*27. & *p.* 87. *l.*4. & alibi: Admodum incaute factum eſt; cum certum ſit, ποσὸν, non minus de continuo dici. Teſtor enim quos ipſe citat authores paſſim. Imo ſeipſum teſtor, qui *p.* 87. *l.* 5. id ipſum diſertis verbis fatetur, Nempe, *generale eſſe vocabulum* τὸ ποσὸν, *quod & magnitudinem, & multitudinem comprehendat.* Cur igitur, ejuſdem paginæ *l.* 4. & præcedentis lin. penult. contendat τὸ ποσὸν dici *non poſſe ubi ratio eſt ineffabilis, ſeu numero inexplicabilis*; Item, *Quotum, non niſi cum rationis magnitudines ſunt commenſurabiles*; ego ſane non intelligo: præſertim cum proximis verbis *lin.* 5. agnoſcat, τὸ ποσὸν utrique quantitati commune eſſe; & *lin.* 12. τῦ ποσῦ, *Quoti, aliud eſſe in corporibus continuis, quod magnitudo vocatur,* ——— *aliud in diſcretis.* Quicquid enim de *Quoto* ſit, (quæ ſua vox eſt,) certe ποσὸν, *quantum*, de quantitate continua dici, perinde atque diſcreta, nemo ſobrius negabit. Et ipſe quidem omnium minime negare debet, qui *continui quoti & quotitatis continuæ*, (pro *continua quantitate*,) ſat ſæpe meminit; & quidem primus.

Sed, ne difficiles ſimus; Ego quidem concedo, quod ille (ni fallor) hic contendit, (quod ſaltem contendere debet;) nempe, πηλίκον & πηλικότητα, vel de quantitate continua dici, vel ſaltem de eo quod ad inſtar continuæ quantitatis conſideratur: ſcilicet, ubi quid conſideratur ut *Quantum*, non ut *Quot*. (Sed & μέγεθος eadem, credo, latitudine ſumendum erit: Nam quæ de magnitudinibus hic habet Euclides Propoſitiones, non ſolis proprie dictis magnitudinibus, ſed etiam aliis non raro Quantis applicantur.) At quid porro?

Jam, inquit pag. 83. *videamus quomodo in rationis definitione hoc vocabuli locum habet*: nempe λόγος ὅτι δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις.

Quid nobis hac in re videatur, ſuperius dictum eſt; nempe eam hic innui habitudinem qualitativam, quæ ſit ex quantitate oriunda; ſive quæ magnitudinibus competit non tam ſecundum quod *multa* ſunt, vel etiam ſimpliciter *magna*, &c. quam ſecundum quod *Quanta*, ſive *Quam magna*, ſint; vel potius *Quantupla*. Videamus quid alii.

Scholiaſtes (inquit p. 84.) hac voce, *infinitas magnitudines excluſas eſſe*, putat. Fortaſſe quidem. Neque male. Nam πηλίκον, *quam magnum*, non ſimpliciter *magnum* dicit, ſed magni *determinatam magnitudinem*, ſive *magnitudinis menſuram*; quippe de infinitis non dici poteſt πηλίκα, quam magna ſint: adeoque nec illis attribuenda σχέσις, ἡ κατὰ πηλικότητα, quæ ipſis ſecundum πηλικότητα conveniat. (Scholiaſtæ verba habentur *pag.* 10. *l.* 21. τὸ ὅ, κατὰ πηλικότητα, inquit, in Rationis definitione additur, ἵνα χωρίσῃ τὰ ἀπείρων μεγεθῶν.) Quem autem hic exercet Meibomius, criticiſmus, *p.* 84. *l.* 27. *in eo graviter peccaſſe Scholiaſten, quod has voces,* κατὰ πηλικότητα, *cum magnitudinum notione conjungendas putat, cum Euclides ipſe relationis notioni illas adjunxerat*; *quod articulus* ἡ *in Græca Editione indicat*: mihi quidem nullius momenti videtur. Neque enim Scholiaſtes ita ſeparat, quin articulus ἡ reſpiciat vocem σχέσις: (nempe ea relatio quæ eſt ſecundum quantitatem;) neque Euclides ita conjungit cum notione relationis, quin vox πηλικότητα magnitudines reſpiciat. Non enim intelligendum eſt, ἡ κατὰ τὴν σχέσεως πηλικότητα, quod videtur velle Meibomius. (Quaſi dixiſſet Euclides, *Magnitudinum relatio ea quæ relationis quantitatem ſpectat*,) ecquis enim hic ſenſus eſſet? ſed ἡ κατὰ τὴν αὐτῶν μεγεθῶν πηλικότητα; nempe, *ea magnitudinum inter ſe relatio, quæ ipſarum* (non, *ipſius*,) *quantitatem ſpectat.* Et propterea etiam, quod obiter moneo, quum dixiſſet ipſe Meibomius *p.* 80. *l.* 1. *magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem ſpectatarum relatio*; ſat illud commode dictum fuerat, nec opus erat, ut, in emendandorum catalogo, pro *ſpectatarum*, ſubſtitueret *ſpectata*; utrumvis enim dicatur perinde eſt.

Tum *p.* 87. *l.*23. hanc Commandini explicationem taxat, *Vide ne hoc potius*

dictum ſit, ut intelligatur proportio, quæ in quantitate, non item quæ in æſtimatione conſiſtit. Cui anſam fecit Scholiaſtæ illud lin. penult. διπλὸς γάρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ· *duplex ſiquidem eſt ratio; altera quoad æſtimationem,* ſive valorem; *altera quoad quantitatem.* Puta, Vini congius, congium Aquæ, ratione dignitatis ſive æſtimationis, multo ſuperat; non autem, ratione quantitatis. Vult itaque Commandinus, & recte, vocibus, ἢ κατὰ πηλικότητα, excludi hic magnitudinum quoad dignitatem, aliamve ejuſmodi, conſiderationem; eamque indicari, quæ eſt quoad quantitatem. Quippe non hic conſideratur, num, comparatarum magnitudinum, hæc illa melior ſit, vel rectior, aut regulatior, &c. (quæ & ipſæ ſunt magnitudinum ποιαὶ θέσεις;) Sed, num major, &c. Et quidem *quantuplo* major minorve; quæ ſola eſt, ἢ κατὰ πηλικότητα ποιὰ θέσις.

Hunc (inquit p. 88.) *ſecutus Clavius,* [ſecundum quantitatem] *explicat, ſecundum quod una major eſt quam altera, vel minor, vel æqualis.* Recte quidem, & quidni? At, inquit, *hoc æque verum eſſet, ſi pro* κατὰ πηλικότητα, *Euclides dixiſſet,* κατὰ ποσότητα. Fortaſſe quidem, (nempe ſi intelligatur ποσότης, tanquam à πόσον, non tanquam à πόσα, dici:) & quid ſi? *Quinimo,* inquit, *ſi plane hæc verba omiſiſſet, nihilominus hæc conſideratio locum habuiſſet.* Fortaſſe quidem; ſi nempe ita omiſiſſet ut interim ſubintelligenda velit: At ſi plane abeſſe velit, ne quidem ſubintellecta, ea conſideratio locum non haberet; quippe reliqua definitionis etiam alibi locum habent. Si enim dicitur, *Diametrum peripheriâ minus curvam eſſe*; aut *Æquicrurum Scaleno regulatius*; erit utrobique δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν πρὸς ἄλληλα ποιὰ θέσις, *duarum magnitudinum ad invicem relatio qualitativa,* (hoc eſt, *Qualiter ſe habent*:) at interim *Ratio* non erit, quia non ἢ κατὰ πηλικότητα θέσις. *Diſſimilitudinem* quippe illa dicunt; *Rationem* non dicunt, nedum *Inæqualitatem.*

Cum autem horum nihil Meibomio placeat; ſed, *ex interpretibus nullum, quid* πηλικότης *eſſet, percepiſſe,* contendat *p.* 87. *l.* 2. atque *omnes inde hallucinatos, quod vim vocabuli* πηλικότης *ignorarent*: videamus quid ipſe velit, his vocibus κατὰ πηλικότητα, inſinuari. Nempe, in hunc finem addita vult *p.* 83. *l.* 27. *ut relationem illam duarum magnitudinum ſpectandam innueret in quantitate & magnitudine; non autem in quotitate & multitudine.* Omnino quidem. Quippe, qui *lineam bipedalem pedalis duplam eſſe* aſſerit; non dicit *Quot* ſit illa, ſed *Quanta* ſit, ſeu *Quantupla*: non enim *duas* eſſe dicit, ſed *duplam.* An vero hoc illud eſt, quod nemo Interpretum percepit unquam? Sed ignorarunt omnes? Haud equidem crediderim. Quis enim illud neſcit?

Verum hoc forſan addendum velit; nempe, non omnem rationem numero denominari poſſe; puta integro, (ut Dupla, Tripla, aliaque Multipla,) vel etiam Fracto, (ut ſeſquialtera, ſequitertia, ſuperbipartiens tertias, &c.) ſed eas eſſe poſſe magnitudinis ad magnitudinem rationes, quæ numeris explicabiles non ſunt; ut (in Quadrato) Diametri ad Latus; aliæque ejuſmodi irrationales: quibus igitur non tam *Quotuplum,* (quod, ſtricte loquendo, vix de aliis quam Multiplis dicitur) quam *Quantuplum* ſit hoc illius oſtenditur. (Quod etiam nemo neſcit.) Atque huc, credo, ſpectant quæ habet p. 84. l. 22. *Vocabulum* πηλικότης *hoc fine adhibuit, ne ſcilicet ſiniſtre in numero illa ratio ſpectaretur. Univerſalior enim eſt ratio in quantitate ſpectata, ea quæ ſpectatur in numero: quod non omnis ratio in quantitate ſpectata, numeris explicari poſſit.* Hoc autem quamvis ita verum ſit, ut nihil verius: tamen, quid contineat novi, ego plane non video: quippe quod tritiſſimum eſt, & nemini ignotum. Sed & perinde verum eſt, neque jam primitus cognitum, hac ipſa (inter alias) ratione, tum Quid ſit *Ratio,* tum Quid ſit *Eadem ratio,* univerſalius de magnitudinibus univerſim, 3 & 5 *dd* 5. quam ſpeciatim de numeris, 20 *d* 6. definiri. Multæ ſiquidem Magnitudinibus conveniunt Rationes, quæ numeris non conveniunt.

Dum vero addit, p. 85. *l.* 19. *Et hac de cauſa tertiæ definitioni ſtatim quartam ſubjungit, quæ hoc melius explicaret; nempe, omnes ejuſdem generis magnitudines, rationem inter ſe habere, quæ, ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſſunt*: Minime aſſequitur in ea re Euclidis mentem: Atque illud, *ejuſdem generis,* perperam inſerit in Euclidis definitionem. Non enim id illic agit Euclides, ut oſtendat, quænam homogeneæ quantitates, habeant ad invicem rationes; (quaſi quidem, ex homogeneis, aliæ habeant, aliæ non habeant:) ſed, cum def. præced. homogeneas quantitates habere ad invicem rationem oſtenderat; docet hac def. quænam quantitates

titates dicendæ erunt invicem homogeneæ, adeoque rationem habere: nempe, illæ quæ, multiplicatæ, ſe mutuo poſſint ſuperare: contra vero; quibus illud non contingit, haud erunt pro homogeneis habendæ. Verbi gratia, linea & ſuperficies, heterogeneæ ſunt, quia linea, utcunque multiplicata, nunquam æquabit ſuperficiem, nedum ſuperabit: Curvum autem, & rectum; puta diametrum, & perimetrum circuli; homogeneas quidem eſſe magnitudines, (adeoque ad invicem rationem habere,) utut diſſimiles; quia tum perimeter diametrum ter ſumptam ſuperat, tum diameter quater ſumpta ſuperat perimetrum.

Nec melioris commatis eſt quod ſtatim ſubjungit, lin. 23. *Si rationem in Arithmetica definire voluiſſet Euclides, ne quidem additurus eſſet* κατὰ ποσότητα, (credo equidem; ſed potius & illic, κατὰ πηλικότητα, nam & hæc ipſa definitio numeris etiam convenit; qui quidem eodem ſenſu dici poſſunt μεγέθη, quo vocantur *magni*.) Sed interim quidni additurus eſſet? Non, inquit, additurus eſſet κατὰ ποσότητα, *Secundum quantitatem, duorum numerorum, aut etiam, numeratarum rerum, inter ſe relationem ſpectari: quod numerus cum numero comparari nequeat, niſi ſecundum numerum, quo major ſuperat minorem*, &c. (Imo, inquam, & ſecundum Rationem qua major ſuperat minorem;) *vel contra, minor a majore ſuperatur; vel etiam, alter alteri eſt æqualis*. Nempe Senarius binarium ſuperat, numero quidem quaternario; ſed ratione tripla. Nec quidem, numeri ad numerum ratio, magis eſt numerus, quam, lineæ ad lineam ratio, eſt linea: Sin horum utrumque dicendum velit Meibomius (nempe alteram Numerum eſſe, alteram Lineam;) velim ut ulterius dicat, quî poſſit ratio lineæ bipedalis ad pedalem, atque numeri binarii ad unitatem, eadem eſſe vel æqualis ratio; cum altera numerus ſit, altera linea, hoc eſt, quantitates invicem heterogeneæ. Revera, neque ratio eſt illic numerus, neque hic linea, ſed utrobique tertium quid, nempe *multiplicatio in numerum*, vel ſaltem in aliquid generis numeroſi, numeris homogeneum. Quippe *Duplum* (ſive in numeris, ſive in lineis &c.) eſt, non tam 2, quam $\times 2$, ſive $\times \frac{2}{1}$.

Sed, his miſſis; concedimus in magnitudinibus ſecundum rationem comparandis, ſpectandum eſſe non tam Numerum, ſeu Quotitatem, quam Quantitatem; nempe, non quæritur *Quot*, ſed *Quantum* hoc ſit ad illud comparatum; hoc eſt *Quotuplum*, vel ſaltem *Quantuplum*. Concedimus etiam, Rationem hanc non ſemper veris numeris explicabilem eſſe; ſed nonnunquam ἄρρητον & ineffabilem. Sed negamus, hoc omnibus interpretibus fuiſſe ignoratum.

Atque hactenus de duarum priori definitione, 3 *d* 5, quæ dixerat Meibomius perpendimus; &, quam nulla de cauſa ignorantiæ omnes incuſaverit, vidimus. Videamus quid de altera ſentiat, nempe 5 *d* 6. ubi definitur quid ſit, Rationem ex rationibus componi.

Atqui, *Majori*, inquit, *cum admiratione me de altera definitione diſſerentem audies, Nam & clari Mathematici, & Græci reprehenſionem incurrent*; *Eutocius ſc. & Theo. p.* 89. *l.* 8. Mirum hoc fateor. Quippe cum & *clari* ſint *Mathematici*, & *Græci*, dici, credo, vix poteſt, hoc *ex Græcæ literaturæ neglecta cultura enatum eſſe*, nec, *quod vim vocabuli* πηλικότης *ignorarent*, unde tamen eas *omnes hallucinationes pullulaſſe* modo dixerat *p.* 88. *l.* 26. & *p.* 89. *l.* 6. Verum hinc anſam captat utrique inſultandi, dum Euclidem inducit quaſi de Eutocio loquentem *p.* 89. *l.* 22. *Hoc equidem mihi perſuadere nequeo, adeo inconſideratum fuiſſe noſtrum Eutocium, virum eximium, quem omnes ex editis in libros divini noſtri Archimedis commentariis* μαθηματικώτατον *judicant*. Et de Theone *p.* 99. *l.* 28. *Hac narratione percellor, nec, quid dicam, habeo. An Theo, noſter Theo, dixit rationem ſextuplam eſſe duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore ſine ratione Mathematici conſideraverunt? nec Græca verba tum homines intellexerunt? &c.* Videamus itaque, quid ſit, de quo hic triumphus agitur.

Definitionem illam; 5 *d* 6. ex editione Græca recenſet *p.* 78. *l.* 18. λόγον ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιαθεῖσαι, ποιῶσι τινάς· ubi pro τινὰς, *legendum cenſet* τινὰ, *nempe* λόγον. *Neque enim*, inquit, πηλικότητας *quantitates, facile ſupplebis* &c.

Mihi quidem, (utut τινὰ potiorem lectionem putem, quam & ſequutos video interpretes,) perinde fere videtur utrumvis dicatur. Si legatur τινὰς, interpretandæ erunt πηλικότητες, ipſæ quantitates comparatæ, ſive rationum termini, qui propterea erunt invicem ducendi, ut faciant τινὰς (πηλικότητας,) terminos alios. Non quidem Antecedens unius in ſuum conſequentem, & alterius item in ſuum; (quod

ſatis abſurde ſupponit Meibomius *p.* 90. *l.* 13. &c.) ſed antecedens unius in antecedentem alterius, ut proveniat antecedens tertius; & ſimiliter conſequens in conſequentem, ut proveniat conſequens. Puta, ſi componendæ rationes ſint $\frac{a}{b}$ & $\frac{\alpha}{\beta}$, erit $a \times \alpha$ compoſitæ antecedens, & $b \times \beta$ compoſitæ conſequens, ipſaque propterea ratio compoſita $\frac{a\alpha}{b\beta}$. Sin legendum πρὸ, (quod potius crediderim) per rationis πηλικότητα intelligendum erit quod ex antecedentis ad conſequentem applicatione emergit, puta quotiens aut fractio; Quam ego veram eſſe exiſtimo πηλικότητος ſignificationem. Adeoque rationis $\frac{a}{b}$; vel potius $\times \frac{a}{b}$, quantitas erit $\frac{a}{b}$ & rationis $\frac{\alpha}{\beta}$ vel $\times \frac{\alpha}{\beta}$, quantitas $\frac{\alpha}{\beta}$: quæ λόγων πηλικότητες, invicem ductæ, ποιῶσι πρὸ (πηλικότητα λόγου, id enim ſupplendum malim quam λόγον) efficiunt, inquam, compoſitæ rationis quantitatem, (vel, ſi libet, compoſitam rationem,) $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$.

Atque hunc poſteriorem ſenſum ſequuntur Eutocius, Theo, aliique tum antiquiores, tum recentiores Mathematici; fatente Meibomio *pp.* 79. 89. & alibi. Nempe Rationis *Quantitatem*, dicunt, *Numerum* (ſeu quod inſtar numeri eſt) *a quo data ratio denominatur p.* 17. *l.* 1. & ſic *p.* 22. *l.* 1. & 12. Nempe *numerum illum* (ſeu quod inſtar numeri eſt, ut ibidem fuſius explicatur) *qui ſi in ſequentem rationis terminum multiplicetur, efficiat antecedentem. p.* 17. *l.* 7. & 30. quæ quidem *quantitas invenitur, diviſa propoſitæ rationis antecedente magnitudine per conſequentem p.* 79. *l.* 12. Diviſionis igitur quotiens (ſive ſit numerus integer, ſive fractus, ſive etiam ſurdus &c.) erit Rationis Denominator, ejuſque quantitatem determinabit.

Si autem quæratur, cur Quotiens ille, ſive Rationis Denominator, rationis Quantitas diceretur: res non obſcura eſt. Cum enim, verbi gratia, vox *duplum* ſive ratio dupla, tantundem plane ſignificet atque $\times 2$ vel $\times \frac{2}{1}$: Signum multiplicationis $\times$ indicat, *Rationem* eſſe; & adjunctus Denominator 2 vel $\frac{2}{1}$, *Quanta* ſit illa ratio. Sive, quod tantundem valet, ſignum $\times$ indicat *Multiplum* (intellige ſenſu laxiori) vel, ſi libet, *Aliquantuplum*, & 2 vel $\frac{2}{1}$ *Quam* multiplum, ſive *Quantuplum*. Et ſimiliter intelligendum erit, quantacunque ſit ratio, puta $\times \frac{a}{b}$ ſive rationalis ſive irrationalis; nam utcunque $\frac{a}{b}$ indicabit quotientem qui oritur ex quantitate *a* per quantitatem *b* diviſa, adeoque denominabit rationem quam habet *a* quantitas ad quantitatem *b*. Quum enim ait ille, *p.* 91. *l.* 28. *non vidiſſe illos, vocabulum* πηλικότης *reſpexiſſe numeris ineffabiles rationes*; omnino ſecus eſt. Nam non minus quantitas rationis $\sqrt{2}$ ad 1, (hoc eſt, Diagonii ad Latus quadrati,) Diviſionis quotiente $\frac{\sqrt{2}}{1}$ vel $\sqrt{2}$, indicatur; quam rationis, 2 ad 1, quantitas indicatur quotiente $\frac{2}{1}$ vel 2. Nec quidem hoc negatur Eutocii verbis *p.* 91. *l.* 25. citatis; (quod tamen inſinuat Meibomius *lin.* 18.) Id tantum negatur, Quotientem illum vere Numerum eſſe. Non negat rationis quantitatem hujuſmodi ſive diviſione ſive applicatione, indicari: Et multo minus quidem negat, *rationes magnitudinum numeris ineffabiles, ſic componi poſſe.* Eſto enim verbi gratia, tum Quadrati tum Cubi latus *a*, Quadrati Diagonium *b*, Diagonium Cubi *c*, quæ quidem ſunt quantitates invicem ἄῤῥητοι; nempe ut $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$. Rationis *c* ad *b*, quantitas eſt $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; rationis *b* ad *a*, quantitas eſt $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$; ex his invicem ductis, emerget $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{cb}{ba} = \frac{c}{a}$, hoc eſt $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, quantitas rationis *c* ad *a*, compoſitæ ex *c* ad *b*, & *b* ad *a*.

$1) \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\right.$

$1) 2 \left(\frac{2}{1} = 2\right.$

Meibomium

Meibomium interim id forsan in toto hoc negotio decepit, quod putaverit eandem in utraque definitione (3 *d* 5 & 5 *d* 6) πηλικότης designari; cum hæc ab illa admodum sit diversa. Nempe in altera (5 *d* 6) πηλικότητες τῶν λόγων; in altera (3 *d* 5) πηλικότης τῶν μεγεθῶν innuitur. Definitur enim λόγος, (3 *d* 5) δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ πηλικότης (nempe πρὸς αὐτῶν, non τῆς χέσεως, nedum τῶ λόγω) πρὸς ἄλληλα ποιὰ χέσις. In altera vero def. (5 *d* 6) diserte dicitur αἱ τῶν λόγων πηλικότητες. Illic, *quanta magnitudo* designatur: hic, *quanta ratio.*

Nisi hoc potius dicendum malit, (quod & ego quidem judico,) πηλικότης in priore definitione intelligi de Quantitate una (seu uno Quotiente, qui nempe ex unius rationis antecedente per suam consequentem diviso oritur, unde illa ratio denominetur:) in altera vero πηλικότητες dici de Quantitatibus (seu Quotientibus) pluribus (plurium rationum expositarum) ex quibus invicem multiplicatis oritur nova Quantitas (seu Quotiens) unde denominetur ratio ex rationibus expositis composita.

At inquit, *pag.* 91. *lin.* 4. *Insulsa illa esset rationum compositio &c.* quod πηλικότητες *quantitates, velit esse* ποσότητες *quotitates*; *atqui* πηλικότητας, *quantitates rationum inter se multiplicandas dicit Euclides*; *non* ποσότητας, *numeros hujusmodi, quibus rationum effabilium antecedentes, ad unitatem, tanquam communem consequentem, relatæ explicentur: quod hoc modo rationes numero ineffabiles componi nequeant.* Et *p.* 89. *l.* 12, *Diserte*, inquit, *uterque* (Eutocius & Theo) *per rationis* πηλικότητα *quantitatem, intelligi dicit* ποσότητα *quotitatem, seu, ut ipsi loquuntur, numerum a quo ratio denominatur.*

De rationibus, numero ineffabilibus componendis; modo dictum est. Per *quantitates* autem Eutocium & Theonem dicere, intelligendas esse *quotitates*; neutiquam concedendum est. Qui enim *quotuplum* dicit, non dicit *Quot*, sed *Quantum.* Nec, quia, verbi gratia, Ratio *Dupla*, à binario denominationem sumit, ideo, qui *Duplum* dicit, *multitudinem* dicit, sed potius *magnitudinem*, seu πηλικότητα. Qui enim lineam bipedalem pedalis duplam dicit, non illam duas esse dicit, sed numero unicam, magnitudine vero tantam quanta essent pedales duæ. Nempe *Duplum*, non *Duo* dicit, sed *tantundem atque duo.* Et quidem ipse Meibomius ni fallor, *p.* 83. *l.* 2. δέκα πήχεις, utut à numero denominatos, pro magnitudine habet, & similiter alibi.

At inquit, *p.* 96. *l.* 9. *hac multiplicatione quantitatum, tantum unam quantitatem nanciscamur*; (recte quidem; nempe quantitatem rationis compositæ, quæ quæritur:) *adeoque non rationem, quod erat propositum.* Imo, inquam & Rationem; nempe, cujus hæc est quantitas: sicut & *magnitudinem* exhiberi dicimus, quando exhibetur, *Quanta* sit illa magnitudo. *Hinc tamen sententiam insigni quadam interpretatione se juvare posse dicit* (quasi quis antea hoc nesciverit;) *nempe, ut dicamus consequentem rationis terminum ubique esse unitatem*; (si nempe rationis denominator habeatur pro termino antecedente.) At quis quæso nescit, tantundem esse rationem *duplam* dicere, atque rationem 2 ad 1? &, *triplam*, atque 3 ad 1? At, ait *p.* 97. *l.* 13. Cum Eutocius, *de consequente rationis termino, seu unitate, mentionem non injecerit*; *ita denominatores suos considerat, acsi uno illo antecedente termino, rationis quantitas essentialis exprimatur*; *quod plane est impossibile.* Imo vero, ut qui *duo* dicit, *duas unitates* dicere satis intelligitur; ita & qui *duplum* dicit (sive, *rationem a* 2 *denominatam,*) dicere *simpli duplum* satis intelligitur; etsi nec illic *unitatis*, nec hic, *simpli*, mentionem faciat.

Non itaque est, quantum ego quidem adhuc video, ex hactenus dictis quidquam, cur (quod vult Meibomius, p. 93. l. 5.) *Exposa sit Eutocii, & reliquorum sententia, de quantitate rationis numero* (aut saltem, qui numeri instar est, divisionis Quotiente) *exhibenda.* Interea tamen, dum hanc quantitatis rationum æstimationem, ex divisionis Quotiente faciendam, repudiat; nullam nobis aliam istius loco tradit, qua constet *quanta* quævis ratio dicenda sit. Si itaque non hoc, dicat velim, quo alio criterio erit æstimanda?

Hæc autem, ait, *omnia, quæ de rationum compositione, & verbis quibus illa tradita est, narrat, nunquam se moturum fuisse, nisi falsissimum dogma, & quod maximam errandi ansam aliis præbuit, inde fuisset fabricatum.* p. 99. l. 13. Videamus, quæso, quid sit. *Hac enim*, inquit, *denominatorum inter se multiplicatione fultus, Theo Alexandrinus, geometra alioqui eximius, quod ex Commentariis in Ptolemæi Magnam Constructionem videre est, asseruit*, (horrendum dictu!) *triplæ*

plæ duplam eſſe ſextuplam, ſeu (quod ipſius verba magis ſonant) *tripli duplum eſſe ſextuplum*. Atque (quod certe videtur dolendum) *hunc ſecuti recentiores*; *volumina ſua his paralogiſmis impleverunt*: Idque adeo ut (ſi Meibomio credamus) *hac narratione perculſus Euclides, quid dicat, non habeat*, &c. Et quidem (p. 100. l. 12.) eouſque *hunc errorem ampliavit Gregorius a Sancto Vincentio*, ut (numerante Meibomio) *in ſolo octavo libro, centum ſeptendecim falſæ propoſitiones* contineantur.

Gravis equidem hæc, inquam, eſt accuſatio; & non paucos tangit. At, interim, quidni ſic, uti loquutus eſt Theo, loqui liceat? Si autem ſic loqui liceat, tota hæc vel ſua ſponte ruit accuſatio. Nempe ſic locuti ſunt, vel Meibomio fatente, tum Veteres, tum Recentiores, ſi non omnes, plerique ſaltem; certe nemo omnium hactenus eam loquendi formam repudiavit, utut forſan aliquando ipſi etiam aliter locuti fuerint. Nec enim ita ſolus loquitur *Theo Alexandrinus*; ſed & *hunc ſecuti ſunt Cardanus, Rodulphus Volumnius, Clavius, &c.* p. 167. l. 10. *Claviumque ſecuta eſt* (non modo *Gregorius a Sancto Vincentio*, modo dictus, ſed) *tota Mathematicorum cohors ad noſtra uſque tempora.* lin. 14. Similiter, p. 161. l. 8. *Theo & tota Mathematicorum poſteritas.* Item p. 165. l. 17. *Hoc Theo vult & Eutocius, omniumque juniorum Mathematicorum filii.* Sed & ante hos, *Nichomachus Geraſenus, & Heronas*, ut liquet p. 17. l. 3. & Meibomius fatetur p. 165, l. ult. & p. 166. l. 3. Sed & *Ptolemæus*, ut liquet p. 190. l. 8. & fatetur Meibomius p. 192. l. 1. Et *Porphyrius*, ut liquet p. 191. l. 21, 29. Cum autem tot produxerit Meibomius, qui ita ſint loquuti, tum Veteres tum Recentiores: ne unum quidem (quod notandum eſt) produxit vel ex Veteribus vel ex Recentioribus, qui hanc loquendi formam vel repudiaverit, vel etiam culpaverit. Adeoque, ſi ſit error, ſaltem communis error eſt; & (ſi Juriſtis credimus) *communis error facit jus*; præſertim in vocabulorum ſignificationibus, & loquendi formulis; quibus non alia præſcribi ſolet norma, quam mos loquendi.

Quicunque autem ſint, qui ita fuerint locuti; omnino tamen falſum eſſe prædicat Meibomius; Tripli duplum eſſe ſextuplum; ſive ut loquitur Theon p. 25. l. 28. ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτῆς ἑξαπλάσιον, *ſi triplum alicujus duplaverimus, fiet ipſius ſextuplum*; Et quæ ſunt hujuſmodi. *Verum*, inquit, *eſt, ternarium, rationis triplæ antecedentem* (dixiſſet potius, denominatorem,) *duplicatum, fieri ſenarium*; *ſed falſum, illud quod triplum alicujus eſt, duplicatum, fieri ſextuplum.*

At ego inquam, nihil video, cur illud dicatur falſum: imo omnino judico veriſſimum. Nec ita tantum loquutos eſſe per omnia, quantum liquet, ſecula Mathematicos; ſed & vere loquutos. Exponantur, ſi libet, tres quantitates inæquales, A, C, F: Sitque C triplum τῆς A; & F duplum τῆς C: Annon F, quod eſt duplum τῆς C, hoc eſt, (ex hypotheſi) duplum tripli τῆς A, eſt ipſius A ſextuplum? Nemo certe ſanus negabit. Vel ſic, $C = 3A$, & $F = 2C = 2 \times 3A = 6A$. Vel, niſi hoc per ſe jam ſatis ſit perſpicuum, aſſumamus, ex Euclide, Axioma ſextum, *Ejuſdem duplicia ſunt inter ſe æqualia.* Adeoque & (per Axioma primum) *Æqualium duplicia ſunt inter ſe æqualia.* Unde ſic argumentamur. Τὸ C æquatur triplo A: ex hypotheſi: Ergo, per Axioma citatum, Duplum τῆς C, æquatur duplo τῆς tripli A. At Duplum τῆς C, (vel fatente, credo, Meibomio,) eſt Sextuplum τῆς A: ergo &, Duplum tripli A, eſt ſextuplum τῆς A. Si autem nec dum ſit ſatis perſpicuum; id ipſum ſic quarto aggrediamur. *Duplum, communi ſententia, omnes homines judicant, quod bis habet ſimplum*; *triplum, quod tria ſimpla æquat*; *centuplum, quod centum*; (&, ni fallor, ſextuplum, quod ſex:) aſſerente Meibomio p. 170. l. 13. Ergo cum C ſit, ex hypotheſi, triplum A; erit C æquale πῷ A ter poſito; hoc eſt, $C = 3A = A + A + A$. Item, cum F ſit, ex hypotheſi, duplum τῆς C, erit F æquale πῷ C bis poſito, adeoque & 3 A bis poſito, hoc eſt, ipſis $A + A + A$ bis poſitis, hoc eſt, $A + A + A$ plus $A + A + A$, hoc eſt $A + A + A + A + A + A$, hoc eſt, πῷ A ſexies poſito, hoc eſt, ſextuplo τῆς A. Quod erat demonſtrandum. Verum itaque eſt quod affirmat Theon, ἐὰν τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτῆς ἑξαπλάσιον, *ſi triplum alicujus duplaverimus, fiet ipſius ſextuplum.* ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Verum quidem eſt, nec nos inficias imus, quod longe alio ſenſu dicatur, *rationis triplæ ratio duplicata* (διπλασίων) *eſt noncupla*; quia nempe $\frac{3}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{1}$: ob continuam multiplicationem. At interim non minus verum eſt, & *tripli duplum eſſe ſextu-*

ſextuplum; quia nempe $\frac{3}{1} \times 2 = \frac{6}{1}$: quod affirmat Theo, & cum illo, excepto Meibomio, alii omnes.

Atque eadem ratione, tripli ſemiſſem, ſive ſemiſſis triplum, dicimus ſeſquialterum, (quod affirmat Theo p. 28. l. 18.) quia $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic ſemiſſis, ſive ſubdupli, duplum, dicimus integrum, quia $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$. quanquam verum etiam ſit, rationis ſubduplæ rationem (non duplam διπλάσιον, ſed) duplicatam, διπλασίονα, eſſe ſubquadruplam, quia $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Quæ omnia cum ita clara ſint ut nihil magis, non eſt cur aut *explodat* ea Meibomius, aut, ſi explodat, vel maxime nos illud moveat. Et quidem, ſi (quod ait Meibomius p. 99. l. 26.) *Elementa quoque Euclidis, ad quæ fuſe hæc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre ſint coacta*: non eſt tamen, cur id, vel nos, vel ipſum Euclidem, male habeat; quippe cui Euclides nuſpiam refragatur.

Quod autem Archimedes (ut p. 101. l. 5.) *rationem* $\frac{27}{8}$ *dixerit* ἡμιόλιον, *ſeſquialteram* [intellige, *triplicatæ ſubduplicatam*] *rationis* $\frac{18}{8}$ *ſeu* $\frac{9}{4}$, *& rationem* $\frac{9}{4}$ *eſſe* διπλασίονα *duplam* [ſeu potius *duplicatam*, ſic enim rectius vertenda eſſet ea vox] *rationis* $\frac{9}{8}$ *ſeu* $\frac{3}{2}$: nos nihil movet, quippe & nos idem dicimus. Eſt ſiquidem $\frac{9}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$, (adeoque $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$;) & $\frac{27}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \sqrt{:} \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4}$. Hoc eſt, quantitas $\frac{9}{4}$ eſt quadratum, (ſive poteſtas ſecunda, ſive ratio duplicata,) quantitatis $\frac{3}{2}$: Et quantitas $\frac{27}{8}$, eſt Cubus (ſive poteſtas tertia, ſive ratio triplicata,) quantitatis $\frac{3}{2}$, quæ eſt radix quadratica (ſive poteſtas ſubſecunda, ſive ratio ſubduplicata,) quantitatis $\frac{9}{4}$. Quod autem *nec Theo hoc intellexerit, nec ex poſterioribus Mathematicis, ad noſtra uſque tempora, ullus*; miror equidem, qua fronte Meibomius affirmare ſuſtinet. Nam, quis non?

Tota controverſiæ cardo in hoc verſatur, quod Meibomius vel neſciat, vel nolit, diſtinguere, inter rationis *duplationem, triplationem, quadruplationem, &c.* hoc eſt, multiplicationem in 2,3,4, &c. unde oritur λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος τετραπλάσιος, &c. & rationis *duplicationem, triplicationem, quadruplicationem, &c.* unde oritur λόγος διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. quæ fit continuo ductu quantitatis in eundem multiplicatorem bis, ter, quater, &c. Quæ quidem inter ſe plane diverſa eſſe, etiamſi Meibomius millies neget, non tamen eapropter eſt minus verum. Quippe aliud omnino eſt quantitatem A, bis multiplicare in numerum 3, & facta addere; unde proveniunt duo tripla, hoc eſt, duplum tripli, nempe 3 A + 3 A vel 3 A × 2, nempe 6A: aliud vero, quantitatem A in 3, bis continue multiplicare, hoc eſt, in 3×3, (non, ut prius, in 3 + 3,) unde oritur tripli triplum, ſive A × 3 × 3 = A × 9, vel 9 A.

Dicet fortaſſe, eodem ſenſu, in Archim. 8. *l.* 2. de Sph. & Cylind. atque Eutocii in eum commentariis; de eadem dici λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα. Fateor equidem id fieri. Sed, librariorum id incuriâ fieri non dubito (ut ſuperius dictum eſt,) qui cum Matheſeos fortaſſe minus fuerint gnari, neque λόγος διπλασίων & διπλάσιον diſcrimen ſatis accurate intellexerint, errorem illum, vel etiam eo majores, facile admiſerint. Sed etſi demus, eadem voce (ſive διπλάσιος ea ſit, ſive διπλασίων,) utrumque innui (quod, de voce ἡμιόλιος, fatendum videtur, ob vocum penuriam, admiſſum eſſe;) Non tamen inde ſequitur, res eſſe confundendas; ſed eo accuratius proſpiciendum, utro ſenſu vox ambigua uſurpetur; ne ſecus error obrepat. Nam & vocabula Geometrica, non ſemper eodem ſenſu uſurpantur. Quippe nemo dubitat, quin alio ſenſu occurrat vox *μέρος 9 ax* 1. alio vero, 1 *d* 5. nempe illic, partem quamcunque innuit; hic, nonniſi partem aliquotam. Item περιέχειν, 10 *ax* 1, & 1 *d* 2. Illic, duabus rectis contineri ſpatium negatur; hic, duabus rectis contineri dicitur rectangulum. Et ſimiliter alibi.

Sed videamus quæ ſint hic Meibomii nova tradita.

Poſito quod Septimius & Octavius eadem celeritate incedant; *Septimii*, inquit, *celeritas ad celeritatem Octavii eſt in ratione nulla*, (p. 102. l. penult.) Imo vero, inquam, in ratione Simpla, ſive Æqualitatis, nempe, ut 1 ad 1, ut fatetur ipſe *p.* 103. *l.* 2. At ille, inquit, *æqualem rationem, nihili ſeu nullam vocat.* (p. 103. l. 7.) At, inquam, quo Magiſtro? qua vel ratione vel authoritate fretus? quæ illum vel Grammatica, vel Mathematica, ſic loqui docuit? Si Matheſin ſpectemus: Eſt quidem Æqualium inter ſe nulla Inæqualitas, nullus Exceſſus, nullus Defectus; at, nullam eſſe Rationem, nemo prudens dixerit Mathematicus. Si Grammaticam ſpectemus: quod bis tantundem atque alterum continet, duplum dicitur: quod ter, triplum; quod quater, quadruplum; &c. adeoque, quod ſemel, ſimplum; & non niſi quod nullies continet (adeoque nihil eſt) in nulla ra-

tione dici potest constitutum. Jam vero, quod æquale est, continet saltem semel tantundem; adeoque Simplum est; hoc est, in ratione Simpla constitutum: non, nullecuplum, sive in nulla ratione. Nulla itaque ratione asserit, æqualium rationem nullam esse. Sed videamus utcunque quid obtendat.

Omnes (inquit p. 113. l. 9.) *nihili rationes* (intelligit, rationes simplas sive æquales) *uti sunt* $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$, *sunt inter se æquales*: (omnino. Addo, item omnes duplæ, uti $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}$; Vel etiam omnes triplæ, uti, $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}$.) *Quemadmodum in Logistica notæ nullæ*, 0, 0, 0, *inter se, tanquam nihili res, æquales existunt.* (Addo; vel etiam omnes notæ unitatis, 1, 1, 1; vel etiam binarii, 2, 2, 2, &c.) At, inquam, nullo modo hinc sequitur, Rationes Simplas esse rationes nihili, magis quam, Rationes duplas, triplas, aliasve, rationes nihili esse. Sed procedamus. Quid porro?

Porro, inquit p. 104. l. 20. *ratio dupla* $\frac{2}{1}$, *a ratione nihili* (simplam, intelligit) $\frac{1}{1}$, *tanto abest, quanto ab eadem ratione nihili in alteram partem abest ratio subdupla* $\frac{1}{2}$. Recte quidem. Quippe ea duplo major est, hæc duplo minor, quam ratio simpla. *Itaque*, inquit, *ratio* $\frac{1}{2}$ *æqualis est rationi* $\frac{2}{1}$. Nullo modo. Non enim quæ ab eodem æqualiter in oppositas partes differunt sunt ideo protinus æqualia. Non utique, inquam, sequitur; quod, si numerus octonarius, sit, quam quaternarius, duplo major; & binarius, eodem, duplo minor; propterea binarius æquabitur octonario. Et quidem, cur hoc minime admittendum sit, ab eodem ipso mox audiemus argumenta. At, inquit, *ideo autem ratio* $\frac{1}{2}$, *æqualis est rationi* $\frac{2}{1}$, *quod inter illius terminos*, 1 *&* 2, *tantum intervallum sit, quantum inter hujus terminos*, 2 *&* 1. Verum, inquam, neque hoc sequitur. Non enim ex terminorum inverse sumptorum æquali intervallo, sed ab eorum directe sumptorum æquali Quotiente, colligitur æqualis Ratio. At vero, si 1 per 2 dividamus, & 2 itidem per 1, eundem utrobique quotientem provenire, nos negamus; nec ipse, credo, affirmabit. Sed pergat.

Iniervallum autem, inquit p. 105. l. 2. *seu distantia inter duas has rationes* $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$, *est ratio bis dupla, seu* $\frac{4}{1}$. Egregie quidem, atque μαθηματικωτάτως: Nempe, duorum invicem æqualium; alterum alterius est bis duplum. Siquidem hæc cum præcedentibus cohærent optime. Sed videamus, qui probet.

Quoniam enim, inquit, *ratio* $\frac{1}{1}$, *superat rationem* $\frac{1}{2}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *sed rationem* $\frac{1}{1}$, *superat ratio* $\frac{2}{1}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *Ergo ratio dupla* $\frac{2}{1}$, *superat rationem subduplam* $\frac{1}{2}$, *ratione bis dupla, id est, quadrupla.* Omnino recte. Verum hinc ego sic disputo.

Quorum alterum alterius quadruplum est, ea non sunt inter se æqualia: sed, rationum $\frac{2}{1}$, & $\frac{1}{2}$, altera alterius quadrupla est: Æquales itaque non sunt. Vel, si illa loquendi formula displiceat, sic accipiat; Quorum hoc illud ratione quadrupla superat, ea non sunt inter se æqualia: Sed ratio $\frac{2}{1}$, rationem $\frac{1}{2}$, ratione quadrupla superat. Æquales itaque non sunt. Sed pergit.

Quod etiam ex additione (seu compositione) *planum fit. Si enim, rationi subduplæ, addatur ratio quadrupla, inde fit seu componitur ratio dupla.* Atque hoc etiam recte. quippe $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$. Argumentamur itaque ut prius; Rationes $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$, non esse æquales; cum hæc illam superet ratione quadrupla.

Atque his habet similia, de rationibus sesquialtera & subsesquialtera, p. 106. l. 19. &c. Nempe *Ratio sesquialtera* $\frac{6}{4}$, *& subsesquialtera* $\frac{4}{6}$, *quamvis non eædem sint, sunt inter se æquales*: At interim, *inter se distant ratione bis-sesquialtera, seu dupla superquarta.* Quæ quam bene inter se cohæreant, ipse viderit.

Multa habet his intermista exempla; à motu in contrarias partes desumpta: quæ nec præsenti suo negotio admodum favent, & sunt aliis nominibus vitiosa: sed quæ non tanti sunt ut ea curiosius expendam. Hoc autem pede fere claudicant omnia: Nempe, quod, cum duplum accessum sic designaverit $\frac{2}{1}$, duplum recessum designandum putet $\frac{1}{2}$; (ut p. 104. l. 19. & alibi passim:) quasi quidem, inversio rationis, indicaret motum contrarium. At, inquam, contrarietas motus, indicanda erat, non inversione rationis, (nam si $\frac{2}{1}$ accessum indicet, etiam $\frac{1}{2}$ indicabit item accessum, utut minorem:) sed, mutatione signorum $+ -$: Puta si $+\frac{2}{1}$ duplum accessum indicet, duplum recessum indicabit $-\frac{2}{1}$, non autem $+\frac{1}{2}$. Hoc autem cum ille non satis intellexerit, sibi fraudi fuit. Quamvis enim verum omnino sit, quod exemplo suo ibidem it probatum; nempe, recessum partium duarum, non minus duplum esse recessus partis unius, quam est duarum partium accessus, duplus accessus partis unius; adeoque eandem sive æqualem rationem:

Cum

Cum tamen hinc infert; propterea, rationem $\frac{1}{2}$, æqualem esse rationi $\frac{2}{1}$; omnino hallucinatur. Inferendum enim erat; $-\frac{2}{1}$ ad $-\frac{1}{1}$, eandem vel æqualem esse rationem, atque $+\frac{2}{1}$ ad $+\frac{1}{1}$. Quod quidem verum est; sed, à suis sensis satis remotum.

Eadem fere semper oberrat chorda, in exemplis sive instantiis suis passim allatis: quod cum ei fraudi fuerit non semel, nobis saltem semel indicasse sufficiat; nec opus sit sæpius repetere, cum quilibet, paulo attentior, facile deprehendat.

Potuisset quidem Meibomius, hujus erroris satis moneri, cum viderit Lucium & Titium, tum, ex hypothesi, eadem celeritate moveri; tum, juxta suum ipsius calculum, alterum milliaria 81 eodem confeciss̃e tempore quo alter non nisi 16 confecerit. Unde dum se extricare conatur, p. 107. l. 24. omnino nihil agit.

Quæ, de Divitiis & Paupertate comparandis, habet, p. 110. item de Mistorum viribus, p. 111. &c. neque admodum perspicue tradita sunt, & parum accurate: Sed quæ tuto omitti possunt, cum nihil inde magni colligere possit quo sententiam suam stabiliat; nec ad singulas minutias, lectorem detinendum putem. Quod vero, ut ait p. 183. l. 25. *mirari soleat, antiquorum nullum ad utilissimam hanc, de mistorum viribus in data ratione augendis, aut minuendis, contemplationem accessisse, ut quousque in his progredi possimus, determinaret*: Si vel Pharmacopœos consuluisset, vel Aurifabros, mirari forsan desiisset: quippe in componendis medicamentis, illi; metallis, hi; non suis illos artibus carere deprehendat, quibus de mistorum viribus augendis, minuendis, æstimandis judicent. Et quidem eo spectat totum illud, de *Regula* quæ dicitur *Alligationis*, apud Arithmeticos, negotium.

Quæ de Rationum Compositione &c. habentur p. 98. &c. iterumque p. 114. &c. satis tum prolixe tum perplexe (*qua quidem*, inquit, *rationes componendi methodo, rerum natura nullam breviorem admittit, nullam concinniorem* p. 115. l. 23.) cui illa bono inserviant, ego plane non video. Cum enim per *5 d 6*, ratio ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{\alpha}{\beta}$, composita, sit $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta}$. quid longa narratione opus sit, ut intelligamus rationi $\frac{a}{b}$, rationem $\frac{\alpha}{\beta}$ componendam, ducendo $\frac{a}{b}$ in $\frac{\alpha}{\beta}$; adeoque divisione, adimendam. Ut nempe illic prodeat $\frac{a\alpha}{b\beta}$, quia $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$; hic vero, $\frac{a\beta}{b\alpha}$, quia $\frac{\alpha}{\beta}) \frac{a}{b} (\frac{a\beta}{b\alpha}$. Cujus item effectionem Geometricam nemo nescit. Annon autem hæc multo brevior & concinna magis fuerit operatio, quam quâ ille nullam aut breviorem aut concinniorem in rerum natura admitti posse judicat; penes lectores sit judicium.

Cum vero, tum p. 94. l. 4. tum p. 177. l. 25. non nisi minorem rationem majori auferendam putet: non satis videtur rationum diremptionem intelligere; quæ non tam subductionis, quam divisionis, opus est: posse autem fractionem minorem per majorem dividi, nemo nescit. Cum enim, (ut loquitur p. 116. l. 7.) *rationes* $\frac{2}{1}$ *&* $\frac{3}{4}$ *additæ, faciant rationem* $\frac{6}{4}$; quidni pariter ex composita $\frac{6}{4}$, dempta $\frac{2}{1}$ superesse dicamus $\frac{3}{4}$; atque ex eadem $\frac{6}{4}$, dempta $\frac{3}{4}$, superesse $\frac{2}{1}$? (utut $\frac{3}{1}$, hoc est, $\frac{8}{4}$, majorem esse quam $\frac{6}{4}$, ne quidem Meibomius negaverit) quippe, duarum componentium, utravis dempta, superest reliqua.

Sed videamus quæ sequuntur. Quippe, cum hactenus, nonnisi *quasi per nebulam veritatis aliquod lumen conspeximus*; jam deinceps, *clarissimum & nulla obscuritatis nebula interceptum veritatis solem visuros*, pollicetur, p. 118. l. 7. &c.

Rationis, inquit, (p. 118. l. 13.) *natura & essentia consistit in duabus ejusdem generis rebus, secundum certam magnitudinem* (addo, divisione, non subductione, æstimandam) *inter se comparatis*; seu potius, in earum comparatione. *Quæ distantia cum infinitæ sit aut parvitatis, aut magnitudinis*; *hinc*, inquit, *colligimus, quavis ratione infinite minorem, aut majorem, saltem potentia, dari posse.* Et recte quidem hoc colligitur. *Quod fieri posse, multi*, inquit, (p. 119. l. 6.) *qui hæc penitus perspecta non habent, negarint.* At, quæso, quinam illi? quippe ego illud nulli (nisi qui plane sit ἀμαθὴς τος) dubium esse posse putaveram.

Porro, inquit, (p. 118. l. 23.) *rationem quæ in æqualibus magnitudinibus spectatur, rationem quidem esse statuimus*, (& Recte quidem:) *sed nullius quantitatis*; (at hoc perperam:) *quod nihili distantia magnitudines illius, antecedens &*

consequens, inter se distant. Imo, inquam, *distantia Unitatis.* Uti enim in rationibus $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$, aliisque duplis, antecedentium & consequentium distantia (divisione quærenda) binario æstimatur, (quantacunque interim sit earum differentia, subductione quærenda, quæ quidem non omnino attenditur,) unde & denominationem obtinent: ita in rationibus $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$, aliisque simplis, terminorum distantia, divisione patefacta, unitate mensuratur. Quippe, ut illic quotiens est 2, sic hic, 1. (utut differentia, subductione quæsita, cujus hic nulla habetur ratio, sit 0.)

Quæcunque autem alia, magna, parva, (quidni item & ipsa,) *unitatis loco accipi potest.* p. 119. l. 29. Hoc est, (quamvis ille videatur hoc nescire) *Radix* dici poterit, vel *Potestas prima*, aut etiam *Ratio exposita*; quæ aliquoties continuata, hoc est, in se ducta, ejusdem *Quadratum, Cubum, Biquadratum*, &c. exhibebit: vel *Potestatem secundam, tertiam, quartam, &c.* vel etiam (nam & hoc tantundem valet) *Rationem duplicatam, triplicatam, quadruplicatam, &c.* διπλασίονα, τριπλασίονα, τετραπλασίονα, &c. Nempe hoc suadent quæ post occurrunt, *p.* 120. *l.* 4. *Cæterum cum omnis ratio unitatis loco considerari possit* (nempe ut potestas prima, seu Radix, puta $\frac{a}{b}$) *ex ea bis composita dupla efficitur primæ seu simplæ*, (duplicatam, intelligit, aut potestatem secundam, seu quadratum, $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$) *ex ter composita, simplæ tripla*, (seu potius triplicata τριπλασίων, potestas tertia, cubus, nempe $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$:) *ex vicies composita, simplæ vigecupla*, (hoc est potestas vicesima $\frac{a^{20}}{b^{20}}$.) *Ter autem composita, seu tripla*, (triplicatam intelligit, $\frac{a^3}{b^3}$,) *sesquialtera est bis compositæ, seu duplæ*, (vel potius duplicatæ $\frac{a^2}{b^2}$: Nam $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a^2}{b^2} \times \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$.) *quater composita, supertertia est triplæ*; (nempe $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a^3}{b^3} \times \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}$.)

Manifestum itaque est per rationis expositæ duplam, triplam &c. eum hic intelligere, duplicatam, triplicatam &c. διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. quas definit Euclides 10 *d* 5. hoc est, expositæ rationis potestatem secundam, tertiam, &c. seu ab, expositæ rationis, denominatoris quadrato, cubo, &c. denominatam.

Atque harum respectu verum est $\frac{1}{1}$ vel etiam 1, quæcunque fuerit exposita ratio, loco nihili habendam, hoc est, illius potestatem nullam esse. (Saltem nisi ipsa ratio exposita, sit etiam $\frac{1}{1}$, quo casu ipsius etiam quotacunque potestas est $\frac{1}{1}$.) Quippe notum est, $1 . 2\varrho . 2\varrho\varrho . 2\varrho^3 . 2\varrho^4$. &c $\div$, sive $1 . a . a^2 . a^3 . a^4$. &c. $\div$, hoc est, *unitatem, radicem, quadratum, cubum, biquadratum*, &c. esse continue proportionalia: & quotacunque expositæ radicis potestas sit eorum quodlibet, toties supponitur 1 in radicem illam continue multiplicari, puta $1 \times a$ est prima potestas radicis a, & $1 \times a \times a$ ejusdem potestas secunda; $1 \times a \times a \times a$, tertia &c. adeoque 1 simpliciter posita, ejusdem radicis a potestas nulla, quippe in quam nullies ducitur: At $\frac{1}{a}$ potestas prima privativa, seu inversa, denominanda puta ab -1: Item $\sqrt{a}$, potestas dimidiata; quippe media proportionalis inter nullam & primam; & $\sqrt{a^3}$ vel $a\sqrt{a}$, potestas dimidiata tertiæ, seu quæ dimidiata potestate superat primam; puta $a\frac{3}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$ denominanda. Et sic ubivis. Quod autem de radice a dictum est, puta, dum ponitur $a = 2\varrho$; perinde intelligendum erit de radice quavis alia, puta si ponatur $\frac{a}{b} = 2\varrho$: quippe rem hoc nehilum variabit.

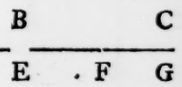
Sed & hinc etiam manifeste sequitur, (quod & norunt omnes,) quod, quoties radix ponitur major quam 1; singulæ potestates continue augentur, (puta si $2\varrho = 2$, erit $2\varrho\varrho = 4$, $2\varrho^3 = 8$, &c.) ubi enim in continua multiplicatione, multiplicator (quæ radix est) est unitate major, multiplicandus pluſquam semel ponitur, ut habeatur productum: Quoties autem radix, (hoc est, continuus multiplicator) est minor quam 1; potestates continue decrescunt (puta si $2\varrho = \frac{1}{2}$, erit $2\varrho\varrho = \frac{1}{4}$, $2\varrho^3 = \frac{1}{8}$, &c.) quia tum multiplicandus ponitur minus quam semel; nempe ipsius aliquanta pars; & propterea sequens potestas præcedente semper

minor

minor erit: Si autem radix ſit 1; aut etiam $\frac{1}{1}$; poteſtates omnes nec auctæ erunt nec diminutæ; ſed & ipſæ, 1: (nam ſi $2\mathfrak{Q} = 1$, erit $2\mathfrak{Z} = 1 \times 1 = 1$, & $\mathfrak{C} = 1 \times 1 \times 1 = 1$. &c.) quia cum multiplicator eſt 1, multiplicandus præciſe ſemel ponitur.

Quod autem hic de poteſtatibus univerſim ex quacunque radice dictum eſt; id & ſpeciatim in rationibus valet: puta, ſi expoſita ratio, ſeu radix, ſit major quam $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c. hoc eſt, poteſtas ſecunda, tertia, &c. continue creſcunt: ſin minor; decreſcunt: ſi denique æqualis; æquales. Quod quidem ſi advertiſſet Meibomius, non fuiſſet miratus, (p. 171. l. 22, & p. 173. l. 19. & alibi,) rationem minorem, majoris duplicatam, aut triplicatam, &c. dici poſſe. Hujus quidem rei ignorationem, errorum ſuorum prope omnium originem & fontem judicamus.

Cum autem ait, pag. 121 l. *penult.* *In diagrammate*, AB, *ut ita dicam, nulla eſt ipſius* CB: *at* CB *ſeu* DE *dupla eſt ipſius* FG. Mirum eſt quam ſe, ambigua, vocis *dupla*, ſignificatione inopinato confundit. Verum quidem eſt, uti modo diximus, rationem ſimplam $\frac{1}{1}$, rationis duplæ $\frac{2}{1}$, (vel alterius cujuſvis expoſitæ,) *poteſtatem nullam* eſſe, (ſive, poteſtatem à nihilo ſeu 0 denominandam,) quo ſolo ſenſu æqualitatis ratio, reſpectu alterius cujuſvis, *nihili ratio* dici poteſt, hoc eſt, iſtius poteſtas nulla; nempe, nec rationis expoſitæ ratio *duplicata, triplicata,* (ſive, ut ille loquitur, *dupla, tripla,*) aliave ulla poteſtas. At vero hic nil tale agitur. Non enim, dum dicit DE *duplam eſſe ipſius* FG, vult illam hujus *rationem duplicatam* eſſe; (quippe, nec DE, nec FG, ratio eſt, ſed linea,) ſed lineam DE, bis tantundem continere atque FG. Adeoque quo ſenſu *linea* DE *eſt dupla lineæ* FG, ut quæ bis tantundem continet; eodem & *linea* AB, *eſt* (non *nulla*, ſed) *ſimpla lineæ* BC, ut quæ tantundem (non *nullies*, ſed) ſemel continet.



Schema pag. 122. ejuſque in ſeq. explicationem, ego ut παρεργον omitto. Quippe ad præſens negotium vix quicquam ſpectat.

At, *Ex his*, inquit, p. 125. l. 25. *principiis omnia ſua dogmata, tam quæ veterum, illuſtrium Geometrarum, principia convellunt, & falſitatis convincunt; quam quæ recentiorum hallucinationes oſtendunt, deducuntur.* Nempe, *rationis Geometricæ naturam & eſſentiam in magnitudinum, quæ rationem conſtituunt, inter ſe diſtantia* (*quod in Arithmetica ratione omnes admittunt*) *generaliter eſſe conſtitutam: uti abſolutorum numerorum eſſentia in diſtantia a nihilo ſpectatur.* (Adeoque p. 121. l. 10. *Eſſentia ſua ſubdupla ratio æqualis eſt rationi duplæ, quia diſtantia magnitudinis utriuſque rationis eſt æqualis: at vero cum in diverſas partes hæ rationes tendant; dupla adſcendendo, deſcendendo ſubdupla; ratio dupla ſuperat rationem ſubduplam ratione quadrupla.*) *Ex parte autem* (inquit p. 126. l. 5.) *hoc principium Euclides admiſit, nempe in rationibus exceſſivis: ſed generaliter in omnibus rationibus, etiam defectivis* (ſic appellat rationes, ut loquuntur, minoris inæqualitatis,) *hujus dogmatis veritatem ipſe* (inquit) *primus oſtendit. Uti enim* (inquit pag. 141. l. 22.) *ſi a* 12 *&* 10 *auferam* 11, *reſidui ſunt* + 1 & — 1, *qui inter ſe æquales exiſtunt; ſed alter exceſſivus, alter defectivus; ſic ſi a rationibus* $\frac{15}{8}$ & $\frac{9}{8}$ *auferam rationem* $\frac{3}{2}$, *reſiduæ ſunt* $\frac{4}{3}$ *&* $\frac{3}{4}$ *inter ſe æquales; ſed una exceſſiva, altera defectiva. Atque hæc* (inquit) *ultima doctrinam ſuam valde confirmant.* p. 141. l. 26. & p. 142. l. 17. &c. *Verum igitur eſt,* (inquit p. 129. l. 3.) 7 ad 4 *majorem rationem habere, quam* 5 *ad* 4: *At falſum,* 4 *ad* 5 *majorem rationem habere, quam* 4 *ad* 7; aut etiam (ut p. 127. l. 4.) 16 *ad* 24, *minorem habere rationem quam* 21 *ad* 31; *Cum contra ſtatuendum ſit,* 16 *ad* 24, hoc eſt 21 *ad* $31\frac{1}{2}$, *majorem habere rationem quam habeat* 21 *ad* 31; *quoniam major eſt diſtantia inter* 21 *&* $31\frac{1}{2}$, *quam inter* 21 *&* 31. *Falſa igitur* (inquit) *eſt octava propoſitio libri quinti Elementorum Euclidis, &c.* p. 126. l. 8. Eſtque hæc argumentationis ſuæ ſumma, fideliter (quod nec ipſe, credo, diffitebitur) collecta, ſuiſque ipſius verbis expreſſa.

Nolo ego ad hæc reponere, quod ipſe Euclidem reponentem introducit. p. 129. l. 18. *Siquæ unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beata quiete mihi frui licuit, fando ad aures meas pervenere, inter illas certe has primo loco cenſere poſſum.* Sed, quæ ad argumentationis vires dicenda ſunt,

reponam : quippe & multa perperam ſupponit, & juſta deeſt multoties conſequentia.

Dicimus itaque 1°. *Arithmeticam*, ut loquitur, *rationem*, in terminorum ab invicem diſtantia, ſive differentia, fundatam, Subductionis ope colligendam. Sic tripondii & bipondii, aut etiam quadripondii & tripondii, differentia, eſt, unum pondo ; lineæ tripedalis & bipedalis differentia, eſt, linea pedalis : numeri quinarii & ternarii, vel etiam denarii & octonarii, differentia, eſt binarius.

2°. Differentiam illam dicimus, non quidem Arithmeticam rationem eſſe, (proprie loquendo,) aut etiam ipſius rationis Eſſentiam ; ſed Fundamentum iſtius relationis, quæ dicitur Ratio Arithmetica ; quæ tamen alia atque alia eſt, prout ad hunc aut illum terminum refertur. Sic numerus binarius non eſt relatio, nedum ratio vel Arithmetica vel Geometrica, quam habet vel quinarius ad ternarium, vel hic ad illum : ſed quinarii ad ternarium ratio, eſt *exceſſus binarii* ; ſeu binario major eſſe ; ternarii ad quinarium ratio eſt, *defectus binarii*, ſive binario minor eſſe. Quæ quidem rationes ſive relationes, utut eodem fundamento abſoluto nixæ, non eadem ſunt relatio, nec quidem æquales ; ſed & ſatis diverſæ, atque hac illa major : Sicut & Patris ad Filium, & Filii ad Patrem, eadem relatio non eſt, (nec quidem æqualis, ſed hac illa ſuperior) utut utriuſque fundamentum ſit eadem generandi actio.

3°. Omnino igitur inconſulte dictum eſt, & admodum inconcinne, $+1$ *&* -1, *æquales eſſe* : & quod nemo ſobrius dixerit. Quippe ille huic æqualis non eſt numerus ; ſed integro binario major. (Eſt enim $+1 = -1 + 2$.) Neque enim, quod 1 & 1 tantundem ſint, ideo & æquari dicendum erit $+1$ & -1 ; niſi inſuper, tantundem eſſe, dicamus, *excedere* & *deficere*. Nec quidem meliori ratione dicet $0+1$ & $0-1$ tantundem eſſe, quia utrobique æqualiter ab 0 receditur ; quam tantundem eſſe $4+1$ & $4-1$, quia utrobique æqualiter receditur à 4. Quodque ait, p. 141. l. 8. *majus eſſe*, *quod longius ab initio ſuo, hoc eſt, a nihilo, diſtat* ; Verum quidem eſt, dummodo creſcendo diſtent : at vero quod, decreſcendo, à principio ſuo longius diſtat, id minus eſt. Et ſicuti $4-2$, minus eſt quam $4-1$, quia, à communi principio 4, id longius diſtat decreſcendo ; ſic & ob eandem cauſam, $0-2$, minus eſt quam $0-1$, quoniam magis, à principio ſuo 0, decreſcendo diſtat. Quippe, quod magis deficit, id minus eſt.

4°. Dicimus pariter, *Rationis* item *Geometricæ*, fundamentum eſſe, terminorum ab invicem *diſtantiam* ; non autem, ut prius, *Subductione*, ſed *Diviſione* æſtimandam. Non enim, quia 4 & 2, atque 4 & 6, binario pariter diſtant, ergo & eandem utrobique diſtantiam, quæ nempe rationem ſpectet, dicet Meibomius. Quanquam enim tum $4-2=2$, tum $6-4=2$; non tamen rationem 2 ad 4, atque 4 ad 6, vel 6 ad 4, eandem eſſe, aut æqualem, reputat : Sed 4 ad 2, atque 8 ad 4, eandem eſſe rationem dicet, atque eandem ab invicem terminorum diſtantiam, nempe diviſionalem ; quia tum $\frac{4}{2}=2$, tum $\frac{8}{4}=2$. Nec quidem alio ſenſu verum erit, rationis duplæ & ſubduplæ magnitudines æqualiter invicem diſtare. Peto enim, Annon eadem ſit ratio, quadripondii ad bipondium, atque quadripedalis lineæ ad bipedalem? Affirmabit, credo. Ergo, inquam, Diſtantiæ ſunt utrobique æquales. Quod ipſum, credo, fatebitur ; certe inficiari non debet. Verum hoc de diſtantia reſiduali (ſubductione quærenda) dici non poteſt. Quippe reſiduum, illic Pondus eſt ; hic, Linea : at pondus lineæ nemo ſobrius æquale dixerit, cum ſint heterogenea. De diſtantia itaque Diviſionali intelligendum erit : nempe linea quadripedalis bipedalem lineam toties præciſe continet, quoties quadripondium continet bipondium. Quippe ut 2 L) 4 L (2, ita 2 P) 4 P (2. Porro, eſto verbi gratia quantitas A, quadripondium : erit hujus duplum 2 A, octipondium ; ſubduplum $\frac{1}{2}$ A, bipondium : Erit quidem diſtantia diviſionalis, utrobique æqualis ; nam tum A) 2 A (2, tum $\frac{1}{2}$ A) A (2 : at in ſubductione ſecus eſt, quippe $2\,A - A = A$, at $A - \frac{1}{2}\,A = \frac{1}{2}\,A$. Non igitur, hoc ſenſu, eadem eſſet utrobique terminorum diſtantia. Neque interim dicere poteſt, reductionem faciendam eſſe ad communem vel antecedentem vel conſequentem, priuſquam fiat hæc comparatio : nam neque ille hoc facit, cum dicit rationes $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{3}$, (aut etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$,) invicem æquales, quod termini æqualiter utrobique ab invicem diſtent. Nam rationes $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{3}$, ad communem conſequentem reductæ, erunt $\frac{9}{12}$ & $\frac{16}{12}$; ad communem vero antecedentem reductæ, erunt $\frac{12}{16}$ & $\frac{12}{9}$; at neutro modo erunt æquales terminorum differentiæ, ſed in altera $12-9=3$, in altera $16-12=4$.

Intelligendum

Intelligendum igitur erit, vel ad mentem ſuam, de diſtantia diviſionali; ex diviſionis quotiente æſtimanda: quam & nos agnoſcimus rationis Geometricæ fundamentum eſſe.

5° Negamus tamen, hanc diviſionalem *diſtantiam*, eſſe ipſam rationem, ſive (ut loquitur) *naturam & eſſentiam rationis Geometricæ*: Sicut & ante negavimus reſidualem differentiam eſſe rationem Arithmeticam. Eſt quippe ratio, ea quæ ex hac diſtantia oritur Relatio, quæ interim, prout hunc illumve terminum reſpicit, eſt alia atque alia; puta *tantuplo majus*, & *tantuplo minus*. Atque hoc didiciſſe potuerat ab eo quem citat p. 167. l. 2. *Theone Smyrnæo*; cujus hæc verba profert; ἀπὸ τῆς δύο πρὸς τὸ ἓν, ᾗ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, διάστημα ἓν ᾧ τὸ αὐτὸ, λόγος ὁ ἑτερος· τῆς μὲν δύο πρὸς τὸ ἓν, διπλάσιος· τοῦ δ' ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, ἥμισυς. *A binario ad unitatem, & ab unitate ad binarium unum idemque eſt intervallum*, (de intervallo diviſionali, loquitur; qualia ſunt intervalla muſica;) *Ratio autem diverſa*: *binarii ad unitatem dupla*; *unitatis ad binarium, dimidia*. Eodem plane modo, quo Patris à Filio, & Filii à Patre, idem eſt intervallum; at diverſa ratio; nempe hæc illius inverſa; utraque ab eodem fundamento orta.

6° Peſſime itaque infertur, ob idem utrobique intervallum, ſive æqualem diſtantiam (diviſionalem,) æquales eſſe rationes duplam & ſubduplam. Quippe ratio dupla $\frac{2}{1}$, relatum dicit correlato ſuo *eſſe duplo majus*; at ſubdupla $\frac{1}{2}$; *duplo minus eſſe*; Eodem plane modo quo, binarii exceſſus $+2$, indicat *binario majus eſſe*; & binarii defectus -2, *binario minus eſſe*. At nemo ſobrius, *duplo majus eſſe*, & *duplo minus eſſe*; vel etiam *binario majus eſſe*, & *binario minus eſſe*; pro eodem vel æquali habebit: niſi qui & *majus*, ac *minus*, tantundem eſſe velit. Rationem autem, *Relationem* eſſe, non tantum *Relationis fundamentum*, ex ipſa definitione patet, quæ nec Meibomio diſplicet; dicitur enim σχέσις, quod eſt, ipſo Interprete, *Relatio*.

7° Quod itaque contendit, *rationem* 4 *ad* 7, *majorem eſſe quam rationum* 4 *ad* 5, (atque his ſimilia:) quippe, quia major terminorum ab invicem diſtantia: (quo ſolo nomine falſas eſſe contendit. propp. 8. & 10 *e* 5 Euclidis, ejuſque 7 *d* 5. & demonſtrationes tum prop. 14, 20, 21, *e* 5. tum Archimedis 2 *l* 1 de Sphæra & Cylindro, atque Eutocii in illam commentationes, multas item Pappi propoſitiones in lib. 7. Collectaneorum; aliaſque à Theone & aliis traditas; ut liquet p. 126. &c. item Clavii, Gregorii, aliorumque plurimas. Et quidem, tum *totam antiquitatem ignoratæ in quibuſdam Elementis Geometriæ*, tum *juniorum pravas explicationes & monſtroſas hallucinationes*, ſe inde *demonſtraturum* ſperat, p. 127. l. 24.) omnino falſum eſt. Adeoque quæ hinc dependent omnia, (hoc eſt, tota doctrina ſua nova,) ſponte corruunt. Verum quidem eſt, 4 *a* 7 *magis deficere*, quam 4 *a* 5, adeoque rationem innuere *magis defectivam*: quod ipſe contendit p. 143. l. 12. At vero, quod eſt *magis defectivum*, ſive *magis exiguum*, id, nobis videtur, *minus eſſe*, non *majus*: adeoque & Rationem *magis deficientem*, appellabimus *minorem*; ſicut tum veteres, tum (excepto Meibomio) recentiores omnes. Si autem Meibomius per *majus*, intellectum velit, *magis exiguum*; ſecum loquatur licet, cumque Hermotimo ſuo, atque Euthymio; (ſuumque illis prædicet acumen eſſe *maximum*;) ſiquidem reliqui hoc non intelligent.

8° Nos itaque nec *exploſum* iri patimur, nec *antiquatum*, veterem loquendi morem, (quod vult Meibomius p. 93, & 110.) Nec eam, quam habet p. 134. l. 14. conſequentiam admittimus, *Si ratio* $\frac{1}{4}$ *major eſt ratione* $\frac{1}{5}$ *ſeu, quod idem eſt, ſi ratio* $\frac{5}{4}$ *minor eſt ratione* $\frac{4}{5}$; *etiam revertendo, ratio* $\frac{4}{5}$ *minor eſt ratione* $\frac{5}{4}$. Rationem utique *majorem* dicimus, non quæ utcunque *ab æqualitate magis recedit*, ſed quæ *vel æqualitatem magis ſuperat, vel ab ea minus deficit*; quæ autem *vel minus ſuperat, vel magis deficit*, eam nos *minorem* rationem (antiqua nomenclatura) appellamus. Siquidem rationem triplam $\frac{3}{1}$, duplam $\frac{2}{1}$, majorem dicimus; quia 3 A, plus eſt quam 2 A. Item rationem ſubduplam $\frac{1}{2}$, majorem eſſe, quam ſubtriplam $\frac{1}{3}$, (utut hæc ab æqualitate magis recedat,) quia $\frac{1}{2}$ A, plus eſt, quam $\frac{1}{3}$ A. Et quanquam ille multis contendat, aliter de minutiis, aliter de rationibus judicandum, pag. 131. &c. quippe, (ut ait p. 133. l. 10.) *ratio* $\frac{6}{4}$, *æqualis eſt duabus* $\frac{6}{5}$ & $\frac{3}{4}$; *at minutia* $\frac{6}{4}$, *æqualis duabus* $\frac{5}{4}$ & $\frac{1}{4}$, nos utrobique idem dicendum non dubitamus, nempe tum minutiam, tum rationem, $\frac{6}{4}=\frac{6}{5}\times\frac{5}{4}$; & non minus tum minutiam, tum rationem $\frac{6}{4}=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$. Et quidem nil aliud ſunt minutiæ, ſive fractiones, quam rationum indicia. Ecquid enim eſt $\frac{1}{2}$ A, quam quod eſt ad A, ut 1 ad 2? & $\frac{3}{2}$ A, quam quod

eſt

eſt ad A, ut 3 ad 2 &c. & ſic ubique. Sive enim dicamus $\frac{1}{2}$ A, quantitatis A dimidium eſſe, ſive ſubduplum, perinde eſt. Quod nec Meibomius negare debet, qui p. 166. l. 25. *rationem dimidiam*, atque *ſubduplam*, pro eodem habet.

9° Quod autem dimidium ſive ſubduplum, majus ſit quam triens ſive ſubtriplum, (& de reliquis ſimiliter,) ſi dubitet, ſic probamus. *Omnes homines totum quavis ſua parte majus eſſe communi notione percipiunt*, (dictante Meibomio, p. 141. l. 16.) At, ſubtriplum ſubdupli pars eſt: ergo, hoc illo majus eſt. Minorem hoc exemplo probamus. Subtriplum libræ, ſunt 4 unciæ; (ſicuti libra eſt harum triplum:) ejuſdem libræ Subduplum ſunt unciæ 6; (ſicuti libra eſt harum duplum:) Sunt autem 4 unciæ, unciarum 6, pars aliqua; ſubtriplum itaque ſubdupli pars eſt, adeoque minus, quod erat probandum. Vel ſic aliter, ad mentem ſuam. Ratio $\frac{1}{2}$, per ipſius doctrinam, componitur ex duabus additis $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{2}$; adeoque ſua parte $\frac{2}{3}$, major eſt; quod erat probandum. (Sed, ad hominem, hoc ultimum dictum eſto, magis quam ad rem; non enim ego propterea exiſtimo, quicquid ipſe putaverit, rationem $\frac{2}{3}$ aut minorem eſſe quam $\frac{1}{2}$, aut etiam huic æqualem: utut diſtantia terminorum, ſi diviſionem ſpectemus, ſit illic minor; ſi ſubductionem, æqualis. Nam $3-2=1=2-1$; item $2)3(1\frac{1}{2}$, ut $1)2(2$. ſed ad hominem valet argumentum poſterius; ad rem ſaltem prius.) Vel ſic tertio adverſus eundem argumentamur. *Si æqualibus æqualia addantur, aggregata erunt æqualia.* per 2 ax 1. At, ſi rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ addantur (Meibomii ſenſu) æqualia, (puta utrobique ratio, $\frac{1}{1}$,) aggregata non erunt æqualia; (quippe illic $\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}$, hic vero $\frac{9}{3}=\frac{3}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{1}$, ne quidem Meibomio refragante:) Non itaque æquales ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Item quarto. *Si æqualibus inæqualia addantur tota erunt inæqualia*; (per 4 ax. 1) & quidem *illud majus, ubi majus additur*: (quod, credo, nec Meibomius negabit.) At, ſi rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ addantur inæqualia; illic $\frac{4}{1}=\frac{36}{9}$, hic $\frac{64}{9}$; aggregata erunt æqualia, nempe utrobique $\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{64}{9}$. Non itaque æquales ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Item, ſi rationibus æqualibus $\frac{8}{1}$, & $\frac{8}{1}$, addantur (Meibomii ſenſu) rationes $\frac{4}{5}$ & $\frac{4}{7}$; aggregatum illud ubi additur $\frac{4}{5}$, (nempe $\frac{32}{5}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{5}$,) majus erit eo ubi additur $\frac{4}{7}$, (nempe $\frac{32}{7}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{7}$:) ratio itaque $\frac{4}{5}$ major eſt quam ratio $\frac{4}{7}$; non autem minor, quod vult Meibomius. Item quinto. *Si ab æqualibus æqualia adimantur, reſidua erunt æqualia*; per 3 ax. 1. At ſi à rationibus $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, auferantur æqualia, (puta utrobique ratio $\frac{1}{3}$,) reſidua non erunt æqualia (ſed illic $\frac{4}{1}$ ſeu $\frac{16}{4}$; hic vero $\frac{9}{4}$; quippe $\frac{1}{3})\frac{4}{3}(\frac{4}{1}=\frac{16}{4}$, & $\frac{1}{3})\frac{3}{4}(\frac{9}{4}$, etiam Meibomii ſenſu.) Non igitur æquales ſunt expoſitæ rationes $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Tandem ſexto. *Si ab æqualibus inæqualia auferantur, reſidua erunt inæqualia*; (per 5. ax 1.) & quidem *illud minus, ubi majus auſertur*; (quod nec inficiabitur, credo, Meibomius.) At ſi à rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, auferantur inæqualia, illic quidem ratio $\frac{10}{9}$, hic autem ratio $\frac{8}{8}$; reſidua erunt æqualia; nempe utrobique ratio $\frac{6}{5}$, nam $\frac{10}{9})\frac{4}{3}(\frac{36}{30}=\frac{6}{5}$ atque etiam $\frac{8}{8})\frac{3}{4}(\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$, ut patet. Non igitur æquales ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Item, ſi ab æqualibus rationibus $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{1}$, auferantur (item Meibomii ſenſu,) rationes $\frac{4}{5}$ & $\frac{4}{7}$; reſiduum illic minus erit, hic majus; quippe $\frac{4}{5})\frac{8}{1}(\frac{40}{4}=\frac{10}{1}$; at $\frac{4}{7})\frac{8}{1}(\frac{56}{4}=\frac{14}{1}$; ut patet. Ergo, quæ illic auferetur ratio $\frac{4}{5}$, major eſt quam quæ hic auferetur $\frac{4}{7}$: Non autem minor, quod vult Meibomius. Et quidem, niſi hæc abunde ſufficerent, addi poſſent iſtis alia infinita, quibus conſtaret, quam abſurde dictum ſit, rationes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, item $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. invicem æquales; aut etiam rationem $\frac{4}{7}$ majorem eſſe quam $\frac{4}{5}$; & quæ his ſimilia.

10. Cum itaque quæ adverſus prop. 8 *e* 5 Euclidis, (aliaque quæ ab hac dependent) adducit Meibomius, a p. 126. ad p. 136. incluſive; huic nitantur omnia, quod ratio $\frac{4}{7}$ major ſit quam ratio $\frac{4}{5}$ (ſic enim ipſe ait p. 136. l. 3. *Cæterum omnis hæc ratiocinatio, qua Euclidei Theorematis falſitatem demonſtramus, paucis verbis includi poteſt. Quoniam enim ratio $\frac{1}{4}$ major eſt quam ratio $\frac{2}{4}$, quod in iſta 7 ſupra 4 majori ſpatio aſcendat quam 5 ſupra eundem 4; idcirco & ratio $\frac{4}{7}$ major eſt quam ratio $\frac{4}{5}$, quod 4 infra 7 magis deſcendat quam infra 5.*) quod quam abſurde dictum ſit jam oſtendimus: Inconcuſſa manet Euclidei dicti veritas; adeoque & quæ inde rite deducuntur omnia ab Eutocio, Archimede, Pappo, Theone, aut etiam recentioribus. Nec dum neceſſe eſt, (quod contendit ille p. 148. l. 16.) *ut Euclides, cæterique, in hac cauſa victi, circinum & regulam Meibomio tradant.*

Quæ deinceps de Euclidis Demonſtratione habet, (a p. 136. l. 9. & ſequentibus ad p. 141. incluſive,) partim nihili ſunt, partim ſibi adverſantur. Nam 1°. Dum

p. 137.

p. 137. l. 8. *falsam esse* ait 8 *def.* 5. cui illa innititur demonstratio: hoc tantum vult; *Majoris rationis* eam Euclidis definitionem, ei, quam appellat Meibomius majorem rationem, minime convenire. Quod quidem verum est. Siquidem per *rationem majorem* aliud vult Euclides, aliud Meibomius. Definit autem Euclides, non quid Meibomius, sed quid ipse per *Majoris Rationis* appellationem intellexit. Et quidem recte. Quippe eodem sensu ubique in suis propositionibus intelligitur *major ratio*, quo in illa definitione intelligendam esse dixerat. Quod neque Meibomius negare poterit: ut nec, Euclidis propositiones omnes, eo sensu intellectas, veras esse: hoc est, quo sensu se intellectum vult Euclides, eo sensu quæ dixit vera esse. 2° Dum pag. 141. perhibet demonstrationem illam ex 8 *def.* 5. petitam *ineptam* esse: videtur haud satis intellexisse, quid sit, apud Geometras, ex definitione demonstrare. Posito enim, quod ea sit *majoris rationis* definitio, quæ habetur 8 *d* 5; non aliter demonstrare debuit, rationem, de qua 8 *e* 5 agitur, majorem esse; quam ostendendo, majoris rationis definitionem huic convenire: quod ibidem ab Euclide factum est; nec (si demonstrationem eam satis intelligat) Meibomius id inficiabitur. 3° Quod autem habet, *p.* 137. *l.* 10. Nempe, *ut majori certitudine omnia clarescant, se novum adhuc suum quoddam de rationibus Geometricis inventum nobis non invisurum, ex quo, siquid tamen certi a mortalibus comprehenditur, evidentissimam doctrinam de rationum magnitudinibus explorandis hauriamus*: cujus quidem inventi summa hæc est, *si rationis antecedentem terminum multiplicemus*, fit *rationis additio*, adeoque ratio augetur, hoc est, fit major; *sin consequentem*, fit *rationis ablatio*, adeoque ratio minuitur, hoc est, fit minor. Hoc, inquam, *suum* fortasse esse poterit; at certe *novum* non est inventum: quippe nemo hoc non novit, (id ipsum nempe tradit ea quam ille oppugnatum it prop. 8 *e* 5.) sed & ipsi Meibomio adversatur vel maxime. Nam, juxta hanc regulam, si rationis $\frac{4}{3}$, consequentem 5 multiplicemus in $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, ut fiat ratio $\frac{4}{7}$ (nam $5\times 1\frac{2}{5}=7$,) minuitur ratio $\frac{4}{3}$; ablatione rationis $\frac{7}{5}$. Non itaque major erit $\frac{4}{3}$ quam $\frac{4}{7}$ (quod vult Meibomius,) sed minor erit. Item si rationis $\frac{4}{7}$ sive $\frac{20}{35}$, antecedentem 20, multiplicemus in $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, ut fiat ratio $\frac{28}{35}$ (nam $20\times 1\frac{2}{5}=28$) hoc est $\frac{4}{5}$, augebitur ratio $\frac{4}{7}$, adjecta ratione $\frac{7}{5}$; adeoque ratio $\frac{28}{35}$ hoc est $\frac{4}{5}$, major erit quam $\frac{20}{35}$ hoc est $\frac{4}{7}$; non autem (quod vult Meibomius) minor erit.

Deinde vero à pag. 141. ad p. 148. inclusive, vix quicquam occurrit novi: sed eadem subinde canitur cantilena. Quod enim p. 147. ex Harmonica producitur, parum ad rem spectat: quippe de Intervallis tantum agit, non de Rationibus: (aliud autem esse Intervallum, διάστημα, aliud Rationem, λόγον· ex Theone Smyrnæo modo dictum est: quod cum non satis animadverterit Meibomius, quæ ex Harmonicis sibi favere putaverit, revera fraudi sunt.) Ecquis enim dubitat, quin inter 6 & 3, atque inter 3 & 6, idem sit intervallum? (aut etiam inter Patrem & Filium, atque Filium & Patrem?) at interim eandem aut æqualem esse rationem (hoc est, Relationem,) 6 ad 3, atque 3 ad 6, sive Arithmeticam, sive Geometricam, haud quisquam dixerit, (nisi qui & relationem Patris ad Filium, & Filii ad Patrem, eandem esse dixerit.) Nam, quod ad rationem ut loquuntur Arithmeticam, 6 est ternario major quam 3; at 3 ternario minor quam 6: Quis autem *ternario majus esse*, & *ternario minus esse*, tantundem esse dixerit? Quod autem ad rationem attinet Geometricam, est 6 duplum τῦ 3, at 3 est subduplum τῦ 6: nempe illud, duplo majus; hoc, duplo minus: Quis autem, *duplo majus*, & *duplo minus*, tantundem esse dixerit?

Quod autem p. 146. l. 3. insinuatur; *Cæterum facile quoque ex his colligitur, diversi generis rationes, excessivam & defectivam, inter se, quatenus una altera major est, aut minor, comparari non posse: quod comparatio ejusdem generis nomina requirat*: Et p. 153. l. 17. *Excessivas rationes cum excessivis, & defectivas cum defectivis solum comparari posse*: Et similiter p. 129. l. 14. p. 148. l. 1. Et alibi. Mirum est qui dixisse possit. Nam & ipse hujusmodi comparationes multoties instituit. Puta p. 140. l. 21. *Certissimum*, inquit, *est, majorem esse rationem* $\frac{1}{4}$ *quam sit ratio* $\frac{4}{4}$, *quoniam dum utrique eadem addita est*, (nempe ratio $\frac{3}{1}$,) *& eadem ab utraque ablata*, (nempe $\frac{4}{1}$,) *majorem residuam relinquit ratio* $\frac{1}{4}$ *quam* $\frac{4}{4}$; *illa, rationem* $\frac{21}{16}$; *hæc, ne quidem nihili* (æqualitatis, intelligit) *rationem, sed defectivam* $\frac{15}{16}$. Ubi manifeste comparat rationem (ut loquitur) excessivam $\frac{21}{16}$; atque defectivam $\frac{15}{16}$, eamque hac majorem appellat. Sic p. 105. l. 4. *Quoniam*, inquit, *ratio* $\frac{1}{1}$ *superat rationem* $\frac{1}{2}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *sed rationem* $\frac{1}{2}$ *superat ratio* $\frac{2}{1}$, *ratione* $\frac{2}{1}$;

Ergo ratio (exceſſiva) $\frac{2}{1}$ *ſuperat rationem* (defectivam) $\frac{1}{2}$, *ratione bis dupla, id eſt, quadrupla.* Si autem exceſſiva defectivam ſuperet, hoc eſt, major ſit; cur interim, *quatenus una altera major eſt aut minor, comparari non poſſe,* dixerat. Sed &, *ſimiliter,* inquit, *ratio* $\frac{9}{4}$ *major eſt quam ratio* $\frac{4}{9}$, *ratione* $\frac{81}{16}$. p. 107. l. 6. Item p. 106. l. 27. & p. 144. l. 4. *ratio*, inquit, *ſeſquialtera a ratione ſubſeſquialtera, diſtat ratione bis ſeſquialtera*; ne autem dubitemus utra major ſit, addit p. 144. l. 9. rationem *ſeſquialteram exceſſivam* ($\frac{3}{2}$) *ſuperare rationem ſeſquialteram defectivam* (hoc eſt, ſubſeſquialteram $\frac{2}{3}$) *ratione bis ſeſquialtera.*

Quod ipſi hac in re videtur fraudi fuiſſe, hoc eſt: Viderat ille, expoſitæ rationis rationes duplicatam, triplicatam, quadruplicatam, &c. quas appellat ille duplam, triplam, quadruplam, &c. ita conſtitutas eſſe, ut ſi earum aliqua ſit ratio exceſſiva, hoc eſt, ratione ſimpla ($\frac{1}{1}$) major, etiam reliquæ erunt exceſſivæ; ſi defectiva, defectivæ: (Quod quidem verum eſt: quippe illud univerſaliter obtinet, ſi radix ſit unitate major, ejus item poteſtates omnes erunt unitate majores; ſi minor, minores; ſi æqualis, æquales:) Adeoque rationes exceſſivam & defectivam, ejuſdem expoſitæ rationis ſive radicis poteſtates non eſſe. Cum itaque nullo ille reſpectu rationem ratione majorem aut minorem putandam eſſe velit, niſi quatenus expoſitæ alicujus pluries pauciuſve multiplicata dici poſſit, hoc eſt, radicis alicujus altior inferiorve poteſtas; quæ ejuſdem radicis ſive expoſitæ rationis poteſtates eſſe non poſſint, eas inter ſe, quatenus una altera major ſit aut minor, comparari non poſſe putavit. (Oblitus interim, ſe ipſum, ne alios dicam, longe aliam majoris minoriſve rationis æſtimationem paſſim adhibere, ut modo dictum eſt.) Quaſi quidem non alia de cauſa numerum 16 numero 4 majorem cenſeamus, quam quod hic, numeri 2 ſit poteſtas ſecunda, ſive Quadratum; ille, quarta, ſive Biquadratum: Et, eadem de cauſa, numerum fractum $\frac{1}{16}$ majorem quam $\frac{1}{4}$, quia radicis $\frac{1}{2}$, hic quidem quadratum, ille biquadratum: Duorum vero, fracti nempe $\frac{1}{4}$, & integri 4; aut etiam fracti $\frac{1}{2}$, & integri 16; neutrum majorem eſſe, aut minorem, putandum ſit; quia nullius radicis, ſive integræ ſive fractæ, uterque poſſit poteſtas eſſe. Quæ omnia quam abſurde dicta ſint nemo non videt. Nam (præterquam quod falſum ſit, numerum $\frac{1}{16}$ majorem eſſe quam $\frac{1}{4}$ partem toto; item, numerorum 4 & $\frac{1}{4}$, vel $\frac{1}{2}$ & 16, neutrum majorem minoremve eſſe;) conſiderationis eſt omnino extraneæ ad numerorum inter ſe majoritatem, aut minoritatem, ſive exceſſum & defectum, æſtimandum, quod ſint tertii alicujus, forinſecus aſſumendi, poteſtas aliqua. Et quidem non magis eſt eſſentiale numero 64, ut ſit poteſtas ſecunda, puta radicis 8; quam ut ſit poteſtas tertia puta radicis 4; aut etiam ſexta, radicis 2; ſed & quarta, radicis $\sqrt{8}$ ſive $2\sqrt{2}$; & quinta, radicis $\sqrt[5]{64}$; aut duodecima, radicis $\sqrt{2}$; item prima, radicis 64; & ſubſecunda, radicis 4096; & ſubtertia, radicis 262144; & poteſtas ſubſeſquialtera, ſive ſubſemitertia, radicis 512: & ſeſquitertia, ſive quartæ ſubtertia radicis, $16\sqrt{2}$. Et ſic in infinitum. Quodque de radicis numeroſæ poteſtatibus dictum eſt, id univerſim valet de cujuſcunque generis aliis, & ſpeciatim, de Rationibus, gradatim multiplicatis. Adeoque omnino ineptiſſimum eſt, earum magnitudines, ab eo quem habent poteſtatis gradu æſtimare. Addo inſuper, ſuperiorem poteſtatem ſive gradum nonnunquam minoris eſſe magnitudinis: Nec quidem ſumptis tantum variis radicibus, puta 16, quadratum numeri 4, majorem eſſe quam eſt 8, cubus numeri 2; ſed & eadem ſumpta radice, quæ puta minor ſit quam 1. Nam radicis $\frac{1}{2}$, poteſtas tertia, ſeu cubus, $\frac{1}{8}$, minor eſt quam ejuſdem quadratum $\frac{1}{4}$: Eodem plane modo quo radicis ſive rationis expoſitæ $\frac{1}{2}$ (ſubduplæ) ratio triplicata ſive poteſtas tertia $\frac{1}{8}$ (ſuboctupla,) minor eſt quam ejuſdem ratio duplicata, ſive poteſtas ſecunda $\frac{1}{4}$ (ſubquadrupla;) utut illa ſuperioris gradus, ſive denominationis, poteſtas ſit; hæc inferioris. Quæ quia non ſatis perſpexit Meibomius, id ei novæ ſuæ doctrinæ male fundatæ anſam porrexit.

Quod vero ait, p. 148. l. 3. de prop. 10. *e. 5. Decima autem propoſitio cum octava, cui ut fundamento ſuperſtructa eſt, corruit*; & ſimilia de aliis ibidem, & deinceps ad paginam 161. cum non alio vertantur cardine, quam quod putaverit ſe octavam quinti evertiſſe: non eſt ut de iis admodum ſimus ſoliciti. Quippe eadem opera ſtatuminantur & illa. Nec opus ut eadem ſæpius repetamus. Nam nec ipſe, credo, Meibomius negabit, quin, conceſſa veritate prop. 8. *e. 5*, reliqua, ab authoribus ſuis Archimede, Apollonio, Eutocio, Pappo, &c. legitima ſatis conſequentia inde ſint deducta.

Quæ deinde, p. 161. &c. ad p. 174. iterato habentur; de πολλαπλότητος voce; de

Rationum

rationum denominatoribus; de tripli duplo, æquali ſextuplo, &c. de Theone & Eutocio ita loquentibus; Clavio item, aliiſque, ipſos ſecutis; atque his ſimilibus; non eſt ut iis ulterius inſiſtam. Quippe quibus jam ſupra ſatisfactum eſt. Neque ullus gloriationi ſuæ locus relinquitur, quam habet pag. 169. l. 24. *Ex his perſpicuum eſt, non tantum ignoraſſe illos authores.* (Nichomachum Geraſenum, Heronam, Theonem, Eutocium, Cardanum, Rodulphum Volumnium, Clavium, &c.) *quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit Ratio.* Cum potius dicendum videatur, nec quid ſit eorum alterutrum, intellexiſſe Meibomium, nec quid ſibi velint authores citati.

Quod autem habet p. 171. l. 22. *Quare, ex veterum ſententia, ut ratio quadrupla eſt duplæ rationis dupla* (intelligit, *duplicatam,*) *ſic ratio ſubquadrupla eſt ſubduplæ ſubdupla* (non, inquam, ſed *duplicata*;) Similiter *ſubcentupla ratio, ſubdecuplæ rationis eſt ſubdupla,* (nullo modo, ſed, *duplicata*:) Iterumque p. 173. l. 19. *Quippe, uti ante dictum eſt, ratio* $\frac{8}{27}$, *rationis* $\frac{8}{12}$ (vel $\frac{2}{3}$) *non eſt tripla, ſed ſubtripla*; *ſeu, ratio* $\frac{8}{27}$ *ad rationem* $\frac{8}{12}$ *eſt ex Euclidis ſententia, quam octava quinti tradidit, ut* 1 *ad* 3, *non autem, quod Commandinus & Clavius putavit, ut* 3 *ad* 1. Omnino falſum eſt: totumque illud negotium à Meibomio perperam intellectum, & depravatum miſere. Nequaquam enim dicendum eſt, rationem $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$; & rationem $\frac{1}{100}$, rationis $\frac{1}{10}$; ſubduplicatam eſſe, ſed duplicatam; (nam $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, & $\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$;) neque rationem $\frac{8}{27}$, rationis $\frac{2}{3}$, ſubtriplicatam, ſed triplicatam eſſe; (nam $\frac{8}{27} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$.) Id enim expreſſis verbis definit Euclides, 10 *d* 5. *Cum tres magnitudines* (*continue*) *proportionales ſint,* (puta 1, 2, 4, vel 1, 10, 100,) *prima ad tertiam* (1 ad 4, vel 1 ad 100) διπλασίονα, *duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam* (1 ad 2, vel 1 ad 10.) *At cum quatuor magnitudines* (*continue*) *proportionales fuerint,* (puta 8, 12, 18, 27,) *prima ad quartam* (8 ad 27) *triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam,* (8 ad 12.) Eſt itaque ratio $\frac{1}{4}$, duplicata rationis $\frac{1}{2}$; & $\frac{1}{100}$, duplicata rationis $\frac{1}{10}$; (non ſubduplicata, ſive, ut Meibomius loquitur, ſubdupla:) & $\frac{8}{27}$, triplicata (non ſubtriplicata) rationis $\frac{8}{12}$ ſive $\frac{2}{3}$. Quod autem ille hic habet de octava quinti, eſt nihil ad rhombum. Quippe ea propoſitio, (quæ nempe rationem $\frac{1}{4}$ minorem eſſe ſtatuit quam $\frac{1}{2}$; atque $\frac{1}{100}$, minorem quam $\frac{1}{10}$; & denique $\frac{8}{27}$, minorem quam $\frac{8}{12}$,) nihil habet commune cum decima definitione quinti, (ubi definitur quæ ratio dicenda erit διπλασίων, τριπλασίων, duplicata, triplicata, &c.) Non enim quia ratio rationis *duplicata* aut *triplicata* dicitur; ideo & *major* dicenda erit: nec, ſi *minor* ſit; duplicata, aut triplicata, dici non poterit. Sed ad hoc, ut ratio rationis duplicata, aut triplicata ſit, vel etiam ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. omnino accidentarium eſt ut ſit major, aut minor. Eſt quidem ratio dupla, tripla, &c. λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, &c. major ſemper quam ſimpla: (puta 2 A, 3 A, &c. major quam 1 A:) at vero ratio rationis duplicata, triplicata, διπλασίων, τριπλασίων, &c. nunc major eſt nunc minor: Hoc eſt a^2, a^3, &c. nunc major quam a; ſi nempe a major quam 1: nunc autem minor; ſi nempe a minor quam 1. Ut & ſuperius oſtenſum eſt. Quum itaque illic ſubjungit, p. 173. l. 23. *Quare, ſecundum Euclidis doctrinam, prima ad ſecundam,* 8 *ad* 12, *majorem rationem habet, quam ad quartam,* 8 *ad* 27. omnino verum eſt, per 8 *e* 5. Dum autem addit, *& ratio* 8 *ad* 27 *ſubtripla eſt rationis* 8 *ad* 12. hoc falſum eſt. Nam & ratio $\frac{8}{12}$ ſeu $\frac{2}{3}$ major eſt quam $\frac{8}{27}$; per 8 *e* 5; & hæc interim illius triplicata, adeoque poteſtas ſuperior, per 10 *d* 5. Cumque ille rationem rationis triplicatam, τριπλασίονα, ita παρεφθαρμένως, (lin. 22.) acſi ſit *ut* 3 *ad* 1; & ſubtriplicatam, ὑποτριπλασίονα, *ut* 1 *ad* 3: iterum hallucinatur. Dixiſſet enim, non *ut* 3 *ad* 1, ſed ut cubus ad radicem, ſeu ut ♀ ad ♃, vel R^3 ad R: item non *ut* 1 *ad* 3; ſed ut radix ad cubum, ſeu ut ♃ ad ♀, vel R ad R^3. Adeoque ad Euclidis mentem pulchre conſtarent omnia, quæ Meibomius perperam interpretando luxavit miſere.

Quæ pag. 174. & deinceps ad finem, de *Rationum inter ſe Rationibus* habet; haud cæteris ſaniora exſiſtunt. Verſantur autem ea partim in evertendis eis quæ à Gregorio à S. Vincentio hac de re traduntur; partim in nova ſua doctrina eruenda.

Gregorium ille multoties ſollicitat; Puta, *Præf. pag.* 5. *l.* 9. *Hujus,* inquit, *errores, quod plane inſignes ſint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi, ut omnes viderent in circuli quadratura perficienda, non plus novi quam falſi ab ipſo eſſe repertum. Enimvero ab inventæ matheſeos tempore nul-*

lum fuiſſe puto, qui plus centum & triginta falſas propoſitiones ex uno erroneo principio deduxiſſet. Gratiam itaque a Mathematicis me initurum credidi; ſi quadraturam illam ab ipſo fundamento everterem. Iterumque libri *pag.* 100. *l.* 11. *Hunc vero errorem* (Theonis, Eutocii &c. de rationum Denominatoribus) *ampliavit Gregorius a S. Vincentio, qui grande illud opus Geometricum, de Quadratura Circuli, ante ſeptem annos edidit, ſi effectum ſpectemus, conatu ſolo laudabile. Hic, ut ſcopum feriret, de rationum proportionibus, ſeu, ut ipſe cum Boethio vocat proportionalitatibus Geometricis, protulit nova inventa; revera autem multa nova errata. Namque in ſolo octavo libro, qui hujus doctrinæ fundamenta continet, centum ſeptemdecim falſas propoſitiones numeravit Euthymius: tot nimirum quot Euclideis fundamentis carent.* Iterumque p. 203. l. 1. *Falſæ igitur ſunt in octavo de Quadratura Circuli libro, propoſitiones* 117. *quibus, ex libro decimo,* 17 *adjungemus; ut falſarum propoſitionum, & quidem elementarium, numerus excreſcat ad* 134. Et lin. 9. *Cæteras in quibus demonſtrandis, has falſas Elementares uſurpavit, operoſe recenſere nolui; quod rerum Geometricarum gnarus ſciat, cum fundamento male jacto ruere quicquid ipſi fuerit ſuperſtructum. Nec ita omnia ipſius nova inventa cenſui, ut adfirmare ſuſtineam, nullum cuiquam ſpicilegium eſſe relictum.* Item pag. 161. l. 27. *Rogo itaque vos, ut pauca etiam de iſtis me narrantem audiatis; eoque magis, quod novum quoque proportionum genus, ab uno, non infimi ſubſellii Geometra, nuper ſit inventum, cujus adminiculo Circuli quadraturam, toties irrito conatu a vobis tentatam, ſpiſſis voluminibus ſe demonſtraſſe opinatur.* Quinam autem ſint illi tam inſignes errores, demonſtrandum aggreditur. p. 188. l. 26. & deinceps ad finem libri.

Gregorium hunc quod attinet; fateor equidem illum eam, quam ambiebat, circuli Quadraturam minime attigiſſe. Quod in ἔξετάσει ſua, ante tres annos, oſtendit *Chriſtianus Hugenius*; & nos, ſi opus ſit, parati ſumus itidem oſtendere. Verum interim haud pauca minime contemnenda prodidit, ſuamque in Geometricis peritiam oſtendit: Nec omnino, eo nomine, culpandus videtur, quo illum ſollicitat Meibomius. Et quidem, ni fallor, vel Meibomius ipſe propoſitiones illas plus centum triginta, quas ille ut falſas incuſat, fatebitur, eo quo illas protulit Gregorius ſenſu, veras eſſe. Nec alio, quantum ego video, nomine eas culpat Meibomius, quam quod alio ſenſu nonnullas loquendi formulas uſurpaverit (Theonem, Eutocium, Clavium, alioſque ſecutus,) quam quo eas uſurpari vult Meibomius, & quidem ſolus.

Grandi paralogiſmo (inquit p. 188. l. 26.) *lapſus eſt Gregorius a S. Vincentio, qui Clavii de Denominatoribus doctrinam ſecutus, rationum proportionem in hujuſmodi numeris conſtituit, ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$, *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$: *aut permutando ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{6}{2}$, *ita* $\frac{4}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$. Hoc eſt, (neque enim aliter hic vult Gregorius) ut $\frac{8}{2}$ Quadruplum, ad $\frac{4}{2}$ Duplum; ſic $\frac{6}{2}$ Triplum, ad $\frac{3}{2}$ Seſquialterum: & permutando, ut Quadruplum, ad Triplum; ſic Duplum, ad Seſquialterum: quippe tum illic utrobique ut 2 ad 1; hic autem, utrobique ut 4 ad 3. Atque hoc quidem quin verum ſit, ego nihil video. Eſto enim expoſitum pondus A. hujus quadruplum eſt 4 A, duplum 2 A, Triplum 3 A, ſeſquialterum $\frac{3}{2}$ A. Annon autem proportionalia ſunt $\frac{8}{2}$ A = 4 A. $\frac{4}{2}$ A = 2 A :: $\frac{6}{2}$ A = 3 A. $\frac{3}{2}$ A :: 8. 4 :: 6. 3 :: 2. 1? Item permutando $\frac{8}{2}$ A = 4 A. $\frac{6}{2}$ A = 3 A :: $\frac{4}{2}$ A = 2 A. $\frac{3}{2}$ A :: 8. 6 :: 4. 3? Si itaque hoc verum ſit (quod ne quidem Meibomium negaturum credo; imo inquam, diſertis verbis fatetur p. 198. l. 4.) neque aliud Gregorius hîc intellectum velit, (quod ne quidem Meibomius ignorat: nam ſe, definitione ſua, ſe explicantem introducit Meibomius p. 192. l. 16. & p. 194. l. 8.) quorſum eum falſitatis incuſat? At interim ni hoc falſum ſit, neque fallæ erunt illæ 134. quas ille condemnat propoſitiones: vel fatente Meibomio, p. 198. l. 4. Quod quidem Gregorio, hac ex parte, vindicando, abunde ſufficiat.

Sed & ſic loquutum Ptolemæum, — Harmonicorum lib. 1. cap. 6. fatetur Meibomius p. 190. l. 8. Τὸ δὶς διὰ πασῶν ὅπως ἔχει πρὸς τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν· τετέσιν, ὁ τετραπλάσιος λόγος πρὸς τὸ τριπλάσιον· ὡς μόνον τὸ διὰ πασῶν πρὸς τὸ διὰ πέντε· τετέσιν, ὁ διπλάσιος λόγος πρὸς τὸ ἡμιόλιον· ἐὰν γὰρ ἑνὸς ἀριθμοῦ λημθῶσι τριπλάσιός τε καὶ τετραπλάσιος· καὶ πάλιν ἡμιόλιός τε καὶ διπλάσιος· ὁπότερον ποιῆσι λόγον, ὅ τε τετραπλάσιος πρὸς τὸ τριπλάσιον, καὶ ὁ διπλάσιος πρὸς τὸ ἡμιόλιον· ὡς τε ὅσῳ συμφωνότερόν ἐστι τὸ διὰ πασῶν τῷ διὰ πέντε, τοσούτῳ συμφωνότερον γίνεσθαι καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν τῷ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. Quæ vel Meibomio interprete, ſic ſonant Latine. *Bis dia paſon conſonantia* (nempe $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$) *ita ſe habet*

ad

ad dia pente & dia paſon, (nempe $\frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{1}$,) *hoc eſt quadrupla ratio ad triplam: ut ſola dia paſon* ($\frac{2}{1}$) *ad ſolam dia pente* ($\frac{3}{2}$;) *id eſt, dupla ratio, ad ſeſquialteram. Si enim unius & ejuſdem numeri* (puta 4) *ſumantur triplus & quadruplus* (nempe 12 & 16 ;) *& rurſus ſeſquialter & duplus,* (nempe 6 & 8 ;) *ſuper-tertiam rationem* ($\frac{4}{3}$) *faciunt & quadruplus ad triplum* (16 ad 12,) *& duplus ad ſeſquialterum* (8 ad 6.) *Adeo ut, quanto conſonantior eſt dia paſon conſonantia ipſa dia pente, tanto ſit conſonantior bis dia paſon quam dia paſon & dia pente.* Adeoque non veteribus tantum, ſed & Harmonicis, (quo toties provocat Meibomius ; quaſi hi ſoli ſint rationum gnari ; aliique ſaltem *juniores*, *quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent, quid ratio eſſet, ignorarent*, p. 196. l. 1. & alibi paſſim,) ſatis receptum videmus hunc loquendi morem. Siquidem, tum rationes, Ptolemæo, ſunt denominatoribus ſuis proportionales, (quod vult Gregorius ;) nempe $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} :: \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} :: 4 \cdot 3$. contra quam vult Meibomius : Tum etiam, ut ex Porphyrii in hunc locum Commentario liquet, p. 191. l. 29. ᾧ γὰρ διπλασιαζεῖς ὁ μὴ ἡμόλιος, ἢ τριπλάσιον ποιεῖ. ὁ δὲ διπλάσιος, ἢ τετραπλάσιον. ᾧ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει ὁ τετραπλάσιος πρὸς ἢ διπλάσιον, καὶ ὁ τριπλάσιος πρὸς τὸν ἡμόλιον. *Etenim duplicatus ſeſquialter, facit triplum ; & duplus, quadruplum : ideoque eandem rationem habet quadruplus ad duplum, quam triplus ad ſeſquialterum.* Quod, quid aliud ſit, quam quod, in Theone, tanto ſtrepitu, damnat Meibomius, (ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτῷ ἑξαπλάσιον,) ego ſane non intelligo. Sed & ejuſmodi paſſim apud alios loquendi formulas exſtare, non admodum videtur dubitandum, ſi modo id operæ pretium eſſet inquirere.

Imo, inquam, & ipſe Meibomius nonnunquam, incautus, perinde loquitur. Cum enim ait, p. 112. l. *quippe nihili miſto* $\frac{4\,v}{4\,a}$, *in ſeſquialtera ratione debilius eſt miſtum* $\frac{4\,v}{6\,a}$. Hoc eſt, miſtum illud ubi ratio vini ad aquam eſt $\frac{4}{4}$, fortius eſſe quam miſtum illud in quo vini ad aquam ratio eſt $\frac{4}{6}$, (ſive hoc illo debilius eſſe,) in ratione ſeſquialtera. Hoc eſt, ratio vini ad aquam (quippe, ex hac, æſtimanda eſt fortitudo miſti) $\frac{4}{4}$, major eſt ratione $\frac{4}{6}$, (non ait, ratione, ſive per rationem, quaſi hac eſſet differentia, ſed) *in ratione ſeſquialtera* ; Hoc eſt, in ratione 3 ad 2. ſive ut 3 ad 2. (quippe, eſſe ad alterum in ratione ſeſquialtera, eſt, eſſe ut 3 ad 2.) Quid hoc aliud eſt, quam rationem (puta vini ad aquam) $\frac{4}{4}$, ſive $\frac{6}{6}$ eſſe ad rationem $\frac{4}{6}$; ut 3 ad 2, ſive ut 6 ad 4 ? Quod vult Gregorius. Sic p. 113. l. 12. *miſtum* $\frac{4\,v}{6\,a}$, *in ſeſquialtera ratione fortius eſt miſto* $\frac{4\,v}{9\,a}$. Hoc eſt, vini ad aquam ratio $\frac{4}{6}$, eſt ad rationem $\frac{4}{9}$, in ratione 3 ad 2. Sive $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{9} (:: \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{9} :: 6 \cdot 4) :: 3 \cdot 2$. Item p. 113. l. 26. *Fortius eſt miſtum* $\frac{81\,v}{36\,a}$, *quam miſtum* $\frac{16\,v}{36\,a}$ *in ratione quater ſeſquialtera*, $\frac{81}{16} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$. Hoc eſt, fortitudo illius miſti, ſive ratio vini ad aquam in illo miſto, $\frac{81}{36}$, eſt ad rationem in hoc, $\frac{16}{36}$, in ratione $\frac{81}{16}$; ſive ut 81 ad 16. adeoque ratio $\frac{81}{36}$. rat. $\frac{16}{36} :: 81 \cdot 16$. Omnino prout vult Gregorius. (Et ſimiliter alibi, ut, ſi opus ſit, oſtendi poterit.) Non eſt itaque, cur hoc tam acriter condemnet Meibomius, cum & ipſe (ſi crimen ſit) eodem teneatur crimine.

Quod in contrarium, hujuſce loquendi formulæ, adducit Meibomius, plane nihili eſt. Nempe p. 189. l. 1. non eſſe, *ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$, *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$, quia *non quemadmodum rationis* $\frac{4}{2}$ *dupla eſt ratio* $\frac{8}{2}$, *ſic rationis* $\frac{3}{2}$ *dupla exſiſtit ratio* $\frac{6}{2}$. Si, per *rationem duplam*, intelligit λόγον διπλάσιον, ſive $\times 2$; dicimus, omnino ita eſſe ; ut illic, ſic hic ; nam & $\frac{4}{2} \times 2 = \frac{8}{2}$, & $\frac{3}{2} \times 2 = \frac{6}{2}$. Sin, *per rationem duplam*, intelligit *duplicatam*, λόγον διπλασίονα, ſive poteſtatem ſecundam : Negamus conſequentiam ; quippe, quia non ſit utrobique λόγος διπλασίων, ergo non utrobique eadem ratio διπλάσιος, nullo modo ſequitur. Perinde enim eſt acſi argueret, non eſſe, ut 2 ad 4, ſic 3 ad 6, quia non, quemadmodum 4 eſt quadratum 2, ita & 6 quadratum 3. Sive, non eſſe $2 \cdot 4 :: 3 \cdot 6$. hoc eſt $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, quia non eſt $3 \times 3 = 6$, ſicut eſt $2 \times 2 = 4$. Atque ejuſdem farraginis ſunt reliqua quæ in hunc finem producit omnia.

Hujuſmodi item ſunt quas profert demonſtrationes. Nempe p. 178. l. 9. *Cæterum* inquit, *rationem* $\frac{6}{2}$ *non eſſe rationis* $\frac{3}{2}$ *ejuſdem duplam* ; *&c. duplici demonſtratione*

tione oſtendemus. Si per rationem duplam, triplam, hic intelligat, λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα, (quas definit Euclides 10 *d* 5,) nos hoc concedimus; nec quiſpiam eſt qui contrarium contendit: Sin λόγον διπλάσιον, τριπλάσιον, intelligat; videamus demonſtrationes. *Prima* inquit, *hoc adſumto lemmate; Duplorum duplos eſſe exceſſus; adeoque triplorum, triplos; ſeſquialterorum ſeſquialteros.* Nos hoc lemma concedimus, ſi, per *exceſſus*, intelligit, *ſubductionum reſidua*; ſin autem *diviſionis quotientes* intelligit, negamus. Quippe $4-2=2$. $8-4=4$. $12-6=6$. $6-3=3$. (At $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{12}{6}=\frac{6}{3}=2$.) Dum autem addit; *ſic rationes* $\frac{2}{1}$ *&* $\frac{4}{1}$ *inter ſe differunt ratione* $\frac{2}{4}$; jam tranſit εἰς ἄλλο γένος, nempe pro ſubductionis reliduo, ſubſtituit diviſionis quotientem; non enim eſt $\frac{2}{1}-\frac{4}{1}=\frac{2}{4}$, ſed $\frac{4}{1})\frac{2}{1}(\frac{2}{4}$. Item, dum pergit; *harum duplæ* $\frac{8}{1}$ *&* $\frac{16}{1}$, *ratione* $\frac{8}{16}$, *inter ſe diſtant.* Non enim rationum $\frac{2}{1}, \frac{4}{1}$, duplæ, ſed duplicatæ, (non διπλάσιοι, ſed διπλασίονες,) ſunt $\frac{8}{1}$, & $\frac{16}{1}$: quæque emergit ratio $\frac{8}{16}$ (rationis $\frac{2}{4}$, non διπλάσιος ſed διπλασίων) non ſubducendo oritur, ſed dividendo; non enim $\frac{8}{1}-\frac{16}{1}=\frac{8}{16}$, ſed $\frac{16}{1})\frac{8}{1}(\frac{8}{16}$. Sed procedat demonſtratio. *Cum itaque*, inquit, *ſimplorum rationum* $\frac{3}{2}$ *&* $\frac{4}{3}$, *differentialis ratio* (nempe diviſione orta) *ſit* $\frac{8}{8}$ (quia ſcilicet $\frac{4}{3})\frac{3}{2}(\frac{8}{8}$:) *duplarum* $\frac{6}{2}$ *&* $\frac{8}{3}$, *differentialis ratio, erit ſimplæ differentialis rationis dupla, nempe* $\frac{8}{64}$. Nullo modo inquam. Sed eadem ipſa $\frac{8}{8}$. Nam jam de differentia diviſionali agitur, (de qua lemma non procedit,) non de ſubductionali. Sin velit lemmati ſuo exemplum aptare; ſic potius dixiſſet; Quoniam ſimplarum rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentia (ſubductione quærenda) ſit $\frac{1}{6}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{9}{6}-\frac{8}{6}$; erit duplarum $\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\times 2$, & $\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\times 2$, differentia $\frac{6}{2}-\frac{8}{3}=\frac{18}{6}-\frac{16}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{6}\times 2$, nempe dupla differentiæ ſimplarum. Quod quidem verum eſt, uti lemma poſtulat.

Altera, inquit, demonſtratione idem oſtendimus, hoc ſumpto lemmate; *Arithmeticæ progreſſionis numeros, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe invicem ſuperare* (ſeu potius, eorum unum ſuperare reliquum; non enim ſe mutuo ſuperant, ſed alter ſuperat, alter ſuperatur) *quo primus ſuperat nihilum.* Eſto. Quid deinde. *Cum itaque*, inquit, *in hac rationum progreſſione* $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{9}{2}, \frac{12}{2}$, (dic potius $\frac{0}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}$, &c. ſecus enim non erit progreſſio Arithmetica;) *ratio* $\frac{3}{2}$ *ſimpla ſit, & unitatis loco* (hoc eſt primo) *ponatur; cujus dupla eſt* $\frac{6}{2}$; *tripla,* $\frac{9}{2}$; *&c. continebit dupla* $\frac{6}{2}$, *bis ſimplam* $\frac{3}{2}$, (recte quidem, nam $\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\times 2$.) *Atqui* inquit, *duæ ſimplæ additæ, efficiunt* $\frac{9}{4}$. Nullo modo: ſed potius, multiplicando compoſitæ, non enim $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$, ſed $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$, ſunt $\frac{9}{4}$. Sunt autem $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}$, quam & progreſſio exhibet, & lemma poſtulat. Neutra itaque demonſtratio procedit. Ea vero quam appellat ille *veram rationis ſeſquialteræ progreſſionem* $\frac{32}{32}.\frac{48}{32}.\frac{72}{32}.\frac{108}{32}$ &c. vel $\frac{1}{1}.\frac{3}{2}.\frac{9}{4}.\frac{27}{8}$. &c. Non eſt progreſſio Arithmetica, quam lemma ſupponit; ſed Geometrica; adeoque nihil ad rhombum. Atque de reliquis inſtantius, par eſto judicium.

Sed nec felicius ſuam exponit de Rationum Ratione doctrinam: quam ſic definit, p. 174. l. 12. *Ratio rationum eſt duarum rationum ejuſdem ſeriei, a fundana ratione ſecundum naturales numeros progredientis, ſecundum rationem certa quædam inter ipſas relatio. Cum enim*, inquit, *ratio aliqua alterius dupla, tripla, ſeſquialtera,* (duplicata, triplicata, &c.) *dicitur; ratio fundana & ſimpla* (hoc eſt, radix,) *ſecundum naturalem numerorum ſeriem excreviſſe, hoc eſt, continua ſui adpoſitione major facta, intelligitur*; (hoc eſt continua multiplicatione fiunt poteſtates reliquæ:) *ita ſi quamcunque rationem ſibi ipſi adponam, fit ratio prioris, nempe ſimplæ & fundanæ, dupla,* (duplicata;) *ſi hanc cum fundana componam, fit fundanæ tripla &c. tripla autem ad duplam* (triplicata ad duplicatam) *eſt ut* 3 *ad* 2 (ut poteſtas tertia ad ſecundam, ſeu ut cubus ad quadratum,) &c. *Porro poſſumus quamcunque rationem, fundanæ & ſimplæ rationis, hoc eſt, unitatis* (radicis ſeu poteſtatis primæ) *loco collocare. Unde innumeræ rationum progreſſiones exſurgunt, quarum aliquot exemplorum loco expoſui.*

	0	1	2	3	4	5	6
I.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{2}{1}$.	$\frac{4}{1}$.	$\frac{8}{1}$.	$\frac{16}{1}$.	$\frac{32}{1}$.	$\frac{64}{1}$.
II.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{3}{1}$.	$\frac{9}{1}$.	$\frac{27}{1}$.	$\frac{81}{1}$.	$\frac{243}{1}$.	$\frac{729}{1}$.
III.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{4}{1}$.	$\frac{16}{1}$.	$\frac{64}{1}$.	$\frac{256}{1}$.	$\frac{1024}{1}$.	$\frac{4096}{1}$.
IIII.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{10}{1}$.	$\frac{100}{1}$.	$\frac{1000}{1}$.	$\frac{10000}{1}$.	$\frac{100000}{1}$.	$\frac{1000000}{1}$.
V.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{3}{2}$.	$\frac{9}{4}$.	$\frac{27}{8}$.	$\frac{81}{16}$.	$\frac{243}{32}$.	$\frac{729}{64}$.

Prima

Prima inquit, *progreſſio eſt rationis duplæ*; *altera*, *triplæ*; *tertia*, *quadruplæ*; *quarta decuplæ*; *quinta ſeſquialteræ*, &c. Per *rationem* itaque *fundanam*, λόγον πυθμενικὸν, Radicem intelligit, ſive poteſtatem primam, uti manifeſtum eſt: contra quam ipſe alibi p. 137. l. 15. rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$ (non autem ut nunc, Radicem ſeu poteſtatem primam,) appellat *rationum omnium Fundamentum & principium*. Sed aliter adhuc p. 15. l. 13. eodem *fundanæ rationis* nomine, intelligit rationis in minimis numeris deſignationem; *Sic*, inquit, *ex* $\frac{3}{2}.\frac{6}{4}.\frac{9}{6}.\frac{12}{8}$. *quæ omnes ſunt in ratione ſeſquialtera*; *fundus eſt*, πυθμὴν, *ſeu* πυθμενικὸς λόγος, *fundata* (lege *fundana*) *ratio*, $\frac{3}{2}$ *quæ primis inter ſe numeris comprehenditur. Et ſic de cæteris.* Et ſimiliter p. 165. l. 20. Adeo ſibi inconſtans eſt in ſuorum terminorum acceptatione. At, inquam, quicquid ſit quod hac appellatione alibi velit, manifeſtum eſt eum per *rationem fundanam*, hic intelligere, radicem ſive poteſtatem primam. Hinc autem continua multiplicatione (ſive ut ille loqui malit, continua radicis fundanæ adpoſitione) emergit ſeries Geometrice proportionalium ab 1 ſeu $\frac{1}{1}$ inchoata; hoc eſt, continua poteſtatum ſeries; Quarum Radix, prima eſt; quadratum, ſeu ratio duplicata, ſecunda; (reliquæque juxta numeros naturales deinceps denominandæ;) ratio autem æqualitatis $\frac{1}{1}$, poteſtas nulla. (Et quidem ſi ſatis intellexiſſet Meibomius, hoc nihil aliud eſſe quam quod univerſim tradi ſolet, nempe 1. ☉. ☽. ☿. ☽☽. &c. ſeu 1. *a*. *aa*. *aaa*. *aaaa*. &c. aut 1. *a*. a^2. a^3. a^4. &c. eſſe Geometrice proportionalia; eorumque indices, ſive exponentes poteſtatum, 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. Arithmetice proportionales: Non eſſet cur ille, perplexa ſua rei facillimæ traditione hanc ſibi & aliis moleſtiam crearet.) Per *rationum rationem* itaque nihil aliud hic intelligit Meibomius (utut illud definitione ſua ſatis obſcure tradiderit) quam mutuum ad invicem ſitum ſeu ordinem quem inter ſe habent duo pluresve termini ejuſdem progreſſionis Geometricæ ab 1 inchoatæ. Adeoque rationem *triplam ad duplam eſſe ut* 3 *ad* 2, *hoc eſt*, *in ratione ſeſquialtera*; nil aliud ſignificat, quam ejuſdem rationis rationem triplicatam ad duplicatam, eſſe ut ejuſdem radicis poteſtas tertia ad ſecundam, cujus indices ſive exponentes 3, 2, ſunt in ratione ſeſquialtera $\frac{3}{2}$.

Sed & ultra notandum eſt, ſe in ſeriem ſuam nullos alios terminos admittere, quam qui fiunt continua appoſitione rationis fundanæ: adeoque, in expoſitarum ſuarum ſerierum qualibet, rationes expoſitis intermediæ nullum in ſuis ſeriebus locum habent. Quamvis enim nonnunquam de ratione ſeſquialtera loquatur, (quæ videri poſſit intermedia inter poteſtatem primam & ſecundam,) non tamen ait rationem ullam eſſe fundanæ ſeu ſimplæ ſeſquialteram, ſed ſaltem triplam ſecundæ ſeſquialteram eſſe.

Quod forſan non tanti eſſet ut notatu dignum videatur, niſi propter ſequentia. Nempe p. 175. l. 27. *Illud autem nove hic obſervandum dicit, cujuſque ex his rationum progreſſionibus rationem cum ſuæ ſeriei & progreſſionis ratione ſolum comparari poſſe, ita ut ſciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem, & viciſſim, obtineat*; & p. 176. l. 13. *Nullo autem modo diverſæ progreſſionis rationes inter ſe comparari poſſunt ut quam inter ſe rationem habent definiatur. Quare*, inquit, *ratio* $\frac{2}{1}$ *quæ primæ ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet, non tantum ad* $\frac{3}{1}$, *quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed & ad omnes alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, & cæterarum in infinitum, rationes. Hoc autem inde quoque evidens eſt, quod duas diverſarum progreſſionum rationes per quamcunque aliam minorem menſuraturi, nullam plane invenire queamus, quæ utramque exacte metiatur.* Cui ſimile occurrit p. 133. l. 17. *Diverſi fundi rationes nullam communem menſuram admittunt, ideoque nec rationem inter ſe habent effabilem.* Quod quidem ne putemus eum de ratione veris numeris effabili hoc intelligere; admittere autem rationem utcunque lineis explicabilem; qualis eſt diametri ad latus quadrati, aliæque paſſim rationes ἄρρητοι: Etiam & has excluſas ſe velle, patet, p. 192. l. 25. *Demonſtratum*, inquit, *eſt ſuperius, ejuſdem duntaxat progreſſionis rationes inter ſe eſſe* (non inquit, ut numerum ad numerum, ſed) *ut lineam ad lineam.*

At, inquam hoc plane falſum eſt, non modo aliorum ſenſu, ſed & ſuo. Nam rationes diverſi (ut loquitur) fundi, rationem ad invicem habent, etiam ſuo ſenſu, ſatis explicabilem; nempe (ut nos loqui ſolemus) dici poteſt, quota ſit poteſtas hæc illius. Eaque ratio ſatis eſt effabilis, non modo ut linea ad lineam (quod ipſe negat,) ſed (quod magis eſt) non raro, ut numerus ad numerum. Et quidem, ne longius abeamus, ſuam ipſius inſtantiam, jam prolatam, examinabimus.

bimus. *Ratio*, inquit, $\frac{2}{1}$, *quæ primæ ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet, non tantum ad rationem* $\frac{3}{1}$, *quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed & ad omnes alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, &c.* De ratione quam habet ratio aſſignata, ad rationem aliquam ſeriei ſecundæ, non admodum ero ſolicitus; quoniam quidem ea, utut lineis explicabilis ſit (quod ſi opus eſſet, utut ille neget, facile ſumus demonſtraturi;) numeris tamen (ſenſu ſuo) explicabilis non eſt: Verum, quam habet rationem ratio expoſita ad rationes ſeriei tertiæ (vel ſuo ſenſu,) eſt & numeris explicabile. Quippe expoſita ratio $\frac{2}{1}$, eſt ad ſeriei tertiæ rationem $\frac{4}{1}$, (ut ille loquitur) ut 1 ad 2; ſive (ut loquuntur alii) ratio ſubduplicata: eadem expoſita ratio $\frac{2}{1}$, ad rationem (ejuſdem ſeriei tertiæ) $\frac{16}{1}$, eſt ut 1 ad 4, ſive ſubquadruplicata: item rationis $\frac{64}{1}$, ratio ſuboctuplicata, ſive (ut ille loquitur) ut 1 ad 8. Et de reliquis pariter. Quod quidem adeo perſpicuum eſt & obvium, ut mirum ſit, quî ille poſſit non videre; cum manifeſtum ſit, nullam non rationem ſeriei tertiæ, etiam & in ſerie prima (ſatis continuata) reperiri; utut non viceverſa. Sed & nulla non ratio ſeriei primæ, ad primam tertiæ $\frac{4}{1}$ (aliamve tertiæ ſeriei quamvis) utut in ſerie tertia nuſpiam ſedem habeat, rationem habebit (vel ſuo ſenſu) numeris explicabilem. Puta, ad rationem $\frac{4}{1}$, ratio $\frac{2}{1}$, eſt (Meibomii ſenſu) ut 1 ad 2; ratio $\frac{8}{1}$, eſt ad eandem, ut 3 ad 2; ratio $\frac{32}{1}$, ut 5 ad 2; & ſic de reliquis; (quamvis interim rationes $\frac{2}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{32}{1}$, nec in ſerie tertia reperiantur, nec ex rationis fundanæ $\frac{4}{1}$ continua adpoſitione fiant:) Quæ omnia adeo & vera ſunt & per ſe perſpicua, & nemini non nota, ut ne quidem Meibomius, ubi ſecundas cogitationes adhibuerit, ſit negaturus. Ubi autem ille, ex uno aut altero exemplo concludit pag. 177. l. 23. *eadem ratiocinatione quaſcunque alias diverſæ ſeriei rationes, quacunque alia communi menſura menſuratas ineffabilem inter ſe rationem habere cognoſcemus*; iterumque p. 178. l. 3. *planum itaque eſt, omnes diverſæ ſeriei, ſeu non ab eadem fundana ratione adſcendentes, rationes inter ſe eſſe incommenſurabiles.* Dicimus non ſufficientem factam eſſe inductionem. Non enim ſi ratio $\frac{81}{80}$ non ſit rationum $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ communis menſura; ergo nullarum diverſæ ſeriei rationum, ulla erit communis menſura. Quippe nos in contrarium inſtantias oſtendimus, quas ne quidem Meibomius negare ſuſtinebit.

Falſum itaque eſt (etiam ſuo ſenſu) quod hîc affirmat Meibomius, *Diverſi fundi rationes, rationem inter ſe effabilem non habere.*

Falſum item eſt, (ut ſupra oſtendimus) *Tripli duplum non eſſe* (ſenſu Theonis) *ſextuplum.* Et quæ ſunt hujuſmodi, quæque hinc dependent omnia. Adeoque

Falſum eſt, quod contra Gregorium contendit Meibomius, *Non eſſe ut* $\frac{1}{2}$ *ad* $\frac{4}{3}$ *ita* $\frac{6}{5}$ *ad* $\frac{3}{2}$: aut *Gregorii propoſitiones plus centum triginta falſas eſſe*: aut denique *Eutocii, Theonis, Clavii, aliorumque de rationum denominatoribus doctrinam, falſam eſſe.*

Falſum item (ut ſupra oſtenſum eſt) *Rationem duplam & ſubduplam invicem æquales eſſe.* Aut etiam *Rationem* $\frac{1}{4}$ *majorem eſſe quam* $\frac{1}{2}$. Et quæ hiſce ſunt ſimilia. Adeoque

Falſum eſt; *Octavam aut decimam quinti Euclidis, aut ejuſdem libri definitionem ſeptimam, falſas eſſe*; aut quæ hinc dependent. Et propterea, Archimedes, Eutocius, Theo, Pappus, aliique, quod ea pro veris habuerint, à Meibomio, falſo inſimulantur criminis.

Falſa denique ſunt ea omnia, quæ, in ſuo de *Proportionibus Dialogo*, nove protulit Meibomius.

FINIS.

M. *Merſenni* locus notatur.

CUM præcedentem Tractatum hactenus abſolverant operæ, res ſuas ita diſponentibus Typothetis, ut alioqui vacuæ ſuperfuiſſent hæ paginæ: Haud abs re fore judicavi *Marini Merſenni* locum, qui præfatione Generali ad ſua *Cogitata Phyſico-Mathematica*, Titulo *De Rationibus & Proportionibus*, numeris 12, 13, 14, habetur, breviter expendere: ubi in eundem cum *Meibomio* errorem lapſus videtur.

Nempe cum Clavius, ad finem l. 9. Euclidis, notaverat *Compoſitionem rationis* (de qua 10 *d* 5, & 5 *d* 6, agitur,) *non eſſe tanquam Totius ex Partibus, quod Additionis negotium eſt*; (ſed tanquam Facti ex Factoribus, Multiplicando;) *Quia ſecus totum eſset minus ſua parte*, (nam $\frac{1}{100}$, quæ componitur ex $\frac{1}{10}$ & $\frac{10}{100}$, utravis componente minor eſt; & $\frac{4}{8}$, quæ componitur ex $\frac{4}{2}$ & $\frac{2}{8}$, altera quidem componentium minor eſt, utut reliqua major.) Reſpondet Merſennus, *id etiam evenire, in addendis quantitatibus negativis*; (nam ex partibus -2 & -3, totum -5, eſt utravis minus; & ex partibus -2 & $+4$, totum vel aggregatum $+2$, eſt altera quidem majus, utut altera minus.) Ut igitur ſe expediat, ipſum ſupponit quod & Meibomius, (& quidem fieri poteſt, ut Meibomius hinc anſam nactus ſit,) *Proportio*, inquit, *æqualitatis Nihili ſimilitudinem refert*; *Proportio Majoris inæqualitatis, attollitur ſupra nihilum*; *Proportio Minoris inæqualitatis, deprimitur infra nihilum*. Atque hinc colligit; Prout adjectione vel ablatione 0 nihili, nihil accedit vel demitur quantitati; ita nec acceſſione proportionis æqualitatis, augetur vel minuitur proportio. Quemadmodum autem adjectione Quantitatis poſitivæ (ſive ut loquitur, *Entis*,) augetur; Negativæ autem ſive Ablativæ (ſive ut loquitur, *Anti-entis*) minuitur quantitas: Ita acceſſio proportionis majoris inæqualitatis, auget; Minoris autem, minuit proportionem.

Verum hic ſibi perperam aſſumit, Proportionem *Æqualitatis*, nihili inſtar eſſe; *Minoris* autem inæqualitatis, minoris quam nihili, ſive inſtar quantitatis negativæ; cum interim illæ ſint non minus poſitivæ rationes, utut minores, quam quæ majoris inæqualitatis. Quippe qui *ſimplum* dicit, non illæ rem *nullies* apponi intelligit, ſed *ſemel*. Et qui *ſubduplum* poni dicit, non aliquid *auferri* dicit, ſed ſaltem ſemiſſem *poni*. Et quidem *Duplo*, tanquam *Enti* ſive quantitati poſitivæ, non opponitur, tanquam *Anti-ens*, vel quantitas ablatitia, *Subduplum*, ſed *Dupli defectus*. Quippe $+2A$ & $-2A$, ſunt oppoſitæ quantitates affirmativa & negativa; non autem $+2A$ & $+\frac{1}{2}A$, ſive $+A \times 2$ & $+\frac{A}{2}$, quorum utraque eſt poſitiva.

Et quidem in ſcala poteſtatum juxta quam rationes dici ſolent Duplicata, Triplicata, &c. puta $\frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{16}{1}$, &c. quanquam ratio æqualitatis $\frac{1}{1}$, erit *nullius gradus*, ſive ut loqui liceat, Nullana poteſtas; ſeu poteſtas a 0 denominanda; & proinde $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c. gradus deſcendentes, adeoque à $-1, -2, -3$ denominandi: non tamen propterea quantitates illæ dicendæ ſunt ablatitiæ, magis quam fractiones decimales (quorum loci ſeu gradus infra unitatis locum conſiſtunt, adeoque indices habent negativos,) dicendæ negativæ quantitates; aut etiam fractiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c. dicendæ ſunt quantitates negativæ, quia radicis 2, poteſtates continue conſequentes ſunt 4, 8, 16, &c. adeoque 1 ejuſdem poteſtas nullana, & propterea, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ejuſdem radicis 2, poteſtates adhuc inferiores, adeoque ab indicibus negativis denominandæ.

Sed cum rationum Compoſitio, Multiplicationis ſit, non Additionis, opus; ut ex 5 *d* 6 patet: Dixiſſet potius rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$, eſſe inſtar 1 Unitatis; quæ quantitatem multiplicans reddit quantitatem Factam reliquæ Factrici æqualem: rationes autem Majoris inæqualitatis, $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}$, &c. inſtar numerorum unitate Majorum, qui quantitatem Factam exhibent reliqua Factrice, ſeu multiplicata, Majorem: Ra-

tiones autem Minoris Inæqualitatis, esse instar numerorum (non negativorum seu minorum quam o sed) positivorum minorum tamen quam 1; puta fractorum qui inter 1 & o intercedunt: quippe qui, multiplicantes, Factam exhibent quantitatem, non quidem negativam, sed multiplicata tamen minorem. Qua lege pulchre constarent omnia.

Et quidem quod mirandum cuipiam forsan videbitur. *Rationem duplicatam, exposita nonnunquam minorem esse*; &c. nihil in se habet incommodi: Nil enim aliud sonat, quam *Quadratum vel Cubum vel Biquadratum, &c. Radice sua minus esse posse*; nempe quoties Radix est numerus unitate minor.

F I N I S.

DE SECTIONIBUS CONICIS,

Nova Methodo Expositis,

TRACTATUS.

Anno 1655 primum editus.

Clariſſimis Viris, & Mathematicis,

D. *SETHO WARD* S.T.D.

ET

D. *LAURENTIO ROOK* M.A.

Publicis Aſtronomiæ Profeſſoribus; altero *Saviliano* in Academia *Oxonienſi*, altero *Greſhamenſi* in *Greſhamenſi* Collegio *Londini*.

JOHANNES WALLIS Geom. Prof. SAVILIANUS. S.

QUid novi ferat (Clariſſimi Viri) Libellus iſte, ab ipſo ſtatim quem præfert titulo innoteſcit. Nempe Sectiones Conicas (rem veterem) nova methodo tradit. Erat ſcilicet Conicorum traditio Veteribus jam olim cognita, Apollonio Pergæo vetuſtior, & quidem in methodum jam tum redacta; ut nec ipſe diffitetur Apollonius, & aliunde conſtat: (Nam Archimedes ipſe Apollonio antiquior, *Elementa Conica* ſæpius memorat:) ſed ab Apollonio, (cujus Conicorum libri quatuor ſuperſunt,) in meliorem formam redacta, & inſigniter aucta, (quod in cauſa fuiſſe credimus cur priora illa Elementa Conica perierunt.) Antiquiores enim illi, Coni ſolius Recti (quem ſolum Euclides definiverat) contemplationem aggreſſi, non aliam videntur ipſius ſectionem conſideraſſe quam quæ fit à plano quod ipſius lateri alicui rectum ſit; quod propterea in Cono Rectangulo (eo nempe cujus oppoſita latera angulum in coni vertice rectum comprehendunt) oppoſito lateri maneret parallelum; in Cono Acutangulo, lateri oppoſito occurreret; in Cono autem Obtuſangulo, ab eo recederet. Atque hinc curvas tribus illis ſectionibus emergentes, appellabant, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, & Coni Obtuſanguli, Sectionem; quibus etiam nominibus utitur Archimedes. Sed & propterea Coniſectionum illarum nominibus, ſolas erectas intelligebant, non item Scalenas; (ut & Diametri nomine, ſolum intelligebant Axem; &, Verticis Sectionis nomine, axis verticem;) ſectiones quippe Scalenas, ſive inclinatas, non aliter tractabant quam ut Erectarum portiones; (quod & de Conoidibus pariter intelligendum erit.) Apollonius autem, præter Conum Rectum, etiam Scalenum introduxit, (& forſan primus,) & propterea Coni definitionem ab Euclide traditam (ut quæ ſoli recto conveniebat) in aliam (quæ etiam Scalenis conveniat) immutavit. Sed neque ſolam illam plani ſecantis poſitionem (quæ coni latus recte ſecat, hoc eſt, ad angulos rectos) ſed aliam quamlibet admiſit; adeoque Coni cujuſlibet (ſive recti ſive ſcaleni) ſectionem quamlibet plano utcunque poſito factam, conſideravit. Adeoque & ſectionum nomina prius recepta neceſſe habuit immutare, (quippe è Sectionibus tribus quamlibet invenit cuilibet cono ineſſe, prout planum ſecans alio atque alio ſitu poſitum intelligatur,) quas igitur alii, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, Coni Obtuſanguli, ſectionem, appellaverant; ille Parabolam, Ellipſem, Hyperbolam, dicendas voluit: quæ nomina ab illius prop. 11, 12, 13, libri primi, originem duxerunt; atque hactenus à Geometris retinentur. Sed & eidem Sectioni plures Diametros, ineſſe voluit, prout hujus illiuſve coni ſectione facta intelligatur; quarum ſingulæ ſibi peculiares habent & vertices, & Ordinatim-applicatas, & Latera-recta. At fatendum interim eſt horum etiam non pauca, utut aliis nominibus, aliis antea, ſaltem Archimedi, innotuiſſe: hoc tamen diſcrimine, quod quæ *Coni Sectiones* (nempe inclinatæ) ab Apollonio dicuntur, eædem ab Archimede *Sectionis* (erectæ) *Portiones* dici videantur; (& ſimiliter de Conoidibus:) ut in ipſius libro de Rectanguli Coni Sectionis quadratura (cui *de quadratura parabolæ*

This & following leaf misprinted corrected 31/172

rabolæ recentiores nomen fecerunt,) & in libris *de Conoidibus & Sphæroidibus*, paſſim eſt videre.

Hæc autem Conicorum doctrina, quamvis ab Apollonio ſatis Geometrice tradita, (unde & *Magni Geometræ* nomen eſt adeptus,) aſpera tamen adhuc manſit & difficilis, ut, qui illam auſus attingere, ſit è paucis unus. Unde & nimis neglecta fuit, tanquam inſuperabilis difficultatis plena: (Quod quidem eatenus obtinuit, ut ex libris Octo, quos ſcripſerat Apollonius, non niſi primi quatuor ad noſtras manus pervenerint;) Maxima quippe Geometrarum pars vel eo non accedebant plane, vel tanquam canis ad Nilum. Eamque difficultatem quamvis aliquanto minuere conati ſint Midorgius, aliique, minime tamen ſuſtulerunt. Quam igitur plerique cane pejus & angue formidarunt, Conicorum Doctrinam, nos demulcendam ſuſcepimus & levigandam, ut deinceps non minus tractabilis evadat quam ipſa Euclidis Elementa; nec ſit cur quis in poſterum ipſius aggreſſum metuat. Quod quidem quouſque præſtiterim, non eſt cur alios quam vos ipſos æquiores putem judices; qui pro ea qua polletis, ut in reliqua literatura, ita ſpeciatim in Matheſi peritia provinciam quam ſuſcepiſtis ornatis maxime.

Opus ipſum quod attinet; videbitis me, ſtatim ab initio, Cavallerii *Methodum Indiviſibilium*, quaſi jam à Geometris paſſim receptam, tam huic quam tractatui ſequenti (qui huic gemellus eſt) ſubſternere; (ut multiplici figurarum inſcriptioni & circumſcriptioni, quibus in ἀπαγωγαῖς aliàs utendum ſæpius eſſet, ſuperſedere liceat:) ſed à nobis aliquatenus ſive emendatam ſive ſaltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem ſubſtitutis parallelogrammis (altitudinis infinite-exiguæ;) ut & pro planis, totidem vel priſmatis vel cylindrulis; & ſimiliter alibi.

Schemata adhibui quam potui ſimplicia, ne intricatiores linearum ductus confuſionem inferant: & quidem iiſdem ubi fieri commode poſſet repetitis, vel parum immutatis, uti mallem quam ubique novis; quo magis fiant lectori familiaria. In quem etiam finem, iiſdem ut plurimum literis eadem (per totum fere tractatum) puncta deſignamus, utut ſchemata fuerint immutata; atque iiſdem ſymbolis eaſdem deſignamus ubique quantitates: ſed neque illa fortuito aſſumpta, ſed plerumque cum delectu, ut ipſe vel literarum vel ſymbolorum intuitus rem deſignatam aliquatenus referat; quæ quamvis non-neceſſaria videri poſſit curioſitas, cum tamen & phantaſiæ & memoriæ adjuvandæ inſerviat, nonnullis forſan erit non ingrata, reliquiſque ſaltem inoffenſa. In ſymbolis adhibendis, ſecuti ſumus partim D. *Oughtredum* noſtratem, partim D. *Carteſium* (niſi velitis potius ut D. *Harriotum* noſtratem nominem, qui in eadem fere ſemita D. *Carteſio* præivit) nonnunquam utrumque; prout vel hujus vel illius vel utriuſque notatio præſenti negotio explicando magis videbatur accommoda. Demonſtrationes paſſim ex Arithmeticæ ſymbolicæ calculo petendas duxi, ut quæ brevitati ſimul atque perſpicuitati inſerviunt maxime, quaſque non minus legitimas eſſe quam quæ vario linearum implexu fiunt, non eſt cur quiſquam dubitet. In toto denique operis decurſu ea brevitate ſtuduimus omnia præſtare quæ perſpicuitati non officiat.

Prolixum itaque de Conicis tractatum non exhibemus; adeoque multa ab aliis tradita, nos conſulto omiſimus, quæ tamen, ſi opus videbitur, poſſit quilibet non magno negotio ſupplere, vel ex noſtris deducere. Poſt enim præcipua fundamenta tradita, non erit difficile reliqua quaſi totidem inde conſectaria adjungere. Eritque fortaſſe tractatus iſte vel ipſa brevitate gratior, quam ſi minutiora ſectando factus eſſet prolixior. Quicquid ſit, veſtro illud duxi aliorumque Mathematicorum judicio permittendum. *Valete.*

DE

DE
Sectionibus Conicis
TRACTATUS.

Proœmium.

QUUM Sectionum Conicarum (quæ dici ſolent) doctrinam (prout vulgo tradi conſuevit,) ſatis obſcuram animadverteram, atque perplexis admodum Demonſtrationibus involutam: totum illud negotium paulo attentius apud me perpendendum ſtatui; ut ſiqua poſſem arte rem ſatis intricatam quadantenus extricatiorem darem. Quod & in ſequentibus (Divino favente auxilio) me aliquatenus aſſequutum eſſe confido.

In illum finem, *Conum* ipſum primo (unde, quæ dicuntur, *Coni-ſectiones* ortum trahere exiſtimantur) accuratius paulo conſiderandum duxi; ut inde Coniſectionum originem repeterem, earumque affectiones tanquam à vero fonte deducerem; Methodi ſaltem qua & Apollonius Pergæus, *Magnus Geometra* dictus, & poſt illum tam Veteres quam Recentiores incedunt, fontes aperirem; qui in ipſis Demonſtrationibus non ita ſemper eminent ut ſtatim perſpiciantur, & fortaſſis etiam nonnunquam ſtudio occultantur. Non tamen ea methodo totam Coni-ſectionum doctrinam proſequor; ſed eouſque ſaltem procedo donec primarias atque eſſentiales earum affectiones detexerim, ut ipſarum natura atque eſſentiales characteres innoteſcant, ut inde reliquæ deinceps affectiones calculo deduci poſſint; (Quod etiam in ſequentibus factum eſt.) Atque hoc quidem præſtitum eſt in propoſitionibus, ſive Sectionibus viginti primoribus. Inſertis interim obiter nonnullis de Conoidibus & Pyramidoidibus (quatenus ſine nimia digreſſione commode fieri potuit;) & præmiſſis aliquot quaſi Lemmatibus neceſſariis.

Deinde, ſepoſitis quæ à Cono dependent menſuris, aliiſque in eorum locum ſubſtitutis, quæ Coni-ſectionem ubique (ſive in Cono, ſive extra Conum,) comitentur; Coni-ſectiones (vulgo dictas) Cono liberatas atque exemptas, abſolute (nullo ad Conum reſpectu habito) conſiderandas ſuſcipio, (totam tractationem quaſi de novo exorſus,) tanquam totidem lineas (ſive figuras) curvas in plano deſcriptas, quæ vel Sectione Coni, vel etiam aliis modis infinitis effici poſſent. Neque enim Parabola, Ellipſis, aut Hyperbola, à Cono ſecto magis neceſſario dependent, quam vel Peripheria vel etiam Triangulum, (quæ quidem & ſecto Cono, & aliis mille modis produci poſſunt:) Ideoque ſimplicius atque univerſalius tradi & poſſunt & debent.

Denique, Appendicis loco, ſpecimen exhibere libuit ampliandæ Curvarum doctrinæ; (ſicut &, in progreſſu, Conoideωn & Pyramidoideωn, tam erectorum quam ſcalenorum, quod tamen nemo, quod ſciam, antea fecerat, doctrinam attigeram; cum antea Conoideωn non niſi rectorum, nec quidem Pyramidoideωn omnino, ratio ulla habita fuerit:) adjuncta ad calcem nova, nec ab ullo (credo) antehac tentata Paraboloideωn ſpeculatione.

Atque hæc ſunt quæ in ſequentibus exſpectet Lector φιλομαθὴς, brevi quantum potui methodo tradita, nec tamen ea propter obſcuritate involuta. Ideoque prolixam,

prolixam, quam nonnulli affectare videntur, numeroſæ Lemmatum & Propoſitionum ſeriei, linearibus ubique demonſtrationibus, ſat quidem longis nonnunquam atque involutis, comprobatorum, pompam diffugiens; ipſas ut plurimum non modo ἐκθέσεις, ſed & ἀποδείξεις (ubi id levi commonitione tanquam in tranſitu præſtari poſſit, nec Propoſitionis ſeriem nimis conturbet) ipſis Propoſitionibus inſerui, brevitati ſimul & perſpicuitati conſulens: Demonſtrationibus etiam (eadem de cauſa) potius ex Arithmetico calculo petitis (Arithmeticam *ſpecioſam* intellige) rem agens, quam linearibus; cum illæ nec minus ſcientificæ ſint, & magis perſpicuæ, ſed & ſimpliciores ſunt atque magis univerſales, nec quiſquam eſt (quod ſciam) qui Demonſtrationes Arithmeticas in Geometria admittendas negaverit; & quidem (præterquam ubi de Angulis aut Inclinationibus agitur, aliove aliquo ſitu locali, aut quæ immediate hinc dependent,) non video quorſum linearibus ductibus in demonſtrando admodum opus ſit, cum ea omnia quæ ex Rationibus ſive Proportionibus ordinandis, alternandis, invertendis, convertendis, componendis, dividendis, addendis, auferendis, &c. dependent, non magis Geometrica ſint quam Arithmetica, ne dicam potius pure Arithmetica; quanquam (ut Arithmetica omnia) tam rei Geometricæ quam aliis etiam diſciplinis Mathematicis ſæpiſſime immiſceantur.

His Præmonitis, rem ipſam aggredior.

PARS

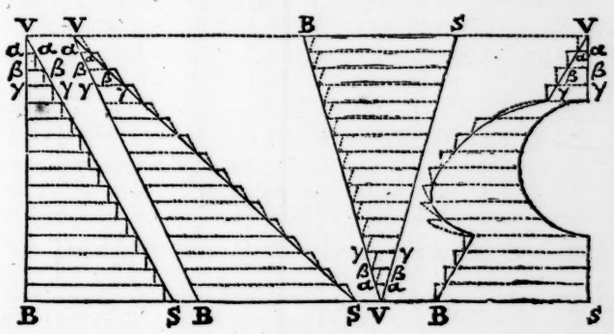
PARS PRIMA.

PROP. I.

De Figuris planis juxta Indiviſibilium methodum conſiderandis.

SUppono in limine (juxta Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium*) Planum quodlibet quaſi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potius (quod ego mallem) ex infinitis Parallelogrammis æque altis; quorum quidem ſingulorum altitudo ſit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, ſive aliquota pars infinite parva; (eſto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeoque omnium ſimul altitudo æqualis altitudini figuræ.

UTrovis autem modo res explicetur (ſive per infinitas lineas parallelas, ſive per infinita parallelogramma æque alta infinitis illis lineis interjecta) eodem res redibit. Nam Parallelogrammum cujus altitudo ſupponitur infinite parva, hoc eſt, nulla, (nam quantitas infinite parva perinde eſt atque non-quanta,) vix aliud eſt quam linea. (In hoc ſaltem differunt, quod linea hæc ſupponitur dilatabilis eſſe, ſive tantillam ſaltem ſpiſſitudinem habere ut infinita multiplicatione certam tandem altitudinem ſive latitudinem poſſit acquirere, tantam nempe quanta eſt figuræ altitudo.) Nos igitur in ſequentibus (partim quod ille mos loquendi in Cavallerii methodo de *Indiviſibilibus* videatur obtinuiſſe, partim etiam ut brevitati conſulamus,) Linearum potius quam Parallelogrammorum nomine partes illas figurarum infinite exiguas (ſive altitudinis infinite exiguæ) nonnunquam appellabimus, quando ſaltem determinatæ altitudinis conſideratio non habetur; Ubi autem determinatæ altitudinis inſtituetur conſideratio (quod aliquando fiet,) exiguæ illius altitudinis eouſque ratio habenda erit, ut ea infinities multiplicata totam figuræ altitudinem ſupponatur adæquare.

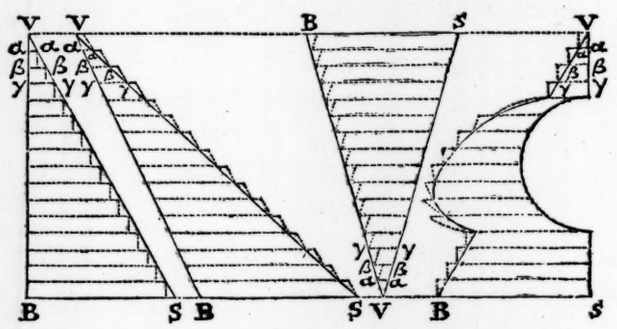


Quod autem de Lineis & Parallelogrammis perinde nominandis, dictum eſt, intelligendum etiam erit de Circulis & Cylindrulis, vel etiam de Planis quibuſvis & Priſmatibus ſuper illa plana conſtitutis : dummodo ſupponantur tantam ſive craſſitiem ſive altitudinem habere quanta eſt $\frac{1}{\infty}$ *altitudinis illius figuræ quam conſtituunt.* Nam Cylindrus nullius altitudinis, vel infinite exiguæ, quid aliud eſt quam Circulus? & Priſma, altitudinis vel nullius vel infinite exiguæ, perinde atque planum tractari poterit. Atque hoc jam ſtatim ab initio monendum eſſe duxi, ne ſæpius illud deinceps repetere neceſſe foret.

PROP. II.

De Triangulo.

SI Triangulum recta, basi parallela, secetur, erit abscissum Triangulum secto simile ; & propterea latera habebit proportionalia (ut notum est.) Adeoque, si Triangulum quodvis V B S, rectis quotcunque $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. basi B S parallelis, & æqualiter ab invicem diffitis, secetur ; quæ propterea Crurum utrumvis (adeoque & utrumque) dividant in segmenta æqualia, (& propterea etiam totum Triangulum in segmenta æque alta :) erunt illæ rectæ $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. Arithmetice proportionales : (sunt enim inter se $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. ut Vα, Vβ, Vγ, &c. hoc est, ut 1, 2, 3, &c. propter æquales excessus Vα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, &c.) Ideoque si rectæ illæ supponantur numero infinitæ, erit



omnium series, (hoc est, totum Triangulum, per prop. præced. aggregatum rectarum numero infinitarum Arithmetice proportionalium, quarum minima est punctum V (verticis nimirum,) maxima est B S basis Trianguli.

Atque idem continget si infinitis illis rectis supponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum singulorum altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli : Erunt scilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cum enim æquealta sint, sunt & basibus proportionalia.

Hæc autem omnia Parallelogramma simul sumpta, figuram constituent Triangulo illi sive inscriptibilem sive circumscriptibilem, (cum omnium bases supponantur Triangulo aptari :) quo autem plura sunt (in ejusmodi figura inscripta vel circumscripta) Parallelogramma, eo minori sive excessu sive defectu differt figura illa à Triangulo cui adscribitur ; adeoque, cum supponantur numero infinita, erit differentia illa infinite exigua, hoc est, nulla ; atque propterea supponenda ea figura sic adscripta (ex Parallelogrammis infinitis Arithmetice proportionalibus conflata) Triangulo æqualis, seu potius eadem : Eadem quidem lege qua Polygonum regulare infinitorum numero laterum, (sive inscribi supponatur sive circumscribi) pro Circulo haberi solet.

Quod si quispiam sit qui noluerit hoc concedere, poterit ille notissima methodo Apagogica cogi : multiplicatis nempe eousque Parallelogrammis, ut differentia tandem quavis assignata quantitate minor sit. Ego vero ejusmodi ἀπαγωγὰς supersedendum esse existimo, partim ne Lectori nauseam crearem ejusmodi cramben sæpius iterando, partim quia nemo est in Mathematicis paulo exercitatior, qui non poterit (si ipsi opus esse videatur, tantique supersit otii) supplere, cum ea Methodus demonstrandi tam apud Veteres quam Recentiores passim occurrat.

Quod

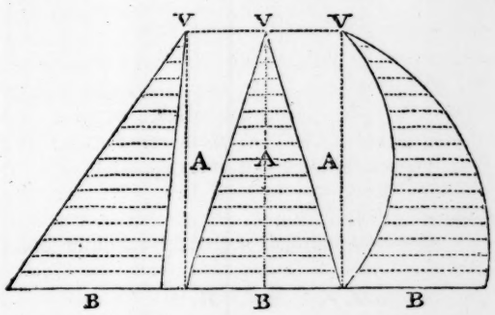
Quod autem de Triangulo jam dictum eſt, illud nempe figuræ ex infinitis Parallelogrammis conflatæ (ſive inſcriptæ ſive circumſcriptæ) æquale eſſe, ſeu potius eandem figuram; intelligendum erit de quavis alia figura plana; cum eadem ſit in omnibus demonſtrandi ratio. *Nec quidem Planis ſolummodo, ſed & figuris Solidis illud convenit: ſi nempe pro Parallelogrammis ſubſtituamus Priſmata*: (qua voce etiam Cylindrulos comprehendi volo, aut etiam ejuſmodi quaſvis figuras inter parallela plana ſimilia, ſive rectilinea ſint ſive curvilinea ſive miſta, æquabiliter poſitas; ne longis verborum ambagibus utendum ſit.) Atque hoc ſemel moneo, ne quis deinceps novas Demonſtrationes exſpectet quoties idem de aliis figuris dicendum occurret.

PROP. III.

De Area Trianguli.

CUm Triangulum conſtet ex infinitis ſive lineis, ſive Parallelogrammis, Arithmetice proportionalibus, a puncto inchoatis & ad baſin continuatis, (ut patet ex jam dictis:) Erit Area Trianguli æqualis Baſi in Altitudinis ſemiſſem ductæ.

Eſt enim notiſſima apud Arithmeticos regula; *Summam Arithmeticæ progreſſionis, ſive omnium quotcunque terminorum aggregatum, æquari aggregato extremo-*



rum in ſemiſſem numeri terminorum ducto. Adeoque, ſi terminus minimus ſupponatur o, (prout hic ſupponitur, tantundem enim valet punctum in magnitudine atque o Ciphra in numero;) idem erit extremorum aggregatum atque ipſe terminus maximus. Altitudinem vero figuræ, pro numero terminorum in Progreſſione, ſubſtituo, hac de cauſa, Quoniam cum numerus terminorum ſupponatur ∞, erit omnium longitudinum aggregatum $\frac{\infty}{2}$ Baſis, (quia Baſis jam eſt extremorum aggregatum.) Cum autem cujuſlibet (lineæ vel parallelogrammi) craſſities ſive Altitudo ſupponatur $\frac{1}{\infty}$ Altitudinis trianguli; in illam tota longitudinum ſumma ducenda eſt; adeoque $\frac{1}{\infty}$ A in $\frac{\infty}{2}$ B erit area. Eſt autem $\frac{1}{\infty} A \times \frac{\infty}{2} B = \frac{1}{2} AB$. Adeo ut A (figuræ altitudo) non ſolum longitudinum numerum, ſed eundem in communem omnium altitudinem ductum, exhibeat, quæ quidem communis altitudo tanto minor ſupponenda eſt, quanto termini ſeu longitudines ſunt plures.

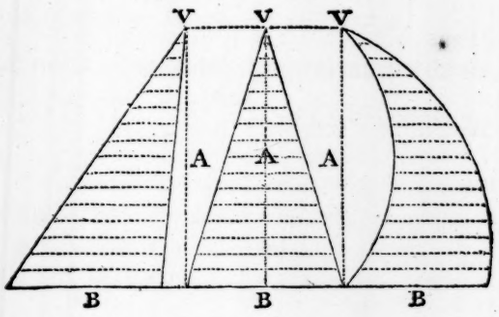
Notandum autem eſt, *Hoc non ſolummodo in veris Triangulis (rectilineis) valere; ſed & idem pariter evenire quamvis crura ſint vel curvilinea, vel quomodocunque a rectitudine diſtorta, modo rectæ omnes baſi parallelæ ſint ſuis a vertice diſtantiis proportionales, adeoque inter ſe Arithmetice proportionales.* Ejuſmodi vero figuram, cum ſit Trianguli inſtar, *Triangulum diſtortum, luxatum,* aut *deformatum,* licet appellare.

PROP. IV.

De Triangulis æque altis.

HInc ſequitur; Triangula ſuper æqualibus baſibus æque-alta, (ſive rectangula ſint ſive obliquangula, ſive item ſint æquicrura ſive ſcalena, ſive quocunque modo luxata,) eſſe inter ſe æqualia.

Cum enim in calculo nulla angulorum ſituſve habeatur ratio, ſed Baſis ſolum-



modo & Altitudinis; modo de his conſtet, conſtabit etiam de area Trianguli.

Quod autem de Æqualitate dictum eſt, facile poteſt etiam Proportionalitati accommodari. Quod & ſæpius deinceps erit intelligendum.

Has vero duas de Area Trianguli Propoſitiones, non ideo hic inſerendas judicavi, acſi novum quid aut inauditum in ſe contineant, (quis enim hæc neſcit?) ſed ut via ſternatur conſimili argumentationi in aliis figuris ſive planis ſive ſolidis. *Si enim æquales ſint tam baſes quam altitudines, omniaque intermedia (ſive Parallelogramma ſive Priſmata) eadem ratione vel creſcant vel decreſcant, æquales etiam erunt figuræ, quamvis earum altera erecta ſit, altera vel inclinata vel quocunque modo luxata.* Nam cum infinitæ partes unius infinitis partibus alterius ſigillatim æquentur, (quanquam fortaſſis in alio ſitu reperiantur,) erunt & aggregata æqualia.

Atque hoc quidem ſemel & univerſaliter monſtraſſe ſufficiat, ne varias deinceps propoſitiones particulares, citra neceſſitatem, multiplicare cogar.

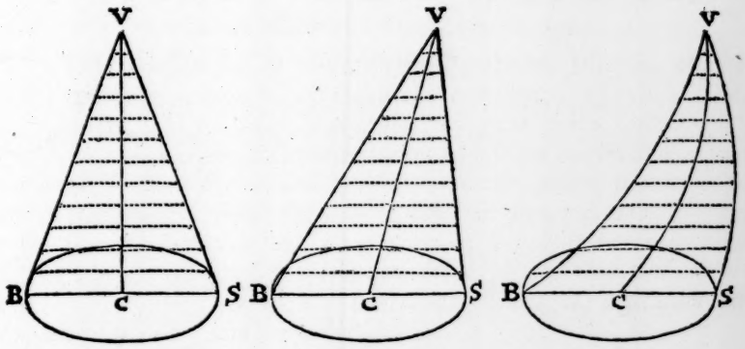
PROP. V.

De Cono.

SI infinitæ Rectæ parallelæ ex quibus conflari ſupponitur Triangulum, fiant totidem Circulorum parallelorum diametri; formabitur figura ſolida qui *Conus* dicitur.

Rectaque à Trianguli vertice V (qui & *Coni Vertex* eſt) ad Baſis BS punctum medium ducta, puta VC, (quam *Trianguli Diametrum* vel *Axem* libet appellare,) biſecabit etiam reliquas Trianguli rectas baſi parallelas (totumque triangulum,) adeoque per ſingulorum circulorum parallelorum centra tranſibit; eritque propterea *Axis Coni*; Triangulumque expoſitum, VBS, per Axem Coni tranſiens, ipſum Conum ejuſque parallelos Circulos biſecabit: Circuluſque ille cujus diameter eſt baſis Trianguli, *Coni baſis* dicetur.

Conus



Conus autem ſic formatus, ſi tam expoſiti Trianguli Crura ſint æqualia, quam circulorum plana plano Trianguli recta, erit *Conus Rectus*, (utpote cujus Axis eſt Baſi perpendicularis, qui propterea *Axis Rectus* dici ſolet;) ſi vero vel altera vel alterutra illarum conditionum deſit, (puta ſi vel expoſitum Triangulum ſit inæquicrurum, vel plana circulorum plano Trianguli oblique inſiſtant,) erit *Conus Scalenus*, hoc eſt inclinatus vel obliquatus, (cujus nempe Axis *Baſi* oblique inſiſtit, atque *Axis Obliquus* dici ſolet:) ſi vero Triangulum Diſtortum fuerit, fiet & *Conus Diſtortus*, non verus Conus.

Prout autem Triangulum poteſt (productis infra baſin cruribus) in infinitum continuari; ita & Conus pari modo continuandus ſupponitur.

Atque etiam, ſicut (continuatis, poſt decuſſationem, Trianguli cruribus ſupra verticem) aliud formari poteſt κατὰ κορυφὴν Triangulum (quod *Triangulum oppoſitum* appellamus, ita & *Oppoſitum Conum* formari ſupponendum eſt.

Pleraque in propoſitione (præterquam quod Definitiones ſint) per ſe ſatis patent, nec ulteriori egent Demonſtratione. Unicum opus eſt, ut oſtendam, nempe *Figuram ſolidam ſic formatam*, (ſi Conum Diſtortum eximas,) *talem Conum eſſe qualem definit Apollonius*: Vel, quod idem eſt, Parallelos circulos coni noſtri parallelis Circulis coni Apollonii congruere. Quod quidem verum eſt.

Nam (propter paralleliſmum Circulorum, adeoque & eorum Diametrorum in eodem plano exiſtentium, iſtaſque Diametros diſtantiis à vertice proportionales,) ſi latus alterutrum, expoſiti Trianguli per axem, puta VB circumferatur ſecundum circuli unius (puta Baſis) Peripheriam, tranſibit etiam per Peripherias reliquorum, Radiorum extremitates lambens (qui ubique ſunt diſtantiis à vertice proportionales & baſis radio paralleli, adeoque, durante tota circumductione, triangulo quod Axe trianguli expoſiti, recta circumducta, & baſis radio comprehenditur, ubique accommodatur,) totamque figuram deſcribet: Quæ eſt Apollonii conſtructio Coni. Conus igitur à nobis formatus idem eſt cum Apollonii Cono: Quod erat oſtendendum.

Atque hinc etiam ſequitur, *A vertice ad quodvis ſuperficiei Conicæ punctum rectam duci poſſe.*

Recordandum interim eſt, (quod ſupra univerſaliter monuimus,) ſicut lineis trianguli, ita planis Coni, aliqualem craſſitiem concedendam eſſe, quanta nempe eſt $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Coni: vel, quod idem eſt, Circulorum appellatione, cylindrulos numero infinitos, tantæ quidem altitudinis, ſuper circulis illis conſtitutos intelligendos eſſe; qui igitur ſolidum ex infinitis cylindrulis cono vel inſcriptum vel circumſcriptum ſupponuntur conſtituere; quod ſolidum idem eſſe cum cono, eodem argumento concluditur quo uſi ſumus de Triangulo, Prop. 2.

Coni autem *Altitudo*, menſuratur perpendiculo à Vertice ad planum Baſis demiſſo;

missō; adeoque eadem est cum altitudine Trianguli, si circuli sint triangulo recti, (erit enim perpendiculum illud in ipso trianguli plano, adeoque ipsius etiam basi, saltem productæ, perpendicularis, ejus altitudinem metiens;) sin secus, minor erit; tunc enim perpendiculum ad basin trianguli demissum, erit ad Coni basin obliquum, adeoque majus perpendiculo altitudinem Coni metiente.

Notandum tamen insuper est, Conum formari posse, non modo si expositi Trianguli rectæ parallelæ, sint circulorum Diametri, verum etiam si circulis (vel quidem similibus Ellipsibus) alio quovis modo similiter aptentur; (quod, si opus sit, facile est demonstratu; nos autem obiter tantum monemus:) Verum, eo casu, Triangulum illud non necessario per Axem Coni incedet, neque ea omnia consequentur symptomata quæ hinc dependent.

Si vero, pro Circulis, substituantur totidem Figuræ rectilineæ, (aliæve vel curvilineæ vel mistæ, præter circulos & Ellipses,) non quidem Conus, sed saltem *Pyramis* emerget: Cui & ea omnia facile accommodari possunt (mutatis mutandis) quæ de Cono (hoc est, Pyramide rotunda) diximus. Pyramidis autem nomen hic latiori sensu accipiendum volo, quam ut solis figuris rectilineas bases habentibus conveniat; ita nempe ut bases planas quascunque admittat, (sicut & de Prismate supra dictum est ad Prop. 2.) ne scilicet longis verborum Ambagibus utendum esset. Adeoque ———

PROP. VI.

De Pyramide.

Pyramidis voce (sub qua & Conum comprehendo) intelligo Figuram solidam ex infinitis planis circa eundem Axem rectilineum ordinatim-positis conflatam; quorum omnium crassities supponuntur invicem æquales (nempe $\frac{1}{\infty}$ altitudinis figuræ solidæ,) diametri vero (vel homologa latera, aut etiam rectæ quævis similiter positæ) distantiis à vertice proportionales; adeoque ipsa plana in duplicata ratione distantiarum à vertice, (sicut & *Prismatis* nomine intelligo ejusmodi planorum aggregatum invicem æqualium.)

Si autem Pyramis plano per verticem secetur; manifestum est plana similia (parallela) similiter secari; communes ergo sectiones (planorum secantis & sectorum) sunt infinitæ rectæ Arithmetice proportionales, (nempe in subduplicata ratione figurarum, hoc est, in ratione distantiarum à vertice,) adeoque omnium aggregatum erit triangulum; per Prop. 2.

Axem vero Pyramidis (ut & Prismatis) appello, Lineam à vertice ductam, similium planorum parallelorum omnium centra conjungentem. *Plana* vero ad Axem *ordinatim-posita*, appello, quæ parallela, & similia similiterque posita, centra habent in axe.

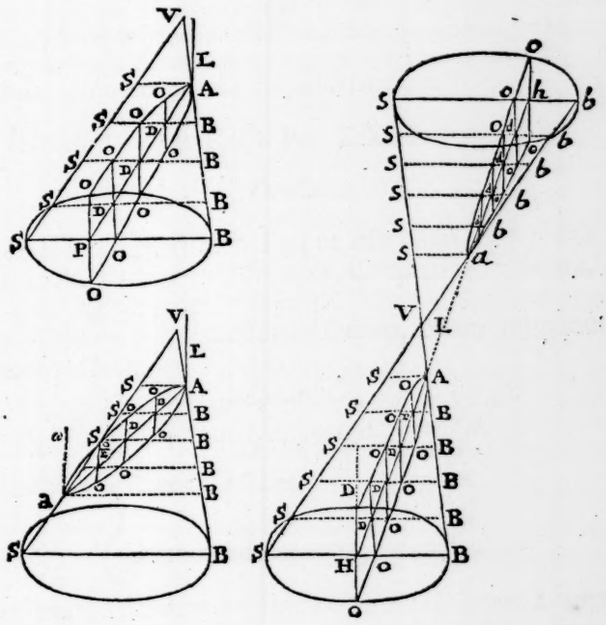
Si vero, vel quod triangulum, unde formari supponitur Pyramis, non sit rectilineum, (sed curvilineum, seu quocunque modo deformatum,) aut ob aliam quamlibet rationem, Planorum, centra non sint in eadem recta; vel ipsa plana circa eundem Axem non sint similiter posita, (sed spirali puta, vel alio quovis modo distorta;) modo interim plana sint similia & æqualiter crassa, debitamque ad invicem rationem retineant; *Pyramis luxata*, *distorta*, vel *deformata* dici potest. (Quæ etiam de Prismate, aliisque figuris solidis, pariter intelligenda sunt.) Lineaque omnium centra conjungens (si recta non sit) *Axis distortus* dici potest.

PROP.

PROP. VII.

De Coni-Sectione.

SI à puncto quovis, ut A, in Trianguli VBS (per Axem coni incedentis, & circa quod ſupponitur Conus formari) utrovis Crure, recta ducatur Triangulum ſecans (puta AP, AE, AH;) ſuper quam intelligatur Planum plano Trianguli ita inſiſtere, ut aliquem ex parallelis Coni circulis (ſi ſaltem ipſis parallelum non ſit) ſecet ſecundum rectam OO, quæ ſit iſtius circuli diametro puta BS, (in triangulo VBS exſiſtenti) perpendicularis, (adeoque & reliquos quos ſecat circulos iſti parallelos ſecet ſecundum rectas ipſorum diametris in eodem triangulo exſiſtentibus perpendiculares, quæ propterea & ipſi OO parallelæ erunt; ut ſtatim demonſtrabitur:) communis Sectio ſuperficierum Coni, planique ſecantis (puta OAO,) *Sectio-Conica* vel *Coni-Sectio*, dici ſolet; Et quidem vel Parabola, vel Ellipſis, vel Hyperbola: Nempe *Parabola*, ſi recta ſic ducta ſit reliquo cruri parallela, (adeoque nuſquam ipſi, quantumvis utrinque producatur, occurrens,) ut AP: *Ellipſis* vero, ſi recta ſic ducta ad crus oppoſitum vergat, (adeoque ipſi, ſaltem producto, ſit infra verticem occurſura,) ut AEa: *Hyperbola* denique ſi recta ſic ducta ab oppoſito crure recedat, ut AH, (quæ igitur ex contraria parte producta oppoſito cruri, ſupra verticem continuato, occurret, puta in a.)



Punctum autem A, coni-Sectionis *Vertex* dicitur; & quidem A, a, (in Ellipſi & Hyperbola) *Vertices oppoſiti*. Rectæque AP, AE, AH, coni-ſectionum *Diametri*, (nempe AP Parabolæ, AE Ellipſis, AH Hyperbolæ:) ipſaque Aa (Ellipſeos vel Hyperbolarum) *Diameter tranſverſa*: (idem nempe planum quod Hyperbolam in uno aliquo cono efficit,

efficit, cum etiam ad Oppositum Conum pertingat, *Oppositam Hyperbolam* ibidem efficit.) Rectam autem OO, reliquasque ipsi in eadem Coni-sectione parallelas, (totidem parallelis in Cono circulis, & Coni-sectioni communes,) *Ordinatim-subtensas*, sive *Ordinatim inscriptas*, appello: quæ, cum sint circulorum diametris perpendiculares, (ut constructio postulat,) ab ipsis bisecantur, adeoque & à Coni-sectionis Diametro, (quæ nempe per eadem bisectionum puncta transit;) Earumque semisses, ut DO, diametro Coni-sectionis *Ordinatim-applicatæ* dicuntur; suntque inter bina diametri circularis (cui perpendiculariter insistunt) segmenta, BD, DS, mediæ proportionales: Quæ quidem si diametro Coni-sectionis AD, ad angulos rectos insistant, Diameter illa *Axis* dici solet (qui suis ordinatim-applicatis est perpendicularis;) sin minus, saltem Diameter, vel *Diameter Obliqua* vel *inclinata* dici solet.

Ut autem Conus ipse, sic & Coni-sectiones (Parabolam intellige & Hyperbolam, nam de Ellipsi secus est,) simul cum Cono in infinitum continuandæ supponuntur.

Quod autem *Planum Coni-sectionem efficiens, si unam ex parallelis Coni circulis secet secundum rectam* OO, *ipsius diametro* BS *perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos quos secat circulos secabit secundum rectas quæ ipsorum diametris ipsi* BS *parallelis sint perpendiculares*: Sic demonstrabitur. Cum circuli supponantur paralleli, erunt & eorum sectiones OO, OO, (eodem plano factæ) parallelæ, (per 16 e 11.) quæ propterea cum parallelis circulorum diametris (BS, BS,) eosdem angulos faciunt, (per 10 e 11.) ponitur autem, angulos ad diametrorum parallelarum unam rectos esse; ergo & ad omnes; Quod erat demonstrandum.

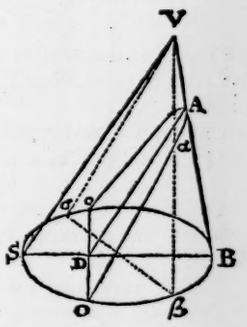
Reliqua in Propositione vel Definitiones sunt, vel ex propositionis curriculo satis patent.

Monendum autem est *Parabolæ*, *Ellipsis*, & *Hyperbolæ* appellationibus, apud Geometras, (qua igitur libertate & nos aliquando usuri sumus,) nonnunquam curvas *lineas* in superficie conica factas, (quas in propositione definivimus,) nonnunquam vero *figuras planas* ejusmodi curvis terminatas, intelligi. Siquando autem de ambiguitate significationis metuatur, non incommodum erit *lineæ* vel *plani* vocem adjungere; ut *linea Parabolica*, *planum Parabolicum*, &c.

Monendum est etiam, sub *Ellipseos* nomine (quod tamen alii non solent) me etiam *Peripheriam Circuli* comprehendere, (vel etiam ipsum Circulum.) Circulus enim ab Ellipsi (figuram intellige linea Elliptica comprehensam,) non aliter differt quam ut Quadratum à Parallelogrammo. Nam ut *Parallelogrammum* cujus latera sunt æqualia angulique recti, vel (si libet) cujus diametri conjugatæ sunt æquales & ad angulos rectos, (habent enim & figuræ rectilineæ suas diametros, quanquam non ut curvilineæ numero infinitas, suisque diametris ordinatim-applicatas; & quidem Parallelogrammum diametrorum habet duo paria, nempe duas diagonales, & duas lateribus parallelas se mutuo bisecantes; tam illæ autem quam hæ sunt conjugatæ:) est *Quadratum*: Sic *Ellipsis*, cujus diametri conjugatæ sunt æquales & ad angulos rectos, *Circulus* est. Et quidem ea omnia quæ Ellipsibus universaliter conveniunt, conveniunt etiam circulis, (non minus quam quæ Parallelogrammis conveniunt, conveniunt Quadratis,) nisi quod Ellipseos appellatio non soleat illis attribui. Sicui nostra hæc phrasiologia non placeat, fruatur suo sensu; modo sciat, quid apud me Ellipseos nomine significetur; quod necessario monendum erat, ne dicta nostra perperam intelligantur.

Monendum insuper est, Quod ea omnia quæ jam exposuimus de uno Triangulo-per-axem, unde Conum formari supponimus, pariter intelligenda sunt de infinitis aliis Triangulis Conum per axem dividentibus. Potest enim super eorum quodvis ejusmodi formatio Coni supponi. Manentibus enim eisdem centris, distantiis, & planis, iidem formantur circuli, quamvis aliæ atque aliæ sumantur

mantur Diametri, hoc eſt, quamvis alio atque alio triangulo Conus per axem dividatur. Verbi gratia, Triangulo V β σ (per axem etiam tranſeunti) eadem conveniunt quæ ipſi V B S convenire diximus.



Non tamen hæc ita intelligenda ſunt, acſi quocunque Triangulo-per-axem accepto, eadem numerica Coni-ſectio, methodo jam dicta, formaretur: Sed ſaltem quocunque Triangulo-per-axem accepto, puta V β σ, fieri poteſt ut illi accommodentur coni-ſectiones eodem modo quo ipſi V B S. Quamvis enim verum ſit, quod Coni-ſectionis O A O, aliquod punctum, ut α, ſit in crure V β; attamen planorum O A O, O B O, communis ſectio O O, non erit trianguli V β σ baſi β σ perpendicularis, (quod in Coni-ſectionis geneſi, in propoſitione tradita ſupponitur;) ſupponitur enim perpendicularis eſſe alii ejuſdem circuli Diametro B S, rectam β σ ſecanti; non igitur & ipſi β σ perpendicularis eſſe poteſt.

At interrogabit fortaſſe quiſpiam, Quid cauſæ ſit, cur illud poſtuletur ut recta O O (circulo & Coni-ſectioni communis) ſit circuli diametro B S (in triangulo V B S exiſtenti) perpendicularis? Annon enim, ſi planum ſecans ad triangulum-per-axem aliter inclinaretur, ſecaret ſuperficiem Coni? Omnino. An vero ea ſectio non una eſſet ex eis quas definivimus? Eſſet omnino. Cur igitur illa ſola inclinatio plani-ſecantis ad triangulum-per-axem admittitur, quæ rectam O O rectæ B S perpendicularem efficiat? Reſpondeo; Quod alia quævis inclinatio non minus quidem ſufficeret ad Coni-ſectionem aliquam efficiendam; ſed minus apta eſſet ad Demonſtrationes inſtituendas; cum hæ plerumque ſupponant rectam O O, eique parallelas, à circulorum diametris biſecari, quod non fieret niſi diametris illis eſſent perpendiculares. Ideoque cum Planum Coni-ſectionem efficiens ad varia triangula-per-axem variam inclinationem habeat, illud ex omnibus triangulum ſeligunt Conicorum ſcriptores ad cujus baſin rectæ illæ O O ſunt perpendiculares. Unum enim aliquod triangulum per-axem (& quidem unicum) illud patitur, (niſi forſan coni-ſectio propoſita unus ſit ex circulis baſi parallelis,) quomodocunque Conus à plano ſecetur.

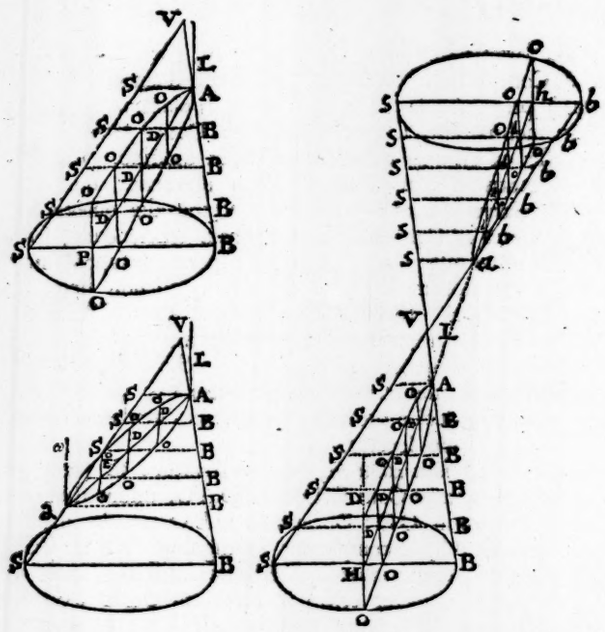
Quodnam autem ex omnibus illud ſit, ſic inveſtigatur; ſi, verbi gratia, Conus V B O, plano ſecetur faciente Coni ſectionem O A O, unum aliquem ex parallelis circulis O B O ſecante in O O: Ducatur in O B O circulo, diameter ipſi O O perpendicularis, quæ ſit B S, & compleatur Triangulum V B S. Patet enim Planum Coni-ſectionem efficiens, triangulo V B S ita inſiſtere, (puta in A D, quæ propterea Coni-ſectionis diameter erit,) ut circulum O B O ſecet ſecundum rectam O O ipſius Diametro B S (quæ & Trianguli V B S baſis eſt,) perpendicularem, Quod erat faciendum. Triangulum igitur V B S illud eſt, ſecundum quod Coni-ſectionis O A O natura & proprietates ſunt perpendendæ, (ſi autem non ipſa B S, ſed alia aliqua, puta β σ, fuiſſet ipſi O O perpendicularis; tum non Triangulum V B S, ſed V β σ, ſeligendum eſſet.)

Et quamvis aliunde quidem verum ſit (ut ſuo loco dicetur,) alias Diametros (alioſque propterea vertices) coniſectioni O A O convenire; ſola tamen A D ea eſt quæ dici ſolet *Diameter ex generatione*; intellige, prout jam huic Cono applicatur: Nam revera eadem Coni-ſectio poteſt vel alii forſan Cono, vel etiam huic in alio ſitu, ita accommodari, ut alias habeat Diametros-ex-generatione.

Atque hæc quidem ad pleniorem propoſitionis intelligentiam monenda duxi.

Sed & ulterius monendum eſt; Quod, *quum diximus Punctum* A *in utrovis Trianguli crure, puta* V B, *ubivis aſſignari poſſe*; *Vel excipiendum erit punctum Verticis V*; *vel, pro Coni-ſectione exſpectata, prodibit aliquid ſimplicius*; eo nempe quod una ſaltem quantitatum ex quibus Coni-ſectio dependet, evaneſcet in nihilum ſeu non-quantum. Nam, verbi gratia, ſi punctum A aſſignetur in cruris V B puncto V, & velim Parabolam deſcribere; recta A P (quæ ducenda erat parallela) cum ipſa V S coincidet; adeoque rectæ S D evaneſcent, & propterea evaneſcent ordinatim-applicatæ D O, (nam ſi altera multiplicantium ſit o

ciphra, erit & quantitas producta o ciphra :) adeoque Parabola prodiret nullius latitudinis, hoc est, linea recta, terminata quidem ex parte A vel V, infinita vero ex parte P, vel O: (coincident enim puncta P, O, propter nullitatem ordinatim-applicatarum PO, vel DO.) Eodem modo si describenda sit Ellipsis; Posito puncto A in V, (ubicunque in crure VS supponatur a,) propter coincidentiam punctorum A, V, coincident etiam rectæ Aa, Va: ideoque, evanescentibus rectis DS, evanescent etiam DO; eritque propterea Ellipsis nullius latitudinis, hoc est, linea recta, utrinque quidem, terminata; (saltem nisi & punctum a in cruris VS puncto V assignetur; quo casu, propter coincidentiam punctorum A, a, recta illa degenerabit in unicum punctum.) Pari modo, si describenda esset Hyperbola; posito, ut prius, puncto A in V, (ubicunque assignetur H,) recta HAa crus utrumque VB, VS, eodem puncto V, secabit; adeoque transversa diameter Aa (propter coincidentiam punctorum A, a, V,) evanescet; adeoque Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrina postea tradenda colligi poterit, interim idem satis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem nisi recta



AH eousque recedat à crure VS, ut ipsi VB coincidat; quo casu, (sive A assignetur in vertice V, sive ubivis alias in crure VB,) evanescent rectæ DB. adeoque & DO; & pro Triangulo vel etiam Hyperbola OVO vel OAO, prodibit linea recta, ex una quidem parte terminata, ex reliqua vero infinita.

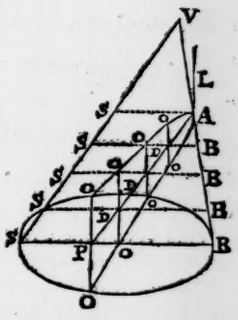
PROP. VIII.

De Parabola, Sectione Coni facta.

IN Parabola, Quadrata Ordinatim-applicatarum sunt interceptis Diametris proportionalia.

Quadrata nempe ordinatim-applicatarum PO, DO, &c. sunt rectis PB, DB, &c. (in triangulo APB parallelis) proportionalia, (adeoque & *interceptis Diametris*, hoc est, diametrorum segmentis inter

inter ipſas ordinatim-applicatas & verticem interceptis, PA, DA, &c.) æqualia quippe rectangulis BPS, BDS, &c. quæ propter æquales PS, DS, &c. (in parallelogrammo APSS) ſunt æque alta, & propterea baſibus (PB, DB, &c.) proportionalia.



Adeoque ipſæ ordinatim-applicatæ ſunt in ſubduplicata ratione Diametrorum interceptarum; nempe in ſubduplicata ratione ſuorum quadratorum.

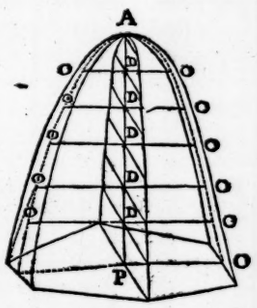
Si igitur ordinatim-applicatæ quotlibet æqualibus ab invicem diſtantiis ſumantur; erunt earum quadrata in continua progreſſione Arithmetica, (ut patet ex dictis ad Prop. 2.)

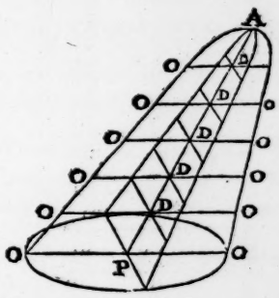
Conſtabit igitur (per Prop. 1.) ſemiparabolæ planum (adeoque & totius Parabolæ) ex infinitis numero lateribus quadratorum Arithmetice proportionalium.

PROP. IX.

De Conoeide, & Pyramidoeide Parabolico.

HInc *ſequitur*; Si ex omnium in Parabola ordinatim-applicatarum quadratis, ad communem axem ordinatim poſitis, formetur *Pyramidoeides Parabolicum* (eo modo quo Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem & Conum,) erit illud infinitorum numero planorum Arithmetice pro portionalium aggregatum, (ſicut Triangulum rectarum,) ab o incipiendo & continue progrediendo ad baſin uſque.





Adeoque ſi Baſis figuræ ſic conſtructæ in ſemiſſem Altitudinis ducatur, prodibit totius figuræ ſoliditas: (eodem argumento quo uſi ſumus de triangulo Prop. 3.)

Cumque idem (eodem argumento) valeat de circulis, aliiſve figuris planis ſimilibus quibuſcunque, (ſunt enim ad invicem, ut diametrorum, vel rectarum quarumlibet ſimiliter ductarum, quadrata;) erit univerſaliter *Conoeides vel Pyramidoeides Parabolicum*, quacunque baſe, (ſive etiam erectum ſit, ſive ſcalenum, ſive etiam quocunque modo luxatum, per ea quæ dicta ſunt Pr. 4.) *æquale baſi in ſemiſſem altitudinis ductæ*; hoc eſt, *Semiſſis Priſmatis* (ut parallelogrammi Triangulum,) *ſuper eadem baſi æque-alti.*

Eſt enim (ex dictis) *Pyramidoeides Parabolicum* (ſub quo & Conoeides comprehendo) Aggregatum planorum ſimilium numero infinitorum Arithmetice proportionalium (ab o continue progrediendo,)

circa eundem axem rectilineum ordinatim-positorum; quorum quidem singulorum crassities supponitur æqualis $\frac{1}{\infty}$ altitudinis totius figuræ solidæ.

Quæ supra Prop. 5, 6. De Pyramide & Cono, eorumque altitudinibus, axibus, planisque ordinatim-applicatis; item de Pyramidibus Conisque rectis, scalenis, luxatis, &c. dicta sunt; eadem fere Pyramidoeidibus & Conoeidibus accommodanda sunt.

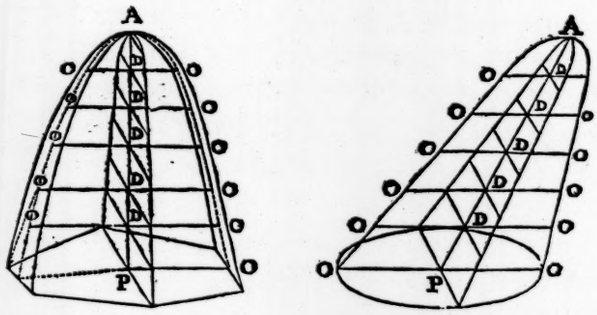
Ego vero hanc Conoeidis, (adeoque & Pyramidoeidis) Parabolici formationem potius adhibeo, quam quæ à veteribus aliisque adhiberi solita est, (nempe, circumducta Semi-parabola recta, manente Axe;) quoniam ea formatio non omnibus Conoeidibus (sed solummodo rectis) nec Pyramidoeidibus omnino convenit. Atque hoc eadem ratione facio, qua Apollonius Euclideam Coni formationem, (circumducto nempe Triangulo rectangulo, manente laterum circa angulum rectum alterutro,) in aliam commutavit (circumducta nempe per circuli peripheriam linea recta, manente ipsius uno aliquo puncto extra circuli planum exsistente:) quia scilicet Euclidea ista solis Conis rectis conveniebat, hæc autem quibusvis sive rectis sive scalenis. Non igitur mirari debet quispiam, si prout ille Euclideam Coni, sic ego Archimedeam Conoeideos, formationem specialem, in aliam magis universalem, commutaverim: quæ etiam & Pyramidoeidibus aliis (de quibus nulla hactenus, quantum scio, consideratio habita fuit) pariter conveniat.

Quæ autem, de Conoeidibus & Pyramidoeidibus Parabolicis formandis, jam diximus; eadem de Ellipticis & Hyperbolicis deinceps intelligenda erunt.

PROP. X.

De Conoeideos & Pyramidoeideos Parabolici sectione.

SI Pyramidoeides (vel Conoeides) Parabolicum plano per axem secetur; cum manifestum sit ipsius infinita numero plana similia similiter secari, & quidem per centra; erunt ea similiter bisecta; atque communes eorum cum plano secante sectiones erunt propterea in figurarum suarum, (quæ quidem Arithmetice proportionales sunt,)



adeoque & distantiarum à vertice, subduplicata ratione, &, propterea, ut ordinatim-applicatæ in Parabola. *Communis igitur sectio (Pyramidoeidis Parabolici, planique per axem secantis,) est Parabola.*

De aliis vero Conoeideos Parabolici sectionibus (non per axem) non libet hic speciatim differere: *Sunt autem illæ omnes* (vel circuli, vel) *Ellipses.*

Nota tamen, ut ejusdem Parabolæ infinitæ sunt numero Diametri, (ut suo loco dicetur;) ita & *Conoeideos Parabolici infinitos esse* (sive *Diametros* dicas, sive) *Axes; qui quidem omnes* (ut Parabolarum Diametri) *sunt invicem paralleli: Qui omnes sua plana habent Ordinatim-applicata.*

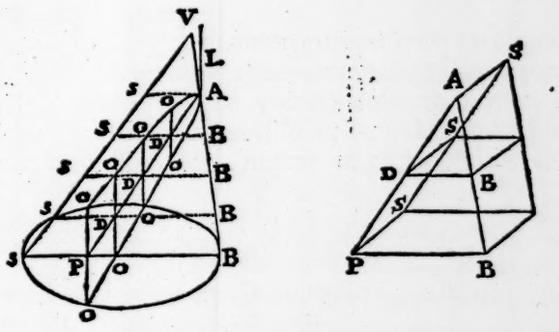
Verum hæc monuisse sufficiat, cum non sit hujus loci ea fusius prosequi.

PROP.

PROP. XI.

De Cuneo Parabolico.

SEd & libet hoc ſubjungere de Pyramidoeide Parabolico. Quoniam (in Cono) Rectangula BDS æqualia ſunt Quadratis DO; ſi omnes rectæ BD ducantur in omnes DS, (hoc eſt, ſi ſuper Triangulo APB, erigatur Priſma cujus altitudo ſit AS, vel DS,) fient infinita



numero Parallelogramma BDS æqualia totidem Quadratis DO: Hoc eſt, Pyramidoeides Parabolicum (cujus baſis ſit Quadratum PO) æquatur Cuneo ſeu Priſmati APBS, (quem *Cuneum Parabolicum* libet appellare.) Omnia enim BDS rectangula in Cuneo (ipſi BPS parallela) ſunt ipſa rectangula BDS in Cono deſignata. Ideoque & totum toti æquatur, & quidem ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus.

Intelligendum autem eſt, Altitudinem Cunei (perpendiculari ab acie AS ad oppoſitam baſin BPS demiſſa æſtimandam) eandem eſſe debere atque Altitudinem Conoideos.

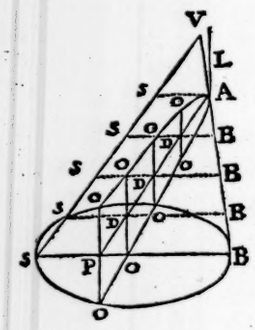
PROP. XII.

De Parabolæ Latere-Recto.

MAnifeſtum eſt, (per ea quæ dicta ſunt,) datis rectis DB, DS, hoc eſt, DB, AS; dari etiam DO (ordinatim-applicatam ad diametri punctum D) ut quæ eſt inter illas media proportionalis: At non contra; Nam & manifeſtum eſt, menſuras illas prorſus extraneas eſſe (extra Parabolæ planum conſtitutas) & omnino accidentarias, (non minus quam, in multiplicatione, numeri Factores ad numerum Factum, qui ab aliis etiam Factoribus, infinitis modis variatis, produci poſſit:) Poſſunt enim binæ rectæ DB, DS, infinitis modis variari, iiſdem interim manentibus tam Diametro Parabolæ quam ad illam ordinatim-applicatis; (ſi nempe qua ratione augetur vel diminuitur PS vel AS, latus Parallelogrammi APS, eadem è contra minuatur vel augeatur PB latus trianguli APB.) Quod quidem eouſque verum eſt, ut quælibet Parabola cuilibet Cono accommodari poſſit: (quod mox, ex abundanti, demonſtrabimus.)

Ne igitur nulla ſit determinata menſura, lineis ad ipſam Parabolam peculiariter pertinentibus exprimenda, qua ordinatim-applicatarum magnitudo explicetur: Loco rectarum DB, DS, hoc eſt DB, AS,

(quarum hæc invariata manet, illa perpetuo variatur, prout propius aut remotius abeſt à Parabolæ vertice) duas alias jam olim ſubſtituerunt Coni-ſectionum contemplatores; Quarum altera eſt *Diameter intercepta*, AD, quæ intra Parabolam reperitur, eſtque ſemper rectæ DB (cujus vices ſupplet) proportionalis, (utraque nempe eadem ratione ſimul & creſcunt & decreſcunt pro vario ſitu *puncti-applicationis* D.) Reliqua vero, quod *Latus rectum* vocatur, (vel recta diameter, vel recta juxta quam poſſunt ordinatim-applicatæ, vel etiam, apud Midorgium, Parameter,) non uſpiam vel in Coni-ſectione, vel in ipſo Cono, realiter exſiſtit; ſed ſola imaginatione ſuppletur, ut vices ſubeat rectæ DS, vel AS: Ideoque quantuplo major eſt vel minor AD quam DB, tantuplo è contra minus vel majus ſupponitur Latus rectum, (puta LA,) quam DS vel AS: Adeoque tribus DB, DS, DA, vel DB, AS, DA, erit quarta reciproce-proportionalis LA; ut æqualia ſint rectangula DA × AL, ipſis DB × DS, vel DB × AS, hoc eſt, quadratis DO. Vel, (ſubſtitutis idoneis ſymbolis, puta $b = DB$, $s = AS$, $d = AD$, $l = LA$, $p = DO$,) erit ubique Quadratum ordinatim-applicatæ in Parabola $p^2 = (bs =)\ dl$.



Eſtque hoc quidem eſſentiale Parabolæ ſymptoma, unde reliqua omnia dependent, & calculo deduci poſſunt. Ut autem ſectione Coni fiat, omnino accidentarium eſt. Ideoque, genuino ſymptomate ſic reperto, Conum dimittere licet; adeoque ulteriorem in ipſius affectiones inquiſitionem differemus donec ad abſolutam Parabolæ tractationem (ſine reſpectu ad Conum habito) perveniamus, (quam Prop. 21. & ſequentibus aggrediemur:) Interim ſimilia Ellipſeos & Hyperbolæ genuina ſymptomata inquiremus, ut omnium tandem abſolutam naturam ſeorſim perpendamus.

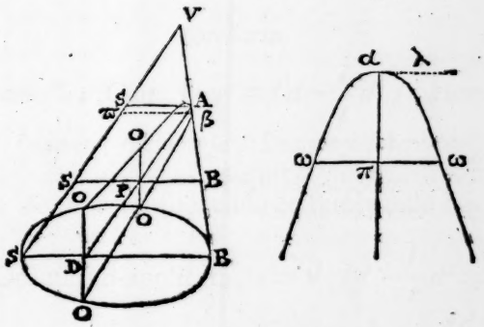
Monendum tamen eſt de Latere Recto; non idem Latus Rectum omnibus ejuſdem Parabolæ Diametris convenire; (Quod etiam de Ellipſeos & Hyperbolæ Latere Recto poſtea intelligendum erit:) Sed (ut habet quælibet Parabola infinitas numero Diametros, ut poſt dicetur, ita) quælibet Diameter ſuas habet ordinatim-applicatas, ſuumque Latus Rectum: Quæ quidem linea imaginaria, certæ tamen longitudinis, (quamvis vel ubivis alias ſcribi poſſit, vel etiam non ſcribi, ſed ſola imaginatione ſuppleri,) duci ſolet à Diametri Vertice ordinatim-applicatis parallela.

Quæ autem de Parabolæ Latere-recto dicta ſunt, ea fere Lateribus-rectis Ellipſeos & Hyperbolæ infra accommodanda erunt.

Quod autem ſupra polliciti ſumus, ex abundanti, demonſtrare; nempe, *Quamlibet Parabolam cuilibet Cono aptari poſſe*; ſic oſtenditur.

Sit propoſita Parabola (cujuſcunque Coni) $\alpha\omega$, cujus axis $\alpha\pi$, ejuſque puncto cuilibet π ordinatim-applicata $\pi\omega$. (Quod autem quælibet Parabola Axem habeat, & quomodo in data Parabola reperiatur, poſt oſtendetur; interim illud licebit, ſine violata methodo, quaſi conceſſum aſſumere, cum tota hæc Demonſtratio ſit ex abundanti:) Dico Parabolam illam cuilibet Cono, puta VBS, aptari poſſe.

Secetur enim per axem Conus propoſitus plano ad baſin recto; ſitque Triangulum illa ſectione factum VBDS. In hujus alterutro crure puta VS, ſumatur à vertice V π æqualis ipſi $\alpha\pi$ diametro Parabolæ propoſitæ; & intelligatur recta duci $\pi\beta$ parallela baſi BS. Tum rectis $\pi\beta$, $\pi\omega$, quæratur tertia proportionalis, cui æqualis ſumatur (in baſe Trianguli) recta SD; &, per punctum D, ducatur recta DA, lateri VS parallela, reliquoque cruri VB occurrens in



in A. Dico rectam AD diametrum esse Parabolæ in Cono cui Parabola proposita congruet. Quod sic ostendo.

Super Triangulo VBDS, rectaque in illo AD, (quæ est, ex constructione, cruri VS parallela,) ad angulos rectos erigatur Planum, DAO. Cum autem tam planum sic erectum, quam Basis Coni BOSD (ex constructione,) sint triangulo VBS recta; erit eorum communis sectio DO, eidem Triangulo recta sive perpendicularis (per 19 e 11,) adeoque tam rectæ AD quam (diametro basis Coni) BS perpendicularis (per 3 d 11;) ideoque (per 7 hujus) AO, sectio in superficie Coni Plano sic erecto facta, erit Parabola, ejusque Axis AD.

Tum in Axe AD sumatur recta AP, rectæ Vπ, (hoc est $\alpha\pi$,) æqualis: ductaque SPB, rectæ SDB parallela; erit (propter similia triangula) PB æqualis rectæ $\pi\beta$: sed & SP (propter parallelas) æqualis rectæ SD: Ideoque ordinatim-applicata PO (media proportionalis inter SP, PB, hoc est, inter SD, $\pi\beta$) æqualis est rectæ $\pi\omega$, (quæ ipsis SD, $\pi\beta$, media proportionalis est, ex constructione.)

Cum igitur tam AP, $\alpha\pi$, quam PO, $\pi\omega$, sint æquales rectæ; atque angulus comprehensus APO, angulo comprehenso $\alpha\pi\omega$, æqualis, (quoniam uterque rectus;) puncta α, π, ω, punctis A, P, O, applicata congruent; (rectæque AP, PO, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$,) Atque idem eodem modo probari potest de reliquis punctis. Tota igitur $\alpha\omega$ toti parabolæ AO congruit. Quod fieri posse probandum erat. Adeoque datam Parabolam dato Cono aptavimus: Quod erat faciendum.

Idem Analytice sic poterit investigari. Propositum sit datam Parabolam $\alpha\omega$ (cujus Axis $\alpha\pi$, ordinatim-applicata $\pi\omega$,) dato Cono VBOS adaptare. Et supponamus præstitum esse quod imperatur, sitque ea parabola Cono aptata AO, cujus Axis AP$=\alpha\pi$, eique ordinatim-applicata PO$=\pi\omega$. Adeoque recta PO perpendicularis tam rectæ BPS basi Trianguli-per-Axem, aut ei parallelæ, (propter Coni-sectionem,) quam rectæ AP (propter Axem;) ideoque recta PO plano APB (quod trianguli planum est) recta, (per 4 e 11.) & propterea tam planum circuli BOP, quam Parabolæ AOP, (quorum communis sectio est PO) eidem Trianguli plano rectum erit, (per 18 e 11.) Atque hinc quidem constat, Triangulum-per-axem-Coni in quo quærendus est Axis Parabolæ, illud esse, quod Coni basi rectum est; Atque insuper, Planum-secans quod Parabolam efficit (adeoque & Parabolæ planum) isti Triangulo rectum fore. Quæ est prima pars inquisitionis.

Deinde (reperto jam quodnam sit Triangulum per Axem Coni in quo quærendus est Axis quæsitæ Parabolæ; & quam inclinationem habiturum est planum secans ad illud Triangulum: ut situs Axis Parabolæ in illo Triangulo reperiatur, sic progrediendum;) supposito, ut prius, rem factam esse quæ imperatur; & Parabolæ Axem AP in Triangulo-per-Axem VBS jacere: Erit AP (propter parabolam) alterutri Crurum, puta VS, parallela. Ideoque (si per puncta A, P, duci intelligantur in triangulo per Axem rectæ AS, BPS, basi parallelæ,) proportionales erunt (propter similia triangula) VB. BS :: VA. AS $=$ PS $= \frac{BS \times VA}{VB}$.

Item VS. SB :: AP. PB $= \frac{BS \times AP}{VS}$. Item (propter Coni-sectionem)

SP.

SP.PO.PB ∴, hoc est $\frac{BS \times VA}{VB}$.PO.$\frac{BS \times AP}{VS}$ ∴ continue proportionales. Ergo $POq = \frac{VA \times AP}{VB \times VS} \times BSq$. hoc est, $\pi\omega q = \frac{BSq}{VB \times VS} \times VA \times \alpha\pi$. & $\frac{VB \times VS \times \pi\omega q}{BSq \times \alpha\pi} = VA$. Ideoque proportionalia $BSq.VB \times VS :: \frac{\pi\omega q}{\alpha\pi}.VA$. Habetur ergo recta VA, adeoque Parabolæ vertex A, in crure VB, unde ducta AP cruri VS parallela, est diameter Parabolæ quæsitæ.

Hoc est. *Si Conus Propositus secetur plano per Axem, quod Basi Coni rectum sit, triangulum faciente VBS: & fiat, ut BSq quadratum basis trianguli, ad VB × VS rectangulum cruribus contentum*; *sic* $\frac{\pi\omega q}{\alpha\pi}$ (quadratum ordinatim-applicatæ in Parabola proposita, per Axem divisum, hoc est) *Latus rectum Parabolæ propositæ Axi conveniens*; *ad VA distantiam verticis Parabolæ a vertice Trianguli, in utrovis ipsius crure mensurandam*; *Et denique a vertice A recta ducatur AP opposito cruri parallela*; *eique Planum erigatur plano trianguli VBS rectum*: *Planum hoc in Superficie Coni faciet Parabolam, cui Parabola proposita congruet.*

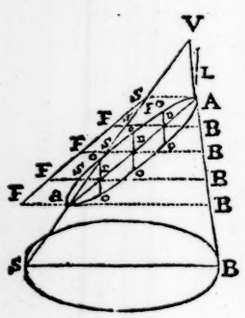
Demonstratio, per repetita Analyseos vestigia facile instituetur.

Pari fere methodo demonstrari poterit, *Datam Ellipsin vel Hyperbolam* (de quibus postea dicendum erit,) *non quidem Cono cuilibet, sed saltem Conis quotlibet specie differentibus, aptari posse.* Cujus Propositionis & Demonstrationem & Determinationem lubens prætereo, partim ne tædio sim, nec velim tironibus ingenium suum exercendi ansam præripere, partim etiam quoniam illud instituto nostro non est necessarium.

PROP. XIII.

De Ellipsi, sectione Coni facta.

IN ellipsi, Quadrata ordinatim-applicatarum æqualia sunt differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem illa (majora) sunt interceptis-Diametris proportionalia; hæc vero (minora) in earundem ratione duplicata.



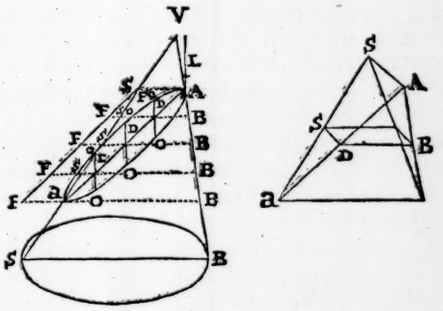
Sunt enim Quadrata DO æqualia Rectangulis BD × DS, (per prop. 7.) Ducta vero recta SF F, ipsi Aa parallela, & continuatis rectis BDS ad F; erunt ubique rectæ DS = DF − FS. Et Rectangula BD × DS = BD × DF − BD × FS. Sunt autem (propter æquales rectas DF) Rectangula BD × DF, rectis BD proportionalia, ideoque & rectis DA diametris interceptis (propter similia triangula ADB.) Rectangula vero BD × FS (quoniam tam BD quam FS rectæ sunt rectis DA proportionales) sunt in duplicata ratione diametrorum interceptarum DA. Cum igitur sit ubique DOq = (BD × DS =) BD × DF − BD × FS; constat propositum.

PROP. XIV.

De Elliptico Pyramidoeide, & Conoeide, (seu Sphæroeide) & Cuneo.

SI (ut Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem vel Conum, & Prop. 9. Pyramidoeides Parabolicum,) ex omnibus quadratis DO ordinatim-applicatarum in ellipsi, formetur *Pyramidoeides ellipticum* bicuspe (hoc

(hoc eſt, Pyramidoides geminum ſuper communi baſe, vertices habens oppoſitos,) æquabitur illud cuneo cuidam bicuneato (nempe binas oppoſitas acies habenti, ſed ſitu ſubcontrario & quaſi decuſſato) hoc eſt, corpori ſolido ſuper baſi triangulari aBA erecto, altitudi-



nem habenti ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſed æquabiliter decreſcentem donec ſuper recta aB tandem evaneſcat & nulla ſit. Et quidem ſegmenta illius, Analogis ſegmentis hujus. Adeoque & notæ menſuræ.

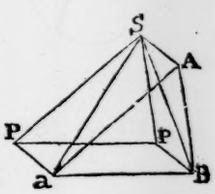
Manifeſtum enim eſt, quod, ſi Cuneus ille bicuneatus (quem *Cuneum Ellipticum* libet appellare) plano ad planum trianguli aBA recto (ſicut & AS ſupponitur ad idem planum recta eſſe ſeu perpendicularis) ubivis ſecetur ſecundum rectam DB quæ ſit aB rectæ parallela, ſectio illa præſtabit rectangulum BDS, cujus duo latera erunt rectæ aB parallela, reliquaque duo rectæ AS, totumque rectangulum BDS in Cuneo, Analogo rectangulo BDS in Cono deſignato, æquale erit: Adeoque rectangula omnia BDS in cuneo, æqualia erunt rectangulis omnibus BDS in Cono deſignatis, hoc eſt, omnibus quadratis DO; hoc eſt, totus Cuneus toti Pyramidoeidi bicuſpidi æqualis erit, & quidem ſegmenta hujus analogis ſegmentis illius. Quod erat oſtendendum. Ita tamen ut eadem retineatur altitudo Pyramidoeidis, & Cunei, ut Quadrata unius & Rectangula alterius æque craſſa intelligantur.

Cuneus autem ille bicuneatus, (quem Ellipticum diximus) eſt Pyramis ſuper baſi aBA, altitudinem habens AS, adeoque notæ menſuræ.

Quod autem de Pyramidoeide Elliptico ex omnibus Quadratis DO, dictum eſt; perinde valeret, ſi pro quadratis DO, ſubſtituerentur quadrata OO (ordinatim inſcriptarum;) niſi quod Pyramidoeides hoc eſſet illius quadruplum.

Cognita vero menſura Pyramidoeidis Elliptici ſuper baſi quadrata, adeoque & ratione quam habet ad Parallelepipedum ſuper eadem baſi æque-altum: cognoſcetur etiam ratio Conoeideos Elliptici (vel, ut dici ſolet, Sphæroeideos) ad Cylindrum ſuper eadem baſi æque-altum; vel etiam Pyramidoeideos ſuper quacunque baſi plana (puta triangulari, quinquangulari, &c. vel etiam curvilinea, aut miſta,) ad Priſma ſuper eadem baſi æque-altum: (ſi nempe pro omnibus quadratis ſubſtituantur totidem circuli, triangula, aliæve ſimiles figuræ.) Per *Baſin* autem hic intelligo medium illud planum quod duobus illis ſive Pyramidoeidibus ſive Conoeidibus eſt baſis communis.

Eſt autem *Ellipticus* ille (quem dicimus) cuneus, cunei Parabolici ſegmentum. Si enim cuneus Parabolicus AP, ſecetur Plano aSB; erit aSBA cuneus Ellipticus ſive Pyramis ſuper triangulari baſi aBA; reliquum vero ſegmentum aBSPP eſt Pyramis ſuper baſi quadrilatera aBPP; utriuſque vero Pyramidis cuſpis communis S. Si igitur ex Priſmate (cuneo nempe Parabolico) AP, auferatur Pyramis aBSPP, reſtabit Cuneus Ellipticus (vel Pyramis) aSBA; cui æquale eſt Pyramidoeides Ellipticum.



Sed & idem immediate colligi poteſt ex propoſitionis præcedentis calculo. Cum enim

enim omnia rectangula BD × DS, hoc est, omnia quadrata DO, æquantur omnibus rectangulis BD × DF, demptis omnibus BD × FS, patet propositum. Omnia enim rectangula BD × DF constituunt cuneum Parabolicum, (per prop. 11.) Omnia vero BD × FS, Pyramidem; (per prop. 6.) Eorum igitur differentia æquatur vel Cuneo Elliptico, vel etiam Elliptico Pyramidoeidi.

PROP. XV.

De Conoeideos & Pyramidoeideos Elliptici Sectione.

SI Pyramidoeides vel Conoeides Ellipticum plano per Axem (vel, si mavis, Diametrum) secetur; sectio erit (vel circulus, vel saltem) Ellipsis.

Probatio ejusmodi instituenda est, qualis prop. 6, & 10. ubi Sectio Pyramidis per-axem ostenditur esse Triangulum; & Pyramidoeidis Parabolici Parabolam.

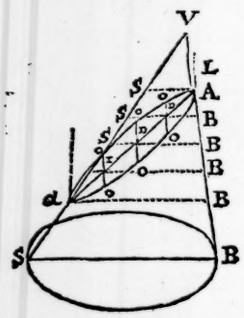
Alias vero sectiones non per-Axem, non libet hic speciatim attingere. Moneo tamen *Conoeideos Elliptici* (hoc est, Sphæroeideos) *Axes* (nisi Diametros malis appellare) numero *infinitos esse in communi centro* (ut Ellipsium Diametri) *coeuntes*; *qui omnes sua plana habent ordinatim-applicata.* Nota etiam *Conoeideos Elliptici* (vel Sphæroeideos) *Sectiones omnes plano factas* (sive per-axem, adeoque & centrum, transeunte, sive non,) *esse* (vel circulos, vel saltem) *Ellipses.*

His autem diutius insistere non est hujus loci. Sufficit monuisse.

PROP. XVI.

De Ellipsis Latere-Recto.

CUM manifestum sit ex dictis, Quadrata DO, (Rectangulis BD × DS æqualia,) ex cognitis rectis BD, DS, cognosci posse; non autem, è contra, ex cognitis DO, cognosci rectas BD, DS; (possunt enim rectangula BD × DS infinitis modis variari, dummodo eadem maneat ordinatim-applicatarum quantitas, adeoque eadem Ellipsis in conis dissimillimis reperiri: ut patere poterit ex eis quæ supra de parabola dicta sunt ad Prop. 12.) Placuit igitur Conicorum scriptoribus (ut in Parabola, sic) in Ellipsi aliis mensuris ordinatim-applicatarum quantitatem determinare, quæ eandem Ellipsin ubique comitentur.



Nempe pro singulis rectis BD, substituunt singulas AD, diametros interceptas; quæ quidem illis sunt proportionales.

Pro recta vero AS, substituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus Rectum* appellant) quæ tribus AS, BD, DA, sit quarta reciproce proportionalis; ut sit ubique $BD \times AS = DA \times LA$. Adeoque Latus rectum $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Tum (continuata Diametro AD donec oppositi Trianguli-per-axem cruri occurrat in a, ut habeatur Diameter-transversa Aa;) erit (propter similia triangula) $Aa.AS :: Da.DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$. Ideoque

que $BD \times DS\ (=DOq) = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$. (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$, ut dictum est.)

Hoc est (substitutis idoneis symbolis, nempe $t = Aa$, $d = DA$, $t - d = Da$, $l = LA$, & $e = DO$) Quadratum ordinatim-applicatæ in Ellipsi $e^2 = \frac{t-d}{t} ld = \frac{td - d^2}{t} l = dl - \frac{d}{t} dl = ld - \frac{l}{t} d^2$. (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem (repetita figura prop. 13.) tam separatim $ld = FD \times BD$, & $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB$, quam conjunctim $ld - \frac{l}{t} d^2 = FD \times DB - FS \times DB = SD \times DB \doteq DOq$.

Demonstratione non opus est alia quam quæ propositionis curriculo passim interseritur.

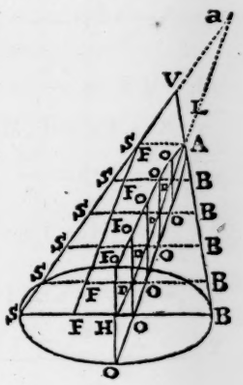
Estque hoc quidem essentiale Ellipseos Symptoma; unde reliqua dependent & calculo deduci possunt. Ut jam non opus sit reliquarum affectionum in ipso Cono investigatio; sed melius & clarius infra in absoluta Ellipsis consideratione (sine ullo ad Conum respectu habito) instituetur: quam prop. 26. aggrediemur.

PROP. XVII.

De Hyperbola, Sectione Coni-facta.

IN Hyperbola; Quadrata Ordinatim-applicatarum, æqualia sunt aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera sunt interceptis-Diametris proportionalia, altera vero in earundem ratione duplicata.

Sunt enim Quadrata DO, æqualia Rectangulis $BD \times DS$ (per prop. 7.) Ducta vero recta SFF ipsi AH parallela, (quæ Trapezium SSHA in Parallelogrammum SFHA & Triangulum SFS, dirimat) erunt ubique rectæ $DS = DF + FS$, & Rectangula $BD \times DS = BD \times DF + BD \times FS$. Sunt autem (propter æquales DF) Rectangula $BD \times DF$, rectis BD proportionalia, ideoque & rectis DA Diametris-interceptis. Rectangula vero $BD \times FS$ (quoniam tam BD quam FS rectæ sunt rectis DA proportionales) in duplicata ratione rectarum DA diametrorum-interceptarum. Cum igitur sit ubique $DOq = (BD \times DS =) BD \times DF + BD \times FS$; constat propositum.



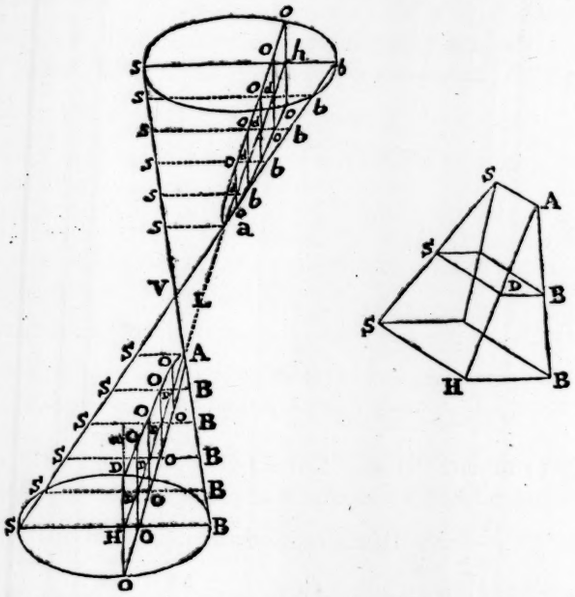
PROP. XVIII.

De Hyperbolico Pyramidoeide, Conoeide, & Cuneo.

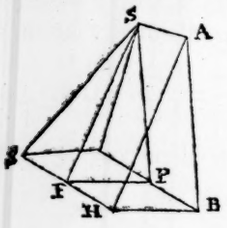
SI (ut Prop. 9. & 14. formavimus Pyramidoeides Parabolicum & Ellipticum) ex omnibus Quadratis DO ordinatim-applicatarum in Hyperbola, formetur *Pyramidoeides Hyperbolicum*; æquabitur illud Cuneo cuidam, quem *Cuneum Hyperbolicum* libet appellare; nempe solido super basi triangulari AHB erecto, altitudinem habenti super puncto A æqualem rectæ AS, sed continue crescentem æquabiliter donec super recta HB æqualis evadat rectæ HS. Et quidem seg-

menta illius Pyramidoeidis, ſegmentis hujus Cunei analogis erunt æqualia. Adeoque tam Pyramidoeides totum quam illius ſegmenta notæ erunt menſuræ.

Si enim Cuneus ille Hyperbolicus plano ubivis ſecetur, quod plano Trianguli AHB rectum ſit, (ſicut & AS ſupponitur eidem triangulo recta eſſe,) & plano HBS parallelum: Rectangula ſingula hujuſmodi ſectione facta, puta BDS,

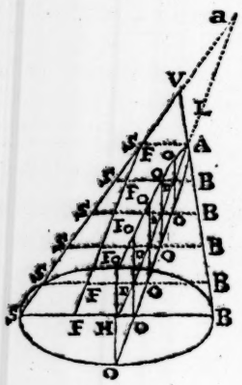


æqualia erunt ſingulis BDS in cono deſignatis, hoc eſt, ſingulis quadratis DO: adeoque aggregatum eorum aggregato horum; hoc eſt, totum Pyramidoeides toti Cuneo; atque (eadem ratione) ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus. Modo interim curetur ut eadem retineatur Pyramidoeidis & Cunei Altitudo; ut Quadrata unius & Rectangula alterius æqualem ſupponantur craſſitiem habere.



Cuneus autem ille Hyperbolicus, eſt fruſtum Priſmatis (plano abſciſſum) ſuper baſi AHB erecti; altitudinem habens ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſuper punctis autem H, B, æqualem rectæ HS. Adeoque notæ menſuræ.

Eſt autem hic Cuneus, Aggregatum Cunei Parabolici HBASPF, & Pyramidis SPFS. Quod patebit ſi ſecari intelligatur plano SFP parallelo triangulo AHB.



Quod ipſum etiam concludi poteſt ex calculo. Cum enim ſingula Quadrata DO, vel rectangula BDS in Cono, æquentur ſingulis aggregatis BD×DF+BD×FS; manifeſtum eſt omnia BD×DF (per Prop. 11.) æquari Cuneo Parabolico, atque omnia BD×FS (per Prop. 6.) Pyramidi.

Cuneus autem ille, ſive conſideretur ut fruſtum Priſmatis, ſive ut aggregatum Pyramidis & Priſmatis (Cuneive Parabolici,) erit notæ menſuræ; Adeoque & Pyramidoeides Hyperbolicum (huic æquale) erit notæ menſuræ.

Quod autem de Pyramidoeide ex quadratis DO dictum eſt, pariter etiam conveniret Pyramidoeidi ex Quadratis OO (ordinatim-inſcriptarum) niſi quod hoc eſſet illius quadruplum.

Item

Item (quoniam ſimiles figuræ planæ ſunt ad invicem ſicut homologorum laterum, vel etiam rectarum quarumlibet ſimiliter inſcriptarum, quadrata;) Cum cognoſcatur menſura Pyramidoeidis Hyperbolici ſuper baſi quadrata, adeoque & ratio ipſius ad Parallelepipedum ſuper eadem vel æquali baſi æque-altum; cognoſcetur etiam ratio cujuſlibet alius Pyramidoeideos vel Conoeideos Hyperbolici ſuper quacunque baſi plana ad Priſma vel Cylindrum ſuper eadem vel æquali baſi æque-altum. Si nempe pro ſingulis quadratis ſubſtituantur vel Circuli vel Triangula, vel quævis aliæ figuræ planæ ſimiles.

PROP. XIX.

De Conoeideos, & Pyramidoeideos Hyperbolici Sectione.

SI Pyramidoeides vel Conoeides Hyperbolicum plano per Axem (vel, ſi mavis, Diametrum) ſecetur; Sectio erit Hyberbola.

Probatur eodem argumento quo uſi ſumus de Pyramide & Cono prop. 6. atque de Pyramidoeidibus & Conoeidibus Parabolico & Elliptico, prop. 10. & 15.

Habet autem Conoeides Hyperbolicum Axes (niſi Diametros malis appellare) *numero infinitos, communi centro* (ſed extra Conoeides) *coeuntes*; *Qui & ſua habent plana ordinatim-applicata.*

Si vero ſecetur Conoeides Hyperbolicum plano per Axem (vel Diametrum potius) *non tranſeunte*; *poteſt ea Sectio vel eſſe Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipſis* (circuluſve.)

Et quidem de (Pyramidoeidibus & præſertim) Conoeidibus, Parabolicis, Ellipticis, & Hyperbolicis; eorumque Axibus ſive Diametris, interceptis & tranſverſis; Planiſque ordinatim-applicatis, ſecantibus, & tangentibus; Centris, item & Lateribus-Rectis, aliiſque ejuſmodi: facile eſſet novam quidem nec injucundam diſquiſitionem inſtituere; (ad quod etiam ſatis proclivis ſum, cum totam fere iſtius negotii difficultatem jam ſuperaverim, nec quiequam fere ſuperſit aliud quam ut quæ mente concepi verbis exprimam:) Verum illud non eſt hujus loci; neque jam licet nimium divagari. Et forſan alii cuidam non ingratum erit, ex ea methodo quam nos in Coni-ſectionum tractatione calcamus, anſam arripere tale quid in Conoeidibus exercendi. Nobis interim & monuiſſe & innuiſſe hic loci ſufficiat: aliud enim eſt quod præ manibus habemus.

PROP. XX.

De Hyperbolæ Latere-Recto.

CUm ſit in Hyperbola, ut dictum eſt, $DOq = BD \times DS$; adeoque quantitas ordinatim-applicatarum DO, ex cognitis rectis BD, DS, cognoſci poſſit; non contra: (cum poſſint rectæ BD, DS, infinitis modis variari, pro conorum variorum diverſitate, aut etiam varia ad eundem conum applicatione, dum interim rectarum DO quantitas eadem maneat; ſicut de Parabola & Ellipſi ſupra dictum eſt prop. 12, & 16.) Commodum igitur viſum eſt Conicorum Scriptoribus, harum loco, alias menſuras ſubſtituere, quibus Ordinatim-applicatarum quantitatem exprimant, quæ eandem Hyperbolam ubique comitentur in quocunque demum cono, aut quocunque ad illum modo applicetur, aut etiam extra conum conſtituatur. (Quod & de Parabola & Ellipſi factum eſſe ſupra declaratum eſt.)

Nempe, pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD diametros-interceptas, quæ quidem illis ſunt proportionales.

Pro recta vero AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus-Rectum* appellant;) quæ tribus DB, AS, DA, ſit quarta

reciproce proportionalis; ut sit ubique $DB \times AS = DA \times AL$; adeoque Latus rectum $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Denique (producta prius diametro DA, extra Hyperbolam, donec Opposito vel Triangulo vel Cono occurrat in a, ut habeatur Diameter-transversa Aa,) erit (propter similia triangula) Aa. AS :: Da. $DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$; ideoque $BD \times DS\ (=DOq) = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$, (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$ ut dictum est.)

Hoc est, (substitutis idoneis Symbolis, nempe $t = Aa$, $d = DA$, $t + d = Da$, $l = LA$, & $h = DO$,) Quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola $h^2 = \frac{t+d}{t} ld = \frac{td+d^2}{t} l = dl + \frac{d}{t} dl = ld + \frac{l}{t} d^2$ (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem tam separatim $ld = FD \times DB$, & $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB$, quam conjunctim $ld + \frac{l}{t} d^2 = FD \times DB + FS \times DB = SD \times DB = DOq$.

Estque hoc quidem primarium atque essentiale Hyperbolæ symptoma, unde reliqua dependent omnia & calculo comprobari possunt. Reliquas Hyperbolæ affectiones post investigabimus, ubi absolutam ipsius tractationem (sine respectu habito ad Conum) instituemus.

Atque hactenus quidem *Coni-sectiones* vulgo dictas, Parabolam, Ellipsin, atque Hyperbolam, inspecto Cono consideravimus; ut quæ à Cono-secto (quod & nomen innuit) originem traxisse reputantur. Adeoque primaria illarum symptomata ab ipso deduxi; quod & de aliis illarum affectionibus fecisse (si id opus esset) non adeo esset difficile. Quoniam autem earum natura magis absoluta est, quam ut ad Conum solum pertinere videantur; priorem contemplationem eousque prosecutus sum, ut & fontes aperirem unde Veteres doctrinam suam hausisse videntur, & quibus passibus ad abstrusas illas quas exhibent demonstrationes aut pervenerint aut saltem pervenisse potuerint; Et essentialia illarum symptomata inde deducerem, ut tandem liceat illas etiam extra Conum suum intelligere, aut etiam (si libet) de Cono in Conum transferre; cum earum affectiones reliquæ ex jam traditis (etiam sine Coni auxilio) deduci possint, ut in sequentibus patebit. Non autem earum affectiones omnes ea methodo prosecutus sum; quoniam illarum traditio ex absoluta, quæ sequitur, tractatione (sepositio Cono) & clarius & facilius peragi possit, nec opus sit rem eandem iterato agere.

PARS

PARS SECUNDA.

CUM tradita ſint in præcedentibus Parabolæ, Ellipſis, *atque* Hyperbolæ, (*quas* Coni-ſectiones *appellant,*) *eſſentialia ſymptomata, ab ipſo ſecto Cono* (*unde Originem traxiſſe exiſtimantur*) *deſumpta; quæ ipſarum naturam abſolutam ita interim exponunt, ut ſive à Secto Cono, ſive aliunde geneſin ſortiantur, eadem natura abſoluta eiſdem characteribus deſignanda eſſet: Licebit in ſequentibus illas* (*ſive lineas ſive figuras*) *ſecundum abſolutam quam in ſe habent naturam contemplari, ſine reſpectu ad geneſin habito, quæ vel à Sectione Coni, vel etiam aliunde contingere poſſit: Et quidem undecunque contingat, abſolutam earum contemplationem neutiquam conturbet.*

PROP. XXI.

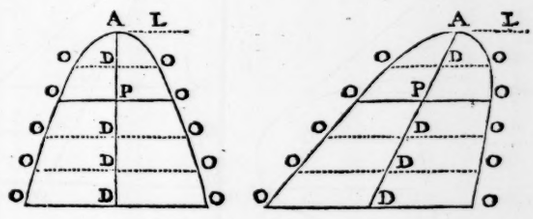
De Parabola, abſolute conſiderata.

CUm ſit in Parabola Quadratum Ordinatim-applicatæ cujuſlibet ($p^2 = l\,d$) æquale rectangulo quod intercepta-Diametro & Latere-recto comprehenditur, (ut, inſpecto Cono ſupra deprehendimus, prop. 12.) Licebit jam Parabolam, eo charactere ornatam, ſuo Cono eximere, atque abſolute quidem & Univerſaliter definire.

Parabolam igitur appello eam (ſive lineam curvam in plano deſcriptam, ſive figuram planam, ejuſmodi curva terminatam, puta O A O,) cujus ordinatim-applicatarum quadrata ſunt interceptis-diametris proportionalia.

Rectam vero (imaginariam) quæ cum interceptis-diametris (tanquam communis altitudo) continebit rectangula (ipſis quidem diametris-interceptis proportionalia) Quadratis illis Ordinatim-applicatarum æqualia, appello *Latus-Rectum*; puta L A.

Ordinatim-applicatas vero appello, (D O, P O,) ſemiſſes parallelarum rectarum, (O O, O O,) Parabola utrinque terminatarum (quas *Ordinatim-inſcriptas*, vel *Ordinatim-ſubtenſas* appello) una linea recta (puta A D P, quam appello *Diametrum*) biſectarum.



Punctum autem illud biſectionis, (D vel P,) *Punctum applicationis* appello; in quo quippe Diametro ſuæ applicatur ea quam Ordinatim-applicatam diximus.

Diametri vero ſegmentum, puncto-applicationis & curva Parabolica comprehenſum, (A D, A P,) *Diametrum-interceptam* appello.

Punctumque Diametri in curva illa exiſtens (puta A) appello *Verticem*,

Verticem, (tam Diametri, quam ipſius Parabolæ, ſecundum illam Diametrum conſideratæ.)

Ordinatim-poſitas appello non modo eas, quas ſupra *Ordinatim-inſcriptas*, atque *Ordinatim-applicatas* dixi, (quæ vel utrinque vel ab altera ſaltem parte Parabola terminantur,) ſed alias quaſvis ipſis parallelas (quantævis longitudinis) Diametro ſimiliter appoſitas, & propterea eoſdem cum diametro angulos facientes.

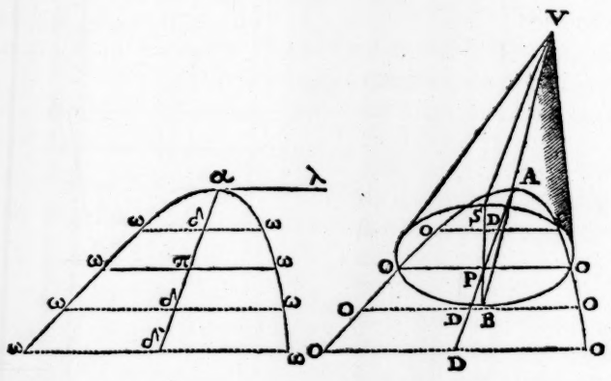
Atque hinc quidem, ſi fuiſſet res integra, neque Conicæ Sectiones, ut vocantur, Originem à Cono traxiſſe vulgo reputarentur, (quare & mihi neceſſe erat eas, ſecundum illam etiam hypotheſin exponere, ne videar novas quaſdam figuras comminiſci, potius quam ab aliis receptas explicare:) licuiſſet totius hujuſce tractationis initium poſtuiſſe, omiſſis eis omnibus quæ ſuperius in parte prima exhibuimus; aut ea ſaltem (ſi libuiſſet adjungere) hinc quaſi à vero fonte demonſtraſſe. (Adeoque novas terminorum aliquot definitiones neceſſe eſt & hic & deinceps aliquoties adjungere, omiſſa Coni mentione, ne opus ſit ad præcedentia recurrere, aut Coni auxilium in definitionibus poſtulare.)

Non enim eſt *Parabolæ* magis eſſentiale, ut fiat *Sectione Coni Plano lateri parallelo*; quam *Circulo*, ut fiat *Sectione Coni plano baſi parallelo*; aut *Triangulo*, ut fiat *Sectione Coni per Verticem*. Neque illud volunt alii: Quamvis enim Parabolam (quod & de aliis Coni-Sectionibus ſimiliter intelligendum eſt) ſecto Cono generari definiant; non tamen ſolas illas, quæ ſectione Coni fiunt, pro Parabolis habent, (nam & alios agnoſcunt Parabolam in plano deſcribendi modos;) ſed tales eſſe volunt (ſive figuras ſive lineas curvas) quales ejuſmodi ſectione Coni fieri poſſunt.

Parabolam autem à *nobis definitam eandem eſſe cum Parabola Apollonii*, & aliorum; talem nempe, qualis ſectione Coni effici poſſit: Sic demonſtro.

Eſto Parabola quælibet à nobis definita $\alpha\omega$, (ejuſque Ordinatim-applicata quælibet $\pi\omega$, cum diametro $\alpha\pi$ angulum $\alpha\pi\omega$ quemcunque faciens; ſitque $\alpha\lambda$ latus rectum.) Dico hanc Parabolam talem eſſe qualis ſectione Coni effici poſſet.

Fiant enim rectæ $AP = PB = \alpha\pi$; ſitque angulus APB rectus & (continuata BP) fiat $PS = \alpha\lambda$; & jungatur recta BA, quæ (continuata) concurrat cum recta SV (ipſi PA parallela) in V, ut compleatur triangulum VBS; ſuper quod erigatur circulus diametrum habens BS, qui cum triangulo VBS angulum inclinationis faciat æqualem angulo $\alpha\pi\omega$; eique paralleli circuli alii nu-



mero infiniti ſupponantur, (diametros habentes in triangulo VBS ipſi BS parallelas) qui conum VBOS compleant (per prop. 5.) per cujus axem incidit VBS Triangulum, (quippe in quo reperiuntur omnium circulorum parallelorum diametri.) Tum erigatur planum APO triangulo VBS rectum, quod igitur ſecabit circulum SOB ſecundum rectam PO, quæ (propter angulum etiam APB rectum) perpendicularis erit rectæ BS, per 3 & 4 dd 11, (angulumque APO conſtituet æqualem inclinationi planorum, per 6 d 11, adeoque angulo $\alpha\pi\omega$,)

Planum

Planum igitur APO, coniſectionem efficit AO: cumque ipſius diameter AP parallela ſit VS oppoſito cruri trianguli-per-axem; ſectio illa erit Parabola, qualem deſcripſimus prop. 7. (ut inde patet;) hoc eſt, qualem definit Apollonius prop. 11. lib. 1. Conicorum.

Sed & eidem congruit Parabola propoſita, à nobis definita. Nam quadratum PO (= BP × PS) æquatur quadrato $\pi\omega$ (= $\pi\alpha \times \alpha\lambda$,) cum ſit (ex conſtructione) $\pi\alpha$ = PB, & $\alpha\lambda$ = PS; adeoque & recta PO = $\pi\omega$. Sed & (ex conſtructione) AP = $\alpha\pi$, & angulus APO = $\alpha\pi\omega$, (ut oſtenſum eſt:) congruunt ergo rectæ AP, PO, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$, (& angulus comprehenſus angulo comprehenſo:) Atque eadem ratione reliquæ ordinatim-applicatæ DO reliquis $\delta\omega$ congruunt, adeoque & Parabola Parabolæ congruit. Parabola igitur à nobis definita, Parabolæ ſectione coni factæ congruit, adeoque talis eſt qualis ſectione coni effici poſſet. Quod erat primo demonſtrandum.

Contra vero, Parabolam ſectione Coni factam talem eſſe, qualem nos deſcripſimus, (nempe quadrata ordinatim-applicatarum habere diametris interceptis proportionalia,) ſupra demonſtratum eſt prop. 8. & 12.

Eadem igitur eſt Parabola quæ ab Apollonio (aliiſque) & quæ à nobis definitur. Quod oſtendiſſe par erat.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum conſtruere, eique datam Parabolam ita aptare, ut data ipſius diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atque etiam Theorematice verum eſſe, *Parabolæ diametrum quamlibet fieri poſſe* (*in aliquo ſaltem Cono*) *diametrum-ex-generatione*; *& quomodo illud fiat.* (quamvis & illud aliis mille modis fieri poſſit.)

An vero univerſaliter verum ſit, *Datam Parabolam dato Cono ita aptari poſſe, ut data ipſius diameter fiat diameter-ex-generatione*, eſt alia diſquiſitio. Eſt autem & illud verum, modo datæ diametri ad ſuas ordinatim-applicatas obliquitas major non ſit quam obliquitas Axis aſſignati Coni ad baſin ſuam. Si ſecus autem; illud non fiet dummodo ſolum circulum pro Coni baſe agnoſcimus. Si vero admittatur, ut non modo Circulus, ſed & Ellipſis quælibet, pro baſe Coni reputetur; etiam univerſaliter illud verum erit, neque determinatione indigebit Theorema. Hoc autem obiter tantum ſine Demonſtratione moneo; quoniam nec illud eſt hujus loci, nec mihi animus eſt ad ſingulas minutias deſcendere. Ad reliquas igitur Parabolæ affectiones calculo comprobandas feſtino.

PROP. XXII.

Corollaria.

Patet ex dictis; Quod cum ſit (ut oſtenſum eſt) $p^2 = l\,d$; erunt, in Parabola, Diameter-intercepta, Ordinatim-applicata, & Latus-Rectum, continue proportionalia.

Adeoque, Datis eorum duobus quibuſvis, etiam reliquum (magnitudine) datur. Nempe,

In Parabola
- Ordinatim-applicata, $p = \sqrt{l\,d}$.
- ejuſque quadratum, $p^2 = l\,d$.
- Latus Rectum, $l = \frac{p^2}{d}$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{p^2}{l}$.

Patet etiam; Ordinatim-applicatas, prout longius à vertice applicantur, ita ſemper augeri, (cum ipſarum quadrata ſint interceptis diametris, hoc eſt, diſtantiis punctorum-applicationis à vertice, proportionalia.)

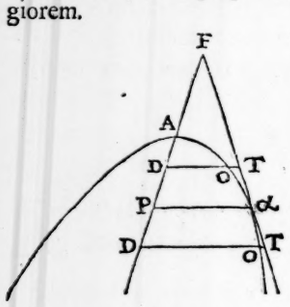
Et propterea, Parabolam ejuſmodi curvam eſſe, quæ per ſe figuram non comprehendet; cum crura perpetuo magis divaricentur, nec ſint unquam (extra punctum verticis) coitura.

PROP. XXIII.

De Recta Parabolam contingente.

SI, ſumpto ubivis in Parabolæ diametro puncto P, cui ordinatim-applicetur Pα, diameter PA extra Parabolam continuetur ut fiat continuatio AF, ipſi AP diametro interceptæ æqualis; recta Fα ducta, Parabolam in puncto α continget. Et contra; ſi Parabolam in α contingat recta αF, diametro productæ occurrens in F; erit AF (continuatio) ipſi AP (diametro-interceptæ) æqualis.

Nam ſumpto, in eadem diametro, puncto quovis D, cui ordinatim-applicetur DO, quæ ad rectam Fα pertingat in T; Dico punctum T vel idem eſſe cum puncto α, veł extra Parabolam cadere; hoc eſt, rectam DT vel æqualem eſſe rectæ DO (ſi nempe puncta D, P, coincidant,) vel (ſi alibi ſumatur D) longiorem.



Eſto enim (ob commodiorem calculum) P$\alpha = p$, PA $= d$ (ideoque PF $= 2d$,) PD $= a$, (ideoque DA $= d \pm a$, DF $= 2d \pm a$, variatis nempe ſignis $+$, $-$, prout ſupponitur punctum D infra vel ſupra punctum P ſumi.)

Erit igitur (propter Parabolam) PA. DA :: Pαq. DOq. hoc eſt, $d. d \pm a :: p^2. \frac{d \pm a}{d} p^2 =$ DOq.

Et (propter ſimilia triangula) PF. DF :: Pα. DT. hoc eſt, $2d. 2d \pm a :: p. \frac{2d \pm a}{2d} p =$ DT. hujuſque quadratum $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 =$ DTq.

Eſt igitur differentia quadratorum DTq $-$ DOq $= \frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 - \frac{d \pm a}{d} p^2 = \frac{a^2}{4d^2} p^2$. Quæ quidem vel aliqua eſt, ſi puncta P, D, diſtent, (ſitque propterea a quantitas realis;) vel omnino nulla, ſi coincidant puncta P, D; (evaneſcente quippe quantitate a, adeoque & ipſius multiplicibus omnibus.) Hoc eſt, Quadrata DTq, DOq, & propterea eorum latera DT, DO, vel æqualia ſunt, ſi ſumatur punctum D idem atque P; vel illud majus eſt, ſi alibi ſumatur D. Et propterea, cum rectæ αF (quantumvis utrinque productæ) ſingula puncta ipſo α excepto, ſint extra parabolam; ea Parabolam in unico puncto α contingit. Quod erat Demonſtrandum.

Eſtque hæc noſtra demonſtratio multo expeditior, quam quæ ab Apollonio aliiſque, (adhibito Cono, variiſque lemmatis præmiſſis) afferuntur.

Si vero propoſitio hæc non fuiſſet antehac excogitata, ſed à nobis jam quærenda: *Illud Analytice ſic fieri poſſet.*

Supponamus rem quaſi jam factam; contingentem αF, diametro productæ occurrere in F: & quærenda ſit longitudo rectæ PF.

Retineatur eadem quæ prius figura; eademque ſymbola, niſi quod pro PF (nondum cognita) ſubſtituatur f, adeoque pro DF, $f \pm a$. Erunt igitur (ut prius) PA. DA :: Pαq. DOq $= \frac{d \pm a}{d} p^2$. Et PF. DF :: Pα. DT. hoc eſt, $f. f \pm a :: p. \frac{f \pm a}{f} p =$ DT. Et $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} p^2 =$ DTq.

Eſt item (propter tangentem) DT $>$ DO (hoc eſt, DT æqualis vel major quam DO; illud quidem ſi D, P, coincidant; hoc, ſi ſecus) & DTq $>$ DOq, hoc eſt $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} p^2 > \frac{d \pm a}{d} p^2$; & (utrumque multiplicando in $df2$ &

divi-

dividendo per p^2) erit $df^2 \pm 2dfa + da^2 \overline{>} df^2 \pm f^2 a$: & (auferendo utrinque df^2, atque dividendo per $\pm a$) erit $2df \pm da \overline{>} f^2$.

Denique ponendo DP idem punctum (ut evaneſcat quantitas a, adeoque & da,) erit $2df = f^2$, hoc eſt $2d = f$. Quod eſt ipſum Theorema quod inveſtigandum erat, quodque modo demonſtravimus.

Converſa Propoſitionis propoſitæ; nempe *Parabolæ tangentem αF diametro PA productæ occurſuram, & quidem ita ut abſcindat rectam AF ipſi AP æqualem*; ex dictis ſatis patet, vel inde ſaltem facile deduci poteſt.

Atque etiam; *Rectam αF Parabolam in unico puncto contingere.*

Item, *Ab eodem puncto F, atque ad eaſdem partes, rectam aliam quæ Parabolam contingat duci non poſſe.*

Et, *Parabolam in eodem puncto α non niſi unicam rectam contingere poſſe.*

Adeoque *In locum inter curvam αA rectamque contingentem αF, aliam rectam lineam cadere non poſſe*: (Hoc eſt, prout ego alibi peculiari tractatu fuſius demonſtravi, *Angulum qui Contactus dicitur, eſſe angulum nullius magnitudinis, ſive non-Angulum.*)

Verum cum ea non difficulter calculo demonſtrari poſſint (demonſtrationibus præcedenti non abſimilibus,) ego, partim ut tironibus quo ſe exerceant relinquam, partim ne aliis tædio ſim, eis ſigillatim demonſtrandis ſuperſedeo.

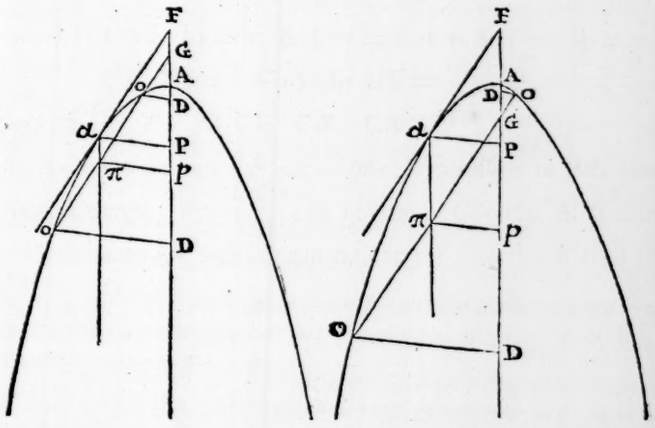
PROP. XXIV.

De Parabolæ Diametris.

SI à puncto quovis α in Parabolæ curva Aα, ducatur recta $\alpha\pi$ parallela diametro AP: Erit $\alpha\pi$ ſic ducta ejuſdem Parabolæ diameter; verticem habens α, & Ordinatim-applicatas πO rectæ αF (Parabolam in vertice α contingenti) parallelas.

Libet hanc *Propoſitionem primo Analytice examinare*, deinde & Synthetice demonſtrare.

Supponamus igitur rem ita eſſe ut perhibetur: adeoque inſcriptam OO, rectæ αF parallelam, atque in π biſectam: ſintque rectæ OD, OD, αP, diametro AP,



ordinatim-applicatæ, adeoque invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur πp, quæ igitur (propter parallelas) biſecabit (ut rectam OO, ſic) rectam DD. Denique recta OO (producta ſi opus) occurrat diametro AP (ſaltem productæ) in G. (occurſuram autem certum eſt, cum ipſi parallela αF eidem diametro occurrat, puta in F, per præcedentem.) Eruntque (propter parallelas) $Pp = \alpha\pi = FG$: & propterea $PF = pG$.

Tum ſubſtitutis (ob commodiorem calculum) idoneis ſymbolis, eſto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideoque per præced. $PF = pG = 2d$.) $Pp = \alpha\pi = FG = g$. (ergo $pA = PA + pP = d + g$.) $pD = q$. (ideoque $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \mp pD = 2d \mp q$.)

Erit igitur (propter Parabolam) $PA.DA :: P\alpha q.DOq$. hoc eſt $d.d+g \pm q :: p^2. \frac{d+g\pm q}{d} p^2 = DOq$.

Item (propter ſimilia triangula) $PF.P\alpha :: DG.DO$. hoc eſt $2d.p :: 2d \mp q. \frac{2d \mp q}{2d} p = DO$. Et (ſumendo quadrata) $\frac{4d^2 \pm 4dq + q^2}{4d^2} p^2 = DOq = \frac{d+g\pm q}{d} p^2$.

Ergo (utrinque dividendo per p^2 & multiplicando per $4d^2$) $4d^2 \pm 4dq + q^2 = 4d^2 + 4dg \pm 4dq$. hoc eſt (ſublatis utrinque æqualibus) $q^2 = 4dg$. Adeoque inventa eſt quantitas q, adeoque & puncta D, D, quibus Ordinatim applicantur DO, DO. Vera igitur eſt propoſitio.

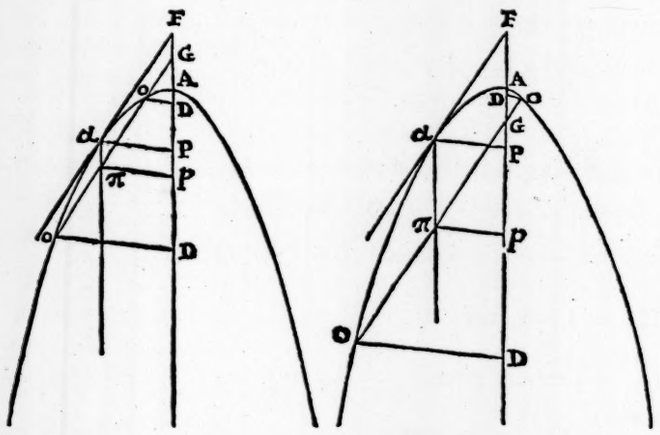
Illud Synthetice ſic demonſtrabimus, premendo Analyſeos veſtigia.

Diametro AP ducatur parallela $\alpha\varpi$, per cujus punctum quodvis (intra parabolam) π, ducatur recta πG diametro occurrens in G, & parallela tangenti αF occurrenti diametro in F. Dico $\alpha\pi$ ejuſdem Parabolæ diametrum eſſe eique ordinatim poni πG.

Diametro AP ordinatim applicetur αP, eique parallela ducatur πp diametro occurrens in p. Et ſunto ſymbola $P\alpha = p$, $PA = d$. $FG = \alpha\pi = Pp = g$.

Tum ſumantur in diametro utrinque à puncto p, æquales rectæ $pD = (\sqrt{4dg} =) 2\sqrt{dg}$. (hoc eſt, duplum mediæ proportionalis inter AP, $\alpha\pi$, rectas.) atque punctis D, D, ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O; quæ cum parallelæ ſint rectæ πp, ſicut recta DD (ex conſtructione) biſecatur in p, erit ideo & OO (propter parallelas) biſecta in π.

Reſtat ut oſtendam rectam illam OO (biſectam in π) Parabolæ inſcriptam eſſe, (ut $\alpha\pi$ recta biſecans ſit diameter,) hoc eſt, puncta OO eſſe in Parabolæ Curva. Quod ſic probatur.



Eſt $pA = PA + Pp = d + g$. $DA = pA \pm pD = d + g \pm 2\sqrt{dg}$. $pG = PF = 2d$. $DG = pG \mp pD = 2d \mp 2\sqrt{dg}$.

Tum (propter Parabolam) ut PA, ad DA; ſic $P\alpha q$ quadratum ordinatim-applicatæ puncto P, ad quadratum ordinatim-applicatæ puncto D: hoc eſt $d.d+g \pm 2\sqrt{dg} :: p^2. \frac{d+g\pm 2\sqrt{dg}}{d} p^2$. quod igitur eſt quadratum ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem eſt quadratum rectæ DO. Nam (propter ſimilia triangula)

PF.

PF. Pα :: DG. DO. hoc est, $2d.p :: 2d \pm 2\sqrt{dg}. \frac{2d \pm 2\sqrt{dg}}{2d} p = DO$. Ejusque quadratum $DOq = \frac{4d^2 + 4dg \pm 8d\sqrt{dg}}{4d^2} p^2 = \frac{d + g \pm 2\sqrt{dg}}{d} p^2$.

Est igiturquadratum rectæ DO æquale quadrato ordinatim-applicatæ puncto D; adeoque recta DO ipsi ordinatim-applicatæ æqualis. Sed & puncto D ordinatim-ponitur recta DO (ex constructione,) ergo ordinatim-applicata est: punctaque OO propterea sunt in ipsa Parabolæ curva, adeoque OO recta Parabolæ inscripta. Sed & eam (atque eadem ratione ipsi parallelas inscriptas omnes) bisecat recta $\alpha\pi$. Est igitur (per def.) $\alpha\pi$ diameter, eique ordinatim-applicata πO, (ordinatim-inscriptæ semissis.) Quod erat demonstrandum.

Monendum autem hic est, quod cum (tam in Analysi quam in Synthesi) dicimus duarum rectarum DG, alteram quidem æqualem esse pG ∞ pD, hoc est, differentiæ rectarum pG, pD, fieri quidem potest ut quandoque pG (nempe quoties recta OO diametrum AP non transit,) quandoque pD (nempe ubi OO transit AP) major esse: Adeoque pG ∞ pD, nunc per pG — pD, nunc per pD — pG, interpretandum erit. Verum hoc calculum non omnino perturbat; quoniam ea quantitas in operationis progressu quadranda occurrit: quo casu, utrumvis contingat, eadem quadrata prodibunt. Nempe cum sit in Analysi $\frac{2d \pm q}{2d} p = DO$, sive exponatur $\frac{2d \pm q}{2d} p = DO$ (ut ubi OO non transit AP,) sive $\frac{q \pm 2d}{2d} p = DO$ (ut ubi transit,) utrovis modo erit $\frac{4d^2 + q^2 \pm 4dq}{4d^2} p^2 = DOq$. Et pariter contingit in Demonstratione Synthetica. Quod monuisse sufficit.

Possent hic alia Theoremata multa sigillatim ostendi, puta,

Quodlibet Curvæ Parabolicæ punctum alicujus Diametri verticem esse.

Adeoque *In qualibet Parabola infinitos esse Vertices, atque Diametros infinitas numero.*

Item; *Parabolæ Diametros omnes esse invicem Parallelas.*

Et; *Quamlibet rectam (in eodem plano) cuilibet Parabolæ Diametro parallelam, ejusdem Parabolæ Diametrum etiam esse; eique in uno aliquo, & quidem unico, puncto occurrere.*

Item; *Quamlibet in eodem plano rectam, per aliquod intra Parabolam punctum transeuntem, Diametro non parallelam, in binis punctis Parabolæ occurrere; & alicui Diametro Ordinatim-positam esse.*

Et; *Quæ vel alicui Parabolæ Diametro Ordinatim-posita est, vel Diametrum aliquam quocunque modo secat, vel quæ Parabolam secat (aut ipsi occurrit) in binis punctis; nec illius Parabolæ Diametrum esse, nec ipsius Diametro ulli parallelam.*

Item; *Quæ Parabolæ Diametro alicui in vertice occurrit ordinatim-applicatis parallela, Parabolam in illo puncto contingere.*

Et; *Quæ Parabolam contingit, Diametri per contactus punctum transeuntis Ordinatim-applicatis parallelam esse: adeoque eidem Diametro Ordinatim positam.*

His autem, aliisque consimilibus, sigillatim demonstrandis, non immorandum esse sentio; Cum ea vel in progressu præcedentium Demonstrationum satis jam ostensa sint; vel ex eisdem principiis facile demonstrari possint.

PROP. XXV.

Effectiones Geometricæ.

EX præcedentibus, non erit difficile Geometricas Effectiones colligere. Puta,

Datæ Parabolæ Diametrum invenire. Nam recta, quaslibet duas inscriptas parallelas bisecans, est Diameter.

Item, *Per datum quodvis in eodem plano punctum, rectam ducere quæ sit*

Parabolæ datæ Diameter. Inventa enim (ut prius) una qualibet diametro, recta huic parallela per datum punctum ducta, est Diameter quæsita.

Item, *Parabolæ Axem reperire.* Inscripta nempe recta quæ Diametrum quamlibet ad angulos rectos secet; ea quæ per hujus medium punctum transit Diameter, est Parabolæ Axis.

Item, *Datæ Diametri ordinatim-applicatas positione invenire.* Vel, quod tantundem est, *Angulum inclinationis invenire.* Ductis nempe binis diametro datæ parallelis rectis, utrinque ab illa æqualiter remotis, quæ Parabolam secent; recta sectionum puncta conjungens est datæ diametro ordinatim-applicata, reliquæque omnes huic parallelæ.

Item, *Latus-Rectum invenire datæ in data Parabola Diametro conveniens.* Est enim Latus-rectum, Diametro-interceptæ & Ordinatim-applicatæ tertia continue proportionalis.

Item, *Ad datum datæ diametri punctum ordinatim-applicatam in data Parabola ducere.* Est enim interceptæ-diametro & lateri-recto media proportionalis, Diametro, juxta inclinationis angulum, applicanda.

Item, *Ad datam diametrum, datumque Latus-rectum, Parabolam in dato inclinationis angulo ducere.* Nam positis ad datam Diametrum in dato angulo quotlibet ordinatim-applicatis, curva per earum omnium extremitates æquabiliter ducta est Parabola.

Verum ego harum omnium effectionum demonstrationes omitto; partim ut tædio non sim, partim ut sit quo se exerceant tirones, præsertim cum illæ ex prædictis facile possint elici. Atque eisdem de causis multa alia & Theoremata & Problemata lubens prætereo; cum nobis non sit animus vel singulis minutiis insistendi, vel propositiones citra necessitatem multiplicandi. Quod etiam de sequentibus intelligendum erit.

PROP. XXVI.

De Ellipsi absolute considerata.

CUm sit in Ellipsi (ut ostensum est, prop. 16.) Quadratum ordinatim-applicatæ $e^2 = ld - \frac{l}{t} d^2$. Licebit jam (ut prius Parabolam, sic) Ellipsin eo charactere insignitam, suo Cono eximere, atque absolute quidem & universaliter contemplari, acsi nullam omnino ad Conum relationem haberet; ut nec circulus (quæ quidem una est Ellipseos species) censeri solet habere.

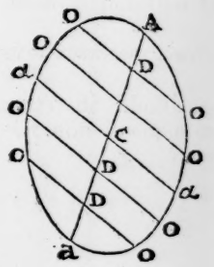
Ellipsin igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curva terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata, æquantur differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem Majora sunt interceptis-Diametris, Minora vero earundem quadratis, proportionalia. (Nempe $e^2 = ld - \frac{l}{t} d^2$. Sunt enim rectangula ld, ipsis d diametris interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l: ipsa vero $\frac{l}{t} d^2$ diametrorum interceptarum quadratis d^2 proportionalia, propter communem rationem $\frac{l}{t}$.)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordinatim-positas, Ordinatim-inscriptas, (sive *Ordinatim-subtensas,*) *Ordinatim-applicatas,* atque *Punctum applicationis*; eodem sensu hic accipio quo supra de Parabola iisdem usus sum.

Rectam

Rectam nota *l* insignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis-diametris, continere supponitur rectangula Majora, diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum.*





Rectam vero alteram, quæ nota *t* designatur, (quam quidem supponimus Diametri segmentum esse, à vertice versus concavam Curvæ partem ductam; quæqu ita se habet ad latus rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad rectangula Minora, illis quadratis proportionalia,) *Diametrum transversam* appello; (ut quæ oppositos vertices conjungit, puta A a, ut mox dicetur:) ejusque punctum medium, (quod in ipsa Diametro intra Ellipsin jacere supponimus, nempe intra oppositos vertices,) appello *Centrum.*

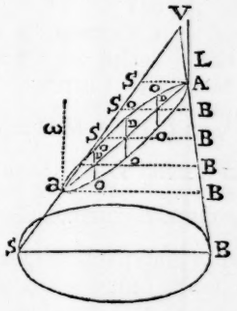
Ellipsin à nobis definitam eandem esse cum ea quam definit Apollonius, (nisi quod nos etiam circulum, seu circuli Peripheriam, eadem voce includamus, quam excludit Apollonius;) eodem fere progressu demonstrari potest, quo supra ostendimus Parabolam nostram eandem esse atque illius.

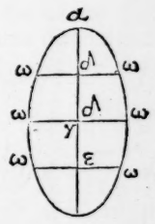
Nempe, Ellipsi Apollonianæ, Sectione Coni factæ (quæ ab Apollonio describitur p. 13. lib. 1. Con.) universaliter convenire definitionem nostram; jam probatum est prop. 13. & 16.

Ellipsin à nobis definitam quamlibet (modo circulum seu Peripheriam excipias, quam ego sub ea voce comprehendo, contra quam Apollonius,) ita Cono aptari posse ut conditiones eas habeat quas postulat Ellipsis Apolloniana; sic probatur.

Exponatur Ellipsis quælibet à nobis definita, $\alpha\omega$, cujus ordinatim-applicatarum quadrata sint $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita aptari posse ut postulatur.

Ducantur enim rectæ $Aa = t$, $AS = l$, continentes angulum SAa quemcunque acutum, (modo major sit complemento anguli inclinationis in Ellipse exposita, quem faciunt ordinatim-applicatæ cum exposita diametro;) ipsique AS parallela ponatur $aB = Aa = t$, angulum faciens $AaB = SAa$: (saltem tantæ sint longitudinis AS, aB, ut sit $AS \times aB = lt$; modo interim non sint AS, aB, invicem æquales; eo enim casu non Conus, sed Cylindrus prodiret:) Et jungantur rectæ aS, BA, quæ continuatæ coeant in V, complentes triangulum VaB, (si nempe aB major sit quam AS, prout jam supponimus; vel, si secus, triangulum VAS:) quod esto triangulum per axem Coni mox construendi.





Deinde super rectas Aa, aB, duo plana ita erigantur ut communis earum sectio $a\omega$ faciat cum recta aB angulum rectum, cum recta vero Aa angulum æqualem angulo inclinationis Ellipseos propositæ. Hoc enim omnino fieri posse constat: Si enim erigatur in puncto a recta $a\omega$, quæ sit recta plano trianguli, (adeoque

(adeoque utroſque angulos ω a A, ω a B, rectos faciat per 3 d 11.) circumvolvatur circa rectam a B ut axem, invariato angulo ω a B, donec ad ſitum plani V a B perveniat, faciatque in plano trianguli angulum ω a A acutum; qui minor erit angulo (acuto, intellige, niſi uterque rectus ſit,) inclinationis Ellipſeos expoſitæ, (cum ſit, ex conſtructione, angulus A a B complemento inclinationis major;) neceſſe eſt ut in tranſitu aliquando fecerit angulum, inclinationis angulo æqualem, (factus enim eſt tranſitus ab angulo recto, adeoque debito majori, vel ſaltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoque tunc fuerit in ſitu debito, ut ſit duorum planorum communis ſectio qualis imperatur.

In plano autem ω a B ſic poſito, ſcribi intelligatur circulus diametrum habens a B, qui ſit baſis Coni; aliique huic paralleli conum complentes, juxta prop. 5; qui plano A ω a ſectus Ellipſin exhibebit, per prop. 7. cujus ordinatim-applicatæ eandem ad Diametrum inclinationem habebunt, quam quæ in Ellipſi expoſita, adeoque ſimiliter poſitæ ſunt; eruntque etiam longitudine æquales, ut probari poterit per prop. 13. & 16. Congruunt igitur Ellipſis expoſita, & quæ in Cono exhibetur. Adeoque, eadem eſt Ellipſis à nobis definita (niſi quod nos etiam circulum ea definitione comprehendamus) atque Ellipſis Apollonii. Quod erat demonſtrandum.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum conſtruere, eique datam Ellipſin ita aptare, ut data Ellipſeos Diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atque etiam Theorematice verum eſſe, *Ellipſeos diametrum quamlibet, fieri poſſe, in aliquo ſaltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXVII.

De Ellipſeos Diametro-tranſverſa & Verticibus-Oppoſitis.

SI Ellipſeos Diameter-intercepta A D intelligatur (à vertice A verſus concavam curvæ partem) tanta aſſumi, ut rectæ quam *t* diximus ſit æqualis, (hoc eſt, ita ſe habeat ad latus rectum, ut interceptarum-diametrorum quadrata ad Rectangula quæ diximus Minora) erit & reliquus ipſius terminus D in Ellipſeos curva. (Nam ſi $d=t$, erit $\frac{l}{t}d^2=\frac{l}{d}d^2=ld$; ideoque $e^2=ld-\frac{l}{t}d^2=ld-ld=0$. hoc eſt, Ordinatim-applicata evaneſcit, puncto nimirum perimetri cum puncto diametri coincidente.)

Unde patet; Quamlibet Ellipſeos Diametrum binos habere vertices, (ut quæ in binis punctis perimetro occurrit;) quos *Vertices Oppoſitos* appellamus. Diameter vero binis illis verticibus terminata, illa eſt quam *Diametrum-tranſverſam* jam diximus.

Sed & inde liquet, Ellipſin ex earum curvarum numero eſſe quæ in ſe recurrunt, adeoque figuram comprehendunt.

Ellipſeos autem Diameter-intercepta, diametro-tranſverſa, longior eſſe non poteſt; tunc enim $\frac{l}{t}d^2$, quod binorum rectangulorum minus eſſe ſupponitur, majus eſſet quam ld, quod ſupponitur eorum majus eſſe. Si autem tale quid ſupponeretur; pro Ellipſi, prodiret Hyperbola, eandem habens diametrum-tranſverſam, verticem vero eum qui eſt aſſumpto (in Ellipſeos diametro-tranſverſa) vertex oppoſitus; quique ſupponitur Ellipſeos diameter intercepta (tranſverſa major) erit aggregatum diametrorum tranſverſæ & interceptæ in Hyperbola. Prout ex Hyperbolæ doctrina, poſt-tradenda, colligi poterit.

PROP. XXVIII.

Corollaria.

Patet ex præmiſſis; Cum ſit $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$: Horum in Ellipſi quatuor, *Diametri-tranſverſæ*, *Diametri-interceptæ*, *Lateris-Recti*, & *Ordinatim-applicatæ*; datis tribus quibuſvis, etiam & reliquum (magnitudine) dari. Nempe (diſponendo & reſolvendo æquationes) erit.

In Ellipſi {
- Ordinatim-applicata, $e = \sqrt{:ld - \frac{l}{t}d^2:} = \sqrt{\frac{td-d^2}{t}l}$.
- Ejuſque quadratum, $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = \frac{td-d^2}{t}l$.
- Latus rectum, $l = \frac{e^2}{td-d^2}t$.
- Diameter-tranſverſa, $t = \frac{d^2 l}{dl-e^2}$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2}$.

Et propterea, Diſtantia puncti applicationis à Centro, $c = \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2}$.

Patet etiam; Ut Diameter-tranſverſa ad Diametrum-interceptam, ſic eſſe Rectangula quæ diximus Majora (diametris interceptis proportionalia,) ad Rectangula quæ diximus Minora (earum quadratis proportionalia,) nempe, $t.d :: ld.\frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-tranſverſa ad Latus-rectum, ſic quadrata Diametrorum-interceptarum ad Rectangula Minora, (quadratis illis proportionalia.) Nempe $t.l :: d^2.\frac{l}{t}d^2$.

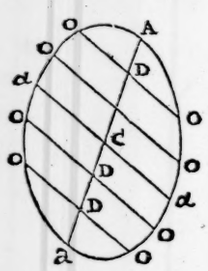
Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad interceptam; ſic tranſverſæ reſiduum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale Quadrato Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.d :: t-d.\frac{t-d}{t}d = \frac{td-d^2}{t}$. Et $\frac{td-d^2}{t}l = e^2$.

Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ſic Rectangulum ſegmentorum tranſverſæ, ad Quadratum Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.l :: td-d^2.\frac{td-d^2}{t}l = e^2$.

Vel; Ut Rectangulum ſegmentorum Diametri-tranſverſæ, ad Quadratum Ordinatim-applicatæ; ſic eſſe Diametrum-tranſverſam ad Latus-Rectum. (Unde cujuſlibet Ellipſeos Latus-Rectum commode reperitur.) Nempe $td-d^2.e^2 :: t.l = \frac{e^2}{td-d^2}t$.

Inde ſequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum eſſe Rectangulis ſegmentorum Diametri-tranſverſæ proportionalia. Sunt enim ubique ut l ad t.

Adeoque, Omnium ad eandem Diametrum-applicatarum, eam esse maximam quæ diametri-transversæ puncto medio (quod Centrum diximus) applicatur ut C α. (Quoniam nempe omnium rectangulorum ejusdem rectæ segmentis comprehensorum, illud maximum est quod bisegmentis comprehenditur; hoc est, quadratum semissis.) Nempe, ubi $d = \frac{1}{2}t = t - d$, erit $td - d^2 = \frac{1}{4}t^2$. ideoque e^2 $(= \frac{td - d^2}{t} l) = \frac{1}{4}tl$, quadratum Ordinatim-applicatæ maximæ.



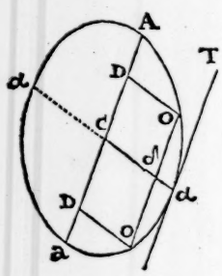
Reliquarum vero Ordinatim-applicatarum quadrata (adeoque & ipsæ Ordinatim-applicatæ) quæ centro propius applicantur sunt remotioribus majora, quæ autem habent applicationum puncta a centro æqualiter remota sunt invicem æqualia. Esto enim distantia puncti applicationis à centro quælibet CD=c, ideoque segmenta diametri-transversæ $\frac{1}{2}t + c$, $\frac{1}{2}t - c$; erit eorum rectangulum $\frac{1}{4}t^2 - c^2$ $(= td - d^2;)$ & e^2 $(= \frac{td - d^2}{t} l) = \frac{\frac{1}{4}t^2 - c^2}{t} l$: adeoque prout quantitas c augetur, ordinatim-applicata minuitur (non quidem proportionaliter, minuitur tamen, ut patet;) & contra; omnium vero maxima quæ centro applicatur (ut dictum est,) ubi c evanescit propter coincidentiam punctorum C, D.

Quodque de Ordinatim-Applicatis dictum est, idem & de Ordinatim-inscriptis (utpote applicatarum duplis) intelligendum est; nempe eam esse maximam quæ per centrum ordinatim-inscribitur; & reliquarum quidem centro propiores remotioribus majores; & æqualiter utrinque à centro remotas æquales esse.

PROP. XXIX.

De Ellipseos Diametris conjugatis.

RECta Diametro Parallela, ut α T, per illius quæ diametri-transversæ puncto medio seu centro Ordinatim-applicatur (quæ omnium maxima est, ut ostensum est; estque ad easdem partes unica, ut patet,) extremitatem ducta; Ellipsin in illo puncto (& quidem solo) contingit. (Secus enim non esset illa omnium, versus easdem partes, Ordinatim-applicatarum maxima.)



Omnes autem, huic contingenti parallelæ, (puta O δ O) eidem Ellipsi inscriptæ, ab illa (quam diximus) ordinatim-applicata maxima (ad perimetrum utrinque continuata, ut α C α) bisecantur; adeoque & ipsa est (per def.) ejusdem Ellipseos diameter: oppositos-vertices habens α α.

Cum enim Ordinatim-applicatæ D O D O sint (propter parallelas) æquales, æqualiter distabunt à Centro applicationum-puncta D D (ut modo ostensum est,) adeoque bisecantur tam D D in C, quam O O in δ: (propter parallelas:) estque $\alpha\delta$ diameter, eique ordinatim-applicantur δ O, C A.

Duas vero hujusmodi (ejusdem Ellipseos) diametros, (puta A a, $\alpha\alpha$) sibi mutuo ordinatim-positas, *Diametros Conjugatas* dicimus, (quæ se

ſe mutuo biſecant in communi centro C;) punctaque A α, vel a α, *conjugatos vertices* (in Conjugatis quippe diametris repertos) appellamus.

Ellipſin autem binis Diametris Conjugatis, earumque quatuor verticibus ſic inſtructam, poſſumus quidem quaſi pro quatuor ſive Ellipſibus ſive Sectionibus habere, quarum quælibet ſuum habet verticem, ſuamque Diametrum, eique Ordinatim-applicatas & Latus-rectum. Quarum quidem quatuor, binas αA α, αa α, *Oppoſitas* dicas, (ut & A αa, a αA,) quarum nempe vertices ſunt oppoſiti; binas vero αA α, A αa, vel A αa, αa α, (quarum vertices ſunt conjugati, utpote in conjugatis diametris poſiti,) *Conjugatas* dicas.

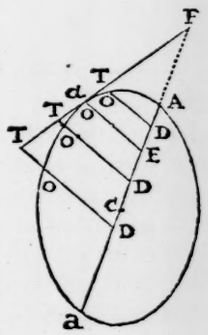
Quamvis enim *Sectionum Oppoſitarum* & *Conjugatarum* nomine, *Hyperbolæ* ut plurimum intelligi ſoleant: nihil tamen impedit quo minus (ut Hyperbolas, ſic) *Ellipſes* Oppoſitas & Conjugatas dicamus: vel ſaltem (ſi id nominis diſpliceat) Ellipſin dicamus *Oppoſito* & *Conjugato* ſitu conſideratam. Id ſaltem intereſt inter quatuor Sectiones Hyperbolicas, totidemque Ellipticas, (conjugatis Diametris accommodatas,) quod hæ quidem (productæ) ſe mutuo continuant, (adeoque Ellipſis tota ad quemvis quatuor verticum referri poterit,) illæ autem non ita. Verum hæc melius fortaſſe percipientur quum deinceps de Hyperbolis Oppoſitis & Conjugatis dictum erit.

Interim notandum eſt, Oppoſitarum ſive Ellipſeωn ſive Verticum (perinde enim eſt utrum dicatur,) Diametrum tranſverſam communem eſſe, & quidem Latera-recta æqualia, (vel, ſi mavis, idem; nos enim de lateris-recti ſitu nullam prorſus conſiderationem habemus, ſed ſolummodo de ipſius magnitudine, neque enim omnino refert vel ubi, vel an omnino ſcribatur aut ſcribi intelligatur,) & quidem eaſdem Ordinatim-applicatas; Diametros-interceptas vero oppoſitas habent, quæ quidem ſimul æquantur diametro-tranſverſæ.

PROP. XXX.

De recta Ellipſin-Contingente.

RECta Ellipſin contingens in conjugatarum Diametrorum alterutrius Vertice, cum reliqua (quantumvis utraque producatur) nunquam concurret, (utpote quæ ipſi parallela eſt, ut modo oſtenſum erat.) Quæ vero Ellipſin contingit recta, alibi quam in conjugato vertice, cum diametro (producta) concurret quidem. Punctum autem concurſus ſic inquiremus.



Supponatur Tangens αF, occurrens in F, productæ diametro EA, cui ordinatim-applicata ſit Eα. Supponatur etiam ubivis Ordinatim-applicata DO, Tangenti occurrens in T. Sitque centrum C; & Oppoſiti vertices A a; quorum ſupponatur A puncto E propior, a remotior.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) Eα = e, EA = d, Aa = t, (ideoque Ea = $t-d$, EC = $\frac{1}{2}t-d$,) EF = f, ED = a, (ideoque DF = $f \pm a$, DA = $d \pm a$, Da = $t-d \mp a$.)

Tum (quia quadrata ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum Diametri-tranſverſæ proportionalia, ut oſtenſum eſt prop. 28.) erit EA × Ea. DA × Da :: Eαq. DOq. hoc eſt, $td-d^2 . td-d^2-a^2 \pm ta \mp 2da :: e^2 . \frac{td-d^2-a^2 \pm ta \mp 2da}{td-d^2} e^2$ = DOq.

Item (propter ſimilia triangula) EF. Eα :: DF. DT. hoc eſt, $f . e :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} e$ = DT, ejuſque quadratum $\frac{f^2+a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2$ = DTq.

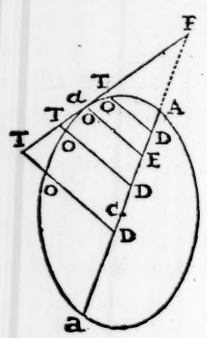
Tum (propter Tangentem) $DTq \overline{>} DOq$ (nempe æqualia, si DE puncta coincidant; vel, si secus, illud majus,) hoc est, $\frac{f^2+a^2\pm 2fa}{f^2}e^2 \overline{>} \frac{td-d^2-a^2\pm ta\mp 2da}{td-d^2}e^2$. & (utrinque multiplicando per $\frac{td-d^2}{e^2}f^2$) erit $f^2td-f^2d^2+tda^2-d^2a^2\pm 2ftda\mp 2fd^2a \overline{>} f^2td-f^2d^2-f^2a^2\pm f^2ta\mp 2f^2da$. Et (deletis utrinque $f^2td-f^2d^2$, atque dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda\mp d^2a+2ftd-2fd^2 \overline{>} \mp f^2a+f^2t-2f^2d$.

Denique, ponendo D E idem esse punctum, (ut evanescat quantitas $a=ED$, adeoque & ipsius multiplicia tda, d^2a, f^2a erit $2ftd-2fd^2=f^2t-2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td-d^2=\frac{1}{2}ft-fd$. (hoc est, $\square AEa=\square CEF$) vel $\frac{1}{2}t-d.t-d::d.f$. hoc est, EC.Ea::EA.EF. vel (alternando) EC.EA::Ea.EF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema sic inventum hoc est. Si sit Ordinatim-applicata in Ellipsi Eα, atque ab applicationis puncto E Ellipseos diameter per propiorem verticem A continuetur ad F; sitque, ut distantia puncti-applicationis à Centro EC, ad diametrum interceptam EA, sic residuum transversæ-diametri Ea, ad diametrum-interceptam continuatam EF: recta αF Ellipsin in puncto α continget.

Demonstratio (si opus) institui poterit repetitis Analyseos vestigiis.

Sed & hinc concludi potest quod modo aliunde ostensum erat; nempe quod *Recta Ellipsin in diametri vertice contingens diametro conjugatæ parallela est, eique nunquam occursura.* Nam, cum sit EC.EA::Ea.EF. si (propter coincidentiam punctorum E C) prima EC nulla sit (sive nullius magnitudinis,) quarta EF (vel CF) erit infinita (ex utravis parte supponatur diameter produci, sive per A, sive per a, indifferenter enim se Tangens habet ad utrumque verticem propter applicationem in centro,) hoc est, EF αF nunquam concurrent (propter infinitam distantiam suppositi puncti concursus F,) adeoque sunt parallelæ.



Patet etiam, *Interceptam-diametrum* EA (inter applicationis punctum & verticem propiorem) *ipsius continuatione* AF (inter verticem illum & tangentis cum diametro concursum,) *minorem esse.* Cum enim sit, $EC.Ea=EC+Ca::EA.EF=EA+AF$: Erit etiam (dividendo) EC.Ca::EA.AF. At EC minor est quam Ca vel CA (pars toto,) ergo & EA minor quam AF.

Sed & (ponendo $CA=\frac{1}{2}t=s$, & $CE=\frac{1}{2}t-d=c$, ideoque $EA=d=s-c$, & $Ea=t-d=s+c$,) erit $EF=\frac{td-d^2}{\frac{1}{2}t-d}=\frac{s^2-c^2}{c}$, & CF (=EF+EC) $=\frac{s^2}{c}$; hoc est CE.CA::CA.CF.

Sed & hinc docemur *Rectam αF ducere quæ Ellipsin in dato puncto α contingat.* Nempe, ducta Ordinatim-applicata αE, fiat ut EC ad Ea sic EA ad EF. Juncta enim Fα Ellipsin in α contingit.

Item, *A dato extra puncto F rectam ducere Fα quæ Ellipsin contingat.* Nempe, juncta FC, & continuata, (quæ Ellipsi in Aa punctis occurrat,) ut habeatur F punctum in diametri Aa continuatione; Quoniam est (ut modo dictum est) $EC.Ca=CA::EA.AF$. ideoque FA.AC::AE.EC; Si dividatur AC in E, sicut dividitur FC in A; & ducatur Ordinatim-applicata Eα; recta Fα juncta Ellipsin contingit.

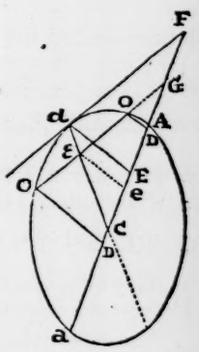
Alia liceret hîc Corollaria adjungere, qualia de Parabola innuimus prop. 23. Sed ea brevitatis ergo omittenda judico.

PROP.

PROP. XXXI.

De Ellipſeos Diametris.

SI à puncto quovis α in Ellipſeos curva A α, ducatur ad Centrum C recta αC; erit hæc ejuſdem Ellipſeos diameter, cujus vertex α, ejuſque Ordinatim-applicatæ rectæ ipſi αF, Ellipſin in puncto α contingenti, parallelæ.



Libet hanc propoſitionem (ut prius prop. 24.) primo Analytice examinare, deinde & Synthetice demonſtrare.

Supponamus igitur rem eſſe ut perhibetur; adeoque inſcriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam, à recta αC (per contactum & centrum tranſeunte) biſectam in E. Sintque rectæ OD, OD, αE, diametro AE ordinatim-applicatæ, adeoque invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur εe eidem diametro in e occurrens, quæ propterea (ob parallelas) biſecabit (ut OO in ε, ſic) DD in e. Denique recta OO, diametro AE, (utriſque ſi opus eſt productis,) occurrat in G. (Saltem ſi parallela ſit, ut non poſſit occurrere; res ipſa jam demonſtrata eſt, Prop. 29.)

Supponemus etiam impræſentiarum, verticum A a (diametri AE,) verticem A propiorem, a remotiorem, Puncto E: Item punctum ε intra puncta αC incidere: rectamque OO diametro AE productæ extra Ellipſin occurrere: Si autem horum alicui contrarium contingat (quod quidem fieri poteſt,) nihilo tamen minus res ſuccedet, mutatis tantum aliquoties ſignis $+$ $-$, quod operationis progreſſum neutiquam turbabit.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) Eα $=e$, EA $=d$, A a $=t$, E a $(=t-d)=x$, EC $(=\frac{1}{2}t-d)=c$, eD $=q$, $\varepsilon\alpha=\delta$, αC $=\sigma$, $2\sigma-\delta=\xi$, εC $(=\sigma-\delta)=\gamma$.

Tum (per præced.) EC.EA::Ea.EF. hoc eſt $c.d::x.\frac{dx}{c}=$ EF. Et (propter parallelas, & ſimilia triangula) Cα.$\varepsilon\alpha$::CE.eE. hoc eſt $\sigma.\delta::c.\frac{\delta c}{\sigma}=$eE. Et C$\alpha$.C$\varepsilon$::E$\alpha$.e$\varepsilon$::EF.eG. hoc eſt, $\sigma.\gamma::e.\frac{\gamma e}{\sigma}=e\varepsilon$::$\frac{dx}{c}.\frac{\gamma dx}{\sigma c}$ $=$eG. ideoque DG $(=$eG$\pm$eD$)=\frac{\gamma dx}{\sigma c}\pm q$. Item eA $(=$eE$+$EA$)$ $=d+\frac{\delta c}{\sigma}$, & ea $=x-\frac{\delta c}{\sigma}$, ideoque DA $(=$eA$\pm$eD$)=d+\frac{\delta c}{\sigma}\pm q$, & Da $=x-\frac{\delta c}{\sigma}\mp q$. Et rectangulum DA x Da $=\frac{\sigma^2dx-\sigma^2q^2\pm\sigma^2xq}{\mp\sigma^2dq\mp 2\sigma\delta cq+\sigma\delta xc-\sigma\delta dc-\delta^2c^2}$ (vel, quia $x-d=2c$) $=\frac{\sigma^2dx-\sigma^2q^2\pm 2\sigma^2cq\mp 2\sigma\delta cq+2\sigma\delta c^2-\delta^2c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $\sigma-\delta=\gamma$, & $2\sigma-\delta=\xi$,) $=\frac{\sigma^2dx-\sigma^2q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\xi c^2}{\sigma^2}$.

Deinde, (quia, propter Ellipſin, Quadrata ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum diametri-tranſverſæ proportionalia) EA x Ea $=dx$. DA x Da ::Eαq $=e^2$. DOq $=\frac{\sigma^2dx-\sigma^2q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\xi c^2}{\sigma^2dx}e^2$.

Item (propter similia) $EF.E\alpha :: DG.DO$. hoc est $\frac{dx}{c}.e :: \frac{\gamma dx \pm \sigma cq}{\sigma c}.\frac{\gamma dx \pm \sigma cq}{\sigma dx}e = DO$. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq}{\sigma^2 d^2 x^2}e^2 = DOq = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2 dx}e^2$.

Ideoque (utrinque multiplicando per $\sigma^2 d^2 x^2$ & dividendo per e^2) $\gamma^2 d^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq = \sigma^2 d^2 x^2 - \sigma^2 dxq^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq + \delta\xi dxc^2$. Et (delendo utrinque $\pm 2\sigma\gamma dxcq$, & transponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \sigma^2 d^2 x^2 - \gamma^2 d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (quia $\sigma^2 - \gamma^2 = \delta\xi$, per 5 e 2) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \delta\xi d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (dividendo utrinque per $dx + c^2 = \frac{1}{4}t^2$) $\sigma^2 q^2 = \delta\xi dx$. hoc est $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2} = q^2$. Constat ergo propositum.

Illud Synthetice sic demonstratur, (repetitis Analyseos vestigiis.) Ab Ellipseos centro C ducatur recta $C\alpha$, atque Ellipsin in puncto α contingat recta αF, diametro cuilibet CA occurrens in F; ipsique parallela quælibet OO rectæ $C\alpha$ (intra Ellipsin) occurrens in ε, diametroque CA in G; Diametro autem CA ordinatim-applicetur αE, eique parallela εe, diametro occurrens in e. Eademque maneant symbola quæ prius $e, d, t, x, c, \delta, \sigma, \xi, \gamma$.

Sumantur autem in diametro utrinque à puncto e æquales rectæ $eD = \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atque ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in OO. Adeoque bisecantur tam DD in e (per constructionem) quam OO (propter parallelas) in ε.

Dico rectam illam quamlibet OO (à recta $C\alpha$ bisectam in ε) Ellipsi inscriptam esse; hoc est puncta OO esse in perimetro. Quod sic probatur.

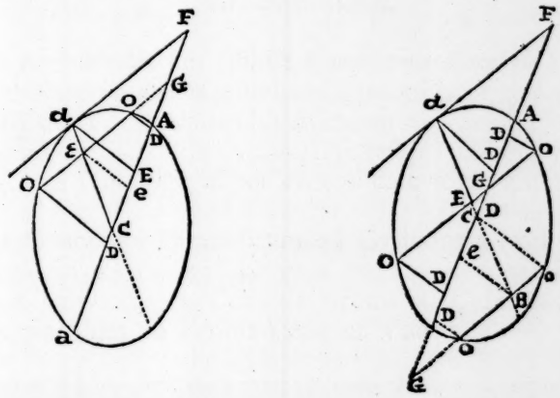
Quoniam sunt (ut in Analysi demonstravimus) $EF = \frac{dx}{c}$, $eG = \frac{\gamma dx}{\sigma c}$, $eA = d + \frac{\delta c}{\sigma}$ & $ea = x - \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit $DG\ (= eG \pm eD) = \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; & $DA = d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$, & $Da = x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atque horum rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dx + \delta\xi c^2 - \delta\xi\delta x \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$. (nempe, pro q & q^2 in analysi; substituendo $\frac{\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma}$ & $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}$.) vel (quia $\sigma^2 - \delta\xi = \gamma^2$ per 5 e 2) erit $DA \times Da = \frac{\gamma^2 dx \pm \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$.

Tum (propter similia triangula) erit $EF.E\alpha :: DG.DO$. hoc est, $\frac{dx}{c}.e :: \frac{\gamma dx \pm c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma c}.\frac{\gamma dx \pm c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma dx}e = DO$. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2 \pm 2\gamma dxc\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 d^2 x^2}e^2 = \frac{\gamma^2 dx + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 dx}e^2 = DOq$.

Sed & tantundem est quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Ellipsin) ut rectangulum $EA \times Ea$, ad rectangulum $DA \times Da$; sic ($E\alpha q$) quadratum Ordinatim-applicatæ in E, ad quadratum ordinatim-applicatæ in puncto D. hoc est $dx.\frac{\gamma^2 dx + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2} :: e^2.\frac{\gamma^2 dx + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 dx}e^2$. quod igitur est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D, estque (ut modo ostensum est) ipsum DOq.

Et

Et propterea D O, D O, (quæ, ex conſtructione, ſunt punctis D D Ordinatim-poſitæ) ſunt & Ordinatim-applicatis æqualia, adeoque puncta O O, ſunt in perimetro; rectaque O O eſt Ellipſi inſcripta: ſed & illa (eique parallelæ, eadem ratione,) à recta αC biſecatur, adeoque ordinatim-inſcripta eſt, ejuſque ſemiſſis εO diametro αC ordinatim-applicata. Quod erat demonſtrandum.



Notandum autem eſt (tam quoad Analyſin quam Syntheſin) fieri quandoque poſſe, (ubi recta O O longius abeſt à tangente αF) ut punctum G vel intra Ellipſin accidat vel etiam ultra oppoſitum verticem: Sed nihil hinc continget quod operationis progreſſum multum perturbet; tantum mutanda forſan erunt aliquoties ſigna + —, aut aliquæ ſaltem quantitates occurrent negative interpretandæ. Sed hoc non tanti eſt, ut eapropter operationem iſtis caſibus accommodandam repetam. Illud autem à quovis vel parum exercitato (ſicui id operæ pretium videbitur) facile præſtari poſſit.

Interim non erit incommodum Corollaria quædam hic ſubjungere, (qualia ſubjunximus Prop. 14. de Parabola,) puta.

Quodlibet Perimetri Ellipſeos punctum alicujus diametri verticem eſſe.

Adeoque, *In qualibet Ellipſi numero-infinitos eſſe Vertices, atque Diametros infinitas.*

Item, *Ellipſeos diametros omnes in Centro convenire.*

Et, *Rectam quamlibet per centrum tranſeuntem, Diametrum eſſe.*

Item, *Quamlibet in eodem plano rectam per aliquod intra Ellipſin punctum tranſeuntem alicui diametro Ordinatim-poſitam eſſe.*

Item, *Quæ diametro alicui in vertice occurrit, ipſius Ordinatim-applicatis parallela, Ellipſin in illo puncto contingere.*

Et, *Quæ Ellipſin contingit, rectam diametro per contactus punctum tranſeunti Ordinatim-poſitam eſſe, ejuſque Ordinatim-applicatis parallelam.*

Denique; *Ellipſin, quæ diametros conjugatas æquales atque ad angulos rectos poſitas habet, Circulum eſſe.*

Hæc autem, aliaque innumera, vel ſatis in præcedentibus demonſtrantur, vel inde ſaltem facile demonſtrari poterunt.

PROP. XXXII.

Effectiones Geometricæ.

ATque ex dictis ſatis intelligere licet Geometricam Problematum effectionem. Puta,

Ellipſeos Diametrum invenire. Quæ enim duas quaſlibet inſcriptas parallelas biſecat eſt diameter.

Ellipſeos Centrum invenire. Nempe in duarum quarumlibet diametrorum concurſu.

Ellipſeos diametrum invenire, quæ per datum punctum tranſeat. Rectam nempe, quæ datum punctum & centrum conjungit. *Data*

Data in Ellipſi diametro qualibet, diametrum conjugatam invenire. Vel generaliter,

Data inſcripta qualibet, diametrum invenire cui illa ordinatim-ponitur. Nempe rectam quæ datam inſcriptam aliamque ipſi parallelam biſecat: Vel (ſi diameter non ſit) quæ ipſius punctum medium, & Ellipſeos centrum conjungit.

Datæ Ellipſeos Axes invenire. Nempe deſcribatur Peripheria Ellipſi concentrica, ipſamque ſaltem in binis punctis ſecans: Rectam enim bina puncta proxima conjungentem quæ biſecat diameter, eſt Axium alter; reliquuſque eſt huic conjugatus.

Nota tamen; *In circulo omnes Diametros Axes eſſe, & quidem æquales; & conjugatas ipſius diametros omnes eſſe conjugatos Axes. In aliis autem Ellipſibus quibuſvis, non niſi duos Axes reperiri, eoſque Conjugatos, ſed & inæquales; & quidem conjugatarum-diametrorum omnium maxime inæquales; quare &* Diametri-Extremæ *dici ſolent: Sicut e contra,* Diametros-Medias *dicere licet, quæ ſunt conjugatæ æquales: Suntque inter extremas mediæ proportionales.*

Datæ Ellipſeos ordinatim-applicatas (poſitione) invenire, quæ datæ ipſius diametro conveniunt. Inventa nempe Diametro conjugata, quæ huic æquidiſtant rectæ ſunt diametro datæ ordinatim-poſitæ.

Ellipſin ad datam diametrum & datum latus rectum deſcribere, quæ datum habeat inclinationis angulum. Nempe inventis (magnitudine) ad quotlibet diametri puncta Ordinatim-applicatis, (per prop. 28.) applicentur ad ſua reſpective puncta in angulo imperato: Per earum enim extrema puncta, curva æquabiliter ducta, eſt Ellipſis. Vel etiam (quæ erit in praxi commoda conſtructio) Deſcripto Circulo, cujus Diameter ſit æqualis diametro quæ eſt, in Ellipſi, datæ conjugata; Atque inventis quotlibet Ordinatim-applicatis ad illam Circuli Diametrum, (hoc eſt, quotlibet Sinubus rectis:) Hæ ipſæ, cum Diametro data Ellipſeos præſcriptum angulum facientes (ſic diviſa ut dividitur illa Circuli Diameter,) ſunt ad reſpectiva Diametri Ellipſeos puncta, Ordinatim-applicatæ.

Atqui ego brevitatis cauſa (præſertim cum ex dictis facile deduci queant) harum effectionum demonſtrationes, aliaque tam Problemata quam Theoremata plurima lubens omitto.

PROP. XXXIII.

De Hyperbola abſolute conſiderata.

CUm ſit in Hyperbola (ut oſtendimus Prop. 20. inſpecto Cono) Quadratum ordinatim-applicatæ $b^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$. Licebit hic (ut Parabolam & Ellipſin ſupra) Hyperbolam eo charactere inſignitam, Cono eximere, atque abſolute & univerſaliter contemplari, acſi nullam ad Conum relationem haberet.

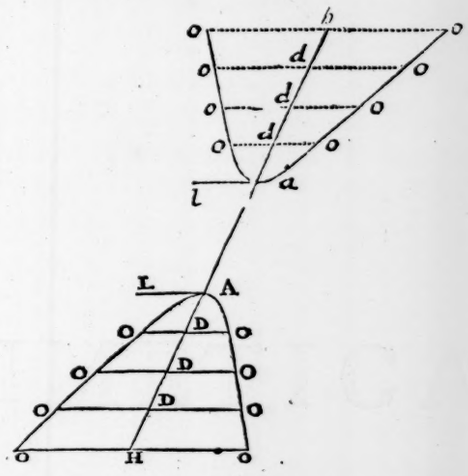
Hyperbolam igitur appello eam (ſive lineam curvam in plano deſcriptam, ſive figuram planam ejuſmodi curva terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum ſingularum quadrata, æquantur aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera ſunt interceptis-diametris, altera earum quadratis, proportionalia. (Nempe $b^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$. Sunt enim rectangula ld, ipſis d diametris-interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l; rectangula vero $\frac{l}{t} d^2$ diametrorum-interceptarum quadratis d^2 ſunt proportionalia, propter eandem ubique rationem, puta $t . l :: d^2 . \frac{l}{t} d^2$. Utrum vero rectangulorum majus ſit, non refert; ſed modo hoc, modo illud.)

Diametrum,

Diametrum, *Diametros-interceptas*, *Verticem*, *Ordinatim-poſitas*, *Ordinatim-inſcriptas*, *Ordinatim-applicatas*, atque *Punctum-applicationis*; eodem ſenſu hic accipio quo iiſdem ſupra de Parabola & Ellipſi uſus ſum.

Rectam nota *l* inſignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis diametris, binorum rectangulorum illa continet quæ ſunt ipſis diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum*.

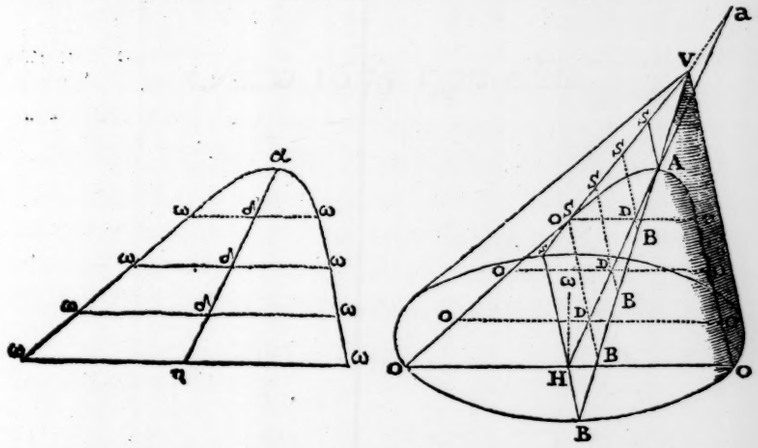
Rectam vero alteram, quæ nota *t* deſignatur, (quam quidem ſupponimus Diametri ſupra verticem continuationem, verſus convexam curvæ partem ductam; quæque ita ſe habet ad Latus-rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad binorum Rectangulorum illa quæ quadratis illis ſunt proportionalia:) *Diametrum tranſverſam* appello, (ut quæ Oppoſitis Oppoſitarum Hyperbolarum vertices conjungit, ut poſt dicetur;) ejuſque punctum medium, (quod quidem extra Hyperbolam jacet, ſed inter Hyperbolas Oppoſitas, ut poſt patebit) appello *Centrum*.



Hyperbolam à nobis definitam eandem eſſe cum illa quam definit Apollonius, ſimili fere progreſſu oſtendemus, atque ſupra de Parabola & Ellipſi uſi ſumus prop. 21, & 26.

Hyperbolæ nempe, (qualem definit Apollonius Conic. lib. 1. prop. 12.) Sectione coni factæ, univerſaliter convenire definitionem à nobis propoſitam; jam probatum eſt prop. 17, & 20.

Contra vero, Hyperbolam à nobis deſcriptam ita Cono aptari poſſe, ut eas habeat conditiones quas poſtulat Hyperbola Apolloniana; ſic probatur;



Exponatur Hyperbola quælibet à nobis definita $\alpha\omega$, cujus Ordinatim-applicatarum quadrata ſint $b^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$. Dico hanc Cono ita ut poſtulatur aptari poſſe.

Ducatur recta a A = *t*, & (in ejuſdem continuatione) AH = *d*: Atque ad rectam AH ponantur (ad oppoſitas partes) duæ rectæ invicem parallelæ; AS = *l*, & HB = *d*, (ſaltem tantæ ſint longitudinis AS, HB, ut ſit AS × HB = *ld*;) Sitque angulus SAH = AHB quilibet acutus, (modo major ſit complemento anguli inclinationis in Hyperbola expoſita.) Juncta vero a S producatur ut cum recta BH producta coeat in S; & juncta BA producatur ut occurrat ipſi a S in V; ut compleatur triangulum VBS; quod eſto Triangulum-per-axem in Cono conſtruendo.

Deinde ſuper rectis AH, BHS, duo plana ita erigantur, ut communis eorum ſectio HO, faciat ad rectam HB angulos rectos, ad rectam vero AH angulum AHO æqualem angulo inclinationis in Hyperbola propoſita.

Hoc enim omnino fieri poſſe conſtat: Si enim recta quælibet HO perpendiculariter inſiſtens plano Trianguli VBS (adeoque angulos faciens utroſque OHA, OHB, rectos) circumvolvatur circa rectam BHS ut axem (invariato angulo OHB,) donec ad ſitum plani perveniat in H*ω*, faciatque in plano trianguli angulum *ω*HA acutum, qui minor erit angulo inclinationis in Hyperbola, (eſt enim, ex conſtructione, angulus AHB iſtius inclinationis complemento major;) neceſſe eſt ut, in tranſitu, aliquando fecerit angulum inclinationis-angulo æqualem; (factus enim eſt tranſitus ab angulo recto, adeoque debito majori, vel ſaltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoque tunc fuerit in ſitu debito ut ſit duorum planorum prout requiritur concurrentium communis ſectio.

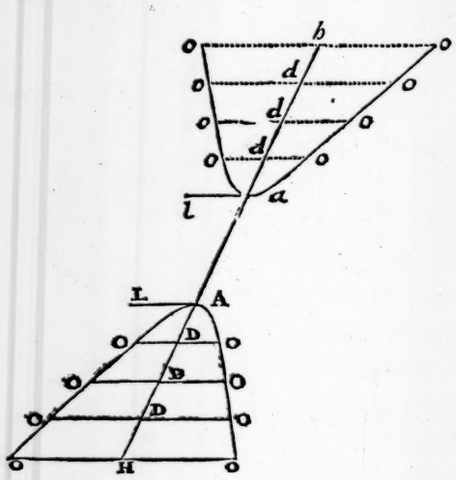
In plano autem BOS ſic poſito ſcribi intelligatur circulus, diametrum habens BHS, qui ſit baſis coni; aliique huic parallelli diametros habentes BDS, conum complentes, (per prop. 5.) qui plano AHO ſectus exhibebit Hyperbolam (per prop. 7.) cujus ordinatim-applicatæ omnes (quarum HO eſt una) ad diametrum AH angulum facient æqualem angulo inclinationis ordinatim-applicatarum in Hyperbola expoſita ad diametrum ſuam; ſed & eiſdem ſunt reſpective æquales (ut patebit ex demonſtratione prop. 17, & 20.) ideoque ſingulæ ſingulis congruunt, adeoque & Hyperbola expoſita Hyperbolæ ſectione coni factæ. Quod erat faciendum. Adeoque Hyperbola à nobis definita eadem eſt cum ea quam definit Apollonius. Quod erat demonſtrandum.

Sed & eadem opera docuimus *Conum conſtruere eique datam Hyperbolam ita aptare, ut data ipſius diameter ſit diameter-ex-generatione*: Atque etiam Theorematice verum eſſe, *Hyperbolæ diametrum quamlibet fieri poſſe, in aliquo ſaltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXXIV.

De Diametro tranſverſa, & Hyperbolis oppoſitis.

SI ad eandem diametrum duæ Hyperbolæ oppoſito ſitu ponantur, communem habentes diametrum-tranſverſam, idemque latus rectum; ſintque ad illam diametrum ordinatim-applicatæ unius, ordinatim-applicatis alterius parallelæ: dicentur illæ *Hyperbolæ-oppoſitæ*; earumque vertices, eandem diametrum-tranſverſam terminantes, *Vertices Oppoſiti*: Punctumque inter oppoſitos vertices medium, eſt utrique Hyperbolæ centrum commune.



Hæ autem Hyperbolæ Oppoſitæ, reſpondent Hyperbolis Oppoſitorum conorum eodem plano ſectorum.

PROP.

PROP. XXXV.

Corollaria.

Patet ex dictis; Cum ſit $b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$: Ex horum in Hyperbola quatuor, *Diametro-tranſverſâ*, *Diametro-interceptâ*, *Latere-Recto*, & *Ordinatim-applicatâ*; Datis tribus quibuſvis, etiam reliquum (magnitudine) dari. Nempe (diſponendo & reſolvendo æquationes) erit,

In Hyperbola,
- Ordinatim-applicata, $b = \sqrt{:ld + \frac{l}{t}d^2 :} = \sqrt{\frac{td+d^2}{t}}\,l.$
- Ejuſque quadratum, $b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2 = \frac{td+d^2}{t}\,l.$
- Latus rectum, $l = \frac{b^2}{td+d^2}\,t.$
- Diameter-tranſverſa, $t = \frac{d^2 l}{b^2 - dl}.$
- Diameter-intercepta, $d = \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}b^2 :} - \frac{1}{2}t.$

Adeoque; Diametrorum tranſverſæ & interceptæ aggregatum, $t+d = \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}b^2 :} + \frac{1}{2}t.$

Diſtantia puncti applicationis à Centro, $c = \sqrt{:\frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}b^2}.$

Patet etiam; Ut Diameter-tranſverſa, ad interceptam; ſic eſſe binorum Rectangulorum ea quæ diametris interceptis proportionalia, ad Rectangula earum quadratis proportionalia. Nempe, $t.d :: ld.\frac{l}{t}d^2.$

Item; Ut Diameter-tranſverſa ad Latus-rectum; ita quadrata diametrorum-interceptarum ad Rectangula quadratis illis proportionalia. Nempe $t.l :: d^2.\frac{l}{t}d^2.$

Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad interceptam; ita utriuſque aggregatum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale Quadrato Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.d :: t+d.\frac{t+d}{t}d = \frac{td+d^2}{t}$. Et $\frac{td+d^2}{t}\,l = b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2.$

Adeoque; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ſic Rectangulum ſub Diametro-intercepta & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ, ad quadratum Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.l :: td+d^2.\frac{td+d^2}{t}\,l = b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2.$

Vel, Ut Rectangulum Diametro intercepta, & aggregato Diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſum, ad quadratum Ordinatim-applicatæ: ſic eſſe Diametrum-tranſverſam ad Latus-Rectum. (Unde Hyperbolæ Latus-Rectum commode reperitur.) Nempe, $td+d^2.b^2 :: t.l = \frac{b^2}{td+d^2}\,t.$

Inde ſequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum Rectangulis Diametro intercepta & aggregato diametrorum-tranſverſæ & interceptæ comprehenſis, eſſe proportionalia. Sunt enim ubique ut t ad l.

Adeoque, Prout longius à vertice removetur punctum-applicationis, ita ſemper augeri Ordinatim-applicatas. Nempe quia ſic tam d quam $t+d$ (diameter intercepta, & aggregatum tranſverſæ & interceptæ) augentur, adeoque & eorum rectangula, & propterea quadrata Ordinatim-applicatarum his rectangulis proportionalia, adeoque & ipſæ Ordinatim-applicatæ.

Et propterea; Hyperbolam ex earum linearum numero eſſe, quæ figuram non claudunt; Cum Ordinatim-applicatæ (à vertice inchoando) perpetuo creſcant, adeoque & creſcat crurum divaricatio, quæ idcirco nunquam ſunt deinceps coitura.

Ideoque & Hyperbolæ diametrum quamlibet non niſi in unico Verticis puncto eidem Hyperbolæ occurrere; Quoniam nempe creſcentibus continuo Ordinatim-applicatis Hyperbolæ curva à diametro magis continuo reſiliat, nunquam ideo deinceps coitura. Vertices enim Oppoſiti, quanquam in eadem diametro, non tamen ſunt in eadem Hyperbola, ſed in Oppoſitis.

PROP. XXXVI.

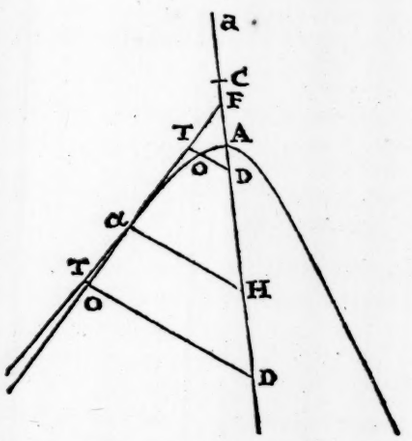
De recta Hyperbolam contingente.

RECta Hyperbolam contingens diametro productæ inter verticem & centrum occurret. Punctum vero concurſus ſic inquiremus.

Supponatur tangens αF occurrens, in F, diametro HA productæ, eique ordinatim-applicata αH. Supponatur etiam ubivis eidem diametro Ordinatim-applicata DO, tangenti Occurrens in T. Sitque A vertex, C centrum.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $Aa = t$, (ideoque $Ha = t+d$, $HC = \frac{1}{2}t+d$,) $HF = f$, $HD = a$, (ideoque $DF = f \pm a$, $DA = d \pm a$, $Da = t+d \pm a$.)

Tum (quia, propter Hyperbolam, quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis AHa proportionalia, ut modo oſtenſum eſt) erit $HA \times Ha . DA \times Da :: H\alpha q . DOq$. hoc eſt, $td+d^2 . td+d^2+a^2 \pm ta \pm 2da :: b^2 . \frac{td+d^2+a^2 \pm ta \pm 2da}{td+d^2} b^2$.



Et (propter ſimilia triangula) $HF . H\alpha :: DF . DT$. hoc eſt, $f . b :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} b = DT$. ejuſque quadratum $\frac{f^2+a^2 \pm 2fa}{f^2} b^2 = DTq$.

Tum

Tum (propter Tangentem) $DTq \geqq DOq$ (nempe æqualia, ſi DH coincidant; vel, ſi ſecus, illud majus;) hoc eſt, $\frac{f^2+a^2\pm 2fa}{f^2}b^2 \geqq \frac{td+d^2+a^2\pm ta\pm 2da}{td+d^2}b^2$. & (utrinque multiplicando per $\frac{td+d^2}{b^2}f^2$,) erit $f^2td+f^2d^2+tda^2+d^2a^2\pm 2ftda\pm 2fd^2a \geqq f^2td+f^2d^2+f^2a^2 \pm f^2ta\pm 2f^2da$. Et (deletis utrinque $f^2td+f^2d^2$,) erit $tda^2+d^2a^2\pm 2ftda \pm 2fd^2a \geqq f^2a^2\pm f^2ta\pm 2f^2da$. Et (dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda\pm d^2a +2ftd+2fd^2 \geqq \pm f^2a+f^2t+2f^2d$.

Denique, ponendo D H idem eſſe punctum, (ut evaneſcat quantitas a, adeoque & ipſius multiplicia tda, d^2a, f^2a) erit $2ftd+2fd^2=f^2t+2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td+d^2=\frac{1}{2}ft+fd$. (hoc eſt, $\square AHa=\square CHF$;) vel $\frac{1}{2}t+d.t+d::d.f=\frac{t+d}{\frac{1}{2}t+d}d$. Hoc eſt, HC.Ha::HA.HF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema ſic inventum, hoc eſt; Si ſit Ordinatim-applicata in Hyperbola H α, atque ab applicationis puncto H continuetur diameter HA ad F; ſitque ut diſtantia puncti-applicationis à Centro HC, ad aggregatum diametrorum tranſverſæ & interceptæ Ha; ſic diameter intercepta HA, ad eandem continuatam HF: recta αF juncta Hyperbolam in puncto α continget.

Vel ſic; ſi recta αF Hyperbolam contingat in termino ordinatim-applicatæ α; erit, ut diſtantia puncti applicationis H à centro HC, ad ejuſdem diſtantiam à vertice remotiore Ha; ſic diſtantia à vertice propiori HA, ad diſtantiam à puncto concurſus tangentis & diametri HF.

Demonſtratio, ſi ſit opus, inſtitui poterit repetitis Analyſeos veſtigiis.

Sed & patet, quod, cum ſit HC.Ha::HA.HF. hoc eſt HC.HC+Ca:: HA.HA+AF. erit (dividendo) HC.Ca=CA::HA.AF. Adeoque ſi ſumatur (in diametro continuata) $AF=\frac{HA\times AC}{HC}$, habetur punctum F. Sed etiam, cum ſit HC major quam CA, (pars toto) erit propterea HA major quam AF; hoc eſt, *Diameter intercepta, major quam ipſius continuatio ad concurſum Tangentis*; (contra quam in Ellipſi ubi minor eſt, & in Parabola, ubi æqualis; ut oſtendimus prop. 23, & 30.)

Item, (ponendo $CA=\frac{1}{2}t=s$, & $CH=CA+AH=s+d=c$, ideoque $HA=c-s$, & $Ha=c+s$) erit $HF=\frac{td+d^2}{\frac{1}{2}t+d}=\frac{c^2-s^2}{c}=f$, & $CF=c-f=\frac{s^2}{c}$. Hoc eſt CH.CA::CA.CF.

Atque hinc docemur, *Rectam αF ducere quæ Hyperbolam in dato puncto α contingat.* Sumpta nempe $CF=\frac{CAq}{CH}$, & quidem à C verſus A, ſi contactus requiratur ad Hyperbolam Aα, vel (eadem ratione) à C verſus a, ſi ad Hyperbolam oppoſitam.

Atque hinc ſequitur; *Rectam contingentem Hyperbolæ diametro citra centrum occurrere; puta intra centrum & verticem*: (nam quod ultra verticem ſit, patet ex prædictis, cum ſit HC.Ha::HA.HF. eſt enim HC minor quam Ha, ideoque & HA minor quam HF. Quod autem ſit citra centrum, patet etiam, quia, ut dictum eſt, HC.CA::HA.AF, adeoque HC.HA::AC.AF. at HC major eſt quam HA, ergo AC major quam AF.)

Item, *A quovis diametri puncto F, inter Hyperbolæ verticem & centrum ſumpto, duci poſſe rectam Fα, quæ Hyperbolam contingat.* Quo autem punctum F puncto C propius ſit, eo remotius abeſt & punctum contactus α, & punctum-applicationis huic conveniens H. Quia ut CF.CA::CA.CH.

Adeoque si supponamus punctum F ipsi C coincidere, ut distantia CF = o nulla sit; erit propterea CH infinita; Hoc est, punctum H, (adeoque & punctum α) supponendum est infinite distare, adeoque vel nusquam vel non nisi in Hyperbola actu infinita reperiri.

Cumque punctum C indifferenter se habeat ad utramque Hyperbolarum oppositarum, ea quæ supponitur Contingens per centrum ducenda, versus utramvis partem producatur, infinita erit, adeoque Hyperbolarum illarum neutri occurret. Quæ propterea *Asymptota*, dici solet, ut post dicetur.

Alia quæ adjungi possent corollaria lubens omitto.

PROP. XXXVII.

De Hyperbolæ Diametris.

SI per Hyperbolæ Centrum C, punctumque in curva quodlibet α, transeat Cα recta; erit illa ejusdem Hyperbolæ diameter, verticem habens α, atque ordinatim-applicatas rectæ αF Hyperbolam in α contingenti parallelas.

Libet hanc propositionem (ut prius 24, & 31.) Analytice examinare, deinde & Synthetice demonstrare.

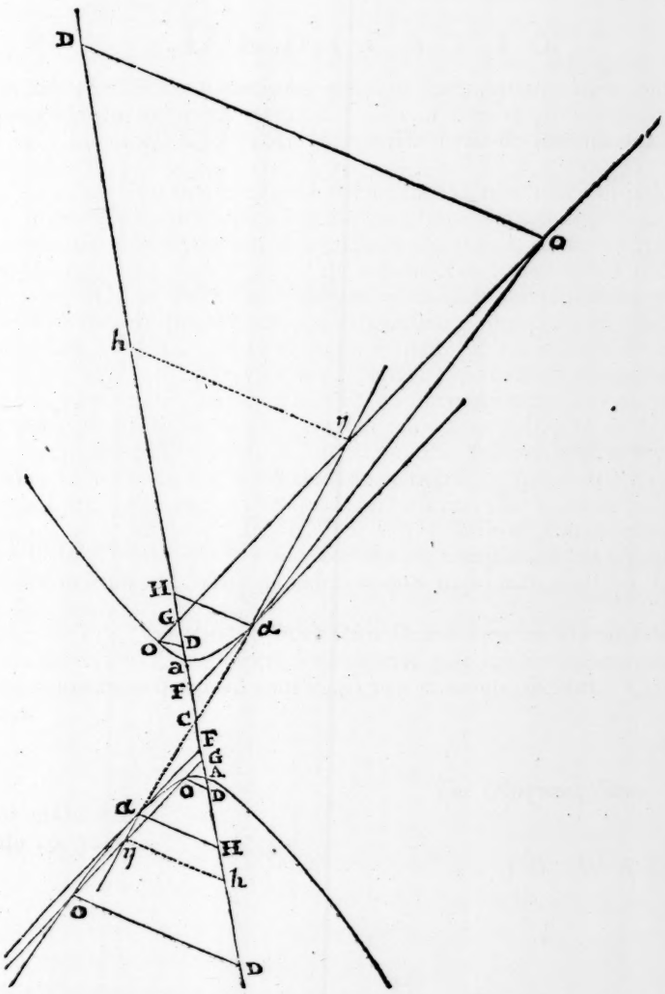
Supponamus igitur rem esse ut perhibetur, adeoque inscriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam à recta Cα (per centrum & contactum transeunte) bisectam in ν. Sintque rectæ OD, OD, αH, diametro HA ordinatim-applicatæ, & propterea invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur νh eidem diametro in h occurrens; quæ propterea (propter parallelas) bisecabit, (ut OO in ν, sic) DD in h. Denique recta OO, (producta si opus) diametro HA occurrat in G: Occursuram enim omnino esse patet, quoniam αF ipsi parallela eidem diametro occurrit, per præced.

Supponemus etiam impræsentiarum, occursus punctum G contingere supra verticem A, extra Hyperbolam. Si autem secus contingat, (uti fieri potest, si inscripta OO remotius à tangente sumatur, ita ut diametrum transeat,) non tamen series operationis variabitur aliter quam vel mutanda aliquando signa +, −, vel quantitatem aliquando negative interpretandam fore, adeoque ex parte suppositioni contraria, intelligendam.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $Aa = t$, $Ha\,(=t+d) = z$, $HC\,(=\frac{1}{2}t+d) = c$, $hD = q$, $\alpha\nu = \delta$, $\alpha C = \sigma$, $\nu C\,(=\sigma+\delta) = \gamma$, $2\sigma+\delta = \zeta$.

Tum (per præced.) HC.Ha::HA.HF. hoc est $c.z :: d.\frac{dz}{c} = HF$. Et (propter parallelas, & similia triangula) Cα.αν::CH.Hh. hoc est $\sigma.\delta :: c.\frac{\delta c}{\sigma} = Hh$. Et Cα.Cν::Hα.hν::HF.hG. hoc est, $\sigma.\gamma :: b.\frac{\gamma b}{\sigma} = h\nu :: \frac{dz}{c}.\frac{\gamma dz}{\sigma c} = hG$. ideoque $DG\,(=hG \pm hD) = \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm q$. Item $hA\,(=AH+Hh) = d+\frac{\delta c}{\sigma}$, & $ha\,(=t+d+\frac{\delta c}{\sigma}) = z+\frac{\delta c}{\sigma}$. ideoque $DA = d+\frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, & $Da = z+\frac{\delta c}{\sigma} \pm q$. Et rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 zq \pm \sigma^2 dq \pm 2\sigma\delta cq + \sigma\delta zc + \sigma\delta dc + \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $z + d = 2c$) $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma^2 cq \pm 2\sigma\delta cq + 2\sigma\delta c^2 + \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $\sigma+\delta = \gamma$, & $2\sigma+\delta = \zeta$,) $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2} = DA \times Da$.

Deinde



Deinde, (quia, propter Hyperbolam, Quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis diametro intercepta & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſis proportionalia) erit $HA \times Ha = dz$. $DA \times Da :: H\alpha q = b^2$. $DOq = \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Item (propter ſimilia Triangula) $HF . H\alpha :: DG . DO$. hoc eſt $\frac{dz}{c} . b ::$ $\frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma c} . \frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma dz} b = DO$. ejuſque quadratum. $\frac{\gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq}{\sigma^2 d^2 z^2} b^2$ $= DOq = \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Ideoque (utrinque multiplicando per $\sigma^2 d^2 z^2$ & dividendo per b^2,) $\gamma^2 d^2 z^2$ $+ \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq = \sigma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 dzq^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq + \delta\zeta dzc^2$. Et (delendo utrinque $\pm 2\sigma\gamma dzcq$, atque tranſponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 - \sigma^2 dzq^2 = \delta\zeta dzc^2$ $- \gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 d^2 z^2$. Et (quia $\gamma^2 - \sigma^2 = \delta\zeta$, per 6 e 2,) $\sigma^2 c^2 q^2 - \sigma^2 dzq^2$ $= \delta\zeta dzc^2 + \delta\zeta d^2 z^2$. Et (dividendo utrinque per $c^2 - dz = \frac{1}{4}t^2$) erit $\sigma^2 q^2$ $= \delta\zeta dz$. hoc eſt $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2} = q^2$. Conſtat ergo propoſitum.

Illud

Illud Synthetice ſic demonſtratur, (repetitis Analyſeos veſtigiis.) A centro C ducatur ad Hyperbolam Cα. Atque in puncto α Hyperbolam contingat αF, diametro cuilibet HA occurrens in F; ipſique parallela quælibet OO, eidem diametro HA occurrens in G, & rectæ Cα (productæ) in ν. Diametro autem HA ordinatim-applicetur αH, eique parallela νh, eidem diametro occurrat in h. Eademque quæ prius maneant ſymbola $b, d, t, z, c, \delta, \sigma, \gamma, \zeta$.

Sumantur autem in diametro utrinque à puncto h æquales rectæ $hD = \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; atque ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in OO. Adeoque biſecantur tam DD in h (per conſtructionem,) quam OO (propter parallelas) in ν.

Dico rectam OO (à recta C$\alpha\nu$ biſectam in ν) Hyperbolæ inſcriptam eſſe; hoc eſt puncta OO eſſe in ipſa Hyperbolæ curva. Quod ſic probatur;

Quoniam ſunt (ut in Analyſi demonſtravimus) $HF = \frac{dz}{c}$, $hG = \frac{\gamma dz}{\sigma c}$, $hA = d + \frac{\delta c}{\sigma}$, & $ha = z + \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit $DG\ (=hG \pm hD) = \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; item $DA\ (=hA \pm hD) = d + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, $Da = z + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, & rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dz + \delta\zeta c^2 + \delta\zeta dz \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$. (nempe pro q^2 & q in analyſi, ſubſtituendo in ſyntheſi $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma}$ & $\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$.) vel (quia $\sigma^2 + \delta\zeta = \gamma^2$ per 6 e 2) $\frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2} = DA \times Da$.

Tum (propter ſimilia triangula) erit $HF.H\alpha :: DG.DO$. hoc eſt, $\frac{dz}{c}.b :: \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}} . \frac{\gamma dz \pm c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma dz} b = DO$. ejuſque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 z^2 + \delta\zeta dz c^2 \pm 2\gamma dzc\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 d^2 z^2} b^2 = DOq = \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} b^2$.

Sed & tantundem eſt quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Hyperbolam) ut rectangulum $HA \times Ha$, ad rectangulum $DA \times Da$; ſic $H\alpha q$ quadratum ordinatim-applicatæ puncto H, ad quartum, quod erit quadratum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc eſt $dz . \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2} :: b^2 . \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} b^2$. quod æquale eſt ipſi DOq, ut modo oſtendimus.

Et propterea DO, DO, (quæ, ex conſtructione, ſunt punctis DD ordinatim poſitæ,) ſunt & ordinatim-applicatis æquales, adeoque puncta OO ſunt in Hyperbolæ curva, rectaque OO eſt Hyperbolæ inſcripta. Sed & illa (eique parallelæ, eadem ratione,) à recta C$\alpha\nu$ biſecatur; adeoque ordinatim-inſcripta eſt, ejuſque ſemiſſis νO diametro C$\alpha\nu$ Ordinatim-applicata. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem eſt (quod & prius monui) fieri quidem poſſe ut inſcripta OO diametrum tranſeat in G intra hyperbolam. Quod tamen operationis progreſſum non aliter immutabit quam variando nonnunquam ſigna +, —, aut quantitatem negative interpretandam exhibendo. Ut experienti patebit.

Recta autem illa αC quam Hyperbolæ Diametrum eſſe oſtendimus, iiſdem oppoſitis Hyperbolis convenit quibus & AC; ipſaque αC duplicata erit earundem Diameter-tranſverſa. Sumatur enim in oppoſita Hyperbola ad = AH, hoc eſt Cd = CH, & ordinatim-applicetur (ſitu contrario) do, quæ erit ipſi Hα æqualis & parallela (propter æquales diametros interceptas, eandam tranſverſam, idem latus rectum, atque ſitum parallelum, per prop. 34.) adeoque anguli alterni æquales, nempe Cdo = CHα; & propterea (juncta oC) triangula CHα, Cdo, ſimilia & æqualia; ideoque (propter angulos κατὰ κορυφὴν ad C æquales) erit αCo

una,

una recta; atque illa quidem in C bisecta; quæ igitur cum ad Oppositas Hyperbolas terminetur, erit illarum transversa-diameter, ejusque medium punctum C earundem centrum.

Unde etiam liquet, *Hyperbolæ Diametros omnes in eodem communi centro convenire.*

Sed & ea omnia Corollaria (ultimo excepto) quæ ad prop. 31. de Ellipsi memorantur; iisdem fere verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Ut non sit opus ea repetere.

PROP. XXXVIII.

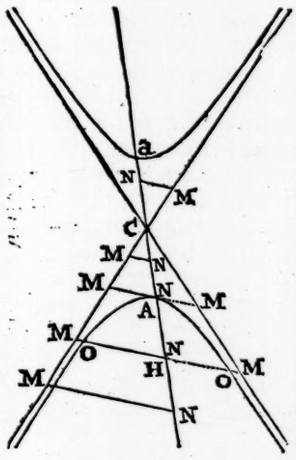
Effectiones Geometricæ.

PRoblematum effectiones quæ de Ellipsi memorantur prop. 32. eædem fere totidem verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Nec opus est ut repetantur.

PROP. XXXIX.

De Hyperbolæ Asymptotis.

SI sumatur in Hyperbolæ diametro (extra centrum C) punctum quodvis N, eique ordinatim-ponatur NM; fiatque $t.l::CNq.NMq$. (hoc est, ut diameter transversa, ad latus rectum; sic quadratum distantiæ punctorum CN, ad quadratum rectæ NM,) juncta CM erit illius Hyperbolæ *Asymptota*: Nempe quæ (continuata) Hyperbolæ (quantumvis productæ) nunquam occurret, ita tamen continuo propius accedet ut distantia tandem evadat quavis assignata minor.



Nam 1°. Sumpto (intra Hyperbolam AO) diametri puncto quovis H, cui ordinatim applicetur HO, rectæ CM occurrens in M. Erit (propter similia triangula) CN. NM :: CH. HM. Adeoque $CNq.NMq :: (t.l::) CHq = c^2$. $HMq = \frac{l}{t}c^2 = \frac{c^2}{t}l$. Sed (propter Hyperbolam) erit $HOq = \frac{c^2 - s^2}{t}l$ (ponendo nempe $s = \frac{1}{2}t$, ideoque $d = c - s$, & $d + t = c + s$.) Ergo HOq minus est quam HMq, & recta HO minor quam recta HM, & propterea M erit extra Hyperbolam. Recta igitur CMM (quantumvis producta) Hyperbolæ nunquam occurrit. Quod erat primo demonstrandum.

2°. Cum sit $OM(=HM-HO) = \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$; sintque s, l, t, quantitates stabiles, at c variabilis, & quidem tanto major quanto remotius abest punctum H à centro C: Differentia rectarum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}, \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$, hoc est, rectarum HM, HO, perpetuo minuetur prout c, hoc est, CH, augetur. Nam in majoribus quadratis æquale augmentum (retenta figuræ specie) minorem postulat lateris productionem quam in quadratis minoribus, (ut notum est.) Ideoque prout longius abest à centro punctum H, adeoque c^2 majus est, (reliquis interim immutatis) ita semper minuetur OM, differentia laterum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}, \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$. Et con-

ſequenter diſtantia rectæ CMM ab Hyperbolæ curva AO, continue decreſcit. Quod erat ſecundo demonſtrandum.

3°. Sit aſſignata diſtantia quælibet quantumvis exigua, puta $2a$; Dico Hyperbolam AO rectamque CM eo produci poſſe, ut earum diſtantia minor evadat quam eſt aſſignata $2a$. Sumatur enim linea recta aliquanto minor, puta a, cui æqualem eſſe volumus rectam OM; & quærendum ſit punctum H (cui ordinatim-ponenda ſit HOM) ſeu longitudo rectæ CH. Quoniam igitur ſupponimus $a = OM = \sqrt{\frac{c^2}{t}}\,l - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}}\,l$; erit (tranſponendo) $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}}\,l = \sqrt{\frac{c^2}{t}}\,l - a$; & (utrinque quadrando) $\frac{c^2 - s^2}{t}\,l = \frac{c^2}{t}\,l + a^2 - 2a\sqrt{\frac{c^2}{t}}\,l$. Et (tranſponendo, atque reducendo) $2ac\sqrt{\frac{l}{t}} = a^2 + \frac{s^2}{t}\,l$. Et (quadrando) $\frac{4a^2c^2l}{t} = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{t^2}$. Adeoque (dividendo per $\frac{4a^2l}{t}$) erit $c^2 = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{4a^2lt}$. Habetur ergo quantitas c^2, (cujus radix $c = CH$,) adeoque punctum H, cui ſi Ordinatim-ponatur HOM, erit $OM = a$, (quod, ſi opus ſit, ſynthetice demonſtrari poſſit, repetitis Analyſeos veſtigiis,) adeoque minor quam diſtantia aſſignata $2a$. Ideoque diſtantia continuatæ rectæ CMM, ab Hyperbola continuata AO, tandem minor evadet diſtantia quavis aſſignata. Quod erat tertio demonſtrandum. Adeoque conſtat propoſitum.

Poſſet & hic oſtendi, *Ad eandem Hyperbolam, nonniſi duas Aſymptotas (utrinque unam) duci poſſe; ſe mutuo in centro ſecantes.* Alia enim quæcunque in eodem plano recta, vel Hyperbolam ſecabit, vel ad requiſitam appropinquationem non accedet. Ut facile eſt demonſtratu.

Item, *Aſymptotas unius Hyperbolæ eſſe etiam Hyperbolæ oppoſitæ Aſymptotas.* Quod ſimili fere progreſſu demonſtrabitur ei quo uſus ſum ad Corollarium prop. 37.

Neque illis tantum binis Hyperbolis Oppoſitis, ſed & binis aliis hiſce conjugatis (de quibus poſt dicetur) eædem conveniunt Aſymptotæ, & quidem ſolæ.

Patet item, quod (*ſi ab eodem puncto H, ordinatim-applicatæ HO, HO, utrinque continuentur ut Aſymptotis occurrant in M,*) *erunt, OM, OM,* (*utrinque ſumptæ*) *æquales.* Cum enim tam HM, HM, $(\sqrt{\frac{c^2}{t}}\,l,)$ quam HO, HO, $(\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}}\,l)$ erunt & OM, OM, (HM—HO) æquales.

Item; *Si* (*ad eandem quamvis Diametrum*) *Ordinatim ponantur rectæ quotlibet MOHM,* (*Aſymptotis occurrentes in M Hyperbolæ in O, diametro in H,*) *omnia rectangula MOM* (*ſegmentis comprehenſa*) *vel etiam rectangula OMO* (*ſumptis O, O, in utroque crure Hyperbolæ*) *erunt tam inter ſe, quam quadrato rectæ AM* (*ab Aſymptota ad verticem ordinatim-poſitæ*) *æqualia.* Nam ubicunque in diametro (intra Hyperbolam) ſumatur punctum applicationis H; rectangulum MOM, vel OMO, (hoc eſt, HM—HO, in HM + HO; hoc eſt, $\sqrt{\frac{c^2}{t}}\,l - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}}\,l$, in $\sqrt{\frac{c^2}{t}}\,l + \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}}\,l$;) ſemper erit $\frac{s^2}{t}\,l$ (ut multiplicando patebit;) hoc eſt AMq; eſt enim (ex hypotheſi) $t.l :: CNq.NMq :: CAq\,(=s^2).AMq = \frac{s^2}{t}\,l$.

Aſymptota vero, quæ jam dicitur, eadem eſt quæ ad prop. 36. ſupponitur *Tangens infinita*, à Centro ducenda, quæ non niſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) Hyperbolam continget.

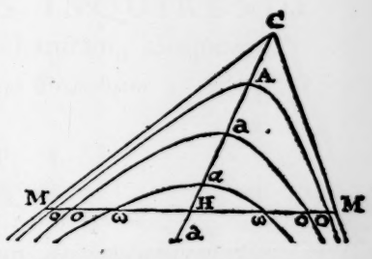
Alia de Aſymptotis & Theoremata & Problemata quæ ex jam dictis deduci poſſent prætereo.

PROP.

PROP. XL.

De Hyperbolis Aſymptotis.

HYperbolæ quotlibet ad eandem diametrum (verſus eaſdem partes) ita accommodatæ, ut centrum idem habeant, atque eaſdem (ad communem diametrum) Ordinatim-poſitas, vertices autem (in eadem diametro) varios quoſlibet, puta A, a, α, (adeoque & varias diametros-tranſverſas;) Si eadem ſit in omnibus ratio diametri-tranſverſæ ad ſuum reſpective latus-rectum, (puta ratio t ad l in omnibus eadem,) eaſdem habebunt Aſymptotas-rectas, (puta CM, per præced.) Eruntque ipſæ ad invicem *Hyperbolæ Aſymptotæ*: Nempe



ita ad invicem appropinquabunt, ut earum diſtantia tandem evadat qualibet aſſignata minor, (quoniam earum quælibet ita prope ad rectas Aſymptotas accedit;) nec tamen invicem occurrent, (quoniam Ordinatim-applicatarum quadrata $b^2 = \frac{c^2 - s^2}{t} l$ minora erunt, cæteris paribus, ubi s major eſt; adeoque HO major quam Ho, atque hæc major quam Hω.)

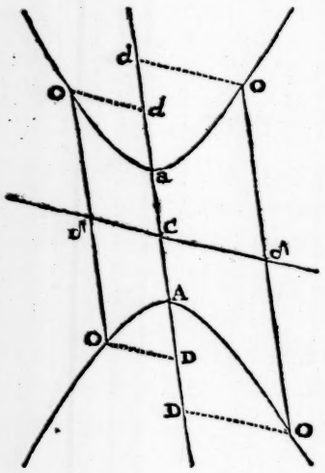
Si vero non ſit (in variis ejuſmodi Hyperbolis) ratio $\frac{l}{t}$ eadem: Nec eaſdem habebunt Aſymptotas rectas; neque erunt ipſæ Aſymptotæ; ſed vel ſe mutuo ſecabunt, (nempe ſi Hyperbola quæ majorem habet diametrum-tranſverſam minorem habeat rationem t ad l;) vel (ſi majorem habeat rationem t ad l) debitam appropinquationem non attingent. Prout ex præmiſſis non eſt difficile demonſtratu.

Illis autem, quas diximus, *Hyperbolis Aſymptotis*, reſpondent Hyperbolæ totidem ejuſdem Coni planis parallelis ſecti; Quæ quidem quo propius ad verticem Coni accedunt, eo ad Triangulum accedunt propius; donec tandem (in ipſo coni vertice,) evaneſcente diametro tranſverſa, Hyperbola in Triangulum (vel, ſi placet, Trianguli crura) degeneret; cujus quidem Trianguli crura repræſentant binæ Aſymptotæ rectæ.

PROP. XLI.

De Hyperbolæ Diametris Conjugatis.

SI oppoſitarum Hyperbolarum diametro-tranſverſæ Aa Ordinatim-ponatur recta per centrum δCδ, dicetur illa *Diameter-conjugata*: quæ quidem rectas omnes diametro Aa parallelas, oppoſitis ſectionibus terminatas, puta Oo, bifariam ſecabit; quæ propterea diametro $\delta\delta$ ordinatim-poſitæ ſunt, quas *Ordinatim-tranſcriptas* dicere licet.



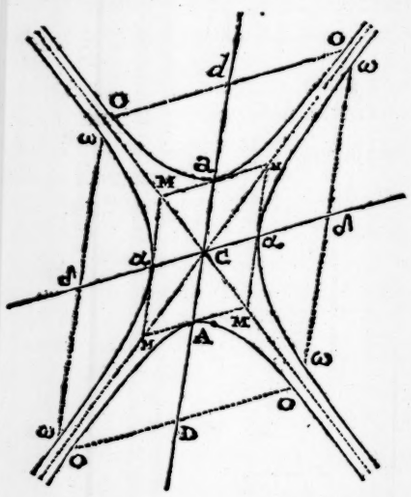
Nam ſi ordinatim-applicentur OD, od, diametro Aa (verſus eaſdem partes;) erunt illæ (parallelæ parallelis terminatæ, ideoque) æquales; & propterea CD, Cd, etiam æquales erunt (propter communem oppoſitarum Hyperbolarum diametrum-tranſverſam, & æqualia latera-recta;) ideoque & δO, δo, (propter parallelas) æquales erunt.

Sunt autem rectæ δO, hoc eſt CD, ea quantitas quam ſupra diximus $c = s + d = \frac{1}{2}t + d$.

PROP. XLII.

De Conjugatis Hyperbolis.

SI ſit Hyperbolarum-Oppoſitarum tranſverſa-diameter Aa = t, (& Latus rectum l;) atque in diametro conjugata δδ, ſumantur à centro utrinque æquales Cα, Cα; ſitque tota αCα = $\tau = \sqrt{tl}$ (ut nempe ſit $t . l :: t^2 . \tau^2$.) dicetur αCα *tranſverſa-diameter conjugata*: Eaque ſi deſcribantur Oppoſitæ Hyperbolæ, vertices habentes α, α, & Ordinatim-applicatas δω diametro Aa parallelas, Latuſque rectum $\lambda = \frac{t^2}{\tau}$, (ut nempe ſit $\tau . \lambda :: \tau^2 . t^2$.) dicentur oppoſiti vertices αα ipſis Aa *vertices conjugati*; atque Hyperbolæ αα, ipſis Aa, *Hyperbolæ conjugatæ*; commune cum illis centrum habentes, (ut patet.) Sed & eaſdem habebunt Aſymptotas rectas: ut jam demonſtraturus ſum.



Nam completo parallelogrammo MM, (cujus latera per conjugatos vertices tranſeant, ſintque conjugatis diametris tranſverſis parallela, & propterea æqualia;) erunt rectæ CM omnium Aſymptotæ; per prop. 39. (Idem accidet, ſi, ſumptis quibuſvis CD, Cδ, ipſis CA, Cα, proportionalibus, formetur Parallelogrammum circa idem centrum C, latera habens conjugatis diametris parallela: Omnia enim puncta angularia, in Aſymptotis CM reperientur. Puta, ſi ordinatim-applicatæ, in hac Figura deſcriptæ, ad Aſymptotas uſque continuarentur.)

Præter illas autem Aſymptotas duas, nulla in eodem plano recta duci poteſt, quæ (producta) non alicui ex conjugatis Hyperbolis (productis) occurret. Ut ex prædictis facile eſt demonſtratu.

Parallelogrammum autem MM (per quatuor conjugatos vertices tranſiens) reſpondet parallelogrammo Ellipſi circumſcripto per ipſius conjugatos vertices tranſeunti.

PROP.

PROP. XLIII.

De Syſtemate Hyperbolico.

QUatuor illæ, quas diximus, Hyperbolæ conjugatæ, reſpondent totidem (in Ellipſi) conjugatis ſectionibus Ellipticis (de quibus prop. 29. dictum eſt:) cum hoc tamen (inter alia) diſcrimine, quod quatuor ſectiones Ellipticæ, centrum verſus incurvatæ ſe mutuo continuant; at conjugatæ Hyperbolæ, à centro recurvatæ (partem convexam centrum verſus habentes,) neque ſibi invicem, neque ſuis Aſymptotis rectis, niſi poſt infinitam diſtantiam occurrunt, aut occurſuræ ſupponuntur. Tota vero figura (quod *Syſtema Hyperbolicum* appellamus) quæ contineri ſupponitur (aut ſupponi poſſit) quatuor convexis Hyperbolis, (ſibi mutuo, ut & Aſymptotis rectis, poſt infinitam diſtantiam concurrentibus,) toti figuræ Ellipticæ reſpondet.

Quatuor autem illas Hyperbolas conjugatas, infinite continuatas, tandem concurſuras; ſuppono quidem, non quod vel reapſe concurrent, vel etiam actu poterunt infinite continuari, (cum actu infinitum ejuſmodi dari non poſſit:) ſed quoniam qui alterum ſupponit ſupponere debet & reliquum. Multa autem apud Mathematicos ſupponi quæ actu non exiſtunt, ſat notum eſt; quæ veritatem habent *Conſequentiæ* (ut loquuntur) ſive Hypotheticam, licet non *Conſequentis* ſive Abſolutam.

Atque hinc eſt, quod Polygonum regulare infinitorum laterum pro circulo haberi ſoleat; aliaque ejuſmodi innumera: Et quidem univerſaliter, *Quantitates, quæ ita ad invicem continuo propius accedunt, ut earum (continuatarum) diſtantia qualibet aſſignata minor evadat; ſupponendæ ſunt (in infinitum continuatæ) tandem convenire.*

Quod quidem eodem modo demonſtrari poteſt quo 1ª Archimedis *de circuli dimenſione*, aliæque paſſim apud Geometras demonſtrari ſolent. Nempe, ſi in infinitum continuentur; vel concurrent (quod affirmatur,) vel adhuc diſtabunt; at hoc eſt impoſſibile: Si enim diſtent, eſto ea diſtantia ſive differentia *a* quantumvis exigua, probari autem poteſt eas propius accedere quam eſt ea diſtantia aſſignata, (hoc enim ponitur;) non igitur diſtant; conveniunt ergo. Quod erat demonſtrandum.

Neque poteſt quidem hæc demonſtratio quovis modo eludi, magis quam illa Archimedis modo memorata, aliæque apud Mathematicos innumeræ.

PROP. XLIV.

Ellipſeos & Hyperbolæ comparatio.

PAtet ex Ellipſeos & Hyperbolæ doctrina ſuperius tradita; earum ad invicem cognationem magnam eſſe, Maximum autem inter eas diſcrimen (unde & reliqua omnia ortum ducunt) hoc eſt, Quod, *in Ellipſi, diameter tranſverſa atque intercepta ſuper ſe mutuo replicari ſupponuntur; in Hyperbola vero, ſe mutuo continuare.* Adeoque in Ellipſi $Da = Aa - AD = t - d$; in Hyperbola vero $Da = Aa + AD = t + d$. Atque hinc quidem oritur Ellipſeos incurvatio verſus centrum, & Hyperbolæ recurvatio à centro, aliaque omnia quæ interveniunt diſcrimina: ut probe attendenti patebit. Adeoque totam fere Ellipſeos doctrinam Hyperbolæ accommodavimus (conſulto quidem, ut earum cognatio melius percipiatur) totidem fere verbis, mutatis tantum ſignis $+ -$.

Atque hactenus Parabolæ, Ellipſeos, & Hyperbolæ doctrinam, ſuccincte quidem, ſed & dilucide tradidimus.

APPENDIX.

TRadidimus, in ſuperioribus, trium illarum (prout vulgo dicuntur) Coni-ſectionum, Parabolæ, Ellipſeos, *atque* Hyperbolæ, *doctrinam, ſuccincte ſatis, ſed & interim ſatis (ni fallor) dilucide. Earumque vel omnes vel præcipuas ſaltem affectiones vel demonſtravimus, vel ſaltem demonſtrationum fontes indicavimus; ut inde liceat levi negotio ea omnia deducere, quæ longis ambagibus, atque perplexo variorum Lemmatum & Demonſtrationum intricatarum labore, antehac oſtendi conſueverunt.*

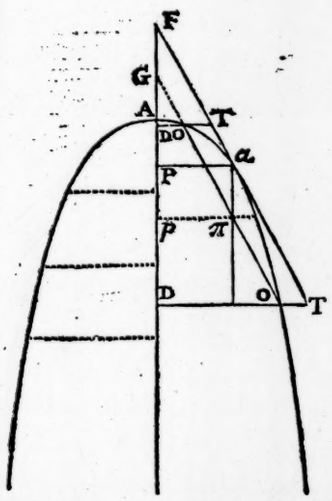
Atque hæc omnia brevi admodum atque ſuccincta methodo tradita ſunt; præſertim ſi omittantur ea omnia (quæ quidem tuto nec incommode omitti poſſe videantur,) quæ tota parte prima tradidimus; quæ quidem Conum ſpectant, atque illarum ad conum relationem, cum quibus tamen præſens doctrina (quanquam ſecus olim creditum eſt) nullam habet neceſſariam connexionem; ſed ſimplicius atque univerſalius tradi & poteſt & debet.

Sed interim viam ſimul aperuimus qua Curvarum doctrinam penitius intueri atque ulterius promovere facile poſſimus: (quod & nos fortaſſe poſt aliquando, Deo favente, facturi ſumus, ſi illud neceſſe videbitur, atque viris doctis Mathematum peritis labores noſtros gratos fore perſpiciemus.) Interim ſpecimen aliquod libet apponere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quam in ipſa Parabola reperiantur.

PROP. XLV.

De Paraboloeide Cubicali.

SI Paraboloeides ita conſtituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in ſubtriplicata ratione Diametrorum interceptarum; (adeoque illarum Cubos diametris-interceptis proportionales:) *Paraboloeides Cubicale* dici poterit.



Latus-rectum Paraboloeidis cubicalis (puta *l*,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut ſit ubique $p^3 = l^2 d$.

PROP.

PROP. XLVI.

De recta Paraboloeides Cubicale contingente.

SI Paraboloeides Cubicale A α, in puncto quovis α, contingat recta αF, diametro PA occurrens in F, ſitque eidem diametro ordinatim-applicata αP: erit recta AF (diametri continuatio) dupla diametri-interceptæ PA: hoc eſt, diameter continuata PF, tripla diametri PA.

Nam, ſumpto ubivis (in eadem diametro) puncto D, cui ordinatim-applicetur DO, tangenti αF occurrens in T: Punctum T (propter tangentem) vel erit idem cum puncto α, (ſi nempe P, D, coincidant;) vel (ſi ſecus) erit T extra curvam: & (propterea) DT $\overline{>}$ DO (nempe æquales, ſi D, P, coincidant; vel, ſi ſecus, DT longior erit.)

Ponamus autem (ob commodiorem calculum) Pα = p, PA = d, PF = f, PD = a. Erit ergo (per def. præced.) PA.DA :: Pαc.DOc. hoc eſt $d.d\pm a :: p^3.\frac{d\pm a}{d}p^3$ = DOc. Item (propter ſimilia triangula) PF.Pα :: DF.DT. hoc eſt $f.p :: f\pm a.\frac{f\pm a}{f}p$ = DT. Ejuſque cubus $\frac{f^3\pm 3f^2a+3fa^2\pm a^3}{f^3}p^3$ (= DTc) $\overline{>}$ (DOc =) $\frac{d\pm a}{d}p^3$. Et (utrinque multiplicando per f^3d, & dividendo per p^3) erit $f^3d\pm 3f^2da+3fda^2\pm da^3 \overline{>} f^3d\pm f^3a$. Tum (auferendo utrinque f^3d, & dividendo per $\pm a$) erit $3f^2d\pm 3fda+da^2 \overline{>} f^3$. Denique, ponendo puncta P D coincidere, (ut evaneſcat quantitas a, adeoque & ipſius multiplicia $\pm 3fda$, $+da^2$,) erit $3f^2d = f^3$, hoc eſt $3d = f$. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XLVII.

De Paraboloeidis Cubicalis Diametris.

INquirere, *An* in Paraboloeide Cubicali Diametri ſint invicem parallelæ: Et cujuſvis diametri Ordinatim-applicatæ, ſint rectæ in ipſius Vertice contingenti parallelæ.

Inquiſitio facile inſtitui poterit ad imitationem illius quæ de Parabola adhibetur ad prop. 24. niſi quod PF, quæ iſtic dicitur $2d$, hic dicenda eſt $3d$. Eam nempe Analytice ſic inſtituamus. Supponamus ſcilicet rem ita eſſe: Adeoque rectam Fα, quæ paraboloeides Aα in puncto α contingat, diametro PA productæ occurrere in F; eique parallelam OO Paraboloeidi inſcriptam, quæ (producta) eidem diametro ſupra verticem occurrat in G, (adeoque ſi infra verticem diametro occurrat, tum tam duarum DG, quam duarum DO, de quibus mox dicetur, altera erit quantitas negativa, quod tamen calculum non turbabit;) ipſamque OO recta $\alpha\pi$ (parallela diametro AP) biſectam in π (ut nempe rectæ πO, πO, ſint ipſi $\alpha\pi$ ordinatim-applicatæ;) denique diametro AP ordinatim-applicari OD, OD, αP, ipſique parallelam πp eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) Pp = $\alpha\pi$ = FG; & propterea PF = pG: item (propter parallelas) rectam DD biſectam in p, ſicut OO biſecatur in π. Quærendum autem eſt, numcubi reperiri poſſint puncta D, D; quæ quidem ſicubi inveniantur, conſtabit propoſitum.

Subſtitutis igitur idoneis ſymbolis, eſto Pα = p. PA = d. (ideoque, per præced: PF = pG = $3d$.) Pp = $\alpha\pi$ = FG = g. (ergo pA = PA + Pp = $d+g$.) pD = q. (adeoque DA = pA $\pm$ pD = $d+g\pm q$. & DG = pG $\pm$ pD = $3d\pm q$.)

Erit

Erit igitur (propter Paraboloeides cubicale per prop. 45.) PA.DA::Pα.DOc. hoc est, $d.\ d+g\pm q :: p^3.\ \frac{d+g\pm q}{d}p^3 = DOc.$

Item (propter similia triangula) PF.Pα::DG.DO. hoc est, $3d.p :: 3d\pm q.\ \frac{3d\pm q}{3d}p = DO$. Ejusque cubus $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3} = DOc = \frac{d+g\pm q}{d}p^3$.

Ergo (utrinque dividendo per p^3, & multiplicando per $27d^3$) erit $27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3 = 27d^3 + 27d^2g \pm 27d^2q$. Et (sublatis utrinque æqualibus) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Cujus quidem æquationis radix q, si vel ope Coni-sectionis vel alio quovis modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta D, D, (alterum quidem supra punctum p, alterum infra;) adeoque propositi veritatem. Intellige, si binæ radices q (sursum & deorsum sumendæ) fuerint invicem æquales.

Analysi peracta, Demonstrationem syntheticam sic liceret instituere.

In Paraboloeide cubicali Aα, diametro AP, parallela ducatur απ: per cujus punctum quodvis (intra paraboloeides) π, ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Erit απ ejusdem Paraboloeideos diameter, eique ordinatim posita πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eique parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et sunto symbola Pα = p. PA = d. FG = απ = Pp = g.

Tum sumantur in diametro, utrinque à puncto p, æquales rectæ pD = pD = q; utraque nempe tanta, quanta est radix hujus æquationis $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. (Nempe si binæ radices oppositæ, fuerint æquales.) Et punctis D, D, ordinatim ponantur rectæ DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O: quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur in p, erit ideo OO (propter parallelas) bisecta in π.

Superest igitur ut ostendatur rectam OO (bisectam in π) Paraboloeidi inscriptam esse, (ut nempe απ recta bisecans sit diameter) hoc est, puncta O, O, esse in Paraboloeideos curva; nempe rectas DO, DO, (diametro AP ordinatim-positas, ex constructione,) ordinatim-applicatis (ad eadem diametri puncta) æquales esse, adeoque in curva terminari. Quod sic ostendi posse videatur;

Est $pA = PA + Pp = d+g$. $DA = pA \pm pD = d+g\pm q$. $pG = PF = 3d$. $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$.

Tum (propter Paraboloeides cubicale) ut PA, ad DA; sic cubus rectæ Pα puncto P ordinatim-applicatæ, ad cubum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc est $d.\ d+g\pm q :: p^3.\ \frac{d+g\pm q}{d}p^3$. qui igitur cubus est ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est cubus rectæ DO. Nam (propter similia triangula) PF. Pα::DG.DO. hoc est $3d.p :: 3d\pm q.\ \frac{3d\pm q}{3d}p = DO$. Ejusque cubus $DOc = \frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3}p^3$ Vel (pro $9dq^2 \pm q^3$, substituendo $27d^2g$, quæ per constructionem sunt æqualia,) $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 27d^2g}{27d^3}p^3$, vel denique (abbreviando fractionem per $27d^2$) $\frac{d\pm q+g}{d}p^3 = DOc$. adeoque rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ sunt punctis D, D, ad Paraboloeideos curvam terminatæ in O, O; & propterea recta OO Paraboloeidi inscripta, est ad diametrum απ ordinatim-posita. Quod erat demonstrandum.

Hæc autem disquisitio, quanquam prima fronte speciosa videatur; non tamen concludit: eo quod radix q utriusque æquationis, supponitur ejusdem magnitudinis; quod revera non contingit, ut ex Æquationis Cubicæ Resolutione patebit. (De qua plura diximus in Epistola quæ Tractatui meo contra Meibomii Dialogum præfigitur.) Et propterea ejusmodi Parallelæ Diametri in Paraboloeide Cubicali non reperiuntur.

PROP.

PROP. XLVIII.

De Area Paraboloeidis; & Conoeidis Pyramidoeidisve illi accommodati.

UT Archimedes (in lib. de *Quadratura Parabolæ*) oſtendit Parabolam (figuram puta linea Parabolica & recta contentam) eſſe ad Triangulum (ſuper eadem vel æquali baſe æque-altum) ut 4 ad 3: Sic & demonſtrari poteſt, Paraboloeides cubicale ad Triangulum (intellige, ſuper eadem baſe æque-altum) eſſe ut 3 ad 2.

Item, ut Conoeides Parabolicum ad Cylindrum (vel Pyramidoeides Parabolicum ad Priſma) eſt ut 1 ad 2: Sic demonſtrari poteſt, Conoeides à Paraboloeide Cubicali ortum ad Cylindrum (vel ejuſmodi Pyramidoeides ad Priſma) eſſe ut 3 ad 5.

Hæc autem alibi (Deo volente) inter ejuſmodi alia multa aliquando ſumus demonſtraturi. Atque inſuper generalem methodum tradituri, qua Paraboloeidea quælibet ad Quadrata, & eorum Conoeidea ſeu Pyramidoeidea ad Cylindros aut Priſmata reduci poſſint non minus quam ipſa Parabola aut Conoeides Parabolicum rectum, (quod & de Conoeidibus & Pyramidoeidibus Ellipticis & Hyperbolicis, ſive rectis ſive ſcalenis, intelligendum eſſe volo:) Quæ nemo, quod ſciam, antehac aggreſſus eſt.

PROP XLIX.

De Paraboloeidibus aliis.

SI Paraboloeides Ordinatim-applicatas habeat in Diametrorum-interceptarum ratione ſubquadruplicata, vel ſubquintuplicata, &c. (in quibus nempe Diametri-interceptæ ſunt Ordinatim-applicatarum biquadratis, vel ſurdeſolidis, &c. proportionales:) dici poterit *Paraboloeides Biquadraticale*, vel *Surdeſolidale*, &c. (nomine nempe rationi aptato.)

Latus-rectum ejuſmodi Paraboloeidibus conveniens, appello rectam imaginariam; cujus, in Biquadraticalibus, Cubus in diametrum-interceptam ductus æquatur Biquadrato Ordinatim-applicatæ; in Superſolidalibus, Biquadratum in diametrum-interceptam ductum æquatur Superſolido Ordinatim-applicatæ: (& ſimiliter in aliis Paraboloeidibus, reſpectu ſemper habito ad gradum Paraboloeideos.) Ut ſit (prout gradus poſtulaverit) $p^4 = dl^3$, vel $p^5 = dl^4$, & ſic deinceps.

Recta vero AF (diametri continuatio inter verticem & tangentem intercepta) eſt, in Paraboloeide Biquadraticali tripla, in ſuperſolidali quadrupla, diametri interceptæ PA; (& ſimiliter in aliis:) Hoc eſt, continuata diameter PF (applicationis puncto & Tangentis concurſu intercepta,) eſt Diametri-interceptæ PA, in Biquadraticali quadrupla, in Superſolidali quintupla; & ſic deinceps.

Demonſtratio pari modo procedet atque in Paraboloeide Cubicali; aut etiam ipſa Parabola.

Adeo ut jam Paraboloeidis Cubicalis, Biquadraticalis, ſuperſolidalis, aut alius cujuſvis, doctrina, non minus cognita habeatur, quam ipſius Parabolæ.

Si tamen, poſt ſpecimen hoc exhibitum, operæ pretium cenſebitur rem hanc fuſius proſequi, poterit illud à quolibet facillime fieri cui tantum ſuppetit otii.

PROP L.

De Elliptoeidibus & Hyperboloeidibus.

DE Elliptoeidibus & Hyperboloeidibus (pariter atque Paraboloeidibus) in promptu erat nonnulla adjeciſſe; niſi quod eorum tractatio aliquanto intricatior eſſet, adeoque fuſius tradenda, quam brevi appendiculo conveniret.

Sufficiat igitur (ſpecimine in Paraboloeidibus exhibito) vel anſam aliis porrexiſſe, vel id ipſum forſan peculiari tractatu poſthac præſtiturum eſſe.

Interim, negotium à me primitus ſuſceptum, me ſatis præſtitiſſe non diffido.

LAUS DEO.

ARITHMETICA
INFINITORUM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheſeos Problemata.

Anno 1655 *typis edita.*

Clariſſimo Spectatiſſimoque Viro

Matheſeos Peritiſſimo,

D. *Gulielmo Oughtredo,*

Eccleſiæ quæ eſt *Aldeburiæ*, in agro Surrienſi, Rectori. S.

EN tibi tandem (Vir Clariſſime) jam abſolutum opus illud cujus ſpem fecit Propoſitio ea Cyclometrica, quam ſub Paſchatis feſto Typis excuſam tibi dicavi. Quod cum, pro more, ubi in publicum prodeat, alicui dicandum ſit, non tam Virum magnum quam magnum Mathematicum quærendum putavi, cui illud offerrem. Adeoque non alii cuiquam quam tibi magis illud deberi facile perſpexi; qui & à Matheſi optime meritus es, & cujus ſcriptis me profeciſſe lubens agnoſco: quippe qui in tua *Clave Mathematicæ*, opere licet non magno, ea breviter ſimul & perſpicue tradidiſti, quæ magnis aliorum voluminibus fruſtra quæſitemus.

Opus hoc invenies (ſiquid ego judico) plane novum. Cur enim ita non vocitem nihil video: nec alii credo id inficias ibunt. Quamvis enim non dubitandum ſit, quin propoſitiones aliis cognitæ ſparſim immiſceantur, (quod neceſſario faciendum erat, partim ut inde ad alia lux affulgeret, neque videar aliquid comminiſci, quod Matheſi jam inventæ atque excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipſum opus mutilum prodiret & mancum, cum illæ ex principiis noſtris ita ſtatim conſequantur ut etiamſi alias ignotæ fuiſſent neceſſe ſit ut hinc ſtatim innoteſcant; & quidem ex earum illuſtrioribus pleraſque non apud alios prius ſciverim exſtare quam ad eas methodo hac pervenerim:) cum tamen & nova multa, aliis nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atque omnia nova methodo à nobis primitus in Geometriam introducta, tradat; eaque (niſi meis fortaſſe nimis faveam) perſpicuitate qua in abſtruſioribus hiſce problematis nemo (quod ſciam) uſus eſt; Non eſt cur Novum dubitem appellare.

Nempe inde ortum ſumit hæc noſtra methodus ubi Cavallerii *Methodus Indiviſibilium* deſinit. Unde etiam & operi ipſi, ipſique titulo, anſa data eſt; ut enim ille ſuam, *Geometriam Indiviſibilium*, ita Ego methodum noſtram, *Arithmeticam Infinitorum*, nominandam duxi.

Quomodo autem ego huc pervenerim; licet id minus videatur dictu neceſſarium, cum omnia ea fere methodo ſcripta ſint qua inventa; tamen, quoniam id tibi non ingratum fore judico, iſtius etiam rei hiſtoriam breviter contexam.

Exeunte Anno 1650 incidi in Torricellii ſcripta Mathematica, (quæ ut per alia negotia licuit, anno ſequente 1651, evolvi) ubi inter alia, Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium* exponit. Cavallerium ipſum nec ad manum habui, & apud Bibliopolas aliquoties fruſtra quæſivi. Ipſius autem methodus, prout apud Torricellium traditur, mihi quidem eo gratior erat quod neſcio quid ejuſmodi, ex quo primum fere Matheſin ſalutaverim, animo obverſabatur; quod enim de Circulo apud pleroſque obtinet, (qui pro infinitorum laterum polygono haberi ſolet, adeoque Peripheria pro rectis numero infinitis infinite brevibus;) viſum erat mihi, mutatis mutandis, etiam alibi non inutiliter accommodari poſſe; & quidem eo ſpectare non pauca quæ apud Euclidem, Apollonium, & præſertim Archimedem paſſim exſtant. Erant autem ea non niſi confuſa adhuc apud me cogitata quæ nondum in ordinem redegeram. Neque enim per alia licuit negotia, Matheſi animum ex profeſſo applicare, ſed ei ſaltem horis nonnunquam ſubciſivis indulgere; priuſquam aliunde ad hanc quam jam ſubeo provinciam vocatus fuerim; quod non ita multo prius contigerat.

Ubi hujuſmodi jam obtinuiſſe methodum perſenſeram; cogitare apud me cœpi, num non hinc aliquid de Circuli Quadratura, quam ſummos ſemper viros exercu-

ifſe notum eſt, luminis accedat. Quod ſpem facere videbatur, hoc erat. Infinitorum Coni circulorum, ad totidem Cylindri, ratio jam erat cognita, nempe ut 1 ad 3; eorum autem diametri omnes in triangulo per axem coni, ad totidem in parallelogrammo per axem cylindri, ſunt (uti notum eſt) ut 1 ad 2. Pariter in Conoeide Parabolico circulos omnes ad totidem in cylindro circulos notum erat rationem habere 1 ad 2; eorum autem omnes diametros ad diametros horum eſſe ut 2 ad 3. Manifeſtum etiam erat rectas trianguli eſſe Arithmetice proportionales, ſive ut 1, 2, 3, &c. ergo circulos coni (in diametrorum ratione duplicata) ut 1, 4, 9, &c. Item circulos Conoeidis Parabolici (in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, hoc eſt, in ratione diametrorum,) ut 1, 2, 3, &c. ergo eorum diametros ut √1, √2, √3, &c. quippe in circulorum ſuorum ratione ſubduplicata. Fieri igitur poſſe ſperabam, ut alias etiam ex cognita ratione quam habeat ſeries circulorum, ſive (quod eodem recidit) quadratorum, ad totidem æqualia; inveniri poſſet & quam habent rationem eorum vel diametri vel latera ad æqualia totidem. Hoc autem ſi univerſali aliqua methodo invenire poſſem, de Circuli Quadratura ſatis proſpectum eſſet. Cum enim jam notum erat, parallelos omnes in Sphæra circulos, ad totidem in Cylindro, eſſe ut 2 ad 3; ſi inde cognoſci poſſet quam rationem habeant omnes eorum diametri ad diametros horum, inventum foret quod quæritur: nempe Circulum illæ, hæ Quadratum diametri conſtituunt. Reducto ita problemate Geometrico ad pure Arithmeticum.

Huic igitur inquiſitioni, iſtius anni 1651 fine, & initio ſequentis 1652, me applicui; ea plane methodo quam indicat hic Tractatus: opinatus vel inde conſtare aliquando poſſe quomodo quadrandus eſſet circulus, vel forte ne quidem quadrandum eſſe, vel ſaltem aliquid hinc emerſurum eſſe quod operæ foret pretium.

Aggreſſus igitur ſum primo (ut à ſimplicioribus inchoarem) ſeries ſimplices, puta quantitatum Arithmetice proportionalium, vel in earum ratione duplicata, triplicata, &c. deinde & ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. atque ex his compoſita, puta, ſubduplicatæ triplicatæ, &c. aut etiam qualitercunque multiplicata, vel juxta denominationem rationalem aut etiam irrationalem. In quibus omnibus res plane quidem ex voto & ſupra ſpem ſucceſſit. Unde Theorema tandem generale emerſit, Prop. 64. traditum. Sed & quadraturam ſimul reperi non modo Parabolæ nova methodo præſtandam, ſed & Paraboloeidium omnium, eorumque complementorum, quod nemo antea, quod ſciverim, aggreſſus erat, nedum aſſecutus. Adeoque hinc ſtatim Geometriam auctam perſenſi; cum enim antea ex figuris curvilineis ſola fere Parabola quadraturam nacta erat, jam Paraboloeidium omnium infinita genera una quidem & generali methodo unica propoſitio quadranda doceat. Et quidem ſi unius Parabolæ quadratura Archimedem tantum nobilitaverit, (ubi omnes deinceps Mathematici ex eo tempore ſubſtiterunt tanquam ad Herculis columnas,) gratum illud orbi Mathematico futurum ſatis præſenſi, ſi etiam ejuſmodi figurarum infinita genera quadranda docerem. Sed & Conoeidium item & Pyramidoeidium doctrinam hinc ampliatam vidi. Cum enim Archimedes ex Conoeidibus & Sphæroeidibus ſola recta tractaverit (ut & poſt illum alii,) de Pyramidoeidibus ne quidem mentione facta; ego illa omnia ſive Conoeidea ſive Pyramidoeidea tam recta quam inclinata ad Cylindros & Priſmata redegi. Nec ea tantum quæ ex Parabolis, ſed & quæ ex Paraboloeidibus omnibus eorumve complementis formantur, de quibus altum hucuſque, apud omnes ſilentium, nec quicquam (quod ſciverim) uſpiam tentatum. Sed & totam fere de Spiralibus doctrinam hinc etiam vidi directa poſſe conſequentia derivari: Et quidem non modo ſpatia ſpiralibus ordinariis adjacentia (quod fecit Archimedes) cum circulo comparanda docui, ſed & quæ Spiralibus aliis adjacent. Sed & ipſam ſpiralium doctrinam, non minus quam Parabolarum & Paraboloeidium, ampliaſſe proclive erat, niſi quod nollem ad Corollaria nimis exſpatiari.

Tranſii deinde ad ſeries auctas (quas voco) & diminutas ſive mutilatas; quæ ex duarum pluriumve ſerierum vel aggregatis vel differentiis conſtant. Atque hic etiam ſucceſſum minime contemnendum reperi. Nempe eas omnes ad ſeries æqualium redigere non erat difficile; adeoque Conoeidea & Sphæroeidea, vel etiam Pyramidoeidea, non modo recta ſed & inclinata, ad Cylindros & Priſmata redigere rem nullius eſſe negotii perſpexi: neque ea tantum quæ ex Hyperbolis & Ellipſibus fiant, ſed & quæ ex Hyperboloeidibus vel Elliptoeidibus mille modis

dis formari poſſent; verum eis ſigillatim recenſendis immorandum eſſe non duxi, ne nimis divagarer, præſertim cum illud qui fieri poſſit nemo non ex traditis ſuo marte perſpiciat.

De ſeriebus autem iſtis ſive auctis ſive diminutis non ipſis ſolum, ſed & quæ in earum ratione duplicata, triplicata, aut ulterius multiplicata procedunt, eandem inquiſitionem eodem ſucceſſu continuavi; uti ex iis quæ deinceps ſequuntur propoſitionibus videndum eſt. Ubi ſimul numerorum figuratorum, puta triangularium, pyramidalium, &c. (quorum nullus vel exiguus hactenus uſus fuerit, & fere ludicrus,) uſus inſignes ex inſperato deteguntur.

Verum ubi de ſeriebus aliis quæ ſint in iſtarum auctarum vel diminutarum ratione ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. proxime agendum erat, (quod Circuli, Ellipſeos, & Hyperbolæ quadraturam directe quidem & immediate ſpectabat, & quæ ſola jam ſuperfuit difficultas:) videbam illic aquam hærere, neque me ita facile ac in prioribus me extricare potuiſſe. Re igitur variis modis tentata, nec eo tamen exitu qui votis omnino ſatisfaceret; eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejuſmodi eſſe ut quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus ſurdis (vulgo dictis) eſſet explicabilis. Numerorum enim progreſſiones aſquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæſitam valerem exprimere. Eas autem progreſſiones tales eſſe ut nec Arithmeticæ dici poſſint (ubi augmenta continua ſunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes ſunt æquales,) ſed tales quæ continuos multiplicatores habeant Arithmetice proportionales, adeoque magis adhuc ſint compoſitæ quam Geometricæ. Si autem in Geometrica progreſſione, (ubi continui multiplicatores ſunt æquales,) quamvis aliquando fieri poſſit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.) ut interpolandi terminis illius medii ſint numeris explicabiles; non item in omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id fieri poſſit; ſed neceſſe ſit ut numerum impoſſibilem utcunque indicemus, (puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, &c.) multo minus ſperandum fore judicavi, ut in progreſſione magis adhuc compoſita (ubi continui multiplicatores ſunt continue vel creſcentes vel decreſcentes) id ſemper fieri poſſit; adeoque alium aliquem notationis modum (quam qui adhuc receptus eſt) introducendum putavi, quo numerus ille impoſſibilis indicetur.

Atque hactenus perveneram iſtius anni 1652 initio, tempore (ſi memini) quadrageſimali; quo tempore nempe, per Academiæ noſtræ conſtitutiones, à publicis prælectionibus feriari permiſſum eſt, adeoque privatis diſquiſitionibus magis vacare.

Dum autem hic hærebam, placuit rem cum aliis quibus familiariter uſus ſum viris Mathematicis communicare, ut viderem num illi auxilio eſſe poſſent in quæſita quantitate deſignanda. Adeoque ex variis quas apud me conceperam ejuſmodi progreſſionibus, unam ſelegi, quæ omnium videbatur ſimpliciſſima, (ut quæ per numeros integros procedit;) eam nempe quæ jam habetur prop. 192. hujuſce tractatus; eamque ad hanc fere formam (non enim omnibus illam iiſdem plane verbis, ſed eodem tamen ſenſu propoſui) problematice concepi; *Si æquabilem quandam curvam contingat in vertice recta, unde ad curvam ducantur rectæ axi Parallelæ, æqualibus ab invicem diſtantiis remotæ, quarum prima ſit* 1, *ſecunda* 6, *tertia* 30, *quarta* 140, *quinta* 630, *&c. quanta erit illa quæ interponenda eſt media inter* 1 *&* 6? Vel etiam Arithmetice, *In ſerie numerorum* 1, 6, 30, 140, 630, *&c. quæritur terminus medius ipſis* 1 *&* 6 *interponendus*? Fieri autem hos terminos indicabam, ex continua multiplicatione numerorum $1\times4\frac{2}{1}\times4\frac{3}{2}\times4\frac{4}{3}\times4\frac{5}{4}$ *&c.* vel etiam $1\times\frac{6}{1}\times\frac{10}{2}\times\frac{14}{3}\times\frac{18}{4}$ *&c.* quorum tam numeratores quam denominatores ſunt Arithmetice proportionales. Problema ſic conceptum propoſui, menſibus ſequentibus, (inter alios) Clariſſimis viris & Mathematicis, D. *Setho Wardo* Aſtronomiæ Profeſſori Saviliano, Collegæ meo meritiſſimo; *Laurentio Rook*, tunc apud Oxonienſes commoranti, poſt apud Londinenſes in Collegio Greſhamenſi Profeſſori Aſtronomico; & *Richardo Rawlinſon* Collegii Reginalis apud Oxonienſes Socio; neſcio annon etiam ſub eodem tempore, (an aliquanto ſerius) *Roberto Wood* Socio Collegii Lincolnienſis, & *Chriſtophoro Wren* Collegii Omnium-Animarum Socio; (ſed & aliis etiam aliquot, quibus nominandis ſuperſedeo:) & quidem detecto iis (ni fallor) omnibus eo ad quem tendebat ſcopo; nempe, data illa quæ quærebatur quantitate abſolutam fore quadraturam Circuli. Non autem vel ego mihi vel etiam eorum quiſpiam (quibus nec erat obvium reſponſum,

nec

nec vacabat ſuis poſtpoſitis de quæſitis meis admodum eſſe ſolicitis,) ex voto ſatisfecit. Monuit autem eorum aliquis ut *Gregorii a Sancto Vincentio* Opus Geometricum conſulerem, (cujus ne nomen quidem antea audiveram,) ut qui magno volumine hujuſmodi res quæ ad circuli Quadraturam ſpectent expoſuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumque utut tanto erat volumine ut non integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunque; ſolicitus an inde quæ ad rem noſtram facerent reperire poſſem. Inveni autem aliquando eaſdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) ſpeculationes obtigiſſe, licet diverſis methodis eo pervenerimus. Exempli gratia, quod appellat ille *plani in planum ductum*, id ipſum eſt quod nos & hic, & in Tractatu de Conicis Sectionibus (qui huic gemellus eſt eodem anno 1652 conceptus & primitus formatus,) dicitur, *ductus rectarum omnium unius plani in alterius reſpectivas rectas*: cur autem ego *ductum plani in planum* non dixerim, in cauſa erat, quod revera non tam planum in planum (ſic enim prodiret plano-planum, quatuor nempe dimenſionum, non ſolidum,) ſed latitudo unius in latitudinem alterius, & factum denique in communem altitudinem ducitur; adeoque tres (non quatuor) emergunt dimenſiones. Et alia fortaſſe nonnulla. Ut autem ex ſuis ne unam vel propoſitionem vel demonſtrationem in noſtrum tractatum aſſumpſi, quam ego antea non inveneram; ita ſiquæ forſan occurrant utrique communes, non opus eſſe credidi, ut propterea ex noſtris delerem, cum & illud ſæpiſſime contingere ſit neceſſe, ut ubi duo vel plures rem eandem tractandam ſuſcipiant in eaſdem aliquando incidant ſpeculationes. Verum (utut ille multa habeat acute inventa, methodo à noſtra plane aliena) illud quod apud eum maxime quærebam nuſquam inveni; neque enim ille vel eouſque rem perduxerat, nec etiam circuli quadraturam, quam ſe inveniſſe perhibet, omnino attingit, ſed ad propoſitionem noſtræ prop. 136. non multum abſimilem ubi pervenerat, ratus inde ſe circuli quadraturam inveniſſe, non tamen aſſecutus eſt; uti in Ἐξετάσει ſua oſtendit *D. Hugenius*.

Sub ejuſdem anni (1652) autumno, Clariſſimo Viro *Franciſco Schootenio* Matheſeos Profeſſori apud Lugduni-Batavos, inter alia, propoſui etiam hoc problema, (tecto tamen quo collimabat ſcopo;) qui, reſtatim cum Clariſſimo Viro *Chriſtiano Hugenio* communicata, reſcriptis non ita multo poſt literis intricatam rei difficultatem (utut primo aſpectu facilior viſa fuerit) ſubindicavit, neque interim ſpem fecit vel ſibi vel Dom. *Hugenio* vacaturum fore ut ei ulterius exquirendæ plus operæ impenderent. His eorum omnium reſponſis, confirmatior factus ſum in ea quam pridem conceperam opinione, nempe terminum illum quæſitum neque numerum rationalem eſſe, neque ex adhuc receptis ſurdis aliquem; ſed nova notatione deſignandum; & quidem, ſi libet, ea quam nos ad prop. 190 aſſignavimus. Si vero (prout verbi gratia $\sqrt{2}$, licet veris numeris exprimi præciſe non poſſit, poſſit tamen quam proxime, ita) velimus hanc quantitatem veris numeris quam proxime exprimere, (tanta nempe ἀκριβείᾳ quanta quis velit, modo præciſam non velit,) quomodo illud fiat docemus prop. 191. Quomodo illud Geometrice utcunque exhibeatur, oſtenſum eſt item propoſitionibus ſequentibus. Adeoque circuli quadraturam eouſque proſequuti videmur quantum numerorum natura patitur. Qui vero ulterius rem præſtare poſtulat, perinde eſt acſi poſtulet $\sqrt{2}$ veris numeris exprimere: quod iniquum eſſet poſtulatum. Non interim ignoro quin poſſit & aliis etiam modis inexplicabilis illa quantitas characteribus deſignari, atque ad numeros veris proximos aliis item methodis perveniri, (ſicut & de radicibus ſurdis dici poſſit,) qua in re non eſt ut ego viris Mathematicis quicquam præſcribam, ſed quibus quiſque malit uti liberum relinquam.

Abſoluta autem circuli quadratura, non opus eſſe duxi cognata illi alia problemata ſigillatim attingere; puta quam habeat rationem diameter ad peripheriam; aut ſphæra ad cubum; aut conus vel cylindrus ad pyramidem aut priſma; aliaque ſimilia: nemo enim neſcit hæc inde colligere.

Sed neque de quadratura Ellipſeos ſeorſim quicquam dicendum videbatur; quippe quæ junctim cum quadratura circuli traditur.

Hyperbolæ quadraturam quouſque fuerim aſſecutus, prop. 165. oſtendimus.

Interim tamen, methodi quam trado filum ſecutus, inopinato incidi in quæſtionem ſatis mirabilem de menſurandis figuris altera parte terminatis altera in infinitum continuatis. Adeoque quod in una figura ſolida præſtitit Torricellius, id nos in aliis innumeris, tam planis quam ſolidis faciendum oſtendimus, prop. 87.

&

& ſeq. ad 107. Et ſimul docemus quo dignoſcatur criterio num ejuſmodi figuræ propoſitæ in infinitum continuatæ finitam tandem an infinitam magnitudinem ſint aſſecuturæ. Quæ quidem & miranda ſatis, & jucunda ſimul, videatur ſpeculatio.

Quod autem jam ante tres annos invenerim, cur non citius in publicum dederim; in cauſa fuit partim quod ego aliis non raro negotiis fuerim avocatus, ſed præſertim quod Typographus, aliis edendis occupatior, non niſi ſerius ſuſceperit & tardius exſecutus ſit & hujus & aliorum qui cum hoc prodeunt tractatuum impreſſionem. Quam vero, dum quæ jam prodeunt ſub Prelo erant, placuit (ſub æquinoctio verno) quaſi in anteceſſum emittere, propoſitionem Cyclometricam, (quæ & eam continet, quam ante aliquot annos ſub problematis forma, ut ſupra dictum eſt, egregiis aliquot viris propoſueram,) invenies ex tribus illis quæ hunc tractatum claudunt deſumptam eſſe. Ex eo autem tempore, (menſe jam proxime præterito) prodiit Liber *D. Hobbes*; qui jam magna pollicitus in Geometria, & ſpeciatim circuli quadraturam, angulique in data ratione ſectionem, aliaque his cognata, Librum tandem ſuum in publicum emiſit, quo ſe oſtendit nec horum quicquam præſtitiſſe, nec quidem præſtiturum eſſe; adeo enim turpiſſimis paralogiſmis ubique ſcatet Liber iſte, ut raro aliquando quid ſanum invenias, (quod noſtro iſtius *Elencho*, qui & jam ſub Prelo eſt, manifeſtum fiet;) unde & Authorem non eum eſſe facile dignoſcas à quo hujuſmodi myſteria ſperemus retexenda.

Cæterum vale, Venerande Senex: Et te Deus ſumme miſericors feliciter ſoſpitet, tuaque omnia faxit proſpera: ut tandem, poſt Senium Feliciter & Pie tranſactum, ærumnoſam quam vivimus vitam vita commutes meliori. Quod animitus precatur

Tui Obſervantiſſimus

Dabam Oxoniæ
Julii 19. 1655.

JO. WALLIS.

Propoſitio quam memorat Epiſtola, præceaens hæc eſt quæ ſequitur.

SPECTATISSIMO VIRO

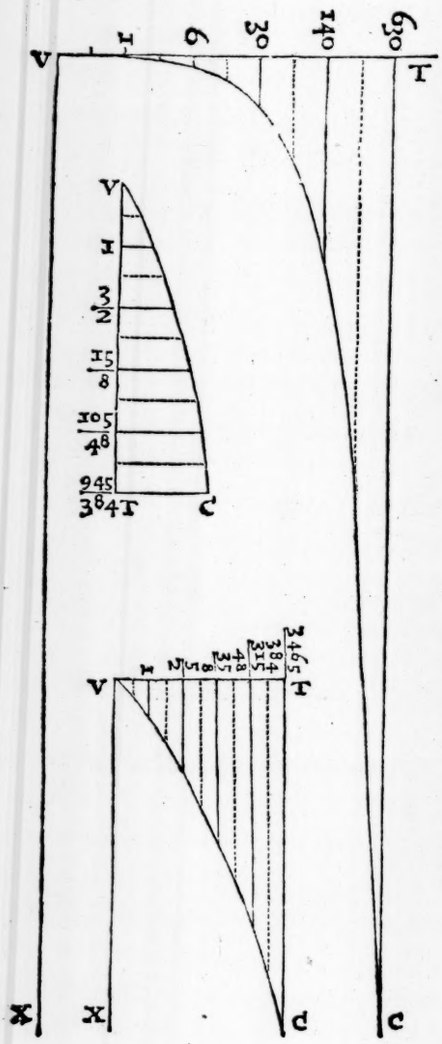
D. *GUILIELMO OUGHTREDO*,

Matheſeos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. Oxon. S.

QUam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propoſitionem, velata facie, & forma Problematica; ut & aliis, quibuſcum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celato plerumque (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur ſcopo: En tandem aperta fronte, forma Theorematica, eloquentem (quam prius ſubticebat)



Circuli Quadraturam.

EXpoſita æquabili curva VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales diviſa, &, à ſingulis diviſionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam uſque ductis, quarum ſecunda ſit 1, quarta 6, ſexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum ſecunda ad tertiam, ſic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si ſit ſecunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$, ſexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut ſecunda ad tertiam, ſic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si ſit ſecunda 1, quarta $2\frac{1}{2}$, ſexta $4\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut ſecunda ad tertiam, ſic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonſtrationis progreſſum, ipſamque methodum qua tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, oſtendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum uſum exſcriptum, quem in publicum daturus ſum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam exſpectavi.

Dabam è Typographeo *Oxonienſi* poſtridie Paſchatis, Anno Domini 1655.

D.

D. *GUILELMI OUGHTREDI,*

Ad præcedentem Epiſtolam (poſt Librum editum) Reſponſio. Quo quid ille de hac methodo ſenſerit, innoteſcat.

Venerabili Viro & Amico plurimum Honorando
D. *JOHANNI WALLISIO*
S.

HAud facile dici poteſt (Venerande Vir) quanta cum Voluptate perluſtravi (prout per alia licuit Negotia, per infirmam Valetudinem, per grandem Ætatem & ad finem properantem, agentis annum 82,) Eruditiſſima tua (de pluribus eximiis ſubtilibuſque argumentis) ſcripta, ad me miſſa. Deoque primum, patri luminum, gratias recognoſco debitas, qui tam illuſtri te donavit lumine: Tibique dein Gratulor, etiam cum Admiratione, tantam tum perſpicuitatem, tum perſpicaciam mentis geniique tui; qui novam non tantum inveris ipſe, ſed & aliis aperueris viam, in abditiſſima Artis myſteria penetrandi; Veteribus incognitam, & ne cogitatam quidem. Eoque me majori movent affectu hæc inventa tua, myſteriis plena, quod Honorabilis Eques (ſcientiſſimus ipſe & ſcientiarum patronus) D. *Carolus Cavendiſh*, jam ante annos viginti, monſtravit mihi Chartulam (*Pariſiis* ad ſe miſſam) pauca quidem, ſed egregia quædam nova Theoremata continentem; per *Cavallerii* (credo) methodum excogitata; quæ ego itidem (methodo meis magis conformi) iterato abſolvi, & cum pluribus communicavi; quorum aliqui ex meo ſcripto fecerunt ſibi Apographa, ſed quod ipſe nunc ad manum non habeo. Quod repeto, quia jam tum videre mihi viſus ſum tanquam è longinquo ſuborientem lucem, patefacturam mira; quæ ſupremis hiſce mundi ſeculis humanum genus olim aliquando foret irradiatura. Quam ego lucem, tunc, quaſi à longinquo conſpectam, ſalutabam; nunc, ut in propinquo poſitam, complector; proſperis his initiis effulgentem. Quod Nomen meum, ſcriptis hiſce tuis nunquam emorituris, præfigere dignatus ſis, inſigni tuo favori debeo: qui gloriæ tuæ nihil ultra conferre valeo quam plauſum meum; Preceſque ad Deum, ut velit ille perficere ſic feliciter incepta, ſuæque Gloriæ promovendæ congrua. Quod ex animo precatur,

Tui Amantiſſimus &

Admirator,

Auguſti 17. 1655.

Guilelmus Oughtred.

AD LECTOREM MONITIO.

LEctorem hic monendum censui, quod Vir Clarissimus D. Ismael Bullialdus *in breviculum hunc tractatum amplos scripsit Commentarios, erudito quidem & multorum annorum opere, magno Volumine Anno* 1682 *Parisiis edito, cui nomen fecit* Ad Arithmeticam Infinitorum. *In quo multa eorum quæ sunt hic succincte tradita, exponit ille fusius; plurimaque quæ hic latebant elicit Theoremata, & speculationes scitu non indignas. Ut sicui minus placeat mea succincta brevitas, poterit ille res easdem ibidem ampliatas & solenniori pompa deductas contemplari. Cui Viro Clarissimo a me deberi gratias eo nomine, lubens agnosco. Rem ipsam quod spectat; non video quin hæc nova methodus, (utut de ea primum, quod de rebus novis fieri solet, hæsitaverint nonnulli) sit apud Viros Eruditos jam passim recepta, atque in usum adhibita, ut apprime utilis & compendiosa, sed & satis demonstrativa: Quæque aliquando objecta fuerint, nos alibi diluimus, ut repetitu non sit opus. Tu, Lector, Fruere, & Vale.*

ARITH-

ARITHMETICA INFINITORUM.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI

in Curvilineorum Quadraturam, aliaque

Difficiliora Matheſeos Problemata.

PROP. I.

Lemma.

SI proponatur ſeries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continue creſcentium, à puncto vel o (ciphra, ſeu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciſſimus inveſtigandi modus, in hoc & ſequentibus aliquot Problematis, eſt, rem ipſam aliquouſque præſtare, & rationes prodeuntes obſervare atque invicem comparare; ut inductione tandem univerſalis propoſitio innoteſcat.

Eſt igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla. Adeoque ——

PROP. II.

Theorema.

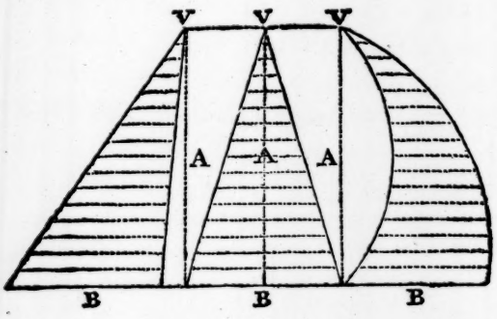
SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmetice-proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit o, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l, erit ſumma $\frac{l+1}{2}l$ (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) Vel, (poſito numero terminorum m, quantuſcunque ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2}ml$.

PROP. III.

Corollarium.

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum (ſuper æquali baſe, æque altum,) eſt ut 1 ad 2.*

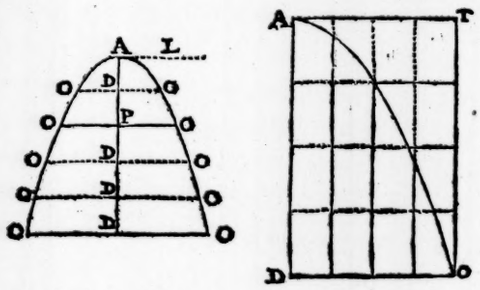


Triangulum enim conſtat quaſi ex infinitis rectis parallelis Arithmetice proportionalibus, à puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus ad pr. 1, & 2. libri noſtri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc eſt ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonſtrandum.

PROP. IV.

Corollarium.

ITem, *Pyramidoeides vel Conoeides Parabolicum (ſive erectum ſit ſive inclinatum,) ad Priſma vel Cylindrum (ſuper æquali baſe, æque-altum,) eſt ut 1 ad 2.*



Conſtat enim Pyramidoeides vel Conoeides Parabolicum quaſi ex infinitis planis Arithmetice-proportionalibus, à puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus prop. 9. Con. Sect.) Priſma vero vel Cylindrus ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

PROP. V.

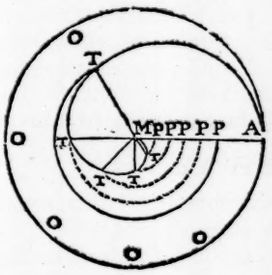
Corollarium.

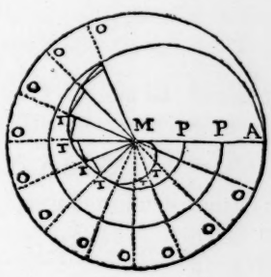
ITem, *Linea Spiralis (quam* Spuriam *dicimus) quælibet MT (à Spiralis Principio exorſa) ad correſpondentem Peripheriæ arcum conterminum PT (à Principio circulationis exorſum,) eſt ut 1 ad 2.*

(Per

(Per *Spiralem*, hic intelligo, non ipſam Curvam Archimedeam, ſed, *Aggregatum Arcuum, Sectorum ſimilium, numero infinitorum, Spirali Archimedeæ continue inſcriptorum, Figuram complentium*; Et ſic deinceps, quoties de ipſa linea agitur. Quoties autem de Figura Spirali adjacente agitur; perinde eſt ſive veram curvam Archimedeam intelligas, ſive hanc quam *Spuriam* dicimus.)

Eſto enim Linea Spiralis (una circulatione facta) MTA, Principium Spiralis M, (quod idem eſto & centrum Arcus Peripheriæ, quem Correſpondentem voco,) Principium circulationis recta MA, quæ æquabili motu circumducta (manente puncto M) ſupponitur puncto ſuo A peripheriam deſcribere AOA (qui *Circulus primus* vel potius *Circuli primi Peripheria*, dici vel ſolet vel commode poteſt,)





dum interim punctum aliquod (in eadem recta circumducta) moveri ſupponitur (æquabili item motu) ab M ad A, motu ſuo lineam Spiralem MTA deſcribens: Adeoque recta quælibet MT (à principio ſpiralis M, ad ſpiralem ubivis ducta) erit ad rectam MA, ut peripheriæ arcus AO (eodem tempore deſcriptus) ad peripheriam totam AOA, vel ut angulus AMT ad quatuor rectos: Adeoque & rectæ MT, MT, arcubus AO, AO, proportionales erunt; ut patet.

Tum, ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos AMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus (adeoque Arithmetice proportionalibus,) ſupponamus (ſuper illis angulis) ſimiles Sectores totidem (ſaltem uno minus, quia in ſpacio primo ſector inſcribi non poterit) figuræ MTM (ſpirali vera MT & recta TM comprehenſæ) inſcribi. Sectores illi omnes conſtituent figuram (ex ſimilibus ſectoribus compoſitam,) ipſa figura MTM (cui inſcribitur) minorem: Differentia vero perpetuo minuetur prout ſectores illi (eidem MTM figuræ inſcripti) plures fuerint, (ut patet,) adeo ut, ſi ſectores illi ſupponantur numero infiniti, figura ſic inſcripta ipſi MTM figuræ congruet, (per ea quæ univerſaliter monuimus ad prop. 2. Con. Sect.) & propterea ſectorum illorum omnium arcus ipſi ſpirali (Spuriæ) MT congruent.

Sunt autem illi ſimilium ſectorum arcus (ſicut eorum radii) Arithmetice proportionales, nempe ut 0, 1, 2, &c. angulus autem cujuſlibet ſectoris eſt ea pars anguli totius AMT quæ ſectorum ſive ſpaciorum numero cognominis eſt; adeoque ſi ſectores ſupponantur numero infiniti, erit angulus cujuſlibet $\frac{1}{\infty}$ (pars infiniteſima, ſeu infinite parva) anguli totius AMT, ita nempe ut omnes ſimul æquentur toti AMT. (Liceat autem mihi, καταχρηστικῶς forſan, Anguli nomine appellare angulorum etiam aggregatum, quamvis fortaſſe duos rectos vel æquet vel etiam ſuperet.)

Spiralis igitur noſtra MT conſtare ſupponitur ex infinitis ſectorum arcubus Arithmetice proportionalibus, (ſubtenſis $\frac{1}{\infty}$ anguli AMT,) quorum minimi radius eſt 0, ſeu punctum, (nullius magnitudinis,) maximi vero recta MT.

Correſpondens autem arcus conterminus PT, ex totidem conſtat ſectorum arcubus maximo æqualibus, ut patet.

Ergo aggregatum illorum (hoc eſt linea ſpiralis noſtra MT) ad aggregatum horum (hoc eſt arcum conterminum PT) eſt ut 1 ad 2. per prop. 2.

PROP. VI.

Corollarium.

ET propterea, *Linea Spiralis (noſtra) MA una circulatione facta æquatur ſemiſſi peripheriæ circuli primi, AA.*

Nam

Nam arcus conterminus ſpirali MA, eſt integra peripheria circuli primi puncto A deſcripta. Ideoque &c. per prop. 5. quod erat demonſtrandum.

PROP. VII.

Corollarium.

ET *Spiralis hæc deſcripta circulationibus duabus, tribus, quatuor, &c. integris; æquatur ſemiſſi peripheriæ circuli ſecundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. ſumptæ.*

Nam dum deſcribitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta,) Punctum illud B, peripheriam BB bis deſcribit: & dum deſcribitur ſpiralis MABC, peripheria CC ter deſcribitur; & peripheria DD quater, dum deſcribitur ſpiralis MABCD. Et ſic deinceps, pro numero circulationum multiplicanda eſt peripheria contermini circuli, & multipli ſemiſſis æquatur ſpirali interea deſcriptæ.

PROP. VIII.

Corollarium.

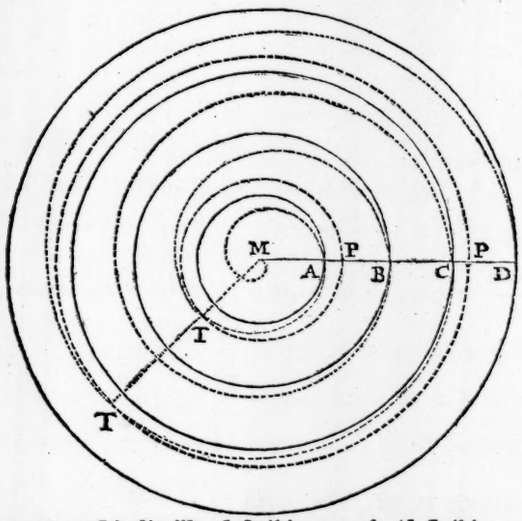
SI *vero Spiralis hæc ultra circulationem primam, ſed non duabus integris continuetur, æquabitur ſemiſſi tam peripheriæ integri circuli contermini, quam ejuſdem continuationis ſupra circulum integrum.*

Nam interea dum deſcribitur (motu compoſito) Spiralis MAT, deſcribetur etiam (à puncto P) arcus PPT, nempe tota peripheria PP cum adjuncto additamento PT. Ergo &c. per prop. 5. Quod erat demonſtrandum.

PROP. IX.

Corollarium.

ET pariter, *Si ſpiralis ea continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; æquabitur illa ſemiſſi conterminæ peripheriæ integræ, bis, ter, quater, aut ſæpius acceptæ (pro numero nempe integrarum circulationum) cum ſemiſſe item additamenti.*



Quia nempe dum ſpiralis illa deſcribitur, toties deſcribitur peripheria contermina integra, atque inſuper additamentum: Hoc eſt, correſpondens arcus conterminus continet totidem integros circuli ambitus (quot ſunt integræ circulationes) cum additamento. Ideoque conſtat propoſitum, per prop. 5.

PROP.

PROP. X.

Corollarium.

ATque inſuper, *Lineæ Spirales hæ una, duabus, tribus, quatuor, &c. circulationibus factæ, (puta MA, MAB, MABC, MABCD,) ſe habent ad invicem ut numerorum Arithmetice-proportionalium quadrata; nempe ut* 1, 4, 9, 16, *&c. Sive ſunt in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*

Sunt enim rectæ MA, AB, BC, CD, invicem æquales (propter æquabilem progreſſum puncti mobilis in recta MA, etiam continuata, tantum in una circulatione æquabiliter progredientis quantum in altera;) adeoque tam radii MA, MB, MC, MD, quam Peripheriæ (illis radiis deſcriptæ) A, B, C, D, ſunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4. Si igitur ſumantur peripheriæ, prima ſemel, ſecunda bis, tertia ter, quarta quater, erunt illa multipla, (puta 1 A, 2B, 3C, 4D,) ut numeri quadrati 1, 4, 9, 16, ſive 1×1, 2×2, 3×3, 4×4. Et propterea etiam horum multiplorum ſemiſſes, hoc eſt (per prop. 5.) ſpirales MA, MAB, MABC, MABCD.

Vel aliter, Si circuli primi peripheria ponatur $A=p$, erit ſecundi $B=2p$, tertii $C=3p$, quarti $D=4p$, & ſic deinceps; & $1A=1p$, $2B=2\times 2p=4p$, $3C=3\times 3p=9p$, $4D=4\times 4p=16p$; &c. Et (per prop. 5.) Spirales $MA=\frac{1}{2}p$, $MAB=\frac{2}{2}B=\frac{4}{2}p$, $MABC=\frac{3}{2}C=\frac{9}{2}p$, $MABCD=\frac{4}{2}D=\frac{16}{2}p$, &c. ideoque ad invicem ut 1, 4, 9, 16, &c. hoc eſt in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c. (quæ ſunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4, &c.) Quod erat demonſtrandum.

PROP. XI.

Corollarium.

ET univerſaliter; *Ejuſdem (vel ſimilium) Spiralis ſegmenta quælibet (à principio Spiralis exorſa) ſunt ad invicem in duplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per conſtructionem lineæ ſpiralis) eadem ſit ratio rectarum MT, MT, quæ eſt angulorum PMT, PMT, (anguli voce eo ſenſu ſumpta qui ſupra innuitur prop. 5.) ratio arcuum PT, PT, (quæ ex duabus illis rationibus componitur,) ut & ſpiralium MT, MT, (quæ iſtorum arcuum ſunt ſemiſſes,) erit duplicata rationis rectarum MT, MT, ſeu ut MTq, MTq.

Sic v. g. ſi recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & peripheria circuli primi (eo radio deſcripta) $1p$, erit ſpiralis $MA=\frac{1}{2}p$. Igitur, in una circulatione cum ſemiſſe, fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r=\frac{3}{2}r$, & peripheria contermini circuli $\frac{3}{2}p$, quæ ducta in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times p=\frac{9}{4}p$: Ejuſque ſemiſſis $\frac{9}{2\times 4}p=\frac{9}{8}p$ eſt ſpiralis eodem tempore deſcripta.

Similes *autem appello Spirales, ſi rectæ MA, MB, MC, &c. in una, æquales ſint homologis rectis in altera.*

PROP. XII.

Corollarium.

SI vero *ejuſmodi Spiralium diſſimilium (puta ſi MB in una, tanta ſit quanta MC in alia) rectæ conterminæ ſint æquales; erunt Spiralium illarum ſegmenta homologis ſuis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciproce proportionales.*

Nam v. g. in prima, erit ſpiralis MAB (duabus circulationibus deſcripta) æqualis ſemiſſi peripheriæ ſuæ B, bis ſumptæ; & in ſecunda, Spiralis MABC (tribus circulationibus deſcripta) æqualis ſemiſſi ſuæ peripheriæ C ter ſumptæ: Cumque ſupponantur æquales peripheriæ B in prima, & C in ſecunda, (propter æquales radios; erunt ſpirales MAB prima, & MABC ſecunda, ad invicem ut 2 ad 3, (nempe ut peripheria bis ſumpta, ad eandem vel æqualem ter ſumptam;) hoc eſt, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam recta MA in prima eſt $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & recta MA in ſecunda eſt $\frac{1}{3}$ (ejuſdem vel æqualis rectæ) MC: ſunt igitur MA in ſecunda ad MA in prima, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel ut 2 ad 3. Ideoque Spiralis prioris ſegmentum MAB, ad ſpiralis poſterioris ſegmentum MABC, ut recta MA in ſecunda ad rectam MA in prima.

Atque idem ſimiliter oſtendetur, quæcunque ſit ratio homologarum rectarum in diſſimilibus ſpiralibus.

PROP. XIII.

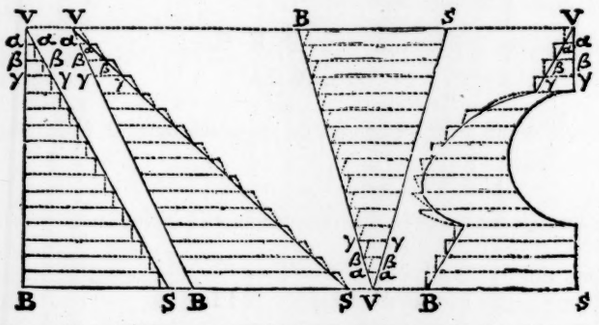
Corollarium.

SI autem ejuſmodi Spiralium diſſimilium rectæ conterminæ ſint etiam inæquales; erunt illa Spiralium ſegmenta ad invicem in ea ratione quæ componitur ex duplicata ratione rectarum conterminarum, & reciproca ratione rectarum homologarum.

Sequitur ex prop. 11. 12.

SCHOLIUM.

Notandum autem eſt, in propoſitionibus præcedentibus, quæ de Spirali agunt (quod & in ſecuturis aliquot facturus ſum,) me *Spiralis* appellationem (ne longa circumlocutione toties opus ſit,) abuſive uſum fuiſſe. Nempe, per *Spiralem*, (quoties ea ad Peripheriam comparatur,) intellectum vellem *Aggregatum omnium arcuum Sectorum ſimilium, numero infinitorum, ex quibus conſtat figura illa ex infinitis numero Sectoribus Spirali veræ inſcripta*; (qua ſcilicet & nos ad Prop. 5. &c. hujus, & Archimedes ad Prop. 21. &c. lin. Spir. uſi ſumus:) ut ad prop. 5. innuimus. Quod quidem Aggregatum ipſa linea Spirali proprio ſenſu ſumpta, perpetuo minus eſt, & maxime quidem circa ſpiralis initium. Quamvis enim Sectorum illorum numero infinitorum aggregatum, ipſi figuræ lineis recta & Spirali terminatæ, (juxta methodum Indiviſibilium) æquale ponatur; non tamen illud de omnium Arcubus cum ipſa linea Spirali (proprie dicta) comparatis obtinebit. Tantundem enim eſſet, acſi quis, dum infinita numero parallelogramma triangulo inſcripta (aut etiam circumſcripta) toti triangulo VBS æ-



qualia videat, inde concluderet eorum omnium latera rectæ VS adjacentia (rectæ VB parallela) ipſi VS ſimul æqualia eſſe, vel quæ rectæ VB adjacent (ipſi VS parallela) æqualia ſimul eſſe toti VB. (Quod ſiquando verum eſſe contingat, puta in triangulo iſoſceli, non tamen id univerſaliter concludendum erit.) Atque hoc quidem eo potius admonendum duxi, quod viderim etiam viros doctos nonnunquam ſpecioſa ejuſmodi veriſimilitudine in lapſum proclives eſſe. Cur autem

autem omissa Spirali linea genuina, spuriam hanc Spiralem peripheriæ comparaverim; causa est, quod huic possim, non autem illi, æqualem peripheriam assignare.

PROP. XIV.

Corollarium.

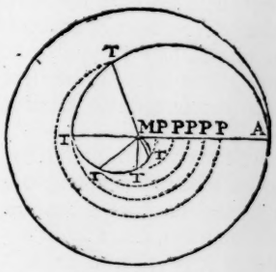
ET propterea etiam *Segmenta Spiralis hujusmodi, à principio Spiralis exorsa, sunt ad rectas conterminas, sicut Parabolæ Diametri interceptæ, ad ordinatim-applicatas.*

Nempe in ratione duplicata, per prop. 11.

PROP. XV.

Coroll.

IDeo *si supponatur Spiralis nostra MTT ita evolvi, ut rectam constituat, & rectæ omnes TM, TM, fiant invicem parallelæ; erit illa, Diameter, hæ vero, ordinatim-applicatæ in Parabola: Contra vero, si supponatur Parabolæ diameter ita in arcus convoluta, ut ordinatim-applicatæ ad idem punctum terminentur; fiet illa, Spiralis; istæ, rectæ conterminæ; hoc denique, principium Spiralis.*



SCHOLIUM.

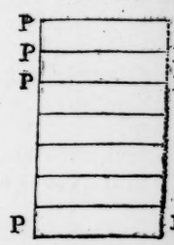
Atque hinc etiam ulterius patet illud quod post prop. 13. indicavimus. Nempe, Spiralem illam nostram ex infinitis similium Sectorum arcubus conflatam, non esse genuinam Spiralem proprie dictam, sed ipsa minorem. Cum enim constet, in Parabola, ordinatim-applicatas, quæ vertici propiores sunt quam ea quæ lateri-recto æquatur, longiores esse quam sunt diametri-interceptæ; adeoque non ita convolvi posse Parabolæ diametrum (dummodo infracta maneat) ut earum ordinatim-applicatarum extremitates in ipso vertice coeant, (quippe quod, quæ jam curvata supponitur, minor esse non possit, quam recta contermina, quæ prius erat ordinatim-applicata:) Necesse est ut vera Spiralis, quæ sic convoluta est, major sit quam ea quæ supponitur ex arcuum aggregato conflari, quam Parabolæ diametro convenire jam ostensum est, quippe quæ est ubique in duplicata ratione rectarum conterminarum.

PROP. XVI.

Corollarium.

PArabola vero sic convoluta (hoc est, figura Spirali nostræ adjacens) est ejusdem Parabolæ evolutæ semissis.

Etenim v. g. Si supponamus parallelogrammi PM latus PP ita convolvi, ut rectarum omnium PM puncta M in eodem puncto coeant, fiet ex Parallelogrammo (propter radios omnes à communi centro M æquales) circuli sector (qui circulo integro vel minor erit vel major vel æqualis, pro ea ratione quam ad invicem habeant rectæ PP, PM;) qui quidem Sector (hoc est Parallelogrammum convolutum) erit Parallelogrammi (evoluti) Semissis; (propterea quod pro infinitis Parallelogrammis ex quibus Parallelogrammum expositum constare supponitur, fiunt totidem in Sectore triangula eadem & bases & altitudines habentia:) Pari modo, si ita convolvatur Parabola ut dictum est, ut ordinatim-applicatarum (pridem parallelarum) extrema altera in eodem puncto coeant;



infinita illa parallelogramma ex quibus conſtare ſupponimus planum Parabolæ (per ea quæ diximus ad prop. 2. & 8. Con. Sect.) fient totidem triangula eaſdem & baſes & altitudines (cum illis Parallelogrammis) habentia: & propterea Parabola ſic convoluta (hoc eſt, figura Spiralis,) ipſius evolutæ ſemiſſis erit. Notandum interim erit; ſi velimus ut Ordinatim-applicatæ in Parabola (Parallelogramma illa terminantes) fiant, in Spirali, eæ rectæ quæ Sectores ſimiles terminant (æquales utique angulos habentes:) ſumenda eſſe, in Parabola, continua Parallelogramma, non quidem æque-alta, ſed quorum altitudines ſint Arithmetice-proportionales, (puta, ut 1, 3, 5, 7, &c.) quo adjacentes Ordinatim-applicatæ ſint Arithmetice-proportionales; (quod Spiralis noſtræ ratio poſtulat:) puta, ut 1, 2, 3, 4, &c.

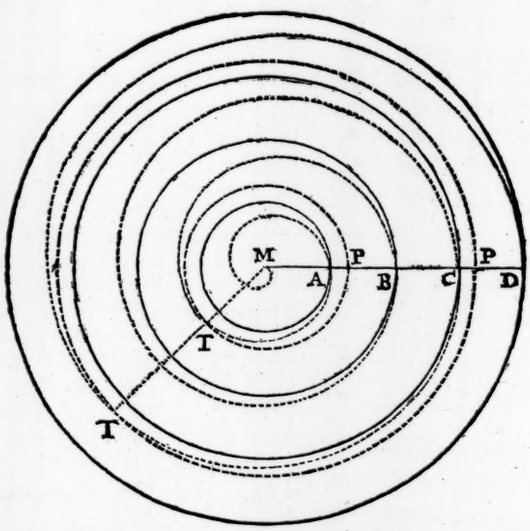
Atque hoc quidem convenit cum iis quæ habet Torricellius Exempl. 8. eorum quæ ipſius tractatui de ſolido Hyperbolico præmiſit; utut à principiis plane diverſis petita.

Notandum autem hic porro erit; Sicut ex Parabolæ convolutione hujuſmodi, (contracta Diametro in unum punctum) fit Spiralis Archimedea; ſic ex aliis Paraboloeidibus (aliiſve Trilineis iſtiuſmodi,) ſimili convolutione fieri poſſe alia Spiralium genera mille modis variata. Quorum nonnulla poſt conſiderabimus.

PROP. XVII.

Corollarium.

INſuper, *Segmenta Spiralis hujuſmodi quæ fiunt circulationibus prima, ſecunda, tertia, quarta, & ſic deinceps; ſunt inter ſe ut* 1, 3, 5, 7, *& ſic deinceps in progreſſione Arithmetica.*



Sunt enim (per 10) Spirales MA, MAB, MABC, MABCD, &c. ut 1, 4, 9, 16, &c. ergo ſegmenta Spiralium MA, AB (=MAB—MA,) BC(=MABC—MAB,) CD(=MABCD—MABC,) &c. ut 1, (4—1=) 3, (9—4=) 5, (16—9=) 7. &c:

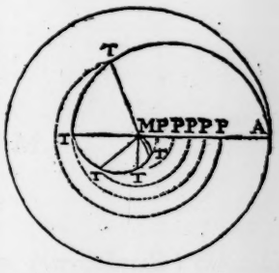
PROP. XVIII.

Corollarium.

FIT univerſaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos PMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus, erunt Spiralis hujuſmodi ſegmenta continue intercepta,* (*MT, TT, &c.*) *ut* 1, 3, 5, 7, *&c.*

Cum

Cum enim (propter æquales angulos) ipſæ rectæ MT, MT, &c. ſint ut 1, 2, 3, 4, &c. (per conſtructionem Spiralis:) & propterea Spirales MT, MT, &c. (iſtis rectis conterminæ) ſint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. erunt ipſa ſegmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4—1, 9—4, 16—9, Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ Spiralis doctrina, continuis quatuordecim propoſitionibus jam tradita, eſt, apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus, penitus omiſſa: Neſcio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX.

Lemma.

SI proponatur ſeries Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut o, 1, 4, 9, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritque

$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$.

$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$. $\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$.

$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$.

$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$. Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubique major quam ſubtripla, ſeu $\frac{1}{3}$. Exceſſus autem perpetuo decreſcit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis numero ſenario, (ut patet,) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubtriplum, ea quam habet unitas ad ſextuplum numeri terminorum poſt o. Adeoque ——

PROP. XX.

Theorema.

SI proponatur ſeries quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum; ratio quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ſubtriplam ſuperabit; eritque exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad ſextuplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix quadratica termini primi poſt o, ad ſextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (ſi terminus poſt o primus ponatur 1, & ultimi latus l,) $\frac{l+1}{3}l^2+\frac{l+1}{6l}l^2$.

Vel (poſito numero ſeu multitudine terminorum m, & ultimi latere l,) $\frac{m}{3}l^2$ $+\frac{m}{6m-6}l^2$.

Patet ex Prop. præced.

Cum autem creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra ſubtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) ſi in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeoque ———

PROP. XXI.

Theorema.

SI proponatur ſeries infinita Quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continue creſcentium, à puncto ſeu o inchoatarum; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.

Patet ex præced.

PROP. XXII.

Corollarium.

IDeoque *Conus vel Pyramis ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem vel æquali baſe æque altum) eſt ut 1 ad 3.*

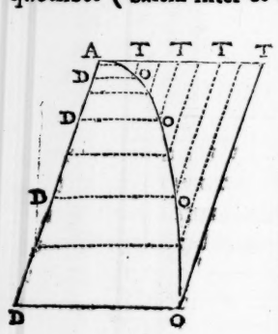
Conſtare enim ſupponimus tam Conum quam Pyramidem ex infinitis planis ſimilibus & parallelis, in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium conſtitutis, quorum minimum ſupponitur Punctum, maximum vero baſis; (per ea quæ diximus ad Prop. 6. Con. Sect.) Cylindrus autem vel Priſma, ex totidem maximo æqualibus (ut patet:) Ratio igitur eſt ut 1 ad 3. per præced.

PROP. XXIII.

Corollarium.

ITem *Complementum Semi-parabolæ, (intellige figuram AOT quæ cum ipſa ſemi-parabola complet Parallelogrammum,) eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eadem vel æquali baſe æque-altum) ut 1 ad 3. (Et conſequenter, ipſa ſemi-parabola eſt ad idem Parallelogrammum, ut 2 ad 3.)*

Eſto enim Figuræ AOT vertex A, diameter AT, baſis TO, eique parallelæ quotlibet (baſem inter & verticem) TO, TO, &c. Quoniam ſunt (per prop. 21. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. in ſubduplicata ratione rectarum AD, AD, &c. Erunt è contra ipſæ AD, AD, &c. hoc eſt TO, TO, &c. in ratione duplicata ipſarum DO, DO, &c. hoc eſt AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (conſtans ex infinitis numero rectis TO, TO, &c. in duplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmetice proportionalium) erit ad Parallelogrammum æque altum TD (conſtans ex totidem rectis ipſi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 3. per prop. 21. (Quod erat oſtendendum.) Et conſequenter, ſemiparabola AOD (parallelogrammi reſiduum) ad idem Parallelogrammum, ut 2 ad 3.

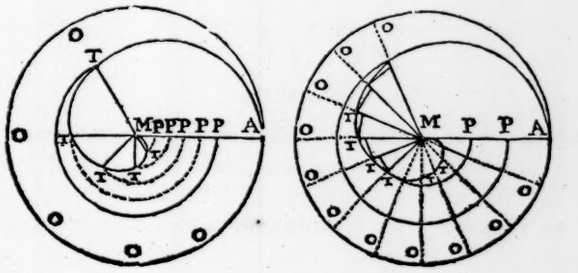


PROP.

PROP. XXIV.

Corollarium.

ITem, *Figura MTM, quæ Spirali MT (à principio Spiralis M exorſa) & recta MT contermina continetur; eſt ad Sectorem correſpondentem PMT; ut* 1 *ad* 3.



Nam (ut diximus ad Prop. 5.) conſtare ſupponimus Figuram illam MTM ex infinitis Sectoribus ſimilibus, quorum radii ſunt Arithmetice-proportionales, adeoque Sectores ipſi in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (quippe ſuorum laterum;) Sectorem autem PMT ex totidem Sectoribus maximo æqualibus: Eritque propterea Figura illa ad hanc, ut 1 ad 3. per prop. 21.

Sectoris autem nomine hic appello etiam Sectorum quotlibet aggregatum, licet ſemi-circulum (aut quidem circulum integrum) æquet vel etiam ſuperet; (ſicut & de Anguli appellatione ſupra monuimus, ad Prop. 5.)

PROP. XXV.

Corollarium.

ET propterea, *Figura MTA quæ Spiralis circulatione prima deſcribitur, æquatur trienti circuli primi, AA.*

Nam correſpondens Sector conterminus eſt ipſe circulus integer AA, circuli primi radio MA eodem tempore deſcriptus.

PROP. XXVI.

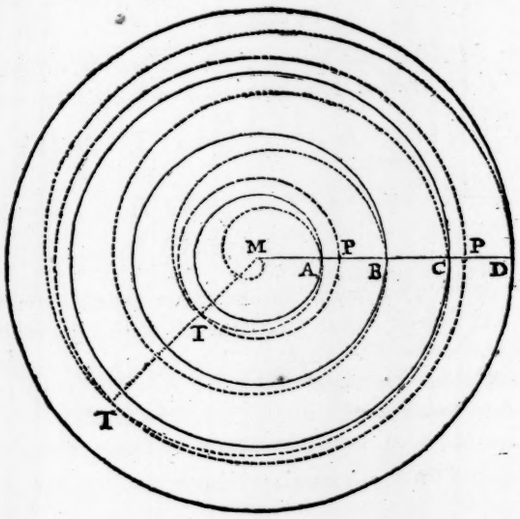
Corollarium.

QUÆ vero *figura deſcribitur integris circulationibus prima & ſecunda; prima, ſecunda & tertia; prima, ſecunda, tertia, & quarta; & ſic deinceps*: (*qualibet parte toties repetita, quoties circulando deſcribitur*:) *æquatur trienti circuli ſecundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c.* (*juxta numerum circulationum*) *ſumpti.*

Nam dum deſcribitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta) à puncto mobili ab M ad B (in recta circumducta MB) promoto; & ſimul figura plana à recta (ſic continue creſcente) circumducta: Eodem tempore deſcribitur (à recta tota MB circumducta) circulus ſecundus bis. Adeoque quot partibus continue creſcentibus (in ratione duplicata Arithmetice proportionalium) conſtat figura illa Spirali terminata, totidem maximæ æqualibus conſtabit circulus ille bis deſcriptus. Quare figura ſic deſcripta Spirali adjacens, erit ad circulum conterminum BB bis ſumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura Spiralis, quæ circulationibus prima, ſecunda & tertia deſcribitur, erit ad circulum tertium ter ſumptum, ut 1 ad 3. Et quæ deſcribitur circulationibus

lationibus prima, ſecunda, tertia, & quarta, ad circulum quartum quater ſumptum, item ut 1 ad 3. Et ſic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura Spiralis, prima circulatione deſcripta, in ſecunda circulatione repetitur; & quæ deſcribitur ſecunda, repetitur in tertia; & ſic deinceps. Adeoque v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra Spiralem primam, prima circulatione deſcriptam, continetur) quater, ſecunda (quæ inter Spiralem primam & ſecundam jacet) ter, tertia (quæ inter Spiralem ſecundam & tertiam jacet) bis, quarta ſemel deſcribitur: ideoque figura prima quater, ſecunda ter, tertia bis, & quarta ſemel ſumpta, ſimul æquantur trienti circuli quarti quater ſumpti, nempe juxta numerum circulationum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum eſt, habita ſemper numeri circulationum conſideratione.

PROP. XXVII.

Corollarium.

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam ſed non duabus integris continuetur, figura Spiralis ſic deſcripta (bis ſumpto quod bis deſcribitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejuſdem continuationis ſupra circulum integrum.*

Nam interea dum deſcribitur figura Spiralis M A T M, deſcribitur etiam figura circularis aucta P P T M; nempe circulus integer P P, cum adjuncto etiam ſectore P M T.

PROP. XXVIII.

Corollarium.

ET pariter, *ſi Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura Spiralis ſic deſcripta (repetita toties qualibet parte quoties deſcribitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut ſæpius ſumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quam etiam additamenti ſive ſectoris adjuncti.*

Quia nempe dum figura illa Spiralis (à circumducta recta creſcente) deſcribitur, toties deſcribitur, (à recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atque inſuper additamentum.

PROP.

PROP. XXIX.

Corollarium.

ATque inſuper, *Figuræ Spirales, quæ prima, quæ prima & ſecunda, quæ prima, ſecunda & tertia, quæ prima, ſecunda, tertia & quarta, (& ſic deinceps) circulationibus deſcribuntur, (puta MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c.) ſe habent ad invicem ut numerorum Arithmetice proportionalium cubi, 1, 8, 27, 64, &c. ſive in triplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*

Sunt enim rectæ MA, MB, MC, MD, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. (ut ſæpius dictum eſt,) ideoque circuli primus, ſecundus, tertius, quartus, &c. (his radiis deſcripti) ut 1, 4, 9, 16, &c. (nempe in duplicata ratione radiorum;) adeoque ſi ponatur circulus primus $A = 1c$, erit ſecundus $B = 4c$, tertius $C = 9c$, quartus $D = 16c$, &c. & propterea ſi ſumatur primus ſemel, ſecundus bis, tertius ter, quartus quater, &c. erunt $1A = 1c$, $2B = 2 \times 4c = 8c$, $3C = 3 \times 9c = 27c$, $4D = 4 \times 16c = 64c$, &c. adeoque ad invicem ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c. quapropter & horum trientes $\frac{1}{3}c$, $\frac{8}{3}c$, $\frac{27}{3}c$, $\frac{64}{3}c$, &c. hoc eſt, (per prop. 25, 26.) figuræ ſpirales MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c. ſunt etiam inter ſe ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c.

PROP. XXX.

Corollarium.

ET Univerſaliter, *Figuræ Spirales (à Spiralis principio exorſæ, & eadem vel ſimili linea Spirali terminatæ) ſunt ad invicem in triplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per conſtructionem lineæ ſpiralis) eadem ſit ratio rectarum MT, MT, quæ eſt angulorum PMT, PMT, (ſumpta *Anguli* voce, eo ſenſu quo ſupra prop. 5. ut & *ſectoris* voce, eo ſenſu quo ſupra prop. 24.) ſectorum PMT, PMT, ad invicem ratio (quæ componitur ex ratione angulorum & duplicata ratione radiorum,) eſt rectarum MT, MT, ad invicem, ratio triplicata: Et propterea eadem erit etiam ad invicem ratio figurarum ſpiralium MTM, MTM, quæ illorum Sectorum ſunt trientes. per pr. 24. *In Figura Prop. 24.*

Sic v. g. ſi recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & circulus eo radio deſcriptus dicatur $1c$; figura ſpiralis eodem tempore deſcripta erit $\frac{1}{3}c$. Igitur in una circulatione cum ſemiſſe fiet recta conterminа $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$; circulus conterminus $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{9}{4}c$, qui ductus in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{27}{8}c$, ejuſque triens $\frac{9}{8}c$, eſt figura ſpiralis quæ & circulatione integra & inſuper ſemiſſe deſcribitur. Et ſimiliter in quantacunque circulatione.

PROP. XXXI.

Corollarium.

SI vero ejuſmodi figuræ Spirales, lineis Spiralibus diſſimilibus, & rectis æqualibus terminentur: (puta ſi MB in una Spirali, tanta ſit, quanta MC in alia:) erunt figuræ illæ Spirales homologis ſuis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciproce-proportionales.

Nam in prima erit figura MABM (duabus circulationibus deſcripta) æqualis trienti circuli ſui B bis ſumpti; Et in ſecunda, figura MABCM (tribus circulationibus deſcripta) æqualis trienti circuli ſui C ter ſumpti. (per prop. 29, 30.) cumque ſupponantur æquales circuli B in prima & C in ſecunda (propter æquales radios,) erunt figuræ ſpirales MABM prima, & MABCM ſecunda, ad invi-

cem, ut 2 ad 3, nempe ut circulus bis ſumptus ad eundem vel æqualem ter ſumptum;) hoc eſt, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam MA in prima eſt $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & MA in ſecunda $\frac{1}{3}$ (æqualis rectæ) MC; ſunt igitur MA in ſecunda, ad MA in prima, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel 2 ad 3. Ideoque Figura MABM in ſpirali prima, ad figuram MABCM in ſpirali ſecunda, ut recta MA in ſecunda ad rectam MA in prima.

Atque idem ſimiliter oſtendetur, quæcunque ſit ratio homologarum rectarum in diſſimilibus ſpiralibus.

PROP. XXXII.

Corollarium.

SI autem *ejuſmodi figuræ Spirales, lineis Spiralibus diſſimilibus, & rectis item inæqualibus terminentur; erunt illæ ad invicem in ratione quæ componitur ex triplicata ratione rectarum terminantium, & reciproca ratione rectarum homologarum.*

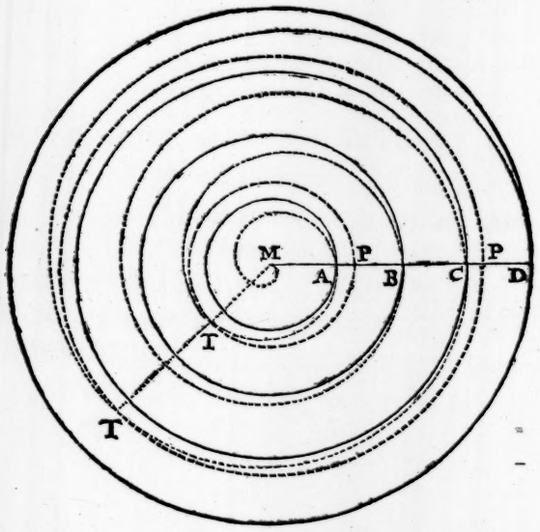
Sequitur ex Prop. 30, 31.

PROP. XXXIII.

Corollarium.

PORRO, *Figuræ Spirales, quæ circulationibus prima, ſecunda, tertia, quarta, &c. deſcribuntur, ſunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum, quorum latera ſunt Arithmetice-proportionalia.*

Nam (per pr. 29.) quæ prima, quæ prima & ſecunda, quæ prima ſecunda & tertia, quæ prima ſecunda tertia & quarta, &c. deſcribuntur: ſunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. ergo, quæ prima, quæ ſecunda, quæ tertia, quæ quarta, &c. deſcri-



buntur, ſunt ut 1, 8 — 1, 27 — 8, 64 — 27, 125 — 64, &c. hoc eſt, ut 1, 7, 19, 37, 61, &c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum continue proximorum; Quarum quidem differentiarum exceſſus, ſive differentiarum differentiæ, ſunt Arithmetice proportionales: Nam $1+6=7$. $7+12=19$. $19+18=37$. $37+24=61$. &c.

PROP.

PROP. XXXIV.

Corollarium.

ET univerſaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos PMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus; figuræ Spirales continuæ, his rectis interpoſitæ ſunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c.*

Nam (per prop. 30.) Figuræ ſpirales à principio ad has lineas continuatæ ſunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. Ergo Figuræ invicem continue ſequentes his rectis terminatæ ſunt ut 1, 8 — 1 = 7, 27 — 8 = 19, 64 — 27 = 37, 125 — 64 = 61. &c. Vel ut $\frac{1}{3}c$, $\frac{7}{3}c$, $\frac{19}{3}c$, $\frac{37}{3}c$, $\frac{61}{3}c$, &c.

PROP. XXXV.

Corollarium.

DEnique *Figuræ Spiralis portiones, quæ in ſingulis circulationibus de novo deſcribuntur, (præter illud quod in præcedente circulatione deſcriptum fuerat,) nempe, quod intra Spiralem primam continetur, quod inter primam & ſecundam, quod inter ſecundam & tertiam, quod inter tertiam & quartam, &c. ſunt ad invicem ut* 1, 6, 12, 18, 24, *&c. (addendo ſemper, poſt locum ſecundum, numerum ſenarium;) Nempe ut differentiæ differentiarum numerorum cubicorum.*

Sequitur ex 33. Quia 1, 7 — 1, 19 — 7, 37 — 19, 61 — 37, &c. ſunt ut 1, 6, 12, 18, 24, &c.

SCHOLIUM.

Hæc autem de area figuræ Spiralis doctrina, continuis duodecim propoſitionibus jam tradita, conſona eſt illis quæ tradit Archimedes circa finem libri de *Lineis Spiralibus*. Libet autem id ipſum paulo ulterius proſequi.

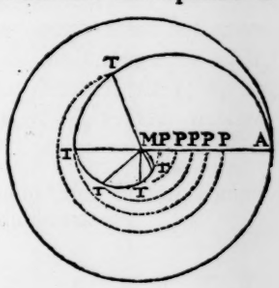
PROP. XXXVI.

Corollarium.

COmplementum figuræ Spiralis (quod nempe cum ipſa ſectorem conterminum complet) eſt ad ſectorem conterminum, ut 2 *ad* 3.

Sequitur hoc quidem ex prop. 24. Sed id ipſum aliter oſtendemus hoc modo.

Conſtare ſupponamus figuram PMTT (complementum figuræ ſpiralis MTTM) ex infinitis numero arcubus PT, PT, &c. qui quidem ſunt in duplicata ratione rectarum MP, MP, Arithmetice proportionalium, (ut oſtendimus ad prop. 11.) ſector autem conterminus MPT, ex totidem conſtabit arcubus, ipſis MP, MP, proportionalibus, adeoque Arithmetice proportionalibus, (ut patet:)



Eſt autem ſeries ejuſmodi, (in duplicata ratione Arithmetice proportionalium,) $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium, (per prop. 21.) & ſeries Arithmetice proportionalium $\frac{1}{2}$ ejuſdem ſeriei æqualium (per prop. 2.) Ergo illa ad hanc (hoc eſt, complementum figuræ Spiralis ad Sectorem) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVII.

Corollarium.

ET ſpeciatim; *Complementum figuræ Spiralis una circulatione deſcriptæ, eſt ad circulum primum (ipſi conterminum) ut 2 ad 3.*

Nam conſtabit complementum illud ex infinitis arcubus PT, in ratione duplicata rectarum MP Arithmetice-proportionalium (ſive ut 0, 1, 4, 9, &c.) quorum maximus eſt integra peripheria A; conſtat autem circulus ille integer ex totidem peripheriis Arithmetice-proportionalibus, ut 0, 1, 2, 3, &c. quarum etiam maxima eſt eadem peripheria A: Ideoque Complementum illud, ad hunc circulum, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVIII.

Corollarium.

SPatia vero quæ figuris Spiralibus in ſingulis circulationibus deſunt ad ſuos reſpective circulos complendos; ſunt ut 2, 5, 8, 11, 14, &c. Arithmetice proportionales.

Cum enim (poſito circulo primo c) erunt (per prop. 29 & 33) figuræ ſpirales circulatione prima deſcripta $\frac{1}{3}c$, ſecunda $\frac{7}{3}c$, tertia $\frac{19}{3}c$, quarta $\frac{37}{3}c$, &c. circuli autem contermini primus $1c$, ſecundus $4c$, tertius $9c$, quartus $16c$, &c. erit exceſſus circulorum, ſupra figuras Spirales conterminas, primi $\frac{2}{3}c$, ſecundi $\frac{5}{3}c$, tertii $\frac{8}{3}c$, quarti $\frac{11}{3}c$, &c. Nam $1c - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}c$. $4c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{3}c$. $9c - \frac{19}{3}c = \frac{8}{3}c$. $16c - \frac{37}{3}c = \frac{11}{3}c$, &c.

SCHOLIUM.

Et quidem facile eſſet complures propoſitiones alias hiſce ſimiles adjungere, tam de ipſis figuris Spiralibus quam earum complementis; tam quæ circulationibus integris deſcribuntur, quam intermediis. Sed ex dictis facile poterit quilibet eas, ſi opus videbitur, ſupplere, ut non neceſſe ſit diutius hic morari. Et metuo ne jamjam nimius fuerim. Adjungam tamen unum aut alterum ex dictis Corollarium, (in eorum gratiam, qui dubitant, an poſſibile ſit figuram aliquam rectilineam circulo æqualem eſſe:) Nempe ——

PAtet ex dictis; *Circulo cuilibet figuram aliquam rectilineam æqualem eſſe.*

Cum enim patet (ex pr. 25.) circulo cuilibet figuram aliquam Spiralem æqualem eſſe; & (ex prop. 16.) cuilibet figuræ Spirali aliquam Parabolam; & denique (ex pr. 23.) cuilibet Parabolæ aliquam figuram rectilineam; ſequitur & cuilibet circulo figuram aliquam rectilineam æqualem eſſe.

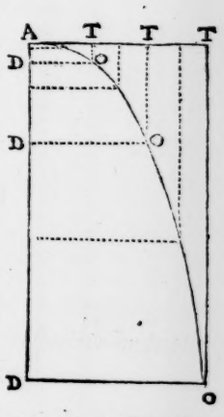
Non ſunt igitur vel rectilineum & circulus, vel linea recta & curva, quantitates adeo inter ſe heterogeneæ, quin & invicem rite comparari, & quidem invicem æquales eſſe poſſint: Quanquam fieri poſſit ut circuli diameter & perimeter eouſque ſint irrationales, ut nec veris numeris, nec etiam ullo adhuc in uſum recepto notationis modo, earum ad invicem ratio exprimi poſſit.

PORRO: Ex jam traditis innoteſcit etiam methodus *Rectam Paraboli*cæ (*vel etiam Paraboloeidicæ*) *æqualem quam proxime, inveniendi.*

Si enim, quæ ſemiparabolam rectam in vertice contingat recta AT, in quotlibet æquales particulas diviſa; (quarum quælibet dicatur a atque numerus omnium n;) & in ſingularum particularum terminis ad tangentem illam totidem ordinatim-applicentur rectæ, (Parabolæ diametro propterea parallelæ, & facientes

ad

ad Tangentem angulos rectos,) TO, TO, &c. quarum minima dicatur 1; erunt illæ ad invicem per prop. 23. ut numeri quadratici 1, 4, 9, 16, &c. & earum differentiæ ut 1, 3, 5, 7, &c. numeri impares deinceps ab unitate; (quarum differentiarum maxima erit $2n-1$.) Rectæ parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica conſtitutos) connectentes, (quæ erunt propterea ipſi Parabolæ deinceps inſcriptæ,) erunt ut $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+9}$. $\sqrt{:a^2+25}$. $\sqrt{:a^2+49}$, &c. (quippe quarum quadrata per 47 e 1. æquantur quadratis tam particularum a, quam differentiarum inter proximas quaſque parallelas, hoc eſt, numerorum imparium.) Quæ quidem rectæ (Parabolæ inſcriptæ) quo plures fuerint, eo propius ad parabolicæ menſuram accedet earum omnium aggregatum; ita tamen ut ex omnibus ſic aggregata recta ſit ipſa parabolica minor.

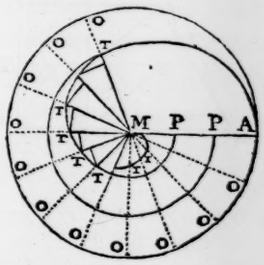


Sin velit aliquis rectam juſta majorem (ut conſtet intra quos cancellos determinare poſſit parabolicæ longitudinem;) neque difficilis erit hæc inveſtigatio, tangentium ope perficienda.

Si vero curva AOO, non ſupponatur Parabola, ſed Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, &c. Idem proceſſus erit, mutatis mutandis, atque in Parabola. Sumendæ enim pro parallelarum differentiis, non 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum Quadraticorum; ſed 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; vel 1, 15, 65, 175, &c. differentiæ numerorum Biquadraticorum; &c. prout Paraboloeideos cujuſque natura poſtulet; adeoque inſcriptæ erunt $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+49}$, &c. vel $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+225}$, &c. & ſic deinceps. Ut ex inferius tradendis pr. 45. patebit.

EAdem fere methodo, *Invenietur recta Spirali genuinæ quam-proxime æqualis.*

Si enim (per ea quæ dicta ſunt prop. 5.) ſupponatur inſcribi figuræ Spirali alia ex quotlibet ſectoribus ſimilibus conflata: Erunt (propter Spiralem) tam ſectorum arcus, quam horum ſinus ſive recti ſive verſi, ut & radii, Arithmetice proportionales. Radiorum autem continuum augmentum dicatur a. Si igitur à ſectoris cujuſvis arcus initio ad radium per ipſius terminum ductum demitti ſupponatur perpendicularis, erit illa iſtius arcus ſinus rectus, cujus quadratum ſimul cum quadrato ſinus verſi communi augmento a aucti, æquabitur quadrato rectæ Spirali inſcriptæ: (per 47 e 1.) Sinus autem verſus ille dicatur v, & totius circuli ſui diameter d; erit igitur quadratum ſinus recti (ex ductu ſinus verſi v in diametri reſiduum $d-v$ factum) $vd-v^2$; & quadratum ſinus verſi communi augmento aucti (nempe $v+a$) erit $v^2+2va+a^2$; & propterea quadratum inſcriptæ (ex his conflatum) $vd+2va+a^2$. Cum autem (propter æquales ſimilium Sectorum angulos) eadem ſit ubique ſinus verſi ad diametrum ratio, eſto ea quam habet 1 ad m (quæ ratio major minorve reputanda erit prout ſingulorum ſectorum anguli majores minoreſve fuerint:) Adeoque cum ſit $1.m::v.d$, erit $d=vm$: & propterea quadratum rectæ Spirali inſcriptæ $vd+2va+a^2=vvm+2va+a^2$. Denique, cum ſint ſimilium illorum ſectorum deinceps poſitorum arcus, adeoque & ſinus verſi, Arithmetice proportionales, (ab o inchoati,) dicantur illi o, 1, 2, 3, &c. Erunt ergo inſcriptæ illæ $\sqrt{:0m+0a+a^2}$. $\sqrt{:1m+2a+a^2}$ $\sqrt{:4m+4a+a^2}$. $\sqrt{:9m+6a+a^2}$. $\sqrt{:16m+8a+a^2}$. & ſic deinceps. Quo autem plures ſupponantur eidem figuræ Spirali ſectores inſcribi, eo propius ad lineam Spiralem accedet rectarum ſic inſcriptarum aggregatum: quod tamen vera Spirali perpetuo minus erit.



Si autem harum inſcriptarum prima omittatur, & illius vice poſt ultimam ſubjungatur

jungatur quæ proxime erat inſecutura, (quod tantundem eſt atque pro figura ex ſectoribus inſcripta, circumſcriptam ſubſtituere,) atque tandem addatur a; habebitur ex omnibus aggregata recta quæ vera ſpirali major erit; ſed quæ ad juſtam eo propius accedet quo plures ſupponantur Sectores adſcribi.

PROP. XXXIX.

Lemma.

SI proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritque

$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. $\quad\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$. $\quad\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$.

$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$.

$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$.

Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubique major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$. Exceſſus autem perpetuo decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Adeoque ——

PROP. XL.

Theorema.

SI proponatur ſeries quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ſubquadruplam ſuperabit; eritque exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix cubica termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$ vel $\frac{m}{4}l^3+\frac{m}{4l}l^3=\frac{1}{4}ml^3+\frac{1}{4}ml^2$.

Patet ex præcedente.

Cum autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuo minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) ſi in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeoque ——

PROP. XLI.

Theorema.

SI proponatur ſeries infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue

continue creſcentium, à puncto ſeu o inchoatarum; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

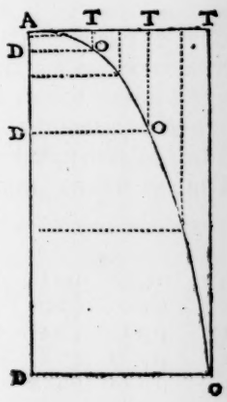
Patet ex præcedente.

PROP. XLII.

Corollarium.

IDeoque, *Complementum ſemi-paraboloeidis cubicalis, AOT, eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eadem vel æquali baſe æque altum,) ut 1 ad 4. (Et, conſequenter, ipſum ſemiparaboloeides ad idem Parallelogrammum, ut 3 ad 4.)*

Eſto enim Semiparaboloeidis cubicalis AOD, (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO, DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr. 45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipſis æquales AT, AT, &c. ſunt in ſubtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipſis æqualium TO, TO, &c. Erunt è contra ipſæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (conſtans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmetice-proportionalium;) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (conſtans ex totidem ipſi TO maximæ æqualibus,) ut 1 ad 4. (Quod erat oſtendendum.) Et conſequenter, Semiparaboloeides AOD (parallelogrammi reſiduum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.



PROP. XLIII.

Lemma.

PAri methodo invenietur ratio ſeriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, ſextuplicata, &c. Arithmetice proportionalium, à puncto ſeu o inchoatarum, ad ſeriem totidem maximæ æqualium. Nempe in Quadruplicata, erit ut 1 ad 5: in Quintuplicata, ut 1 ad 6: in Sextuplicata, ut 1 ad 7. Et ſic deinceps.

Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continue propius accedere, ita ut differentia tandem evadat quavis aſſignabili minor; adeoque in infinitum continuata evaneſcet.

Operoſas demonſtrationes lineares non adjungo; quas tamen, ſiquis poſtulet, poterit ille (modo vacet) tales exquirere figurarum inſcriptione & circumſcriptione, vel etiam alias præſtandas; (quales habet *Archimedes* pr. 10, & 11, *de lin. ſpiral.*) oſtendendo, quod ratio neque major neque minor eſt quam aſſignata. At mihi ſufficere videntur illæ quas produxi, Cavallerii *Methodum Indiviſibilium* (quoniam eam invenio à Geometris jam eſſe receptam,) ſecutus.

Nota tamen eas quibus uſus ſum demonſtrationes, potius figuras inſcribendas imitari, cum ſupponant primum terminum o. Si quis vero figuras circumſcribendas imitari mallet, fieri quidem & illud poteſt, modo primus terminus ponatur 1.

Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in ſeriebus illis quarum proceſſus eſt in Arithmetice proportionalium ratione quadruplicata (& ſequentibus) magis implicatas eſſe quam præcedentium.

Puta in Biquadratis $\frac{l+1}{5}l^4+\frac{l+1}{10l}3l^4+\frac{l+1}{30l^2}l^4+\frac{-l-1}{30l^3}l^4$. Vel $\frac{m}{5}l^4+\frac{3m}{10l}l^4+\frac{m}{30l^2}l^4-\frac{m}{30l^3}l^4=\frac{1}{5}ml^4+\frac{3}{10}ml^3+\frac{1}{30}ml^2-\frac{1}{30}ml$. (poſito nempe termino primo o, ſecundo 1, latere maximo l, numero terminorum $m=l+1$.)

In

In Superfolidis autem $\frac{l+1}{6}l^5+\frac{l+1}{3l}l^5+\frac{l+1}{12l^2}l^5+\frac{-l-1}{12l^3}l^5$. Vel $\frac{m}{6}l^5+\frac{m}{3l}l^5+\frac{m}{12l^2}l^5-\frac{m}{12l^3}l^5=\frac{1}{6}ml^5+\frac{1}{3}ml^4+\frac{1}{12}ml^3-\frac{1}{12}ml^2$.

In Sextanis, seu Cuborum Quadratis, $\frac{l+1}{7}l^6+\frac{5l+5}{14}l^5+\frac{l+1}{7}l^4-\frac{l+1}{7}l^3-\frac{l+1}{42}l^2+\frac{l+1}{42}l$. Vel $\frac{1}{7}ml^6+\frac{5}{14}ml^5+\frac{1}{7}ml^4-\frac{1}{7}ml^3-\frac{1}{42}ml^2+\frac{1}{42}ml$. Et pariter in sequentibus: ut ad prop. 182. docebitur.

Sed (quod nobis hic sufficit) ad debitam rationem ita continue magis accedunt, ut tandem differentia evadat quavis assignabili minor.

SCHOLIUM.

Si quis autem cupiat rationes hujusmodi, utut intricatas, quæ sequentibus seriebus finitis quibuscunque conveniat, (puta in septuplicata, octuplicata, &c. ratione Arithmetice proportionalium) invenire: quomodo illud fiat infra dicetur in Schol. prop. 182.

PROP. XLIV.

Theorema.

Ideoque Si intelligatur series infinita quantitatum, à puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione vel Arithmetice-proportionalium, (quam seriem Lateralium sive *Primanorum* appello,) vel eorum quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. (quam appello seriem *Secundanorum*, *Tertianorum*, *Quartanorum*, &c.) Erit totius seriei ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ sequitur in hac Tabella. Nempe

Æqualium	$\frac{1}{1}$	Vel ut 1 ad	1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanorum	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$		6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

Et sic deinceps. Ita ut fractionum Denominatores, sive Consequentes rationum, sint ab unitate Arithmetice-proportionales; communis autem sive Numerator sive Antecedens 1.

PROP. XLV.

Corollarium.

Hinc discimus methodum inveniendi aream complementi Parabolæ, & Paraboloeideos Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujuslibet potestatis; & consequenter, etiam aream Parabolæ, aut Paraboloeideos cujuscunque potestatis. Quod ostendere pollicitus sum ad prop. 48. Con. Sect.

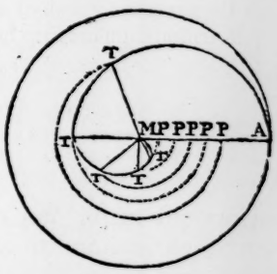
Nempe, cum complementum Parabolæ (vel Semiparabolæ) sit series secundanorum, (ut diximus ad prop. 23;) complementum Paraboloeidis cubicalis (vel semiparaboloeidis,) series Tertianorum, (ut diximus ad prop. 42;) atque (eadem ratione)

ratione) complementum Paraboloeidis Biquadraticalis, ſeries Quartanorum; complementum Paraboloeidis ſuperſolidalis, ſeries Quintanorum; & ſic deinceps: Erit horum ratio ad Parallelogrammum circumſcriptum, (ſeriem nempe totidem maximo æqualium,) ea quæ eſt 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, & ſic deinceps: juxta tabellam propoſitionis præcedentis. Et conſequenter, ipſa Parabola, Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, Superſolidale, &c. (quæ nempe cum ſuis complementis æquantur Parallelogrammis circumſcriptis,) ſunt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Et hoc quidem pacto licebit innumeris figuris curvilineis æquales rectilineas conſtituere. Quodque in ſola Parabola (ſumma cum admiratione) præſtitit Archimedes (& poſt illum alii;) id nos in Paraboloeide cujuſcunque poteſtatis jam præſtitimus.

Quæ autem de Parabolis & Paraboloeidibus hucuſque tradita ſunt, aut mox tradenda, poſſunt etiam Spiralibus facillimo negotio accommodari. Si enim ſupponamus rectam M T continue augeri, non quidem in eadem ratione cum angulo P M T, (ut in Spirali Archimedea,) ſed in ejuſdem ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. vel ſubduplicata, ſubtriplicata, ſubquadruplicata, &c. vel etiam ſubduplicatæ triplicata, quadruplicata, &c. ſubtriplicatæ duplicata, quadruplicata, &c. aut alias utcunque compoſita: orientur alia atque alia Spiralium genera: quarum tamen ad peripheriam vel arcum (eo ſenſu quo dictum eſt in Schol. prop. 13. & 15.) ratio non minus innoteſcet, (ut & figurarum adjacentium ratio ad circulum vel ſectorem,) quam in illa Archimedea. Exempli gratia. *Si augeatur recta MT in duplicata ratione anguli PMT; erit linea Spiralis (a principio inchoata) MT, ad arcum conterminum PT, ut 1 ad 3*; (quippe erit Spiralis illa, ſeries Secundanorum; arcus autem, ſeries Æqualium:) *Et Figura adjacens erit ad conterminum Sectorem, ut 1 ad 5*; (nempe ut ſeries Quartanorum ad ſeriem Æqualium:) *Et ſimiliter, ſi creſcat recta MT in anguli MPT ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Erit Spiralis (ſenſu quo ſupra) ad conterminum Arcum, ut 1 ad 4, 5, &c. & Figura adjacens ad ſectorem conterminum, ut 1 ad 7, 9, &c.* Item,



ſi creſcant rectæ MT in angulorum PMT ratione Subduplicata, Subtriplicata, &c. erunt Spirales (ſenſu quo dictum eſt) ſeu creſcentium arcuum ſimilium Aggregata, ad conterminos Arcus (ex totidem æqualibus conflatos,) ut 1 ad 1 1/2, 1 1/3, &c. Et Figura adjacens ad Sectorem conterminum, ut 1 ad 1 2/2, 1 2/3, &c. Hoc eſt; illic, ut 2 ad 3, 3 ad 4, &c. hic ut, 2 ad 4, 3 ad 5, &c. Et ſic alibi; quæcunque fuerit ratio multiplicata, vel ſubmultiplicata, vel ex his utcunque compoſita. Quæ omnia eodem modo (mutatis mutandis) demonſtrabuntur, quo prop. 5, 24, &c. (adhibitis ſaltem in auxilium propoſitionibus aliquot ſequentibus.) Atque hinc quidem Spiralium doctrina in immenſum augeri poſſit. Cum autem id ſuo quilibet Marte per jam dicta ſatis poſſit intelligere, neque nobis ſit animus labore ſupervacaneo hæc ulterius ampliandi: ſufficiat id in tranſitu monuiſſe,

Sed & hinc etiam facilis eſſet tranſitus ad Spirales non tantum in plano, ſed in ſolido deſcriptas, puta in ſuperficiebus Coni & Sphæræ, ſive etiam conoeidium & ſphæroeidium, rite conſiderandas; &, ad Spirales aut Circulos in Cylindro comparandas: Figuras item illis adjacentes, ad figuras adjacentes hiſce. Adhibitis tamen iis, quæ de ſeriebus auctis & diminutis infra ſecuturæ ſunt, propoſitionibus. Hæc autem omnia, ne nimius ſim, intacta prætereunda judico: Cum ea quilibet, ex iis quæ hic tradita ſunt vel infra tradenda, facile poſſit deducere.

MONITUM.

Monendum denique hic porro duxi; In horum Editione prima, irrepſiſſe (ſive mea ſive typographi incuria) Mendum quoddam Numerale. (4, 5, 6, perperam ſcriptis pro 5, 7, 9.) Quod occaſionem dedit Cl. Viro *Stephano de Angelis* (dum

non animadverterit, merum fuiſſe vel Calami vel Calculi lapſum, non ex Demonſtrationis vitio ortum,) cenſendi (in ſuo *de Spiralibus* Tractatu) non recte procedere hanc meam de Spiralibus doctrinam. Verum ubi reſtitutus fuerit Calculus debitus, Demonſtrationi conformis; ſtatim perſpiceret, omnia, quæ in adverſum objecerat, ſponte ſua concidere; (& quidem, quod audio, aliis id monentibus, etiam me tacente, dudum perſpexit:) Sed & totam illam de Spiralibus Doctrinam, quam ille fuſius exponit (& erudite;) hoc uno Scholio ſummatim traditam eſſe; Et quidem univerſalius, utut hoc ille non ſtatim animadverterit; Quod in cauſa fuit, cur aliquanto plura exempla jam enumeraverim (quam prius,) eadem generali methodo comprehenſa, atque eodem plane modo (vi prop. 44, 54, 64,) demonſtranda. Quæ non eo dicta ſunt, ut inventis ejus derogatum eam; (neque enim illi vitio dandum eſt, quod ego ei in eadem re præiverim:) ſed ut appareat, quam Corollariorum ferax ſit hæc noſtra Methodus generalis; cum vel Scholium unum (ubi particulatim exponatur,) materiam ſubminiſtret juſto Volumini. Et quidem totam illam de Paraboloeidibus doctrinam, propoſitionibus aliquammultis præcedentibus, & ſubſequentibus aliquammultis, traditam; hoc uno Scholio volebam Spiralibus Spatiis accommodare, (quæ ex convolutis Paraboloeidibus oriuntur;) potius quam totidem vel etiam pluribus propoſitionibus eadem de Spiralibus repetere, quæ de Paraboloeidibus dicta fuerant: tum, ne nimis excurrere viderer; tum, quia non eſſet cuiquam difficile illud facere qui ad præcedentia ſatis attenderit. Quod quidem eouſque verum eſt, ut non modo iſtiuſmodi Spatiorum Spiralium rationem ad Sectorem conterminum exhibere valeamus; ſed & Spiralem ſic aſſignare, ut ſpatium adjacens, ad Sectorem conterminum, rationem (minoris ad majus, numeris explicabilem,) datam habeat. Eſto utique ratio ſic data, ut 1 ad a. Et ponantur rectæ MT, MT, &c. (quæ continuos angulos AMT, TMT, &c. invicem æquales faciant,) ab o continue creſcentes ſecundum Seriem cujus Index ſit $\frac{a-1}{2}$. Dico, Spatium hoc Spirale (à principio exorſum, & quouſque libet continuatum,) ad Sectorem conterminum, eſſe ut 1 ad a. Cum enim Radii (ſimilium Sectorum) ſint Series cujus Index eſt $\frac{a-1}{2}$; Sectores ipſi (utpote in Radiorum ſuorum ratione duplicata,) ſunt Series Indicem habens $a-1$: Quæ itaque ad Seriem totidem maximo æqualium, (hoc eſt, Spatium Spirale, ad Sectorem conterminum circumſcriptum,) eſt, ut 1 ad a (ſeriei Indicem unitate auctum,) per prop. 64. Quod erat faciendum. Puta, ſit Ratio data, 1 ad 2; adeoque $\frac{a-1}{2}=\frac{1}{2}$: Ergo, rectæ MT, ſunt Series *Subſecundanorum*. Sit ratio data, 1 ad 5; adeoque $\frac{a-1}{2}=2$: Ergo, MT, Series *Secundanorum*. Sit ratio data, 1 ad 3; adeoque $\frac{a-1}{2}=1$: Ergo, MT, Series *Primanorum*; (quæ eſt Spiralis Archimedea.) Sit data ratio, 2 ad 3, hoc eſt 1 ad $\frac{3}{2}$; adeoque $\frac{a-1}{2}=\frac{1}{4}$: Ergo, MT, Series *Subquartanorum*. Sit data ratio, 1 ad 4; adeoque $\frac{a-1}{2}=\frac{3}{2}$: Ergo, MT, Series *Radicum Quadraticarum Tertianorum*. Et ſimiliter alibi, quæcunque fuerit ſic data ratio. Ipſam vero Curvam *Spiralem* Archimedeam, Curvæ *Parabolicæ* æqualem eſſe; à me alibi demonſtratum eſt; in Tractatu de *Curvarum* Εὐθυώσει, Tractatui de Cycloeide ſubjuncto. Et quidem pari methodo etiam alias *Spirales*, *Paraboloeidum* curvis æquales oſtendere, non eſt difficile. Sed neque difficile eſſet oſtendere (niſi quod nolim hic nimium excurrere,) Quænam *Spiralis cuinam Paraboloeidi reſpondeat*. Nempe, ut Parabolæ Apollonianæ reſpondet Spiralis Archimedea; (quippe, Curvæ Semiparabolæ cujus baſis æquetur maximæ rectarum MT, & Axis Aggregato arcuum ſimilium inſcriptorum, numero æqualium; hoc eſt, ſemiſſi arcus conterminii PT; æqualis eſt Curva Spiralis; & Figura Figuræ dimidia:) Sic, ſi ponantur MT (ſimilium Sectorum Radii) creſcentes in Ratione Secundanorum (hoc

eſt,

eſt, ut Numeri Quadratici;) Spirali huic reſpondebit Paraboloeides Semicubicale; cujus itaque curvæ æquabitur, non modo Semiparaboloeideos curva (cujus baſis æquetur rectarum MT maximæ, & Axis aggregato arcuum ſimilium Sectorum inſcriptorum, numero infinitorum, ſeu Trienti arcus contermini;) ſed & Recta linea (quam iſtius Semiparaboloeidis Semicubicalis curvæ æqualem oſtendimus, in dicto de Ἐνθυσίᾳ Tractatu;) Figura vero Spirali adjacens; dimidia figuræ adjacentis Semiparaboloeidi. Et ſimiliter alibi.

PROP. XLVI.

Lemma.

ITem (*per prop.* 44.) Data ratione quam habet ſeries una, cujuſlibet poteſtatis, (ad ſeriem æqualium;) reperitur ratio quam habet alia ſeries alterius cujuſvis poteſtatis, (ad ſeriem item æqualium:) inveniendo nempe homologum terminum progreſſionis Arithmeticæ.

Ut, ſi Quadratorum ſive Secundanorum ſeries ſit $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium; erit ſeries Lateralium ſive Primanorum $\frac{1}{2}$ ſeriei æqualium: Quia, ut ſeries Primanorum media eſt inter ſeriem Æqualium & ſeriem Secundanorum, ſic 2 (conſequens rationis quæſitæ Primanorum) eſt media Arithmetica inter 1 & 3 (conſequentes rationum Æqualium & Secundanorum.) Sic cum Cuborum ſive Tertianorum ratio ſit $\frac{1}{4}$ ſive 1 ad 4, inter quam ſeriem & ſeriem æqualium, duarum poteſtatum ſeries interjiciuntur; quærendæ ſunt duæ mediæ Arithmeticæ inter 1 & 4, puta 2 & 3, quarum illa Primanis, hæc Secundanis convenit. Et ſic in cæteris.

Et ſimiliter, ſi quærenda ſit ratio ſuperioris poteſtatis ſeriei conveniens; id reperitur progreſſionem continuando ad terminum quæſitum uſque: Ut, ſi ſeries Quartanorum rationem habeat, ad ſeriem æqualium, eam quæ eſt 1 ad 5 ſive $\frac{1}{5}$; ſeries Sextanorum habebit rationem 1 ad 7: quia in progreſſione Arithmetica ubi terminus (poſt unitatem) quartus eſt 5, terminus ſextus erit 7, & pariter in reliquis.

PROP. XLVII.

Lemma.

ATque hæc regula non minus valebit ſi exponatur ſeries quantitatum quarumlibet (non quidem juxta ſeriem Primanorum, ſed) juxta quamvis aliam Tabellæ ſeriem, & de illarum Quadratis, Cubis, &c. inquiratur.

Verbi gratia. Si intelligatur ejuſmodi ſeries quantitatum quarumlibet ſecundum ſeriem Secundanorum (quibus aſſignatur in Tabella ratio 1 ad 3) diſpoſitarum: harum Quadratis conveniet ratio 1 ad 5; (quia 1, 3, 5, ſunt Arithmetice-proportionales; & Cubis conveniet ratio 1 ad 7; & ſic deinceps; quia 1, 3, 5, 7, &c. ſunt Arithmetice-proportionales, prout Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt poteſtates proxime ſequentes & Geometrice proportionales.

Nec hoc aliud eſt, quam quod habetur in Tabella; nam ſi quantitates aſſumptæ ſint ſeries Secundanorum, cujus ratio eſt $\frac{1}{3}$; earum quadrata erunt ſeries Quartanorum, cujus ratio $\frac{1}{5}$; & earundem cubi erunt ſeries Sextanorum, cujus ratio $\frac{1}{7}$; &c. ut dictum eſt.

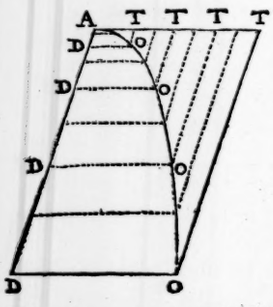
PROP. XLVIII.

Corollarium.

ET conſequenter, *Conoeides vel Pyramidoeides complemento Semi-parabolæ (circa ipſius diametrum) aptandum, eſt ad Cylindrum vel Priſma ſuper æquali baſe æque altum, ut* 1 *ad* 5.

Nempe ſi complementum ſemi-parabolæ rectæ, AOT, manente recta AT,

circumvolvatur, ut deſcribatur Conoeides rectum: vel, univerſaliter, ſi (juxta methodum à nobis indicatam prop. 5, 6, 9. Con. Sect.) diametro vel axi A T, ordinatim-applicentur circuli, vel ſimilia quævis plana, quorum vel radii vel rectæ ſimiliter poſitæ rationem eandem habeant inter ſe quam rectæ T O, T O, &c. ut compleatur Conoeides vel Pyramidoeides ſive rectum ſive inclinatum: dico illud Conoeides vel Pyramidoeides eſſe ad Cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque altum ut 1 ad 5. Nam, cum rectæ omnes T O, T O, &c. ſint ſeries Secundanorum, (quibus convenit ratio 1 ad 3;) ſimilia quælibet plana ſuper has rectas ſimiliter conſtituta, erunt inter ſe ut harum rectarum quadrata; ſive in duplicata ratione rectarum T O, T O. Atque ratio ſeriei rectarum illarum conveniens (ſeriei quippe ſecundanorum,) eſt 1 ad 3; ergo ſeriei planorum conveniet ratio 1 ad 5: quia nempe 1, 3, 5, ſunt Arithmetice-proportionales: (prout Unitas, Radix, & Quadratum ſunt Geometrice-proportionalia.) Et quidem, ſi rectæ T O, T O, &c. ſint ſeries Secundanorum; earum quadrata (vel plana quadratis proportionalia) erunt ſeries Quartanorum; cui in Tabella convenit ratio 1 ad 5.



PROP. XLIX.

Corollarium.

ET ſimiliter; *Si complemento ſemiparaboloeidis cubicalis aptetur (circa ipſius Diametrum) Conoeides vel Pyramidoeides; erit hoc ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem vel æquali baſe æque altum,) ut 1 ad 7.*

Nam, cum rectæ T O, T O, &c. (in complemento Semiparaboloeidis Cubicalis,) ſint ſeries Tertianorum, quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4; horum quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) ſeriei conveniet ratio 1 ad 7; quia 1, 4, 7, ſunt Arithmetice-proportionales. Vel etiam, quia plana ſunt ſeries Sextanorum, quibus in Tabella aſſignatur ratio 1 ad 7.

PROP. L.

Corollarium.

ET pariter; *ſi ſemiparaboloeidium aliorum (puta Biquadraticalium, Superſolidalium, &c.) complementis aptetur (circa eorum diametros) Conoeides vel Pyramidoeides aliquod; habebit illud ad Cylindrum vel Priſma (ſuper æquali baſe æque altum) rationem notam (puta 1 ad 9, 1 ad 11, &c.)*

Cum enim complementorum illorum rectæ ſint ſeries Quartanorum, Quintanorum, &c. adeoque rationes in Tabella aſſignatas habeant 1 ad 5, 1 ad 6, &c. ſeries Quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) rationem habebunt 1 ad 9, 1 ad 11, &c. quia 1, 5, 9, vel 1, 6, 11, &c. ſunt Arithmetice-proportionales. Vel etiam, quia ſi rectæ ſint ſeries Quartanorum, Quintanorum, &c. plana ſimilia ad has rectas ſimiliter poſita, erunt ſeries Octavanorum, Decimanorum, &c. quibus convenit ratio 1 ad 9, 1 ad 11, &c.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto figurarum ſolidarum ſuperficiebus curvis comprehenſarum ingens multitudo reduci poſſunt ad alias ſuperficiebus planis comprehenſas; & corpora non modo conica (quod docuerunt veteres,) ſed & alia quamplurima conoeidica, ad cylindrum reduci. Quod neſcio an quiſpiam alius antehac oſtenderit.

PROP.

PROP. LI.

Lemma.

Juxta eandem regulam (*prop.* 46, 47.) Si exponatur ſeries quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ ſeriem; de illarum radicibus quadraticis, cubicis, &c. aut quibuſvis intermediis poteſtatibus, pariter inquirendum erit.

Exempli gratia; ſi exponantur infinita numero Quadrata (vel quælibet plana ſimilia) juxta ſeriem Quartanorum; (cui aſſignatur, in Tabella, ratio 1 ad 5:) ſeries laterum (vel rectarum in illis ſimiliter poſitarum) rationem habebit (ad ſeriem æqualium) 1 ad 3: quia 1, 3, 5, ſunt Arithmetice-proportionalia: vel etiam, quia ubi plana ſunt ſeries Quartanorum, eorum latera erunt ſeries ſecundanorum, quibus aſſignatur in Tabella ratio 1 ad 3.

Sic, ſi exponantur cubi numero infiniti (vel quælibet ſimilia ſolida) juxta ſeriem ſextanorum, quibus in Tabella congruit ratio 1 ad 7; eorum lateribus cubicis (vel rectis in his ſimiliter poſitis) conveniet ratio 1 ad 3; & horum laterum quadratis (vel planis in cubis illis ſimiliter poſitis) ratio 1 ad 5; quia duarum mediarum Arithmeticarum inter 1 & 7, minor eſt 3, major 5, (ſunt enim 1, 3, 5, 7, Arithmetice-proportionalia: duas autem medias Arithmeticas interpono inter 1 & 7; quia totidem ſupponimus medias Geometricas inter unitatem & cubum, nempe Latus & Quadratum; ſunt enim Unitas, Latus, Quadratum, Cubus, Geometrice proportionalia. Et quidem ſi Cubi ſint ſeries ſextanorum, Latera erunt ſeries ſecundanorum; & laterum Quadrata, ſeries quartanorum; quibus in Tabella conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 5.

Si vero quantitates expoſitæ in eadem ſerie ſextanorum, eſſent Quadrata (vel plana quælibet ſimilia,) eorum lateribus conveniret ratio 1 ad 4. Quia inter 1 & 7 media Arithmetica eſt 4; ſicut inter Unitatem & Quadratum media Geometrica eſt Radix vel Latus. Et quidem ſi Quadrata ſint ſeries ſextanorum, eorum Latera erunt ſeries tertianorum; quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4.

PROP. LII.

Corollarium.

ET propterea; *Ex cognitis rationibus quas habent Conoeidea & Pyramidoeidea, prop.* 48, 49, 50. *memorata, ad Cylindrum vel Priſma,* (*ſuper æquali baſe æque altum*;) *cognoſcentur rationes quas habent plana illa unde conſtruuntur, ad Parallelogrammum circumſcriptum. Nempe complementum Semiparabolæ ut* 1 *ad* 3: *complementa Semiparaboloeidis Cubicalis, Biquadraticalis, Superſolidalis, &c. ut* 1 *ad* 4, 1 *ad* 5, 1 *ad* 6, *&c.*

Si enim Conoeidea vel Pyramidoeidea illa cognoſcantur eſſe ſeries Quartanorum, Sextanorum, Octavanorum, Decimanorum; &c. eiſque convenire rationes 1 ad 5, 1 ad 7, 1 ad 9, 1 ad 11, &c. Eorum lateribus (quæ propterea ſunt ſeries Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c.) convenient rationes 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, &c. Quia 1, 3, 5, item 1, 4, 7, item 1, 5, 9, item 1, 6, 11, &c. ſunt Arithmetice-proportionales.

PROP. LIII.

Lemma.

HIs intellectis; patet aditus ad inveſtigationem rationum quas (ad ſeriem maximæ æqualium) habere dicantur ejuſmodi ſeries Radicum Quadraticarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. numerorum ſive quantitatum Arithmetice-proportionalium, à puncto vel o

inchoatarum; (puta $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$, &c. $\sqrt{c}\,0, \sqrt{c}\,1, \sqrt{c}\,2, \sqrt{c}\,3$, &c. $\sqrt{qq}\,0, \sqrt{qq}\,1, \sqrt{qq}\,2, \sqrt{qq}\,3$, &c.) Quas appello series Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.

Exempli gratia. Si exponantur ejusmodi infinita numero Quadrata Arithmetice-proportionalia, sive juxta seriem Primanorum; quibus in Tabella assignatur ratio 1 ad 2: Eorum Lateribus, (hoc est, seriei subsecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (sive 2 ad 3;) quia $1, 1\frac{1}{2}, 2$, sunt Arithmetice-proportionalia.

Item, si supponantur ejusmodi infiniti Cubi Arithmetice-proportionales, sive juxta seriem Primanorum; quibus convenit in Tabella, ratio 1 ad 2: Illorum radicibus cubicis, (hoc est seriei subtertianorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{3}$ (vel 3 ad 4:) & harum radicum quadratis, ratio 1 ad $1\frac{2}{3}$ (vel 3 ad 5:) Quia scilicet $1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2$. sunt Arithmetice-proportionalia; sicut Unitas, radix, quadratum, & cubus, sunt Geometrice-proportionalia.

Et pari modo, si infinita Biquadrata, Supersolida, &c. constituta intelligantur juxta seriem Primanorum, quibus convenit ratio 1 ad 2; eorum radicibus Biquadraticis, Supersolidalibus, &c. convenient rationes 4 ad 5, 5 ad 6, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{4}$, 1 ad $1\frac{1}{5}$ &c. quia nempe $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{2}{4}, 1\frac{3}{4}, 2$; item $1, 1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}, 1\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5}, 2$; &c. sunt Arithmetice-proportionalia. Adeoque ——

PROP. LIV.

Theorema.

SI intelligatur series infinita quantitatum, à puncto seu 0 inchoatarum, & continue crescentium pro ratione Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. numerorum Arithmetice-proportionalium; (quam appello seriem *Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.*) Erit totius ratio ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ sequitur in hac Tabella: Nempe

Subsecundanorum	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	Vel, ut 1 ad 1 1/2. 1 2/3. 1 3/4. 1 4/5. 1 5/6. 1 6/7. 1 7/8. 1 8/9. 1 9/10. 1 10/11.
Subtertianorum		
Subquartanorum		
Subquintanorum		
Subsextanorum		
Subteptimanorum		
Suboctavanorum		
Subnonanorum		
Subdecimanorum		

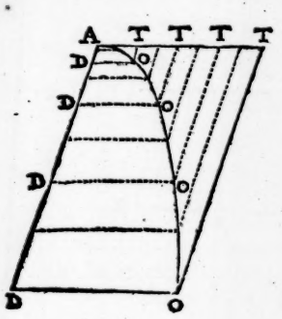
Et sic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV.

Corollarium.

ERgo, *Planum semi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3. (Et consequenter ipsius complementum est ad idem Parallelogrammum ut 1 ad 3.)*



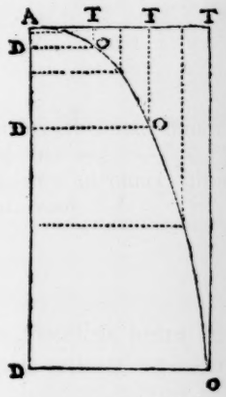
Est enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) series infinita subsecundanorum (per 8 prop. Con. Sect.) Parallelogrammum autem series totidem maximo æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. (&, consequenter, ipsius complementum, nempe Parallelogrammi residuum, ut 1 ad 3.)

PROP.

PROP. LVI.

Corollarium.

ITem, *Planum Semi-paraboloeidis (vel etiam Paraboloeidis) cubicalis, eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 3 ad 4.* (*& conſequenter, ipſius Complementum, eſt ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.*)



Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatæ in Paraboloeide cubicali ſint in ſubtriplicata ratione diametrorum (ſive diſtantiarum à vertice,) erit planum ex illis omnibus conflatum ſeries ſubtertianorum; quæ ſe habet ad ſeriem totidem maximo æqualium, (hoc eſt, ad Parallelogrammum circumſcriptum,) ut 1 ad 1 ⅓, ſive ut 3 ad 4. (Et conſequenter, ipſius complementum, nempe parallelogrammi reſiduum, eſt ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)

PROP. LVII.

Corollarium.

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloeidis (vel Paraboloeidis) Biquadraticalis, Superſolidalis, aut ſuperioris cujuſvis poteſtatis, ratio ad Parallelogrammum circumſcriptum nota erit; puta ut 4 ad 5, 5 ad 6, &c.* (*Et conſequenter, ipſorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.*)

Sunt enim illa plana ſeries ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. ideoque, ad ſeries Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6; &c. &, conſequenter, eorum complementa (quæ quidem ſunt ſeries Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Adeoque & per hanc etiam Tabellam, licet Parabolarum, & Paraboloeidium cubicalis, biquadraticalis, aut ſuperioris cujuſlibet poteſtatis, & eorundem etiam Complementorum, aream invenire: quod pollicitus ſum ad Prop. 48. Con. Sect. & ſupra præſtiti ad Prop. 45. hujus.

PROP. LVIII.

Lemma.

TAndem, *ope ejuſdem Regulæ* (*prop.* 46.) Si proponatur ejuſmodi ſeries infinita quantitatum, à puncto vel o inchoatarum, & continue creſcentium, pro ratione Poteſtatis (non ſimplicis tantum cujuſvis, ſed &) compoſitæ: ratio quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, inveſtigatur. Puta Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. aut etiam Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Vel Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. aut Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. Aut etiam Series aliæ quocunque modo compoſitæ.

Exempli gratia. Cum ſeries ſubtertianorum (puta √c 0, √c 1, √c 2, √c 3, &c.) rationem habeant (ad ſeriem totidem maximæ æqualium) eam quæ eſt 3 ad 4, ſeu 1 ad 1 ⅓: Eorum quadrata (quæ eadem ſunt & radices cubicæ ſecundanorum, puta √c 0, √c 1, √c 4, √c 9, &c.) rationem habebunt ad totidem maximæ æqualia,

æqualia, eam quæ eſt 1 ad $1\frac{2}{3}$, vel 3 ad 5. Quia nempe 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, vel $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$, ſunt Arithmetice proportionalia.

Pariter, ſeriei ſubquartanorum cubi, vel (quod tantundem eſt) radices biquadraticæ ſeriei cuborum vel tertianorum; rationem habebunt ad ſeriem Æqualium, ut 4 ad 7. Cum enim ſeries ſubquartanorum rationem habeat in Tabella 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel 4 ad 5: eorum cubi rationem habebunt (ad ſeriem totidem maximo æqualium) ut 1 ad $1\frac{3}{4}$, vel 4 ad 7. Quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, vel $\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$, ſunt Arithmetice-proportionalia, ſicut Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt Geometrice-proportionalia.

Et ſimiliter in poteſtatibus magis adhuc compoſitis; puta Radices quadraticæ cuborum ſeriei ſubquintanorum. Nam ſeriei ſubquintanorum convenit ratio 1 ad $1\frac{1}{5}$, vel 5 ad 6; ergo eorum cubis conveniet ratio 1 ad $1\frac{3}{5}$ vel 5 ad 8, (quia nempe 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, vel $\frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}$, ſunt Arithmetice-proportionalia;) & eorum Radicibus quadratis, ratio 1 ad $1\frac{3}{10}$, vel 10 ad 13, (quia nempe $1\frac{3}{10}$ eſt medium Arithmeticum inter 1 ad $1\frac{3}{5}$, ſunt enim 1, $1\frac{3}{10}$, $1\frac{6}{10}$ $(=1\frac{3}{5})$ vel $\frac{10}{10}, \frac{13}{10}, \frac{16}{10}$ $(=\frac{8}{5})$ Arithmetice proportionalia;) Vel etiam cum radices Quadraticæ ſubquintanorum ſint ſeries ſubdecimanorum; cui convenit ratio 10 ad 11, vel 1 ad $1\frac{1}{10}$: Harum radicum Cubi rationem habebunt eam quæ eſt 10 ad 13, vel 1 ad $1\frac{3}{10}$: Quia 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{3}{10}$, vel $\frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}$, ſunt quatuor termini Arithmetice proportionales.

Atque eodem modo, in ſeriebus aliarum Poteſtatum utcunque compoſitarum, earundem ratio ad ſeriem æqualium inveſtigabitur. Adeoque ——

PROP. LIX.

Theorema.

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, à puncto ſeu 0 inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus (prop. 44 & 54 memoratis) compoſitæ; erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

Seriei

Radices	Æqualium	Primanorum	Secundanorum	Tertianorum	Quartanorum	Quintanorum	Sextanorum	Septimanorum	Octavanorum	Nonanorum	Decimanorum
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Quadraticæ	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
Cubicæ	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{13}$
Biquadrat.	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{14}$
Superſolidæ	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{15}$
Sextanæ	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{16}$
Septimanæ	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{17}$
Octavanæ	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{18}$
Nonanæ	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{9}{19}$
Decimanæ	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{10}{20}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

PROP.

PROP. LX.

Corollarium.

ERgo, *Conoeidea & Pyramidoeidea Parabolica & Paraboloeidica; quæ nempe Parabolæ, Paraboloeidi cubicali, biquadraticali, ſuperſolidali, &c. aptantur; ſunt ad Cylindrum & priſma circumſcriptum, (vel aliud quodvis ſuper æquali baſe æque altum,) ut 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.*

Cum enim Parabolæ, & Paraboloeidium illorum plana ſint ſeries rectarum in ratione ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. ſive ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, ſuperſolidæ, &c. Primanorum: Conoeidea & Pyramidoeidea ſic aptata, ſunt ſeries planorum in duplicata ratione iſtarum rectarum; & propterea, ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, ſuperſolidæ, &c. Secundanorum: quibus in tabella aſſignantur rationes illæ 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.

PROP. LXI.

Corollarium.

SEd & hinc innoteſcit methodus quadrandi non modo Parabolam ſed & Paraboloeidea omnia, (eorumque complementa,) non modo ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſimplicis alicujus poteſtatis, (de quibus dictum eſt prop. 55, 56, 57, item prop. 23, 45.) Sed & juxta rationem poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus compoſitæ. Puta; ſi ordinatim-applicatæ ſint in diametrorum ratione duplicatæ ſubtriplicata, ſubquintuplicata, ſubſeptuplicata, &c. vel triplicatæ ſubquadruplicata, ſubquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumſcriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. Et eorum complementa (quorum ordinatim-applicatæ erunt propterea in ſuarum diametrorum ratione ſubduplicatæ triplicata, quintuplicata, ſeptuplicata, &c. item ſubtriplicatæ quadruplicata, quintuplicata, &c.) rationem habebunt 2 ad 5, 2 ad 7, 2 ad 9, &c. 3 ad 7, 3 ad 8, &c. Et ſimiliter in cæteris: juxta tenorem præcedentis Tabellæ, prop. 59.

Nam ſi ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ſuarum ratione duplicatæ ſubtriplicata, erit planum illud ſeries rectarum quæ ſe habent ad invicem ut quadrata radicum cubicarum, (vel radices cubicæ quadratorum) numerorum Arithmetice proportionalium, ſive ut radices cubicæ ſecundanorum; quibus in Tabella convenit ratio 3 ad 5.

Et hujus complementum ordinatim-applicatas habebit in diametrorum ſuarum ratione ſubduplicatæ triplicata, (quod tali argumento probabitur, quo uſus ſum ad Prop. 23.) & propterea planum illud erit ſeries radicum quadraticarum Cuborum ſive Tertianorum; quibus aſſignatur in Tabella ratio 2 ad 5.

Et pariter de aliis judicandum.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ (præter eas quas innuimus ad Prop. 45, & 57.) ad æquales rectilineas reducuntur. Nempe omnia cujuſcunque generis Paraboloeidea, & eorum complementa.

PROP. LXII.

Corollarium.

ATque exinde etiam patet methodus ad æqualia Cylindros & Priſmata reducendi Conoeidea & Pyramidoeidea omnia Parabolica & Paraboloeidica, (non modo qualia memorantur prop. 60, ubi planorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſimplicis alicujus poteſtatis, ſed &) etiam quæ aptantur ejuſmodi Paraboloeidibus, (qualia memorantur prop. 61.) quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſeriei alicujus poteſtatis compoſitæ.

Exempli gratia. Si Paraboloeidis ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-duplicatæ, (vel ſubtriplicata duplicatæ,) erit iſtius planum rectarum ſeries infinita in ratione radicum cubicarum ſecundanorum: & propterea Conoeides vel Pyramidoeides erit ſeries totidem planorum in earundem rectarum ratione duplicata, ideoque radicum cubicarum Quartanorum; & propterea (juxta tabellam Prop. 59.) ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 7.

Item, ſi Paraboloeidis ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubquadruplicatæ triplicata; erunt plana Conoeidis vel Pyramidoeidis, in earundem diametrorum ratione ſubquadruplicatæ-ſextuplicata, (ſive, quod tantundem valet, ſubduplicatæ-triplicata,) ideoque Conoeides vel Pyramidoeides illud (ex iſtorum planorum ſerie conflatum) ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 4 ad 10, vel 2 ad 5.

Et pariter in aliis juxta tenorem Tabellæ.

PROP. LXIII.

Corollarium.

EOdem modo; Eorundem Semi-Paraboloeidium complementis aptata Conoeidea & Pyramidoeidea, ad æqualia Cylindros & Priſmata reducuntur.

Exempli gratia. Si Semi-paraboloeidis complementum ordinatim applicatas habeat in diametrorum ratione ſubduplicatæ triplicata, erit planum illud rectarum ſeries infinita in ratione radicum quadraticarum Cuborum ſive Tertianorum, & proinde Conoeides vel Pyramidoeides huic aptatum, erit ſeries totidem Planorum in earundem rectarum ratione duplicata, adeoque in diametrorum ratione ſubduplicatæ-ſextuplicata (ſeu, quod tantundem valet, in diametrorum ratione triplicata:) erit igitur ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 2 ad 8, vel 1 ad 4.

Item, ſi ſemi-paraboloeidis Complementum ordinatim-applicatas habeat in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-quadruplicata; erunt plana Conoeidis vel Pyramidoeidis in earundem diametrorum ratione ſubtriplicatæ-octuplicata; & propterea ut radices cubicæ octavanorum; adeoque Conoeides vel Pyramidoeides illud, ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 11.

Et pariter de aliis judicandum eſt juxta Tabellam præmiſſam.

SCHOLIUM.

Docuimus igitur, quo modo Parabolæ & Paraboloeidea omnia cujuſcunque generis, & eorum Complementa, ad Parallelogramma: Et eorundem Conoeidea & Pyramidoeidea ad Cylindros & Priſmata; reduci poſſunt. Adeoque innumera Problemata ſolvimus quæ nemo (quantum ſcio) antea ſuſcepit, nedum exſequutus eſt.

Placet autem adhuc ex Tabellis omnibus præcedentibus (Prop. 44, 54, 59.) hoc univerſale Theorema colligere, (quod quidem convenit cum Regula Prop. 46.) Nempe ——

PROP.

PROP. LXIV.

Theorema.

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, à puncto ſeu o inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione cujuſcunque poteſtatis, ſive ſimplicis ſive ex ſimplicibus compoſitæ; erit totius ratio, ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ eſt Unitatis ad Indicem iſtius poteſtatis unitate auctum.

Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. (ſive poteſtatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) Indices ſtatuo 1, 2, 3, 4, &c. ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. (ſive Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. Primanorum, ſive Arithmetice-proportionalium) Indices ſtatuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Poteſtatis cujuſvis compoſitæ indicem facio ex componentium indicibus compoſitum: Puta Secundanorum Cubi (vel Tertianorum Quadrata) indicem habent $6 = 2 \times 3$: Subſecundanorum Radices cubicæ (vel ſubtertianorum Radices Quadraticæ) indicem habent $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: Cubi Radicum quadraticarum Quintanorum, indicem habebunt $\frac{15}{2} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5$.

Rationes autem his poteſtatibus (in Tabellis) aſſignatæ, ſunt hujuſmodi. Puta, Primanis, Secundanis, Tertianis, Quartanis, &c. 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, &c. hoc eſt 1 ad 1 + 1, 1 ad 2 + 1, 1 ad 3 + 1, 1 ad 4 + 1, &c. Subſecundanis, Subtertianis, Subquartanis, &c. 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{2}$, 1 ad $1\frac{1}{3}$, 1 ad $1\frac{1}{4}$, &c. hoc eſt 1 ad $\frac{1}{2}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{3}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{4}$ + 1, &c. Tertianorum Quadratis (ſive Sextanis) 1 ad 7, hoc eſt, 1 ad 6 + 1. Tertianorum Radicibus Quadraticis 2 ad 5, ſive 1 ad $\frac{5}{2}$, hoc eſt 1 ad $\frac{3}{2}$ + 1. Subſecundanorum radicibus cubicis (ſive Subſextanis) 6 ad 7, ſive 1 ad $\frac{7}{6}$, hoc eſt 1 ad $\frac{1}{6}$ + 1. Cubis radicum quadraticarum Quintanorum, (ſive Quindecimanorum radicibus quadraticis,) 2 ad 17, ſive 1 ad $\frac{17}{2}$, hoc eſt 1 ad $\frac{15}{2}$ + 1. (Et ſic de cæteris.) Quod affirmat Theorema. Sin Index ſupponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$; erit ratio, ut 1 ad 1 + $\sqrt{3}$. &c.

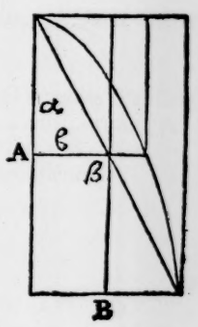
PROP. LXV.

Theorema.

EX cognita ratione quam habet quælibet ſeries ad ſeriem Æqualium, cognoſcitur ratio quam habet quælibet ad quamlibet aliam.

Exempli gratia. Parabola ad triangulum, (hoc eſt ſeries ſubſecundanorum ad ſeriem primanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 4 ad 3. Semi-parabolæ complementum ad Triangulum, vel etiam Conus ad Conoeides Parabolicum, (hoc eſt ſeries Secundanorum ad ſeriem Primanorum,) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. Semi-parabola ad ſuum complementum, (hoc eſt ſeries Subſecundanorum ad ſeriem Secundanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 1. Sic Parabola ad Paraboloeides cubicale, ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, vel ut 8 ad 9: Et Conoeides illius ad Conoeides hujus, ut $\frac{2}{4}$ ad $\frac{3}{5}$, vel ut 5 ad 6. Paraboloeides cubicale ad Biquadraticale, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vel ut 15 ad 16: Et Conoeides illius ad Conoeides hujus, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{4}{6}$, vel ut 9, ad 10. Et ſic in aliis.

Intellige; ſi eaſdem vel æquales habeant & baſes & altitudines (aut ſaltem reciprocatas:) Nam ſi diverſas habeant vel baſes vel altitudines vel utraſque, ratio ſeriei unius ad aliam, componitur ex rationibus & baſium & altitudinum & ea quæ eſt ſerierum propria. Puta ſi Parabolæ baſis B altitudo A, Trianguli baſis $\mathcal{C}$ altitudo α; erit Parabola illa ad Triangulum, ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2} \alpha \mathcal{C}$, vel 4 A B ad 3 $\alpha \mathcal{C}$, & pariter in cæteris. Item, ſi Trianguli baſis B, altitudo A; & Parabolæ baſis β, altitudo α, erit Parabola ad Triangulum ut $\frac{2}{3} \alpha \beta$ ad $\frac{1}{2}$ A B, vel 4 $\alpha \beta$ ad 3 A B.



Demonſtratio patet. Cum enim Parabola A B ſit $\frac{2}{3}$ Parallelogrammi A B; & Triangulum $\alpha \mathcal{C}$ ſit $\frac{1}{2}$ Parallelogrammi $\alpha \mathcal{C}$, erit illa ad hoc ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2} \alpha \mathcal{C}$. Et ſimiliter in aliis.

PROP. LXVI.

Theorema.

EX cognita quantitate ſeriei alicujus integræ, cognoſcitur quantitas ejuſdem obtruncatæ.

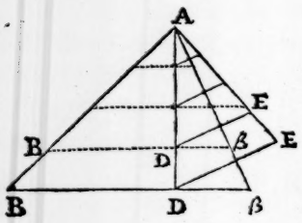
Puta, Si A B Triangulum ſit $\frac{1}{2}$ A B Parallelogrammi; & $\alpha\mathfrak{C}$ Triangulum, $\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{C}$ Parallelogrammi: erit reſiduum Trapezium, $\frac{1}{2}$ A B — $\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{C}$. Item A B Parabola $\frac{2}{3}$ A B parallelogrammi circumſcripti; & $\alpha\beta$ parabola $\frac{2}{3}\alpha\beta$ parallelogrammi circumſcripti: erit reſiduum, $\frac{2}{3}$ A B — $\frac{2}{3}\alpha\beta$. Et pariter in aliis.

Fig. præced.

PROP. LXVII.

Corollarium.

SI Triangulum rectis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abſcindentibus;) abſciſſa Triangula (verticem inter & rectas ſecantes,) ſunt ut 1, 4, 9, 16, *&c. numeri quadrati. Spatia vero rectis illis interjecta, ut* 1, 3, 5, 7, *&c. Arithmetice-proportionales.*

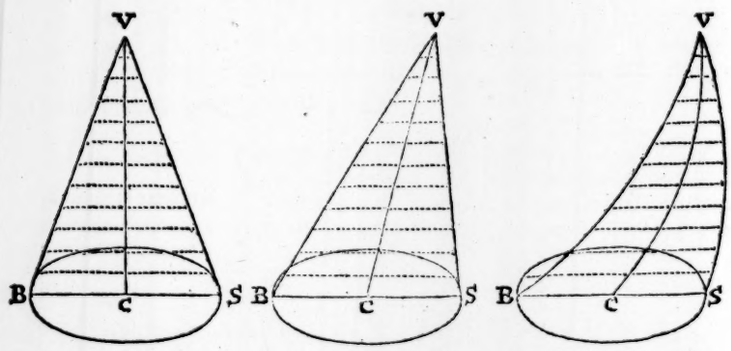


Quia Triangulorum abſciſſorum tam altitudines quam baſes ſunt Arithmetice-proportionales: ergo plana in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium, ſive ut numeri quadrati, 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, ſpatia interjecta, 1, 3 = 4 — 1, 5 = 9 — 4, 7 = 16 — 9, &c.

PROP. LXVIII.

Corollarium.

SI conus planis quotlibet ſecetur baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æque-altas abſcindentibus,) abſciſſi coni (verticem inter & plana ſecantia) ſunt ut 1, 8, 27, 64, *&c. numeri cubici. Portiones vero interjectæ, ut* 1, 7, 19, 37, *&c. differentiæ numerorum cubicorum, (&ſimiliter in Pyramide.)*



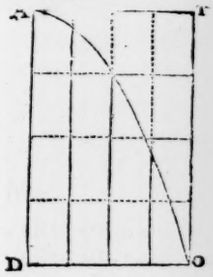
Quia cum conorum abſciſſorum altitudines ſint Arithmetice-proportionales, & propterea etiam baſium diametri; adeoque baſes in earundem ratione duplicata; erit ratio conorum (quæ ex altitudinum & baſium rationibus componitur) in ratione altitudinum triplicata, ſeu ut 1, 8, 27, 64, &c. Et propterea portiones interjectæ, ut 1, 7 = 8 — 1, 19 = 27 — 8, 37 = 64 — 27, &c.

PROP.

PROP. LXIX.

Corollarium.

SI Parabola rectis quotlibet secetur (basi parallelis & æqualiter ab invicem remotis, portiones æque-altas abscindentibus,) erunt abscissæ Parabolæ (verticem inter & rectas secantes,) ut 1 √ 1, 2 √ 2, 3 √ 3, 4 √ 4, *&c. vel ut* √ 1, √ 8, √ 27, √ 64, *&c. radices quadraticæ numerorum cubicorum. Spatia vero interjecta, ut earum radicum differentiæ.*

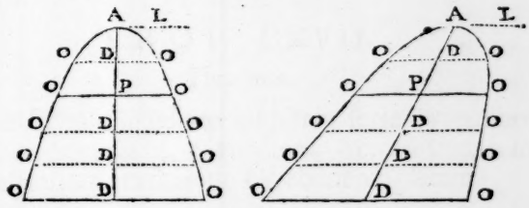


Sunt enim bases (quippe Ordinatim-applicatæ in Parabola) in altitudinum ratione subduplicata.

PROP. LXX.

Corollarium.

SI Conoeides Parabolicum planis quotlibet secetur (basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æque-altas,) erunt Conoeidea sic abscissa (verticem inter & plana secantia) ut 1, 4, 9, 16, *&c. numeri quadrati: Et portiones interjectæ, ut* 1, 3, 5, 7, *&c. Arithmetice-proportionales. (Et similiter in Pyramidoeide.)*



Nempe, ut de Triangulo dictum est Prop. 67. sunt enim conoeidium abscissorum bases in ratione duplicata semidiametrorum, hoc est ordinatim-applicatarum in Parabola; & propterea, altitudinibus proportionales.

PROP. LXXI.

Corollarium.

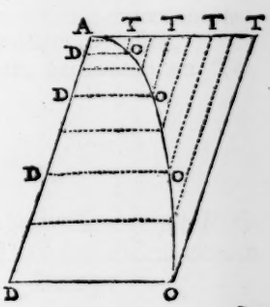
SI complementum semiparabolæ rectis quotlibet secetur (complementi basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æque-altas,) erunt complementa sic abscissa (verticem inter & rectas secantes,) ut 1, 8, 27, 64, *&c. numeri cubici: Et portiones interjectæ, ut* 1, 7, 19, 37, *&c. numerorum cubicorum differentiæ.*

Nempe ut supra de Cono dictum est, Prop. 68. sunt enim bases, hoc est, complementorum ordinatim applicatæ, in altitudinum ratione duplicata.

PROP. LXXII.

Corollarium.

SI Conoeides etiam *semiparabolæ complemento aptatum, planis quotlibet secetur (basi parallelis, & ab invicem æqualiter remotis, portiones abscindentibus æque-altas,) erunt abscissa conoeidea (verticem inter & plana secantia,) ut* 1, 32, 243, 1024, *&c. numeri supersolidi: Et portiones interjectæ, ut* 1, 31, 211, 781, *&c. numerorum supersolidorum differentiæ. (Et similiter in Pyramidoeide.)*



Sunt enim baſes conoeidium abſciſſorum, in duplicata ratione ſemidiametrorum ſuarum, ideoque in quadruplicata ratione altitudinum, (ſunt enim ipſæ ſemidiametri baſium, ſeu ordinatim-applicatæ in ſemiparabolæ complemento, in duplicata ratione altitudinum.) Et propterea figuræ ſolidæ abſciſſæ, in altitudinum ratione quintuplicata; quippe quæ componitur ex rationibus baſium & altitudinum.

SCHOLIUM.

Et ſimiliter de aliis ejuſmodi figuris (ſive planis ſive ſolidis) eo modo ſectis, judicandum erit: reſpectu ſemper habito ad gradum ſeu poteſtatem illius ſeriei quo pertinent.

PROP. LXXIII.

Theorema.

SI duæ quælibet ſeries (aut etiam plures) invicem reſpective-multiplicentur, (nempe primus terminus unius in primum alterius, ſecundus in ſecundum, &c.) prodibit ejuſmodi alia ſeries; quæ indicem habebit ex multiplicatarum indicibus aggregatum; rationem autem, ad ſeriem terminorum ipſius maximo æqualium, eam quam Tabellæ præcedentes (vel etiam Propoſitio 64) indicabunt.

Exempli gratia. Si ſeries Quadratorum vel Secundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem Cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) prodibit ſeries Quintanorum (cujus index $5 = 2+3$:) quæ propterea rationem habebit, ad ſeriem maximo Æqualium, eam quam habet 1 ad $6 = 5+1$. Puta ſi reſpective multiplicetur Series Secundanorum in ſeriem Tertianorum prodibit ſeries Quint.

$0\,a$,	$1\,a$,	$4\,a$,	$9\,a$,	$16\,a$,	&c.
$0\,b$,	$1\,b$,	$8\,b$,	$27\,b$,	$64\,b$,	&c.
$0\,ab$,	$1\,ab$,	$32\,ab$,	$243\,ab$,	$1024\,ab$,	&c.

Item, ſi ſeries Secundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem Subtertianorum (cujus index $\frac{1}{3}$,) erit producta ſeries, Radices-cubicæ Septimanorum (cujus index eſt $\frac{7}{3} = 2+\frac{1}{3}$;) quæ eſt ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad $\frac{10}{3} = \frac{7}{3}+1$, vel ut 3 ad 10. Puta ſi reſpective multiplicetur.

Series $0\,a$, $1\,a$, $4\,a$, $9\,a$, &c.
in ſeriem $\sqrt[3]{0}\,b$, $\sqrt[3]{1}\,b$, $\sqrt[3]{2}\,b$, $\sqrt[3]{3}\,b$, &c.

hoc eſt ſeries $\sqrt[3]{0}\,a^3$, $\sqrt[3]{1}\,a^3$, $\sqrt[3]{64}\,a^3$, $\sqrt[3]{729}\,a^3$, &c.
in ſeriem $\sqrt[3]{0}\,b$, $\sqrt[3]{1}\,b$, $\sqrt[3]{2}\,b$, $\sqrt[3]{3}\,b$, &c.

prodibit ſeries $\sqrt[3]{0}\,a^3b$, $\sqrt[3]{1}\,a^3b$, $\sqrt[3]{128}\,a^3b$, $\sqrt[3]{2187}\,a^3b$, &c.

Item, ſi ſeries Subſecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) reſpective multiplicetur in ſeriem Subquintanorum (cujus index $\frac{1}{5}$,) erit producta ſeries Radices-Decimanæ Septimanorum, (cujus index $\frac{1}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}$:) & propterea rationem habebit, ad ſeriem maximæ æqualium, eam quam habet 1 ad $\frac{11}{10} = \frac{1}{10}+1$, vel 10 ad 17. Puta ſi reſpective multiplicetur.

Series $\sqrt[2]{0}\,a$, $\sqrt[2]{1}\,a$, $\sqrt[2]{2}\,a$, $\sqrt[2]{3}\,a$, &c.
in ſeriem $\sqrt[5]{0}\,b$, $\sqrt[5]{1}\,b$, $\sqrt[5]{2}\,b$, $\sqrt[5]{3}\,b$, &c.

hoc eſt, ſeries $\sqrt[10]{0}\,a^5$, $\sqrt[10]{1}\,a^5$, $\sqrt[10]{32}\,a^5$, $\sqrt[10]{243}\,a^5$, &c.
in ſeriem $\sqrt[10]{0}\,b^2$, $\sqrt[10]{1}\,b^2$, $\sqrt[10]{4}\,b^2$, $\sqrt[10]{9}\,b^2$, &c.

prodibit ſeries $\sqrt[10]{0}\,a^5b^2$, $\sqrt[10]{1}\,a^5b^2$, $\sqrt[10]{128}\,a^5b^2$, $\sqrt[10]{2187}\,a^5b^2$, &c.

Et ſimiliter in aliis ejuſmodi multiplicationibus continget.

PROP.

PROP. LXXIV.

Corollarium.

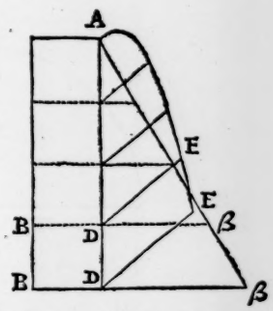
IDeoque, *Ubi Aggregatum Indicum ſerierum invicem reſpective-multiplicatarum idem eſt, ibi & idem erit Index ſeriei productæ.*

Exempli gratia. Si ſeries Tertianorum in ſeriem Tertianorum, vel ſeries Secundanorum in ſeriem Quartanorum, vel ſeries Primanorum in ſeriem Quintanorum, vel ſeries Æqualium in ſeriem Sextanorum, reſpective multiplicetur; Prodibit ſeries Sextanorum. Quia nempe in ſingulis aggregatum indicum eſt 6, (nam $3+3=2+4=1+5=0+6=6$.) Et ſimiliter in aliis.

PROP. LXXV.

Corollarium.

SI ADB Parallelogrammi rectæ omnes DB, in Dβ rectas Trianguli ADβ (æque-alti) reſpective-ducantur; rectangula producta erunt Series Primanorum, (qualia ſunt plana cunei Parabolici, prop. 11. Con. Sect.) pro quibus ſi ſubſtituantur totidem Quadrata (vel quævis aliæ figuræ planæ ſimiles) illis æqualia, conſtituetur Pyramidoeides Parabolicum: Et eorum Quadratorum (vel figurarum ſimilium) latera, vel mediæ proportionales inter rectas ſic multiplicatas, DE, conſtituent Parabolam, vel Semiparabolam.



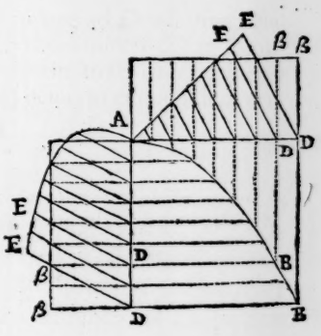
(Intellige, ſi plana illa, vel mediæ proportionales, quæ ſic emergunt, ſupponantur ad rectam aliquam ita ordinatim-poſita, ut figurarum conſtituendarum natura poſtulat. Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit.)

Nam, cum rectæ Parallelogrammi, ſint ſeries Æqualium, (cujus index 0;) & rectæ Trianguli, ſeries Primanorum, (cujus index 1:) producetur, multiplicando, ſeries item Primanorum (quia $0+1=1$,) qualia ſunt plana cunei Parabolici, & Pyramidoeidis Parabolici, (per Prop. 9, 11. Con. Sect.) & mediæ proportionales (ſeu latera ſimilium planorum) erunt ſeries Subſecundanorum, (quippe ut Radices quadraticæ Primanorum,) quales ſunt parabolarum rectæ per Prop. 8. Con. Sect.

PROP. LXXVI.

Corollarium.

SI ADβ Parallelogrammi rectæ βD in rectas DB ſemiparabolæ æque-altæ ADB reſpective ducantur, rectangula producta erunt Series Subſecundanorum; & mediæ proportionales, Series Subquartanorum, (quales ſunt rectæ Paraboloeidis Biquadratici DE.)



Hoc eſt, Series Æqualium (cujus index 0) in Seriem Subſecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) reſpective ducta efficiet Seriem item Subſecundanorum, (quia $\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$,) & mediæ proportionales (quippe ſubſecundanorum radices quadraticæ) erunt Series ſubquartanorum.

PROP.

PROP. LXXVII.

Corollarium.

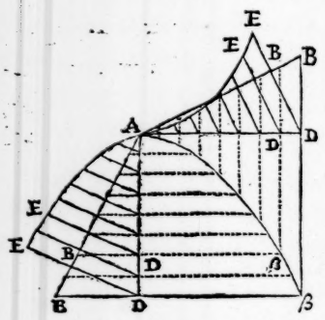
SI ADβ Parallelogrammi rectæ Dβ in rectas DB Complementi Semiparabolæ reſpective-ducantur; rectangula producta erunt Series Secundanorum: mediæ autem proportionales, Series Primanorum, (Triangulum conſtituentium, ADE.)

Fig præced.

Nempe, Series Æqualium in Seriem Secundanorum ſic ducta, dat Seriem etiam Secundanorum, (quia $0+2=2$,) eorumque radices quadraticæ ſunt Series Primanorum.

PROP. LXXVIII.

Corollarium.



SI Trianguli rectæ DB reſpective ducantur in rectas ſemiparabolæ Dβ, rectangula producta erunt Series radicum quadraticarum Tertianorum, & mediæ proportionales, radices Biquadraticæ Tertianorum, DE.

Nempe, Series primanorum in Seriem ſubſecundanorum ſic ducta, dabit Seriem radicum quadraticarum Tertianorum, (quia $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,) quarum radices quadraticæ, ſunt radices biquadraticæ Tertianorum.

PROP. LXXIX.

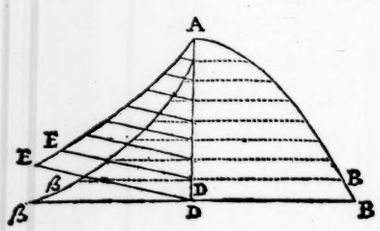
Corollarium.

SI Trianguli rectæ DB reſpective ducantur in rectas Complementi ſemiparabolæ Dβ; producta rectangula ſunt Series Tertianorum (quia $1+2=3$.) Et mediæ proportionales, radices quadraticæ Tertianorum, DE.

Demonſtratur ut præcedentes.

PROP. LXXX.

Corollarium.



SI rectæ Complementi ſemiparabolæ in rectas ſemiparabolæ reſpective ducantur; rectangula producta erunt Series radicum quadraticarum Quintanorum (quia $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$) & mediæ proportionales, Series radicum biquadraticarum Quintanorum. Ut patet.

SCHOLIUM.

Et pari modo de figuris ſive planis ſive ſolidis, quæ ex ejuſmodi multiplicatione provenient, judicandum erit. Ut ſi trianguli unius rectæ in rectas Trianguli alterius (ſive ſimilis ſive diſſimilis, modo æque-alti,) reſpective ducantur, fiet Pyramis; mediæ vero proportionales conſtituent etiam Triangulum. Semiparabolæ unius rectæ in rectas alterius reſpective ductæ, efficient Pyramidoeides Parabolicum; mediæ autem proportionales ſemiparabolam. Et ſic de cæteris.

PROP.

PROP. LXXXI.

Theorema.

SI unius Seriei termini omnes per terminos alterius Seriei reſpective dividantur, quotientes erunt Series alia, cujus index reperitur ſubducendo indicem Seriei Dividentis ex indice Seriei Diviſæ, quod reſtat enim eſt index Seriei diviſione provenientis, ſive Quotientis: Ratio autem quam habitura eſt Series ſic producta, ad Seriem totidem terminorum ipſius maximo æqualium, ea erit quam Tabellæ præcedentes (vel propoſitio 64) indicant.

Exempli gratia. Si Series Biquadratorum vel Quartanorum (cujus index 4) dividatur per Seriem Cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) Quotientes erunt Series Lateralium ſeu Primanorum, cujus index $1=4-3$.

Tert.	Quart.	Prim.
0 c)	0 q q	(0 l
1 c)	1 q q	(1 l
8 c)	16 q q	(2 l
27 c)	81 q q	(3 l
&c.	&c.	&c.

Si Series tertianorum dividatur per Seriem primanorum, proveniet Series ſecundanorum, cujus index $2=3-1$.

Et ſi Series ſecundanorum per Seriem ſecundanorum dividatur, proveniet Series æqualium, cujus index $0=2-2$. Et ſic de cæteris.

Prim.	Tert.	Secund.
0 l)	0 c	(0 q
1 l)	1 c	(1 q
2 l)	8 c	(4 q
3 l)	27 c	(9 q
	&c.	

Demonſtratio patet ex Prop. 73. Quia nempe Series Tertianorum in Seriem Primanorum reſpective ducta efficiet Seriem Quartanorum. Et Series primanorum in Seriem ſecundanorum ſic ducta efficiet Seriem tertianorum. Et Series ſecundanorum in Seriem æqualium ſic ducta, producet Seriem ſecundanorum. Et ſic in reliquis omnibus. Quod enim Multiplicatione conficitur, id Diviſione reſolvitur.

Sec.	Sec.	Æqual.
0 q)	0 q	(1
1 q)	1 q	(1
4 q)	4 q	(1
9 q)	9 q	(1
	&c.	

PROP. LXXXII.

Corollarium.

IDeoque, *ubi idem eſt graduum ſive indicum exceſſus Seriei Dividendæ ſupra Seriem Dividentis, idem erit Seriei Quotientum index.*

Exempli gratia. Si Series Sextanorum per Seriem Quartanorum, vel Series Quintanorum per Seriem Tertianorum, vel Series Quartanorum per Seriem Secundanorum, vel Series Tertianorum, per Seriem Primanorum, vel Series Secundanorum per Seriem Æqualium, dividatur; proveniet Series Secundanorum. Quia nempe in ſingulis Series Diviſa Seriem Dividentem duobus gradibus ſuperat; eſt enim $6-4=5-3=4-2=3-1=2-0=2$) Ideoque (per præced.) idem Seriei provenientis Index. Et pariter in aliis.

PROP. LXXXIII.

Corollarium.

SI *Pyramis* (*ſeries nempe Secundanorum*) *ad Triangulum* (*æque-altum*) *reſpective applicetur*, (*nempe Plana illius ad Rectas hujus*,) *prodibit Triangulum*; (*quia nempe* $2-1=1$.) *Si vero applicetur ad complementum ſemi-parabolæ, prodibit Parallelogrammum*; (*quia* $2-2=0$.) *Si ad ſemi-parabolam, planum prodiens erit ſeries Radicum quadraticarum Tertianorum*;

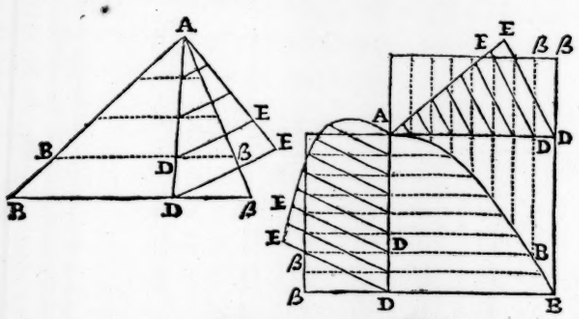
rum; (*quia* $2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.) *Si ad ſeriem Æqualium, prodibit complementum ſemiparabolæ*; (*quia* $2-0=2$.) *Et ſic in aliis.*

Patet ex Prop. 81.

PROP. LXXXIV.

Corollarium.

VEL, ſi reſpectivis rectis Trianguli primi ABD & ſecundi ADE, ſumantur tertiæ proportionales; prodibit Triangulum tertium ADβ: Si



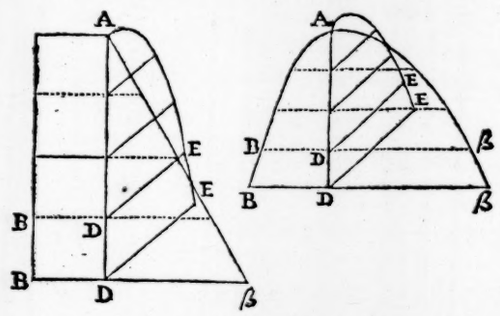
reſpectivis rectis complementi ſemiparabolæ ADB, & Trianguli ADE, prodibit parallelogrammum ADβ: Si vero Parallelogrammi ADβ & Trianguli ADE, prodibit complementum ſemiparabolæ ADB.

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in Triangulo conſtituunt Pyramidem. Et ſimiliter in reliquis. Oſtenditur autem pars prima in figura priori; ſecunda & tertia in poſteriori.

PROP. LXXXV.

Corollarium.

SI Pyramidoeides Parabolicum (ſeries nempe Primanorum) ad Triangulum (æque-altum) reſpective applicetur: prodibit Parallelogrammum; (*quia* $1-1=0$.) *Si ad Parallelogrammum, prodibit Triangulum*;



(*quia* $1-0=1$.) *Si ad ſemiparabolam, prodibit ſemiparabola*; (*quia* $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.) *Si ad ſemiparaboloeides cubicale, planum prodiens conſtabit ex ſecundanorum Radicibus Cubicis*; (*quia* $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.) *Et pariter in aliis ejuſmodi applicationibus.*

Patet ex Prop. 81.

PROP.

PROP. LXXXVI.

Corollarium.

SImiliter. *Si reſpectivis rectis Trianguli A D β, & Semiparabolæ A D E, ſumantur tertiæ proportionales, prodibit Parallelogrammum A D B : ſi reſpectivis rectis Parallelogrammi A B D, & Semiparabolæ A D E, prodibit Triangulum A D β : ſi reſpectivis rectis ſemiparabolæ primæ A D B, & ſecundæ A D E, prodibit ſemiparabola tertia A D β : & ſic in aliis.*

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in ſemiparabola, conſtituent Pyramidoeides Parabolicum. Oſtenditur, in fig. præced.

SCHOLIUM.

Et pari modo de aliis figurarum ſolidarum ad Planas applicationibus reſpectivis judicium fiet. Sufficit paucas exempli cauſa indicaſſe, ad quarum imitationem fieri poſſunt innumeræ aliæ.

PROP. LXXXVII.

Theorema.

SI proponatur ſeries quælibet prædictarum per aliam ſuperioris gradus ſeu poteſtatis dividenda, nulla jam memoratarum ſeries prodire poterit, (cum index poteſtatis ſuperioris ex indice poteſtatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non poſſit:) ſed aliuſmodi plane Series, cujus nempe termini ſunt reciproce proportionales homologis terminis alterius Seriei, quæ indicem habet æqualem exceſſui indicis Seriei dividentis ſupra indicem Seriei diviſæ.

Series autem ſic provenientes, Series *Reciprocæ* appellantor, habeantque Indices negativos.

Exempli gratia. Si ſeries Secundanorum dividenda ſit per ſeriem Tertianorum, vel ſeries Primanorum, per ſeriem Secundanorum, vel ſeries Æqualium per ſeriem Primanorum, (ubi ſeries dividens eſt uno gradu ſuperior ſerie dividenda, adeoque index ſeriei dividentis unitate major quam index ſeriei diviſæ, puta $3-2=2-1=1-0=1$:) termini ſeriei oriundæ erunt reciproce-proportionales homologis terminis ſeriei Primanorum. Puta ſi reſpective dividatur

ſeries	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
per ſeriem	$0a^3$,	$1a^3$,	$8a^3$,	$27a^3$,	$64a^3$,	&c.
vel ſeries	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
per ſeriem	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
vel ſeries	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
per ſeriem	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.

prodibit ſeries $\frac{1}{0a}$, $\frac{1}{1a}$, $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{3a}$, $\frac{1}{4a}$, &c.

cujus ſeriei termini ſunt reciproce proportionales homologis terminis ſeriei primanorum $\frac{0a}{1}$, $\frac{1a}{1}$, $\frac{2a}{1}$, $\frac{3a}{1}$, $\frac{4a}{1}$, &c. ut patet. Nempe $\frac{1}{2a}.\frac{1}{3a}.::\frac{3a}{1}.\frac{2a}{1}$. Et ſic ubique.

Eodem modo ſi ſeries primanorum dividenda ſit per ſeriem tertianorum; vel

(quod tantundem valet) ſeries Æqualium per ſeriem Secundanorum; erit ſeries proveniens ſeriei Secundanorum-reciproce proportionalis. Puta

$$\frac{1}{0a^2},\ \frac{1}{1a^2},\ \frac{1}{4a^2},\ \frac{1}{9a^2},\ \frac{1}{16a^2},\ \&c.$$

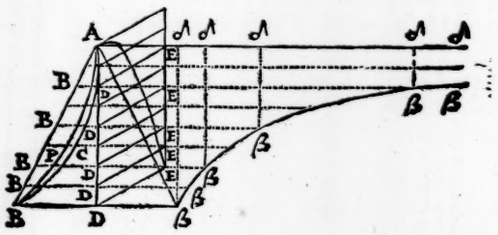
Et pari modo in omnibus ejuſmodi diviſionibus continget.

PROP. LXXXVIII.

Corollarium.

Si infinita numero plana (parallela) Parallelepipedi, ad totidem rectas Trianguli (æque-alti) applicentur; (vel ſi reſpectivis rectis Trianguli, & Parallelogrammi, ſumantur tertiæ proportionales;) ſeries rectarum provenientium erit reciproca ſeriei Primanorum, quæ quidem rectæ ſunt ſuis à vertice diſtantiis (vel, ſi placet, diametris interceptis,) reciproce-proportionales.

Eſto enim Parallelepipedum, cujus infinita plana æquentur quadratis totidem rectarum Parallelogrammi ADE, quæ ſi applicentur ad rectas Trianguli ADB, prodibunt rectæ (rectis trianguli & Parallelogrammi tertiæ proportionales) figu-



ram ADβ mixtam conſtituentes, quæ reciproce proportionales erunt tam homologis rectis Trianguli (quia nempe cum illis conſtituunt rectangula æqualia,) quam Diametris interceptis, ſeu diſtantiis à vertice, quæ (propter ſimilia Triangula abſciſſa) ſunt illis trianguli rectis proportionales.

PROP. LXXXIX.

Corollarium.

Idem continget, ſi Plana Pyramidis (quadratis rectarum Trianguli ADE æqualia) applicentur ad totidem Rectas Complementi Semiparaboloeidis Cubicalis ADBC.

Patet ex Prop. 87. Nam (ut in Prop. præced.) ſeries primanorum ex quibus conflatur Triangulum, eſt uno gradu ſuperior, quam ſeries Æqualium ex quibus conſtat Parallelepipedum: Sic (in hac Prop.) ſeries Tertianorum in complemento ſemiparaboloeidis cubicalis eſt uno gradu ſuperior quam ſeries ſecundanorum ex quibus conſtat Pyramis. Utrobique igitur provenit ſeries ſeriei Primanorum reciproca.

PROP. XC.

Corollarium.

Idem continget, ſi Plana Pyramidoeidis Parabolici (hoc eſt, ſeries Primanorum,) æqualia quadratis rectarum ſemiparabolæ ADE reſpective applicentur ad rectas complementi ſemiparabolæ ADBP. (Seriem nempe Secundanorum.)

Nam & hic index ſeriei dividentis unitate ſuperat indicem ſeriei dividendæ.

PROP.

PROP. XCI.

Corollarium.

FIgura plana ex ſerie rectarum Primanis reciproce proportionalium conflanda, eſt interminabilis. Quod & ſimiliter verum eſt de omnibus ſeriebus Reciprocis.

Cum enim primus terminus in ſerie Primanorum ſit o, primus terminus in ſerie reciproca erit ∞ vel infinitus: (ſicut, in diviſione, ſi diviſor ſit o, quotiens erit infinitus.) Adeoque recta A δ, & curva ββ, non niſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) concurrent.

Pari ratione neque concurrent (niſi poſt infinitam diſtantiam) eadem curva ββ & recta AD (quantumvis utraque continuetur;) non prius enim evaneſcet diſtantia Dβ quam facta fuerit infinita recta DB. Et propterea ——

PROP. XCII.

Corollarium.

CUrva ββ duas habet Aſymptotas rectas Aδ, AD. Quod & de aliis ejuſmodi Curvis rectarum ſeries reciprocas terminantibus, verum eſt.

Nempe ita perpetuo propius accedunt ad curvam rectæ, ut tandem earum diſtantia ſit quavis aſſignabili minor, (ut ex dictis facile eſt probatu,) neque tamen unquam concurrent, ut jam oſtenſum eſt. Atque idem de aliis ejuſmodi curvis pariter oſtendi poterit.

PROP. XCIII.

Corollarium.

REctæ (Dβ, Dβ, &c.) Primanis reciproce proportionales ab infinita (Aδ = ∞) continue decreſcunt, (eadem ratione qua reſpectivæ rectæ DB, DB, in ſerie primanorum à puncto A = o continue creſcunt,) donec pervenitur ad minimam, (ſicut in ſerie primanorum pervenitur ad maximam.) Quod verum eſt & in aliis ſeriebus reciprocis.

Patet, propter proportionem reciprocam.

PROP. XCIV.

Corollarium.

IN Figura ADββ, (ex primanorum reciprocis) Parallelogramma inſcripta ADβ, ADβ, &c. ſunt invicem æqualia.

Habent enim baſes & altitudines reciprocas per Prop. 88.

PROP. XCV.

Corollarium.

ET propterea, *Ipſa curva ββ eſt Hyperbola; cujus centrum A, Aſymptotæ AD, Aδ.*

Per Prop. 12. lib. 2. Apollonii.

PROP. XCVI.

Corollarium.

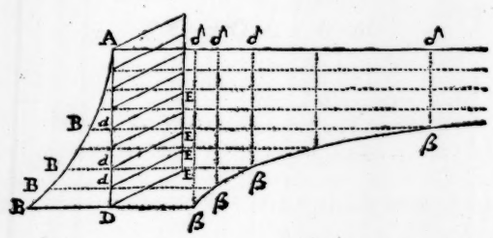
SI chorda muſica AD varie dividatur in punctis DD, &c. ſonos edet proportionales rectis Dβ, Dβ, &c.

Nam (per principia Muſica) eadem chorda (æquabilis & æqualiter tenſa) ſonos edit longitudinibus reciproce proportionales. Ideoque ſi chordæ ſint ut AD, AD, &c. ſoni erunt ut Dβ, Dβ, &c. per Prop. 88.

PROP. XCVII.

Corollarium.

SI plana Parallelepipedi (quippe ſeries æqualium) æqualia quadratis rectarum Parallelogrammi ADE ad reſpectivas rectas Complementi Semiparabolæ ADB (ſeriem ſcil. Secundanorum) applicentur; prodibit ſeries rectarum Secundanis reciproce proportionalium: Ex quibus ſi ſupponatur conflari figura plana ADβ, erit ea interminabilis; & curva illas terminans duas habebit Aſymptotas rectas AD, Aδ.



Probatur eodem modo quo propoſitiones aliquot præcedentes de ſerie reciproca ſeriei Primanorum.

PROP. XCVIII.

Corollarium.

IDem continget, ſi plana Pyramidis ſic applicentur ad rectas complementi ſemi-paraboloeidis Biquadraticalis; vel plana Pyramidoeidis Parabolici ad rectas Complementi Paraboloeidis Cubicalis.

Nam & iſtic index ſeriei dividentis binario ſuperat indicem ſeriei dividendæ.

PROP. XCIX.

Corollarium.

IN ejuſmodi ſerie Secundanis reciproca, rectæ Dβ, dβ, &c. ſunt in reciprocæ rationis Diametrorum (vel diſtantiarum à vertice) ratione duplicata, (ſive ut dAq, DAq, &c.)

Quia nempe reciproce-proportionales ſunt rectis DB, dB, &c. quæ ſunt in diametrorum AD, Ad, &c. rationis directæ ratione duplicata. Puta

dAq . DAq :: dB . DB :: Dβ . dβ. Ergo $\frac{dAq}{DAq} = \frac{D\beta}{d\beta}$.

PROP. C.

Corollarium.

IN Figura plana (ADββ) ex ſerie rectarum Secundanis reciprocarum conflata, inſcripta Parallelogramma (ADβ, Adβ,) ſunt interceptis diametris (DA, dA,) reciproce proportionalia.

Sunt enim (per 23. e6) ut DA × Dβ ad dA × dβ. Eſt autem (per præced.)

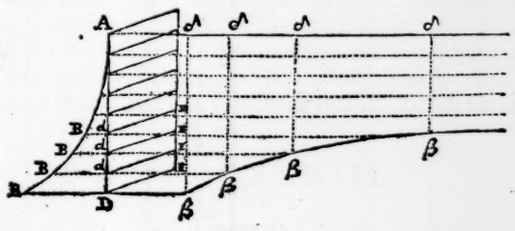
dβ

$d\beta = \frac{DAq}{dAq} D\beta$. Et $dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$. Ergo & $DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$ $::dA \times DA \times D\beta . DAq \times D\beta :: dA . DA$.

PROP. CI.

Corollarium.

SI vero figura plana (ADββ) ſit ex ſerie rectarum Tertianis reciprocarum conflata; (quæ nempe ſint rectis complementi Paraboloeidis cubicalis ADB, & Parallelogrammi ADE, tertiæ proportionales;) erunt rectæ illæ (Dβ, dβ, &c.) in reciprocæ rationis Diametrorum (DA, dA, &c.) ratione triplicata (ſcil. ut dAc, DAc, &c.) Et Parallelogramma inſcripta (ADβ, Adβ, &c.) in reciprocæ rationis diametrorum ratione duplicata, (ſive ut dAq, DAq, &c.)



Eſt enim (ex conſtructione) $D\beta . d\beta :: dB . DB :: dAc . DAc$. Et propterea etiam $d\beta = \frac{DAc}{dAc} D\beta$. Ergo Parallelogramma $AD\beta . Ad\beta :: DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{dA \times DAc}{dAc} D\beta = \frac{DAc}{dAq} D\beta :: dAq \times DA \times D\beta . DAc \times D\beta :: dAq . DAq$. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo de aliis ejuſmodi figuris planis ex qualibet rectarum *ſerie reciproca* conflatis judicandum erit; ut & de Parallelogrammis (ſive rectangulis ſive obliquangulis, prout ſitus figuræ poſtulat,) ipſis inſcriptis.

Quod ad Aream autem attinet iſtarum figurarum ex ſeriebus reciprocis conſtantium; quærenda eſt illa eodem fere modo quo ſupra in ſeriebus directis. Ubi autem ſeries directæ indices habent 1, 2, 3, &c. ut quæ ſupra ſeriem Æqualium tot gradibus aſcendunt; habebunt hæ quidem (illis reciprocæ) ſuos indices contrarios negativos — 1, — 2, — 3, &c. tanquam tot gradibus infra ſeriem Æqualium deſcendentes. Prout autem illæ ab o ciphra vel Nihilo continuo creſcunt, hæ contra ab ∞ Infinito continue decreſcunt; atque ut illic terminus maximus, hic minimus, ſeriem claudit: (quæ tamen & pro arbitrio continuanda ſupponitur, quouſque libet illic creſcendo, hic decreſcendo.) Adeoque, ut illic figura Circumſcripta (parallelogrammum puta vel priſma) ſive ſeries totidem terminorum Maximo æqualium; hic, figura Inſcripta, ſive ſeries totidem terminorum Minimo æqualium, habenda eſt pro communi menſura ad quam facienda eſt comparatio; utrobique ad illum terminum reſpectu habito qui ſeriem claudit.

Neque interim mirum cuiquam videatur (ut ut fortaſſis inexſpectatum,) ſi figuræ interminatæ rationem ad datam aliam terminatam inquiram. Quamvis enim hujuſmodi figuræ ADβ (ut ut ex parte Dβ ad libitum terminatæ, uti modo in his ſcholiis dictum eſt,) ſupponantur ex parte δβ in infinitum continuatæ (per Prop. 91.) non tamen propterea vel nullam vel ſemper infinitam rationem habituræ ſunt ad datam figuram terminatam, puta ad parallelogrammum æque altum ſuper eadem baſi Dβ deſcriptum. Quod eo quidem facilius aſſenſum obtinere poſſe videatur, cum id ipſum in una quadam figura ſolida (quam *Hyperbolicam acutam infinitam* vocat) jam oſtenderit Torricellius Sed neque

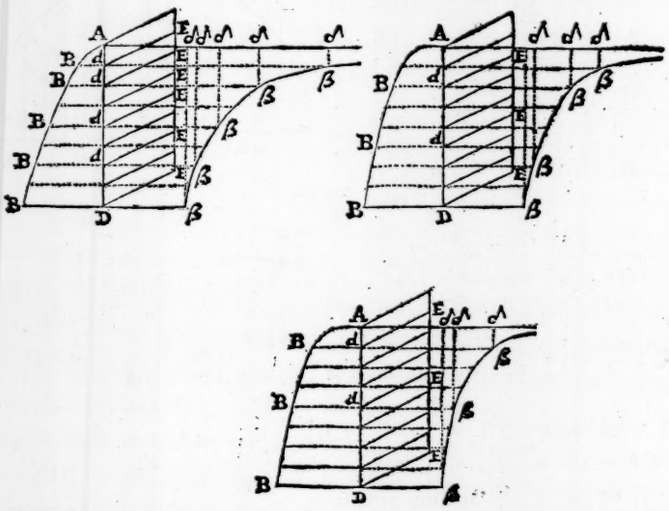
ſemper

ſemper rationem habituræ ſunt finitam, ſed aliquando vel infinitam, vel etiam (ſi id ſine ſolœciſmo dici poſſit) majorem quam infinitam. Nempe, ſi eadem ratione abbreviantur rectæ ∂β, qua prolongantur rectæ dβ, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque compoſita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ ∂β quam prolongantur Dβ, futura eſt ratio pluſquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (ſeu pluſquam æquipollet) illarum abbreviationi: Si autem majori ratione decreſcunt rectæ ∂β quam creſcunt rectæ Dβ, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoque futura eſt ratio finita, minor ſiquidem quam infinita. (Et quidem ſecundum hoc χρήσιμον, non modo de figuris hiſce quas jam tractamus, ſed de aliis etiam quibuſvis interminabilibus, ſive planis ſive ſolidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, ſpeculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura eſt in ſingulis ratio, ſequentibus aliquot propoſitionibus (regulam Prop. 64 ſecuti) indicabimus.

PROP. CII.

Theorema.

SI figura ADββ verticem habeat A∂ infinitum, & perpetuo latitudine decreſcat ad baſin uſque Dβ, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eadem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.



Exempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum, indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index 0, per illas dividi, ſeries diviſione provenientes habebunt indices $0-\frac{1}{2}$, $0-\frac{1}{3}$, $0-\frac{1}{4}$, &c. hoc eſt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per prop. 81.) quibus ſi (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2}+1$, $-\frac{1}{3}+1$, $-\frac{1}{4}+1$; &c. hoc eſt, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inſcriptum (ſuper eadem baſe æque-altum,) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

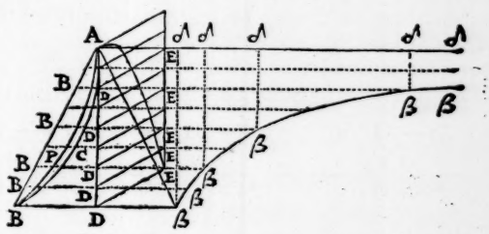
Et pari modo, ſi ſumatur ſeries reciproca ſeriei radicum cubicarum ſecundanorum, vel radicum biquadraticarum ſecundanorum, aut tertianorum, vel radicum ſuperſolidarum ſecundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices

dices ſunt $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,) aut alii cuivis ſeriei, cujus index eſt unitate minor. Quia reciprocarum ſerierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos ſic auctos, erit ratio finita; quippe numeri poſitivi ad poſitivum.

PROP. CIII.

Theorema.

SI vero ejuſmodi Figura ADββ ſic continue decreſcat juxta ſeriem quæ ſit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe ſeriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inſcriptum rationem infinitam: eam nempe quæ eſt 1 ad 0.

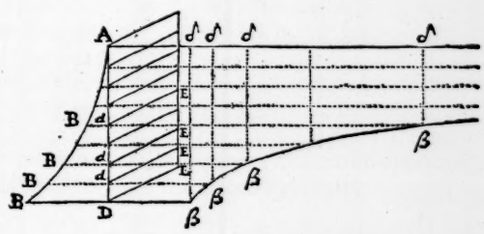


Cum enim ſeries primanorum indicem habeat 1, ſeries huic reciproca indicem habebit -1, ideoque (per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad $\div 1+1$. hoc eſt 1 ad 0.

PROP. CIV.

Theorema.

SI denique ejuſmodi Figura ADββ, ſic continue decreſcat juxta ſeriem quæ ſit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inſcriptum rationem pluſquam infinitam: qualem nempe habere ſupponatur numerus poſitivus ad numerum negativum, ſive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



Puta cum indices ſeriei Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ſint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices ſerierum illis reciprocarum erunt -2, $\div -3$, -4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos ſic auctos, puta 1 ad -1, 1 ad -2, 1 ad -3, &c. major erit quam infinita, ſive 1 ad 0; quia nempe rationum conſequentes ſunt minores quam 0.

Atque idem continget, ſi ſumatur reciproca ſeriei radicum Quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c. (cujus indices ſunt $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c.) vel radicum Cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indices ſunt $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, &c.) aut cuivis denique ſeriei cujus index eſt unitate major. Ut patet.

PROP. CV.

Theorema.

SI ejuſmodi figura AD$\beta\beta$ verticem habens Aδ infinitum & baſin Dβ determinatam, rationem habeat ad inſcriptum Parallelogrammum AD$\beta\delta$ majorem quam infinitam; eadem figura AD$\beta\beta$ verticem habens AD infinitum & baſin $\delta\beta$ determinatam, rationem habebit ad inſcriptum Parallelogrammum A$\delta\beta$D minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, ſi ſitu illo conſiderata rationem habeat minorem quam infinitam; ſitu hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si denique in ſitu uno rationem habeat ſimpliciter infinitam (puta neque majorem neque minorem,) etiam & ſitu altero habebit rationem ſimpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in ſerie Secundanis reciproca, cum ſint (per Prop. 99.) rectæ Dβ, Dβ, in diametrorum AD, AD, ratione reciprocæ duplicata: erunt è converſo rectæ AD, AD, hoc eſt $\delta\beta$, $\delta\beta$, in rectarum Dβ, Dβ, hoc eſt, diametrorum Aδ, Aδ, ratione reciprocæ ſubduplicata; adeoque ipſæ $\delta\beta$, $\delta\beta$, &c. ſunt ſeries Subſecundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejuſmodi ſeriebus contingat,) patet propoſitum per Prop. 102, & 104.

In ſerie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ Dβ, Dβ, ſint diametris AD, AD, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ $\delta\beta$, $\delta\beta$ diametris ſuis Aδ, Aδ, reciproce proportionales, ipſæque $\delta\beta$, $\delta\beta$, ſeries item primanis reciproca. Conſtat ergo propoſitum per Prop. 103.

PROP. CVI.

Theorema.

SI ſeries aliqua reciproca per ſeriem aliam (ſive reciprocam ſive directam) multiplicetur aut dividatur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eædem leges obſervandæ ſunt quæ in ſeriebus directis prop. 73 & 81.

Exempli gratia. Si ſeries Secundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 reſpective multiplicetur in ſeriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index eſt -3; prodibit ſeries Subquintanis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{32}, \frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2-3$ ut patet.

Item ſi ſeries Tertianis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; reſpective multiplicetur per ſeriem Secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit ſeries $\frac{1}{1}, \frac{4}{8}, \frac{9}{27}$, &c. hoc eſt $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3+2$.

Item ſi ſeries Subſecundanis reciproca ($\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, &c.) cujus index $-\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = 1$	reſpective multiplicetur in ſeriem Secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit ſeries ($\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{3}}$, &c. vel $\frac{1}{1}\sqrt{1}, \frac{4}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{3}\sqrt{3}$, &c. vel $1\sqrt{1}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}$, &c. vel $\sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$, &c.) radicum quadraticarum cuborum ſeu tertianorum, cujus index $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}+2$.
$\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{2}$	($\frac{4}{2} = 2$	
$\frac{1}{9}$)	$\frac{1}{3}$	($\frac{9}{3} = 3$	
	&c.		
$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$	
$\frac{1}{8}$)	$\frac{1}{4}$	($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{27}$)	$\frac{1}{9}$	($\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	
	&c.		
$\frac{1}{1}$)	1	(1	Porro, ſi ſeries Secundanis reciproca, cujus index -2, dividat ſeriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit ſeries Primanorum, cujus index $1 = -1+2$, nempe -1 minus -2.
$\frac{1}{8}$)	4	(8	
$\frac{1}{27}$)	9	(27	
	&c.		

Item ſi ſeries Primanis reciproca, cujus index -1, dividat ſeriem ſecundanis reciprocam, cujus

jus index — 2; prodibit ſeries Primanis reciproca, cujus index — 1 = — 2 + 1; nempe — 2 minus — 1.

1)	$\frac{1}{1}$	$(\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{4}$
9)	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{9}$
	&c.	

Item, ſi ſeries Primanis reciproca, cujus index — 1, dividat ſeriem Secundanorum, cujus index 2; prodibit ſeries Tertianorum, cujus index 3 = 2 + 1, nempe 2 minus — 1.

Item ſi ſeriem Primanis reciprocam, cujus index — 1, dividat ſeries Secundanorum, cujus index 2; prodibit ſeries Tertianis reciproca, cujus index — 3 = — 1 — 2, nempe — 1 minus 2.

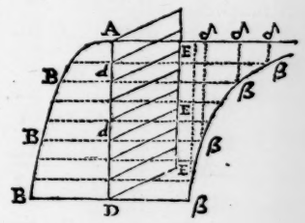
Atque idem continget, in aliis quibuſvis hujuſmodi ſeriebus. Adeoque conſtat propoſitum.

PROP. CVII.

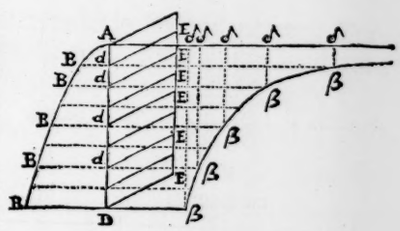
Corollarium.

ET propterea; *Si ad hujuſmodi figuram A D β δ, (ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunque ſeriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con. Sect. & alibi ſupra oſtendi;) Pyramidoeides vel Conoeides inverſum, (ſeu potius Calatoeides:) habebit illud ad Cylindrum aut Priſma inſcriptum (ſuper eadem baſi æque-altum) eam rationem, ſive finitam ſive infinitam ſive pluſquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

Puta, ſi planum ſit rectarum ſeries Subtertianis reciproca, cujus index — $\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inſcriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ (= — $\frac{1}{3}$ + 1) hoc eſt, ut 3 ad 2: ſolidum ex totidem planis conſtans in rectarum earum ratione duplicata, erit ſeries Quadratis ſubtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) — $\frac{2}{3}$ = — $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$, vel — $\frac{1}{3}$ plus — $\frac{1}{3}$, & ratio illius ſolidi ad inſcriptum cylindrum vel priſma (ſuper eadem baſi æque-altum) ut 1 ad $\frac{1}{3}$ = — $\frac{2}{3}$ + 1, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. Per prop. 64 & 102.



Si planum, ſit ſeries Subſecundanis reciproca, cujus index — $\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipſius ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $\frac{1}{2}$ = — $\frac{1}{2}$ + 1, vel ut 2 ad 1: (per Prop. 102,) ſolidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Subſecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) ſeries Primanis reciproca, cujus index — $\frac{2}{2}$, vel — 1 = — $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ Ideoque ratio hujus ſolidi ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem baſi æque-altum) ut 1 ad — 1 + 1 = 0. (per Prop. 103.) Nempe illic ratio finita, hic ſimpliciter infinita.



Si planum ſit ſeries Quadratis Subtertianorum reciproca, cujus index — $\frac{2}{3}$, ejuſque ratio ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $\frac{1}{3}$ = — $\frac{2}{3}$ + 1, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) ſolidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione conſtans, erit ſeries Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index — $\frac{4}{3}$ = — $\frac{2}{3}$ — $\frac{2}{3}$, & propterea ratio ipſius ad inſcriptum Cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque-altum, ut 1 ad — $\frac{4}{3}$ + 1 = — $\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad — 1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hic pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries Primanis reciproca, cujus index — 1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad — 1 + 1 = 0: (per Prop. 103.) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Primanorum (hoc eſt, Secundanis) reciproca, cujus index — 2, & propterea

ratio ipſius ad Cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque-altum, ut 1 ad $-2+1$, ſeu ut 1 ad -1. (per Prop. 104.) Nempe illic ratio ſimpliciter infinita, hic pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries Secundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $-2+1=-1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Secundanorum, hoc eſt Quartanis, reciproca, cujus index $-4=-2-2$; ejuſque ratio ad Cylindrum vel Priſma debite inſcriptum, ut 1 ad $-4+1=-3$. (per Prop. 104.) Nempe utrobique ratio pluſquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingenioſum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura ſolida præſtitit, (puta, *Solido Hyperbolico Acuto* in infinitum continuato, æqualem cylindrum conſtituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam ſolidis (præcedentibus ſex propoſitionibus continuis) præſtitimus. Puta, *Figuris innumeris ſpecie differentibus, tam planis quam ſolidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel ſaltem, quod tantundem valet, in cognita ratione conſtitutas) *exhibere.*

Conſultius fortaſſis eſſet, (ſi tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum eſt, paucas aliquot particulares propoſitiones (tanquam admirandum quidpiam aut ſtupendum) demonſtrationibus apagogicis oſtendiſſe. Quod veteres olim non raro feciſſe, plane ſuſpicor; qui illud ſæpius ſibi videntur propoſuiſſe, ut ipſos alii admirentur potius quam intelligant; ſaltem ut illis eorum effatis aſſenſum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis inveſtigationem intelligant. Atque hinc factum eſſe credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipſos habuiſſe ex multis ipſius, in demonſtrationibus eorum non paucis, veſtigiis ſatis liquet) poſteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa eſt quæ apud Diophantum exſtat, ſi ad egregia illa quo ipſi pervenerunt inventa comparetur:) Ut neceſſe habuerint præſentis ævi mathematici (*Vieta, Oughtredus, Harriotus, Ghetaldus, Cavallerius, Torricellius, Carteſius*, aliique magni viri,) vel novam excogitare, vel antiquam ſaltem (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo reſuſcitare; quod quidem eo ſucceſſu præſtiterunt, ut noſtram nunc dierum Analyticen, veterum iſtam, tanta ſuperſtitione celatam, æquare ſaltem vel ſuperare potius nullus dubitem.

Verum ego mallem libere philoſophando, fontes ipſos aperire, ut eadem opera poſſit lector & propoſitionum demonſtrationes & methodum qua iſtuc pervenerim perſentiſcere; unde & ipſe poſſit proprio marte ejuſmodi alias innumeras inveſtigare, quas ego (ne tædio ſim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendiſſe, unde alii alia noſtris ſimilia pro libitu depromant.

Licuiſſet quidem & præmiſſis multa ſubjungere, & multa paſſim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci poſſent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde ſufficere, ut & ipſa perſpicue ſatis intelligantur, & perfectam ſatis *ſerierum* (tam ſimplicium quam compoſitarum & utriſque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad ſeries *Conjunctas* (ſive ad Binomiorum ſive Apotomarum formam) explicandas, feſtinandum ſentio.

PROP. CVIII.

Theorema.

SI ſeries Æqualium ſerie Primanorum reſpective mulctetur (puta, ſi primus terminus hujus à primo illius auferatur, ſecundus à ſecundo, &c.) Reſidua erunt ſemiſſis totius: ſin ita augeatur; Aggregatorum ſeries erit expoſitæ ſeriei Æqualium ſeſquialtera.

Intellige, ſi Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem ſit vel æqualis: (Quod & in ſequentibus aliquoties intelligendum erit:) ſin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuiſſe ſufficiat, cum id quilibet ſuo marte præſtare poterit.

Sit

Sit verbi gratia terminus æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejuſque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum omnium (vel figuræ altitudo) A: ſi termini

$R - 0a$	$R + 0a$
$R - 1a$	$R + 1a$
$R - 2a$	$R + 2a$
$R - 3a$	$R + 3a$
&c.	&c.

continuentur in infinitum uſque ad .... $\overline{R - R}$ $\overline{R + R}$

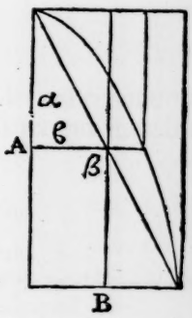
erit Reſiduorum & Aggregatorum ſumma .... $\overline{AR - \frac{1}{2}AR}$ $\overline{AR + \frac{1}{2}AR}$

Nam omnium Æqualium aggregatum erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum ejuſdem ſemiſſis $\frac{1}{2}AR$, (per Prop. 2.) Ergo $AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}AR$, & $AR + \frac{1}{2}AR = \frac{3}{2}AR$. Nempe ſeriei Æqualium (AR) illud eſt $\frac{1}{2}$, hoc $\frac{3}{2}$: prout affirmatur. Hoc eſt, erit illud ad ſeriem Æqualium ut $\frac{1}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad 2: hoc autem, ut $\frac{3}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad $\frac{2}{3}$, vel 3 ad 2.

PROP. CIX.

Corollarium.

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Triangulum (ſuper eadem vel æquali baſe æque-altum,) Reſiduum (quod quidem & ipſum erit Triangulum inverſum) erit Parallelogrammi ſemiſſis: Sin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) ſeſquialterum.*



Patet ex præcedenti; eſt enim Parallelogrammum ſeries Æqualium; Triangulum, ſeries Primanorum.

PROP. CX.

Corollarium.

ITem, *Cylindrus Parabolice excavatus, eſt pleni ſemiſſis.* (*Quod idem verum eſt de Priſmate analogice excavato.*)

Nempe ſi ex Cylindro (ſerie nempe Æqualium) eximatur Conoeides Parabolicum (ſuper eadem baſe æque altum) quod quidem eſt ſeries Primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum eſt erit ſemiſſis totius per Prop. 108.

Atque idem accidet ſi Priſmati eximatur Pyramidoeides Parabolicum.

PROP. CXI.

Theorema.

SI Series Æqualium mulctetur ſerie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Reſidua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejuſdem Seſquitertium, Seſquiquartum, Seſquiquintum, &c.

Nempe ſi Termini	$R^2 \mp 0a^2$	$R^3 \mp 0a^3$	$R^4 \mp 0a^4$
	$R^2 \mp 1a^2$	$R^3 \mp 1a^3$	$R^4 \mp 1a^4$
	$R^2 \mp 4a^2$	$R^3 \mp 8a^3$	$R^4 \mp 16a^4$
	$R^2 \mp 9a^2$	$R^3 \mp 27a^3$	$R^4 \mp 81a^4$
	&c.	&c.	&c.
continuentur uſque ad	$R^2 \mp R^2$	$R^3 \mp R^3$	$R^4 \mp R^4$
erunt ſummæ (per Prop. 44.)	$\overline{AR^2 \mp \frac{1}{3}AR^2}$	$\overline{AR^3 \mp \frac{1}{4}AR^3}$	$\overline{AR^4 \mp \frac{1}{5}AR^4}$
Hoc eſt, Reſiduorum ſumma	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.
Aggregatorum ſumma	$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.	$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.	$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII.

Corollarium.

ERgo, *ſi Parallelogrammo auferatur complementum Semi-parabolæ, Semi-paraboloeidis cubicalis, biquadraticalis, &c. Reſiduum (puta Semi-parabola, Semi-paraboloeides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: ſin eidem Parallelogrammo ejuſmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{5}$, *&c. ejuſdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII.

Corollarium.

ITem, *Cylindrus Conice extavatus*, (*vel Priſma Pyramidice,*) *continet integri duos trientes. Et ſimiliter de aliis excavationibus* (*mutatis mutandis*) *fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. ſubducta quippe ſerie ſecundanorum, ex ſerie æqualium.

PROP. CXIV.

Theorema.

SI Series æqualium mulctetur ſerie ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. Reſidua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejuſdem quinque Trientes, ſeptem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nempe ſi termini.	$\sqrt{R} \mp \sqrt{0}a$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{0}a$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{0}a$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{1}a$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{1}a$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{1}a$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{2}a$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{2}a$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{2}a$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{3}a$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{3}a$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{3}a$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\sqrt{R} \mp \sqrt{R}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{R}$
Erunt ſummæ (per prop.54.)	$A\sqrt{R} \mp \frac{2}{3} A\sqrt{R}.$	$A\sqrt[3]{R} \mp \frac{3}{4} A\sqrt[3]{R}.$	$A\sqrt[4]{R} \mp \frac{4}{5} A\sqrt[4]{R}$
Hoc eſt Reſiduorum ſumma	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Aggregatorum ſumma	$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

PROP. CXV.

Corollarium.

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, &c. Reſiduum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP. CXVI.

Theorema.

PAri modo judicandum erit in ſeriebus aliis ſeriei æqualium ſubducendis vel addendis; quarum quantitas innoteſcit ex prop. 59. vel 64.

Puta

Puta ſi termini	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{0}\,a^3$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{0}\,a^2$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{0}\,a^4$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{1}\,a^3$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{1}\,a^2$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{1}\,a^4$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{8}\,a^3$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{4}\,a^2$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{16}\,a^4$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{27}\,a^3$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{9}\,a^2$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{81}\,a^4$.
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
continuentur ad	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{R^4}$.
erit ſumma	$A\sqrt{R^3} \mp \frac{2}{5} A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \mp \frac{3}{5} A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \mp \frac{3}{7} A\sqrt[3]{R^4}$.
Hoc eſt, Reſidua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$

Et ſimiliter (mutatis mutandis) in aliis quibuſcunque.

PROP. CXVII.

Theorema.

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis $1a$, $2a$, $3a$, &c. (in præcedentibus propoſitionibus uſurpatis) jam ſubſtituere a, b, c, &c. quo melius operationis proceſſus perſpiciatur.

Seriei	Quadrata.	Cubi
$R - 0$	$R^2 - 0R + 00$	$R^3 - 0R^2 + 00R - 000$
$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^2$
&c. ad	&c. ad	&c. ad
$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^2 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{3}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{4}AR^3 + \frac{3}{6}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$
nempe $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
vel $\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et ſic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice-proportionales, (prout poteſtatis gradus poſtulat) ab 1 & 2, unitate continue creſcentes.

Et quidem nihil ſunt quam totidem ſeries Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inverſæ.

PROP. CXVIII.

Theorema.

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Secundanorum: Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata	Cubi
$R^2 - 00$	$R^4 - 00R^2 + 00$	$R^6 - 00R^4 + 00R^2 - 00$
$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c^4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
&c. ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
ſumma $AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{5}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{7}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 - \frac{1}{7}AR^6$
nempe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$1 - \frac{3}{7} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}$
vel $\frac{2}{3}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

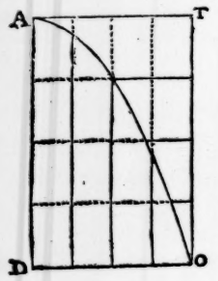
Et

Et ſic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice-proportionales (quouſque gradus poteſtatis poſtulat) à 2 & 3 continue binario creſcentes.

PROP. CXIX.

Corollarium.

ET propterea, Conoeides (vel Pyramidoeides) Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) circa ipſius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum (vel Priſma) ejuſdem baſis & altitudinis, ut 8 ad 15.



Nempe ut Quadrata reſiduorum ſeriei Æqualium mulctatæ ſerie Secundanorum, (ad totidem maximo æqualium.) Nam ſi volvendo Semiparabolam A D O circa ipſius ordinatim-applicatam D O, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9. Con. Sect. diximus,) formetur Conoeides (vel Pyramidoeides) cujus vertex O: erunt plana illa Conoeides (vel Pyramidoeides) conſtituentia, ut Quadrata ſeriei Æqualium ſerie Secundanorum mulctatæ: (Nam rectæ in Semiparabola A D O diametro A D parallelæ, ſunt reſiduæ Æqualium ablatis Secundanis, in complemento A T O repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoque ad totidem maximo æqualia (hoc eſt, Cylindrum vel Priſma,) ut 8 ad 15 per præcedentia.

SCHOLIUM.

Et pari modo de Conoeidibus vel Pyramidoeidibus ad Paraboloeidis cujuſvis ordinatim applicatam aptatis, judicum fiet, ope ſequentium propoſitionum. Puta in Paraboloeide Cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadraticali, ut 32 ad 45; in Superſolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP. CXX.

Corollarium.

DEinde, Si infinita ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum, in eandem ſeriem Æqualium eadem ſerie Primanorum auctam, reſpective ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam ſimilium quarumvis figurarum, ipſis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.

Atque idem accidet, ſi Quadrata ſeriei mulctatæ ducantur in Quadrata ſeriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & ſic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

$$\begin{array}{rl} & R-a \qquad Q:R-a:=R^2-2aR+a^2 \\ \text{in} & R+a \qquad Q:R+a:=R^2+2aR+a^2 \\ \hline \text{facit} & R^2-a^2 \qquad R^4-2a^2R^2+a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & C:R-a:=R^3-3aR^2+3a^2R-a^3 \\ \text{in} & C:R+a:=R^3+3aR^2+3a^2R+a^3 \\ \hline \text{facit} & R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6 \end{array}$$

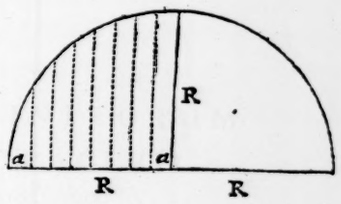
&c.

& ſic in ſingulis terminis cujuſvis poteſtatis; ut multiplicando patebit.

PROP.

PROP. CXXI.
Corollarium.

IDeoque, *Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipſis quælibet ad Parallelogrammum ſibi circumſcriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices Quadraticæ univerſales Reſiduorum ſeriei infinitæ Æqualium ſerie Secundanorum mulctatæ, ad ſeriem illam Æqualium.*



Nam ſi circuli Radius ponatur R, (cujus pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique inſiſtant Perpendiculares ſive ſinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ Perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum eſt;) hoc eſt.

inter $R+0$, $R+1a$, $R+2a$, $R+3a$, &c.
& $R-0$, $R-1a$, $R-2a$, $R-3a$, &c.

Quorum Rectangula, R^2-00, R^2-1a^2, R^2-4a^2, R^2-9a^2, &c.
Ipiæq; mediæ proportionales $\sqrt{:}R^2-00$. $\sqrt{:}R^2-1a^2$. $\sqrt{:}R^2-4a^2$, $\sqrt{:}R^2-9a^2$, &c.

Quam igitur rationem habet harum radicum univerſalium Aggregatum, ad totidem maximæ (Radio ſcil.) æqualium, eam habet Quadrans Circuli (ex illis conſtans) ad Quadratum Radii (conſtans ex his;) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat oſtendendum.

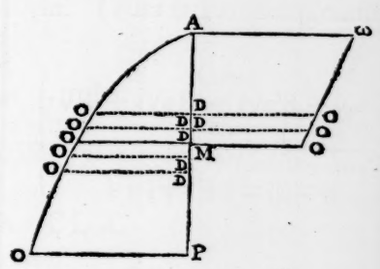
Atque idem de qualibet Ellipſi (mutatis mutandis) facile oſtendetur; cum ipſius etiam ordinatim-applicatæ ſint mediis proportionalibus (inter diametri tranverſæ ſegmenta) Proportionales, & quidem nonnunquam æquales, ut ex Conicorum doctrina notum eſt.

SCHOLIUM.

Ratio autem quam innuit hæc propoſitio (Circuli nempe ad Quadratum Diametri,) ea eſt, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in ſecunda ſerie Tranſverſa Tabellæ Prop. 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis iſtius ſeriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

PROP. CXXII.
Corollarium.

ET proinde, *ſi ſupponamus infinitas numero rectas Semiparabolæ cujuſvis, in ejuſdem continuationis æque-altæ & ſitu inverſo poſitæ rectas, reſpective duci; quod provenit ſolidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum, (aut ex Quadratis quæ rectangulis illis ſint æqualia,) erit ad Parallelepipedum ſuper eadem baſe æque-altum, ut Circulus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in ſubduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipſi.)*



Semiparabolam quamlibet APO, ſecet recta MO (baſi parallela) in duo ſegmenta æque-alta; & Recta MO dicatur $\sqrt{R}$. Erunt reliquæ ordinatim-applicatæ in ſegmento ſuperiori aſcendendo, $\sqrt{:}R-a$. $\sqrt{:}R-2a$. $\sqrt{:}R-3a$. &c. Et in ſegmento inferiori deſcendendo, $\sqrt{:}R+a$. $\sqrt{:}R+2a$. $\sqrt{:}R+3a$. &c. (propter quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola, Arithme-

tice-proportionalia.) Ideoque si supponamus semiparabolam ita sectam sic in se replicari, ut punctum P puncto A congruat, totumque segmentum MPO transferatur in situm MAω, (ut ordinatim-applicatæ inferioris segmenti ordinatim-applicatis superioris inverse respondeant) Rectangula, ODo, ODo, &c. erunt $\surd:R^2-o$. $\surd:R^2-a^2$. $\surd:R^2-4a^2$. $\surd:R^2-9a^2$, &c. ut multiplicatione patebit.

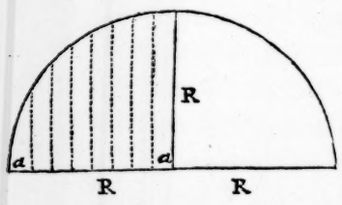
$$\begin{array}{llll} \surd:R-o. & \surd:R-a. & \surd:R-2a. & \surd:R-3a. \\ \surd:R+o. & \surd:R+a. & \surd:R+2a. & \surd:R+3a. \\ \hline \surd:R^2-o. & \surd:R^2-a^2. & \surd:R^2-4a^2. & \surd:R^2-9a^2, \text{ \&c.} \end{array}$$

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\surd:R^2-o:=\surd R^2=R$) toties positum, (hoc est, solidum propositum ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut Circulus ad Quadratum Diametri per præced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII.

Corollarium.

ITem, *Sphæra (vel Sphæroeides aut etiam Pyramidoeides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Prisma) circumscriptum; est ut series infinita æqualium multata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo æqualium. Hoc est ut* 2 *ad* 3.



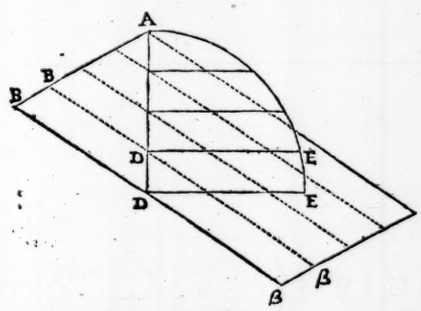
Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmenta, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem Sphæræ (vel Sphæroeideos) complentium, (vel similium quorumvis planorum rectæ similiter positæ semi-pyramidoeides Ellipticum constituentium;) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut R^2-o. R^2-a^2. R^2-4a^2. R^2-9a^2, &c. (sunt enim rectæ illæ $\surd:R^2-o$. $\surd:R^2-a^2$. $\surd:R^2-4a^2$. $\surd:R^2-9a^2$, &c. per Prop. 121.) Ideoque horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 118.

PROP. CXXIV.

Corollarium.

ITem, *si Trianguli ADB rectæ respective ducantur in rectas Trapezii ADβ (æque-alti, atque cum ipso Triangulo Parallelogrammum complentis;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem similibus planis Conoeideos (vel Pyramidoeideos) Elliptici: Et mediæ proportionales DE, DE, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel saltem) Ellipsi.*

Demon-



Demonſtratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. & 123. Nam ſegmenta rectæ Bβ in hac figura tantundem valent atque ſegmenta Diametri in illa figura.

Si autem tam rectæ AD, DB, ſint æquales, quam rectæ AD, DE, ad invicem perpendiculares, erunt ipſæ DE, DE, ordinatim-applicatæ in circulo; ſin minus, ſaltem in Ellipſi. Portio autem ſive circuli ſive Ellipſeos AE, major eſt aut minor quam Quadrans, prout DB major eſt aut minor quam Dβ.

PROP. CXXV.

Theorema.

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Tertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

Seriei	Quadrata	Cubi.
$R^3 - 000$	$R^6 - 00\,R^3 + 00$	$R^9 - 00\,R^6 + 00\,R^3 - 00$
$R^3 - a^3$	$R^6 - 2a^3\,R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3\,R^6 + 3a^6\,R^3 - a^9$
$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3\,R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3\,R^6 + 3b^6\,R^3 - b^9$
$R^3 - c^3$	$R^6 - 2c^3\,R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3\,R^6 + 3c^6\,R^3 - c^9$
&c. ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3\,R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3\,R^6 + 3R^6\,R^3 - R^9$
ſumma $AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nempe $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{18}{28}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{162}{280}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$	$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

Et ſic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice proportionales (quouſque cujuſlibet poteſtatis gradus poſtulat) à 3 & 4, ternario continue creſcentes.

PROP. CXXVI.

Theorema.

PARI modo, Si exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$. $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$. $1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6144}{9945}$.

vel $\frac{4}{5}$ $\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$ $\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$

Item $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$. $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$. $1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{15000}{22176}$

vel $\frac{5}{6}$ $\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$ $\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$ $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$

Et ſic in aliis quibuſlibet; nempe continue multiplicando numeros Arithmetice proportionales (quouſque gradus poſtulat) à 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel quinario, vel ſenario, &c. (ſecundum indicem ſeriei ſubductæ) continue creſcentes. Prout inductione patebit. Ad hunc modum,

Ratio quam habent ad ſeriem maximo æqualium

Seriei Æqualium multatæ ſerie

	Reſidua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Superſolida.
Primanorum	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{6}$.	$\frac{3}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$.	$\frac{6}{24}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$.	$\frac{24}{120}\times\frac{5}{6}=\frac{120}{720}$.
Secundanorum	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15}\times\frac{6}{7}=\frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105}\times\frac{8}{9}=\frac{384}{945}$.	$\frac{384}{945}\times\frac{10}{11}=\frac{3840}{10395}$.
Tertianorum	$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28}\times\frac{9}{10}=\frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280}\times\frac{12}{13}=\frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640}\times\frac{15}{16}=\frac{29160}{58240}$.
Quartanorum	$\frac{4}{5}$.	$\frac{4}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45}\times\frac{12}{13}=\frac{384}{585}$.	$\frac{384}{585}\times\frac{16}{17}=\frac{6144}{9945}$.	$\frac{6144}{9945}\times\frac{20}{21}=\frac{122880}{208845}$.
Quintanorum	$\frac{5}{6}$.	$\frac{5}{6}\times\frac{10}{11}=\frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66}\times\frac{15}{16}=\frac{750}{1056}$.	$\frac{750}{1056}\times\frac{20}{21}=\frac{15000}{22176}$.	$\frac{15000}{22176}\times\frac{25}{26}=\frac{275000}{576576}$.

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Nempe, ſi index ſeriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad ſeriem maximo Æqualium, ipſa

	Reſidua.	Quadrata.	Cubi.	
quam habent	$\frac{a}{a+1}$.	$\frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}$.	$\frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}\times\frac{3a}{3a+1}$. &c.	ad unitatem.
vel	$\frac{a}{a+1}$.	$\frac{2a^2}{2a^2+3a+1}$.	$\frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$. &c.	
Vel quam habet Unitas ad	$\frac{a+1}{a}$.	$\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}$.	$\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}\times\frac{3a+1}{3a}$. &c.	
vel	$\frac{a+1}{a}$.	$\frac{2a^2+3a+1}{2a^2}$.	$\frac{6a^3+11a^2+6a+1}{6a^3}$. &c.	

Atque hoc idem valebit ſi ablata ſeries ſit ſeries Radicum.

Verbi gratia. Si à ſerie Æqualium auferatur ſeries Subſecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam ſi ponatur $a=\frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a}=3$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}=3\times 2=6$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{a}\times\frac{3a+1}{3a}=3\times 2\times 1\frac{2}{3}=10$. &c. Sunt autem, in ejuſmodi ablationibus, Reſidua, Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, ſi auferatur ſeries Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a=\frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a}=5$. $\frac{2a+1}{2a}=3$. $\frac{3a+1}{3a}=2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a}=2$. &c. Et $5\times 3=15$. $15\times 2\frac{1}{3}=35$. $35\times 2=70$. &c. Sunt autem, in ejuſmodi Sublationibus, Reſidua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70, &c. Et pariter in ejuſmodi aliis, ut infra etiam ulterius patebit.

Interim placet propoſitiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propoſitioni ſequenti ſubjungendam. Nempe ——

PROP.

PROP. CXXVII.

Theorema.

SI exponatur (infinita) ſeries æqualium mulctata ſerie (analoga) Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, &c. Eam rationem habebunt ad expoſitam ſeriem æqualium; quam habet Unitas ad numeros in ſubjecta Tabella indicatos. Nempe -----

Seriei Æqualium mulctatæ ſerie

	Reſid.	Q.	Cubi	Biq.	Superſ.	Sext.
Primanorum	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{720}{120}$	$\frac{5040}{720}$
Secundanorum	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{105}{48}$	$\frac{945}{384}$	$\frac{10395}{3840}$	$\frac{135135}{46080}$
Tertianorum	$\frac{4}{3}$	$\frac{28}{18}$	$\frac{280}{162}$	$\frac{3640}{1944}$	$\frac{49240}{29160}$	$\frac{1106560}{524880}$
Quartanorum	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{585}{384}$	$\frac{9945}{6144}$	$\frac{208845}{122880}$	$\frac{5221125}{2949120}$
Quintanorum	$\frac{6}{5}$	$\frac{66}{50}$	$\frac{1056}{750}$	$\frac{22176}{15000}$	$\frac{576576}{375000}$	$\frac{17873856}{11250000}$
Sextanorum	$\frac{7}{6}$	$\frac{91}{72}$	$\frac{1729}{1296}$	$\frac{43225}{31104}$	$\frac{1339975}{933120}$	$\frac{42579975}{33592320}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Sequitur ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto inveſtigabitur, quam habeant rationem ſerierum illarum Apotomarum Radices Quadraticæ, Cubicæ, &c. ad ſeriem totidem earum maximæ æqualium: Hîc labor, hoc opus eſt. Nihil enim aliud deeſt ad Circuli & Ellipſeos quadraturam. Ut ex Prop. 121. jam patet, & ex propoſitionibus aliquot ſecuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII.

Theorema.

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Subſecundanorum: Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R}-\sqrt{a}$	$R-2\sqrt{a}R+a$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{a}+3a\sqrt{R}-a\sqrt{a}$
$\sqrt{R}-\sqrt{b}$	$R-2\sqrt{b}R+b$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{b}+3b\sqrt{R}-b\sqrt{b}$
$\sqrt{R}-\sqrt{c}$	$R-2\sqrt{c}R+c$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{c}+3c\sqrt{R}-c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. uſque ad
$\sqrt{R}-\sqrt{R}$	$R-2\sqrt{R}R+R$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{R}+3R\sqrt{R}-R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R}-\frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR-\frac{4}{3}AR+\frac{1}{3}AR$	$AR\sqrt{R}-\frac{6}{5}AR\sqrt{R}+\frac{3}{5}AR\sqrt{R}-\frac{3}{5}AR\sqrt{R}$
$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	$1-\frac{6}{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{5}=\frac{1}{12}$
1	1	1
1+2	1+2+3	1+2+3+4

Et ſic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, ſive aggregata numerorum Arithmetice-proportionalium (quouſque gradus poteſtatis poſtulat) ab 1 continue unitate creſcentium.

PROP. CXXIX.

Corollarium.

ET propterea, *Conoeides (vel Pyramidoeides) Complemento Semiparabolæ circa ipsius Ordinatim-applicatam, est ad Cylindrum (vel Prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut 1 ad 6.*

Fig. prop. 119. Nempe ut Quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie Subsecundanorum, ad totidem maximo æqualium. Cum enim in Semiparabolæ complemento A O T, rectæ ipsius diametro A T parallelæ, sint residua Æqualium demptis Subsecundanis (ordinatim-applicatis in semi-parabola A O D;) si volvendo complementum illud A O T circa ipsam O T ut axem (vel etiam alias, ut alibi dictum est,) formetur Conoeides, (aut etiam Pyramidoeides analogum,) cujus vertex O; circuli sic volvendo descripti (vel similia plana similiter posita) erunt in rectarum illarum (ipsi A T parallelarum) ratione duplicata. Hoc est, ut quadrata Residuorum seriei Æqualium sublatis Secundanis; ideoque ut 1 ad 6 per præced.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit de Conoeidibus & Pyramidoeidibus complementi Semiparaboloeidis cujusvis circa ipsius ordinatim-applicatam aptatis, juxta propositiones sequentes: Nempe, mutatis mutandis, prout Semiparaboloeidis gradus postulaverit. Puta in semiparaboloeide Cubicali, ut 1 ad 10; in Biquadraticali, ut 1 ad 15; in Supersolidali, 1 ad 21. &c. juxta tabellam Prop. 131.

PROP. CXXX.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Subtertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{}\,R - \sqrt[3]{}\,a$	$\sqrt[3]{}R^2 - 2\sqrt[3]{}a\,R + \sqrt[3]{}a^2$	$\sqrt[3]{}R^3 - 3\sqrt[3]{}\,a\,R^2 + 3\sqrt[3]{}\,a^2\,R - \sqrt[3]{}\,a^3$
$\sqrt[3]{}\,R - \sqrt[3]{}\,b$	$\sqrt[3]{}R^2 - 2\sqrt[3]{}b\,R + \sqrt[3]{}b^2$	$\sqrt[3]{}R^3 - 3\sqrt[3]{}\,b\,R^2 + 3\sqrt[3]{}\,b^2\,R - \sqrt[3]{}\,b^3$
$\sqrt[3]{}\,R - \sqrt[3]{}\,c$	$\sqrt[3]{}R^2 - 2\sqrt[3]{}c\,R + \sqrt[3]{}c^2$	$\sqrt[3]{}R^3 - 3\sqrt[3]{}\,c\,R^2 + 3\sqrt[3]{}\,c^2\,R - \sqrt[3]{}\,c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt[3]{}\,R - \sqrt[3]{}\,R$	$\sqrt[3]{}R^2 - 2\sqrt[3]{}RR + \sqrt[3]{}R^2$	$\sqrt[3]{}R^3 - 3\sqrt[3]{}\,R\,R^2 + 3\sqrt[3]{}R^2R - \sqrt[3]{}\,R^3$
$A\sqrt[3]{}R - \frac{3}{4}A\sqrt[3]{}R$	$A\sqrt[3]{}R^2 - \frac{6}{4}A\sqrt[3]{}R^2 + \frac{3}{5}A\sqrt[3]{}R^2$	$AR - \frac{9}{4}AR + \frac{9}{5}AR - \frac{1}{2}AR$
$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$	$1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
1	1	1
$1 + 3 = 4$	$4 + 6 = 10$	$10 + 10 = 20$

Et sic deinceps; continue addendo numeros triangulares seu aggregata numerorum Arithmetice-proportionalium, ut habeatur consequens rationis cujus antecedens est 1.

PROP. CXXXI.

Theorema.

PARI *modo*, Si exponatur series Æqualium mulctata serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nam ut in Subductione seriei Subsecundanorum, consequentes rationum fiunt continua additione numerorum Arithmetice-proportionalium, $1+2=3$. $1+2+3=3+3=6$. $1+2+3+4=6+4=10$. $1+2+3+4+5=10+5=15$. $1+2+3+4+5+6=15+6=21$. &c. Ita in Subductione Subtertianorum consequentes rationum fiunt continua additione numerorum illorum

rum (1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.) in Subductione Subsecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4$. $4+6=10$. $10+10=20$. $20+15=35$. $35+21=56$. &c. vel $1+1+2=1+3=4$. $4+1+2+3=1+3+6=10$. $10+1+2+3+4=1+3+6+10=20$. $20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35$. $35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56$. &c. Deinde ex numerorum jam inventorum (1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione, fiunt consequentes rationum in Subductione seriei Subquartanorum, (nempe $1+4=5$. $5+10=15$. $15+20=35$. $35+56=91$. &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt consequentes rationum in Subductione seriei proximæ (Subquintanorum;) Et sic deinceps; ad hunc modum.

Seriei æqualium mulctatæ serie

Ratio quam habent ad seriem maximo æqualium

	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Superfolida.	Sextana.
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$.
Subsecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}$.
Subtertia.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}$.
Subquart.	$\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}$.
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+35}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+126}=\frac{1}{252}$.	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}$.
Subsext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}$.	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}$.	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}$.	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}$.	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}$.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHO-

SCHOLIUM.

Atque hic obiter incidimus in numerorum Figuratorum (ut dici ſolent) ſpeculationem inſperatam. Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam ſequentis Tabellæ) hujuſmodi additione facti, Figurati; puta Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod, cum ſit cuivis obvium, monuiſſe ſufficiat.

Patet etiam, (in utraque Tabella,) ſeries numerorum ſic inventorum tranſverſas eaſdem plane eſſe atque erectas.

Ex dictis autem licet propoſitionum aliquot præcedentium ſummam (nempe de ſerie æqualium ſeriei radicum mulctata) in unam Tabellam conjicere quam ſequenti propoſitioni ſubjungam. Nempe ———

PROP. CXXXII.

Theorema.

SI exponatur infinita ſeries æqualium mulctata analoga ſerie Primanorum (vel ſi libet, Subprimanorum, quod tantundem valet,) Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. eam rationem habebunt ad congruam ſeriem æqualium, quam habet Unitas ad numeros in ſubjecta Tabella indicatos. Nempe

Seriei Æqualium mulctatæ ſerie

	Æqualia	Reſidua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrat.	Superſol.	Sextana.	Septimana.	Octavana.	Nonana.	Decimana.
Nulla	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Subprimanorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Subſecundanorum	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Subtertianorum	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Subquartanorum	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
Subquintanorum	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
Subſextanorum	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
Subſeptimanorum	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
Suboctavanorum	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
Subnonanorum	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
Subdecimanorum	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Sequitur ex præcedente. Numerus autem Tabellæ quilibet intermedius eſt aggregatum ex duobus ſibi proximis altero ſurſum altero ad dextram poſitis.

Notandum etiam eſt, eundem prodire rationis conſequentem in reſiduorum Quadratis ſi auferantur Subtertiana, & in Cubis ſi auferantur Subſecundana; item in Sextanis ſi auferantur Subſeptimana, & in Septimanis ſi auferantur Subſextana; & ſic ubique, reciprocatis quaſi poteſtatibus, ut ex inſpecta tabella patet.

Sed

Sed & etiam alias idem aliquando accidit, puta in Superſolidis ſi auferantur Subprimana, & in ipſis Reſiduis ſi auferantur Subquintana, ſed & in Quadratis ſi auferantur Subſecundana; Item in Nonanis ſi auferantur Subprimana, & in ipſis Reſiduis ſi auferantur Subnonana, ſed & in Cubis ſi auferantur Subſecundana, & Quadratis ſi auferantur Subtertiana: Item in Octavanis ſi auferantur Subſextana, & Sextanis ſi auferantur Suboctavana, ſed & in Decimanis ſi auferantur Subquintana, & in Quintanis ſi auferantur Subdecimana: & ſic alibi ut ex tabella patet.

PROP. CXXXIII.

Theorema.

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Secundanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta

Reſidua	Quadrata.	Cubi.
$aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
$bD - b^2$	$b^2D^2 - 2b^3D + b^4$	$b^3D^3 - 3b^4D^2 + 3b^5D - b^6$
$cD - c^2$	$c^2D^2 - 2c^3D + c^4$	$c^3D^3 - 3c^4D^2 + 3c^5D - c^6$
&c. uſque ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$DD - D^2$	$D^2D^2 - 2D^3D + D^4$	$D^3D^3 - 3D^4D^2 + 3D^5D - D^6$
$\frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{3}AD^2$	$\frac{1}{3}AD^4 - \frac{2}{4}AD^4 + \frac{1}{5}AD^4$	$\frac{1}{4}AD^6 - \frac{3}{5}AD^6 + \frac{3}{6}AD^6 - \frac{1}{7}AD^6$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}AD^2$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2\times3}\times\frac{4}{4\times5} = \frac{1}{30}$	$\frac{1}{2\times3}\times\frac{4}{4\times5}\times\frac{9}{6\times7} = \frac{1}{140}$

Et ſic deinceps; continue multiplicando Numeratores per numeros quadratos, & denominatores per binos continue ſequentes Arithmetice proportionales.

PROP. CXXXIV.

Corollarium.

IDeoque; *Si ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum reſpective ducatur in ſeriem Primanorum; Rectangulorum (aut ipſis æqualium, vel etiam proportionalium, Quadratorum aut figurarum quarumvis ſimilium) aggregatum, ad aggregatum totidem æqualium, rationem habebunt cognitam.*

Atque idem accidet ſi Quadrata ſeriei illius in Quadrata hujus; Et Cubi illius in Cubos hujus, &c. reſpective ducantur.

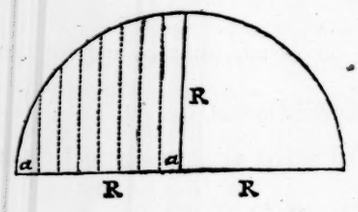
Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. præced. Nam ſi ducatur

	$D-a$	$Q:D-a:=D^2-2aD+a^2$	$C:D-a:=D^3-3aD^2+3a^2D-a^3$
in	a	in a^2	in a^3
fiet	$aD-a^2$	$a^2D^2-2a^3D+a^4$	$a^3D^3-3a^4D^2+3a^5D-a^6$
	&c.	&c.	&c.

PROP. CXXXV.

Corollarium.

IDeoque *Semi-Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Semi-Ellipſis ad Parallelogrammum Ellipſi circumſcriptum,) eam habet rationem quam habent Radices quadraticæ univerſales Reſiduorum ſeriei Primanorum ſerie Secundanorum multatæ, ad ſeriem Primanorum illorum maximo æqualium: Totus itaque Circulus (aut Ellipſis) ad illud Quadratum (vel Parallelogrammum) rationem habebit illius duplam.*



Nam ſi diameter circuli (vel etiam ellipſeos) ponatur D, (cujus pars infinite parva $\frac{D}{\infty} = a$,) eique ordinatim-applicentur infinitæ rectæ (æqualiter ab invicem diſtantes) ſemicirculum (vel ſemi-ellipſem) complentes; erunt illæ (ut notum eſt) mediæ proportionales (vel ſaltem in ellipſi mediis illis proportionalibus proportionales) inter diametri ſegmenta; Puta

inter & ideoque vel	a	$2a$	$3a$	$4a$	
	$D-a$	$D-2a$	$D-3a$	$D-4a$	
	$\sqrt{:aD-a^2}$:	$\sqrt{:2aD-4a^2}$:	$\sqrt{:3aD-9a^2}$:	$\sqrt{:4aD-16a^2}$	&c.
	$\sqrt{:aD-a^2}$:	$\sqrt{:bD-b^2}$:	$\sqrt{:cD-c^2}$	$\sqrt{:dD-d^2}$	

Adeoque omnium aggregatum, hoc eſt ſemicirculus, (vel ſemi-ellipſis) ad totidem ipſi $\sqrt{D^2}$ æqualium, puta ad quadratum Diametri (ſaltem ad diametrum in altitudinem ductam)

ut $\sqrt{:aD-a^2}: + \sqrt{:bD-b^2}: + \sqrt{:cD-c^2}: +$ &c. uſque ad $\sqrt{:DD-D^2}$,

ad $\sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} +$ &c. $= A\sqrt{D^2} = AD$

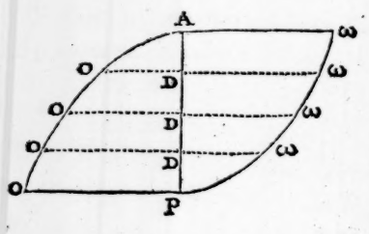
Ideoque circulus integer ad idem quadratum, ut

$2\sqrt{:aD-a^2}$ &c. ad AD.

PROP. CXXXVI.

Corollarium.

ET proinde, *Si ſupponamus ſemiparabolæ cujuſvis infinitas rectas (ordinatim-applicatas) in ejuſdem, inverſo ſitu poſitæ, reſpectivas rectas duci; quod provenit ſolidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (vel ex Quadratis, aut aliis quidem figuris ſimilibus, quæ rectangulis illis æquentur,) erit ad æque-altum Parallelepipedum congruum (nempe cujus baſis æquetur Quadrato baſis ſemiparabolæ,) ut Semicirculus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in ſubduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipſi.)*



Sit eadem parabola APO ſitu directo, & PAω ſitu inverſo poſita: erunt igitur (ex natura Parabolæ) Quadrata ordinatim-applicatarum (nempe rectarum DO, DO, &c. deſcendendo; vel Dω, Dω, &c. aſcendendo,) infinita ſeries Primanorum; puta a, $2a$, $3a$, &c. vel eorum loco a,b,c, &c. quorum maximum dicatur D (nempe quadratum baſis PO vel Aω:) Et propterea, eadem inverſo ſitu erunt $D-a$, $D-2a$, $D-3a$, &c. vel etiam $D-a$, $D-b$, $D-c$, &c. (Æquale enim eſt ſingulorum incrementum,

tum, si à minimo ordiamur, atque decrementum, si ordiamur à maximo.) Et consequenter ipsæ ordinatim-applicatæ (quippe in quadratorum suorum ratione subduplicata,) illic quidem $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, &c. vel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. hic autem $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-2a}$. $\sqrt{:D-3a}$. &c. vel (eorum loco) $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-b}$. $\sqrt{:D-c}$. &c. Ductis igitur his in illas, emergunt rectangula $OD\omega$. Nempe

Ductis	$\sqrt{:D-a}$.	$\sqrt{:D-b}$.	$\sqrt{:D-c}$.	&c.
In	$\sqrt{a}$.	$\sqrt{b}$.	$\sqrt{c}$.	&c.
Fient	$\sqrt{:aD-a^2}$.	$\sqrt{:bD-b^2}$.	$\sqrt{:cD-c^2}$.	&c.

Horum autem rectangulorum omnium aggregatum, ad rectangulum $\sqrt{:D-o}$. in $\sqrt{:D-o}$, hoc est $\sqrt{D^2=D}$ toties positum: hoc est, solidum ex illa multiplicatione ortum, ad dictum Parallelepipedum: est ut semicirculus ad quadratum Diametri, per præcedentem.

Et propterea etiam mediæ proportionales inter contiguas rectas OD, $D\omega$, erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi. Quippe quia rectangula $OD\omega$ sunt illis ordinatim-applicatis proportionalia.

SCHOLIUM.

Nota tamen, non necessarium esse ut semi-parabola inverso situ posita sit plane eadem cum ea quæ ponitur situ directo: nam res non minus succedet in quibuslibet duabus semiparabolis inverso situ positis, modo æque-altis. Ita tamen ut, si bases habeant inæquales, basis Parallelepipedi non sumatur, utriusvis Parabolarum basis quadrato, sed utriusque rectangulo æqualis. puta $PO \times A\omega$. Quod monuisse sufficiat, cum eadem quæ præcessit demonstratio, levi immutatione facta, etiam huc accommodari possit. Vel etiam hoc inde facile inferri possit.

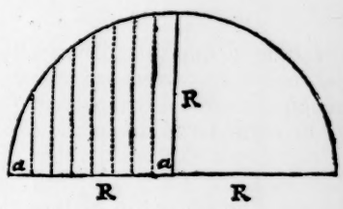
Figura vero ex omnibus mediis proportionalibus (inter OD, $D\omega$,) constans, erit quoddam Elliptoeides: cujus nempe ordinatim-applicatarum quadrata sunt ipsis ordinatim-applicatis in Ellipsi proportionalia, ut patet. Sicut nempe in Paraboloeide Biquadratico ordinatim-applicatarum quadrata sunt ordinatim-applicatis in Parabola proportionalia; Et quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola proportionalia ipsis in Triangulo ordinatim-applicatis.

PROP. CXXXVII.

Corollarium.

ITem, *Sphæroeides (vel etiam Conoeides aut Pyramidoeides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Prisma) circumscriptum, rationem habebunt eam quam habet quadruplum seriei Primanorum serie Secundanorum multatæ, ad seriem totidem æqualium maximo Primanorum. Nempe ut 2 ad 3.*

Cum enim rectæ in Circulo vel Ellipsi sint Duplum seriei $\sqrt{:aD-a^2}$, &c. Erunt plana in Conoeide vel Pyramidoeide ut Quadruplum ipsorum $aD-a^2$, &c. Ideoque ad Prisma vel Cylindrum circumscriptum, ut 4 ad 6, vel 2 ad 3. Per prop.133. Quod & antea ostensum erat prop. 123.

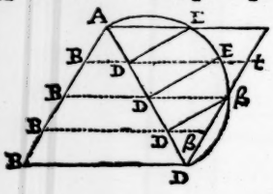


PROP. CXXXVIII.

Corollarium.

ITem, *Si Parallelogrammum linea diagonali dividatur; rectæque unius trianguli in continuas rectas alterius trianguli ducantur, mediæ proportionales erunt totidem (vel circuli, vel saltem) ellipseos ordinatim-*

applicatæ; earumque quadrata aut circuli (aut figuræ quæcunque ſimiles) Pyramidoeidis aut Conoeidis Elliptici Plana.



Sequitur ex duabus præced. Nam rectæ conterminæ ſunt inſtar ſegmentorum Diametri. An autem Circulus, an Ellipſis prodibit; judicandum erit eodem indicio, quo in prop. 124.

PROP. CXXXIX.

Theorema.

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Tertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$a\,D^2 - a^3$	$a^2\,D^4 - 2\,a^4\,D^2 + a^6$	$a^3\,D^6 - 3\,a^5\,D^4 + 3\,a^7\,D^2 - a^9$
&c. ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$D\,D^2 - D^3$	$D^2\,D^4 - 2\,D^4\,D^2 + D^6$	$D^3\,D^6 - 3\,D^5\,D^4 + 3\,D^7\,D^2 - D^9$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,AD^3$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}\,A\,D^6$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{48}{1920}\,A\,D^9$
vel $\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$

Et ſic deinceps; puta

$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$. $\frac{2\times4\times6\times8\times10}{6\times8\times10\times12\times14\times16}$. $\frac{2\times4\times6\times8\times10\times12}{7\times9\times11\times13\times15\times17\times19}$. &c.

PROP. CXL.

Corollarium.

IDem accidet, *ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Secundanorum, ducatur in ſeriem Primanorum. Et illius Quadrata, Cubi, &c. in Quadrata, Cubos &c. hujus.*

(Puta, ſi rectæ in Semiparabola, diametro parallelæ, ducantur in rectas Trianguli; nam earum continuationes, in complemento, ſunt ſeries Secundanorum.) Quia nempe $D^2 - a^2$ in a eſt $a\,D^2 - a^3$. &c.

PROP. CXLI.

Theorema.

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Quartanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$a\,D^3 - a^4$	$a^2\,D^6 - 2\,a^5\,D^3 + a^8$	$a^3\,D^9 - 3\,a^6\,D^6 + 3\,a^9\,D^3 - a^{12}$
&c.	&c.	&c.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}\,AD^4$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}\,AD^8$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{13} = \frac{162}{3640} = \frac{81}{1820}\,AD^{12}$
vel $\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$

Et ſic deinceps, puta $\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$. $\frac{3\times6\times9\times12\times15}{6\times9\times12\times15\times18\times21}$. &c.

PROP. CXLII.

Corollarium.

IDem continget, *ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Tertianorum, ducatur in ſeriem Primanorum.*

(Puta,

(Puta, si rectæ Paraboloeidis Cubicalis diametro Parallelæ, ducantur in rectas Trianguli inscripti: Nam earum continuationes in Complemento, sunt series Tertianorum. Et similiter mutatis mutandis, in aliis propositionibus.)

Quia nempe $D^3 - a^3$ in a, est $aD^3 - a^4$.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit, mutatis mutandis, in aliis quibusvis casibus, ubi series hujusmodi componitur ex duabus vel pluribus aliis seriebus invicem multiplicatis. Ut patet.

PROP. CXLIII.

Theorema.

PAriter, Si exponatur series Primanorum mulctata serie Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $\frac{4}{2\times6}\cdot\frac{4\times8}{3\times7\times11}\cdot\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}\cdot\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$ &c.

Item $\frac{5}{2\times7}\ \frac{5\times10}{3\times8\times13}\ \frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}\ \frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$ &c.

Et sic deinceps, ut potestas seriei ablatæ postulaverit: Prout inductione patebit. Ideoque ——

PROP. CXLIV.

Theorema.

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua ipsa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella: Sive, quam habent numeri Tabellæ, ad Unitatem. Nempe

Seriei Primanorum mulctatæ serie

	Residua	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.
Secundan.	$\frac{1}{2\times3}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$
Tertianor.	$\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$
Quartan.	$\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$
Quintan.	$\frac{4}{2\times6}$	$\frac{4\times8}{3\times7\times11}$	$\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$
Sextanor.	$\frac{5}{2\times7}$	$\frac{5\times10}{3\times8\times13}$	$\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$
Septiman.	$\frac{6}{2\times8}$	$\frac{6\times12}{3\times9\times15}$	$\frac{6\times12\times18}{4\times10\times16\times22}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{5\times11\times17\times23\times29}$
Octavan.	$\frac{7}{2\times9}$	$\frac{7\times14}{3\times10\times17}$	$\frac{7\times14\times21}{4\times11\times18\times25}$	$\frac{7\times14\times21\times28}{5\times12\times19\times26\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CXLV. *Theorema.*

Similiter, Si exponatur ſeries Secundanorum mulctata ſerie Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem æqualium

Seriei Secundanorum mulctatæ ſerie	Ref.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
Tertian.	1 / 3×4	1×2 / 5×6×7	1×2×3 / 7×8×9×10	1×2×3×4 / 9×10×11×12×13
Quart.	2 / 3×5	2×4 / 5×7×9	2×4×6 / 7×9×11×13	2×4×6×8 / 9×11×13×15×17
Quintan.	3 / 3×6	3×6 / 5×8×11	3×6×9 / 7×10×13×16	3×6×9×12 / 9×12×15×18×21
Sextan.	4 / 3×7	4×8 / 5×9×13	4×8×12 / 7×11×15×19	4×8×12×16 / 9×13×17×21×25
Septim.	5 / 3×8	5×10 / 5×10×15	5×10×15 / 7×12×17×22	5×10×15×20 / 9×14×19×24×29
Octav.	6 / 3×9	6×12 / 5×11×17	6×12×18 / 7×13×19×25	6×12×18×24 / 9×15×21×27×33

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CXLVI. *Theorema.*

Item, Si exponatur ſeries Tertianorum mulctata ſerie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem æqualium

Seriei Tertianorum mulctatæ ſerie	Ref.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
Quartan.	1 / 4×5	1×2 / 7×8×9	1×2×3 / 10×11×12×13	1×2×3×4 / 13×14×15×16×17
Quintan.	2 / 4×6	2×4 / 7×9×11	2×4×6 / 10×12×14×16	2×4×6×8 / 13×15×17×19×21
Sextan.	3 / 4×7	3×6 / 7×10×13	3×6×9 / 10×13×16×19	3×6×9×12 / 13×16×19×22×25
Septiman.	4 / 4×8	4×8 / 7×11×15	4×8×12 / 10×14×18×22	4×8×12×16 / 13×17×21×25×29
Octavan.	5 / 4×9	5×10 / 7×12×17	5×10×15 / 10×15×20×25	5×10×15×20 / 13×18×23×28×33

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHO-

SCHOLIUM.

Atque eodem modo facile erit vel has Tabellas quouſque libet continuare, vel alias etiam pro ſeriebus ſequentibus componere; puta ſeriebus Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. mulctatis ſeriebus quibuſlibet ſuperioris poteſtatis.

PROP. CXLVII.

Theorema.

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Primanorum: Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium rationem habebunt cognitam.

Nempe eam quæ exhibetur prop. 133. Puta

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{a}D-\sqrt{a^2}$	$\sqrt{a^2}D^2-2\sqrt{a^3}D+\sqrt{a^4}$	$\sqrt{a^3}D^3-3\sqrt{a^4}D^2+3\sqrt{a^5}D-\sqrt{a^6}$
&c. ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$\sqrt{D}-\sqrt{D^2}$	$\sqrt{D^2}D^2-2\sqrt{D^3}D+\sqrt{D^4}$	$\sqrt{D^3}D^3-3\sqrt{D^4}D^2+3\sqrt{D^5}D-\sqrt{D^6}$
$\frac{2}{3}A\sqrt{D^2}-\frac{2}{4}A\sqrt{D^2}$	$\frac{2}{4}A\sqrt{D^4}-\frac{4}{5}A\sqrt{D^4}+\frac{2}{6}AD^2$	$\frac{2}{5}AD^3-\frac{6}{6}AD^3+\frac{6}{7}AD^3-\frac{2}{8}AD^3$
$\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{4}-\frac{4}{5}+\frac{2}{6}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}-\frac{6}{6}+\frac{6}{7}-\frac{2}{8}=\frac{12}{1680}=\frac{1}{140}$
$\frac{2}{3\times4}=\frac{1}{2\times3}$	$\frac{2\times2}{4\times5\times6}=\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{2\times2\times3}{5\times6\times7\times8}=\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$

PROP. CXLVIII.

Corollarium.

IDem continget ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Subſecundanorum, ducatur in ſeriem Subſecundanorum.

(Puta ſi ordinatim applicatæ in ſemi-parabola ducantur in earundem continuationes in ipſius complemento.) Nam $\sqrt{D}-\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ facit $\sqrt{a}D-\sqrt{a^2}=\sqrt{a}D-a$. &c. Et facta ab eorum quadratis, æquantur quadratis horum &c.

PROP. CXLIX.

Corollarium.

PAtet etiam; Eaſdem provenire rationes, ſive exponatur ſeries $a-a^2$ &c. ſive ſeries $\sqrt{a}-\sqrt{a^2}$ &c. (vel $\sqrt{a}-a$:)

Nempe, collatis Prop. 133. & 147.

SCHOLIUM.

Ideoque & reliqua quæ poſt Prop. 133. habentur Corollaria, huc etiam (mutatis mutandis) non difficulter transferri poſſent. Quod monuiſſe ſufficiat.

PROP. CL.

Theorema.

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Radicum Quadraticarum Tertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{a}D^2-\sqrt{a^3}$	$\sqrt{a^2}D^4-2\sqrt{a^4}D^2+\sqrt{a^6}$	$\sqrt{a^3}D^6-3\sqrt{a^5}D^4+3\sqrt{a^7}D^2-\sqrt{a^9}$
&c.	&c.	&c.
$\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$	$\frac{2}{4}-\frac{4}{6}+\frac{2}{8}=\frac{16}{192}=\frac{1}{12}$	$\frac{2}{5}-\frac{6}{7}+\frac{6}{9}-\frac{2}{11}=\frac{96}{3465}$
$\frac{4}{3\times5}A\sqrt{D^3}$	$\frac{4\times4}{4\times6\times8}A\sqrt{D^6}$	$\frac{4\times4\times6}{5\times7\times9\times11}A\sqrt{D^9}$

PROP.

PROP. CLI. *Corollarium.*

IDem continget, ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum, ducatur in ſeriem Subſecundanorum.

Quia $D - a$ vel $\sqrt{D^2} - \sqrt{a^2}$ in $\sqrt{a}$, facit $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, vel $\sqrt{a}D^2 - \sqrt{a^3}$.

SCHOLIUM.

Et ſimiliter etiam alibi intelligendum eſt, ubi ſeries expoſita dividi poſſit, in duas vel plures componentes.

PROP. CLII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Secundanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{a}D^3 - \sqrt{a^4}$	$\sqrt{a^2}D^6 - 2\sqrt{a^5}D^3 + \sqrt{a^8}$	$\sqrt{a^3}D^9 - 3\sqrt{a^6}D^6 + 3\sqrt{a^9}D^3 - \sqrt{a^{12}}$
&c.	&c.	&c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{7} + \frac{2}{10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{8} + \frac{6}{11} - \frac{2}{14} = \frac{324}{6160} = \frac{81}{1540}$
$\frac{6}{3\times 6}$	$\frac{6\times 6}{4\times 7\times 10}$	$\frac{6\times 6\times 9}{5\times 8\times 11\times 14}$

Et ſic deinceps. Et ſimiliter in ſubductione ſeriei cujuſvis poteſtatis ſuperioris. Adeoque ——

PROP. CLIII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Subſecundanorum mulctata ſerie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum Quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem Æqualium

Seriei Subſecundanorum mulctatæ ſerie

	Reſidua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Primanor.	$\frac{2}{3\times 4}$	$\frac{2\times 2}{4\times 5\times 6}$	$\frac{2\times 2\times 3}{5\times 6\times 7\times 8}$	$\frac{2\times 2\times 3\times 4}{6\times 7\times 8\times 9\times 10}$
√ Tertian.	$\frac{4}{3\times 5}$	$\frac{4\times 4}{4\times 6\times 8}$	$\frac{4\times 4\times 6}{5\times 7\times 9\times 11}$	$\frac{4\times 4\times 6\times 8}{6\times 8\times 10\times 12\times 14}$
Secundan.	$\frac{6}{3\times 6}$	$\frac{6\times 6}{4\times 7\times 10}$	$\frac{6\times 6\times 9}{5\times 8\times 11\times 14}$	$\frac{6\times 6\times 9\times 12}{6\times 9\times 12\times 15\times 18}$
√ Quintan.	$\frac{8}{3\times 7}$	$\frac{8\times 8}{4\times 8\times 12}$	$\frac{8\times 8\times 12}{5\times 9\times 13\times 17}$	$\frac{8\times 8\times 12\times 16}{6\times 10\times 14\times 18\times 22}$
Tertianor.	$\frac{10}{3\times 8}$	$\frac{10\times 10}{4\times 9\times 14}$	$\frac{10\times 10\times 15}{5\times 10\times 15\times 20}$	$\frac{10\times 10\times 15\times 20}{6\times 11\times 16\times 21\times 26}$
√ Septim.	$\frac{12}{3\times 9}$	$\frac{12\times 12}{4\times 10\times 16}$	$\frac{12\times 12\times 18}{5\times 11\times 17\times 23}$	$\frac{12\times 12\times 18\times 24}{6\times 12\times 18\times 24\times 30}$
Quartan.	$\frac{14}{3\times 10}$	$\frac{14\times 14}{4\times 11\times 18}$	$\frac{14\times 14\times 21}{5\times 12\times 19\times 26}$	$\frac{14\times 14\times 21\times 28}{6\times 13\times 20\times 27\times 34}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

PROP.

PROP. CLIV.

Theorema.

Pariter, Si exponatur ſeries Subtertianorum mulctata ſerie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum Cubicarum Secundanorum, Quartanorum, Quintanorum, Septimanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem Æqualium

Seriei Subtertianorum mulctatæ ſerie	Reſ.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
√c. Secun.	3 / 4×5	3×2 / 5×6×7	3×2×3 / 6×7×8×9	3×2×3×4 / 7×8×9×10×11
Primanor.	6 / 4×6	6×4 / 5×7×9	6×4×6 / 6×8×10×12	6×4×6×8 / 7×9×11×13×15
√c. Quart.	9 / 4×7	9×6 / 5×8×11	9×6×9 / 6×9×12×15	9×6×9×12 / 7×10×13×16×19
√c. Quint.	12 / 4×8	12×8 / 5×9×13	12×8×12 / 6×10×14×18	12×8×12×16 / 7×11×15×19×23
Secundan.	15 / 4×9	15×10 / 5×10×15	15×10×15 / 6×11×16×21	15×10×15×20 / 7×12×17×22×27
√c. Septim.	18 / 4×10	18×12 / 5×11×17	18×12×18 / 6×12×18×24	18×12×18×24 / 7×13×19×25×31
√c. Octav.	21 / 4×11	21×14 / 5×12×19	21×14×21 / 6×13×20×27	21×14×21×28 / 7×14×21×28×35
Tertianor.	24 / 4×12	24×16 / 5×13×21	24×16×24 / 6×14×22×30	24×16×24×32 / 7×15×23×31×39

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Et ſimili methodo non erit difficile & has Tabellas quouſque libet continuare, & alias etiam pro ſeriebus aliis componere; puta ſeriebus ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. (aut quidem radicum quadraticarum ſubtertianorum, ſubquintanorum, &c. vel radicum cubicarum ſubſecundanorum, ſubquartanorum, &c. aut aliarum ſimilium,) mulctatis ſeriebus quibuſlibet ſuperioris poteſtatis.

Sed & facile eſt has Tabellas (aliaſque ſimiliter condendas) interpolare, ſaltem quoad altitudinem, interponendo ſeries tranſverſas quotlibet, ut ex ipſa Tabellarum progreſſione rite conſiderata patebit.

Verbi gratia, in Tabella Prop. 144. Si ſeries Primanorum mulctetur ſerie Radicum quadraticarum Quintanorum, interponenda erit huic ablationi conveniens ſeries alia tranſverſa inter primam & ſecundam iſtius Tabellæ, (quia nempe Radices quadraticæ Quintanorum, quarum index eſt $\frac{3}{2}$, vel $2\frac{1}{2}$, medium locum habent inter ſecundana & tertiana, quorum indices 2 & 3;) eritque ſeries illa,

Reſidua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
$\frac{1\frac{1}{2}}{2\times 3\frac{1}{2}}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times 3}{3\times 4\frac{1}{2}\times 6}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times 3\times 4\frac{1}{2}}{4\times 5\frac{1}{2}\times 7\times 8\frac{1}{2}}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times 3\times 4\frac{1}{2}\times 6}{5\times 6\frac{1}{2}\times 8\times 9\frac{1}{2}\times 11}$
vel $\frac{3}{2\times 7}$	$\frac{3\times 6}{3\times 9\times 12}$	$\frac{3\times 6\times 9}{4\times 11\times 14\times 17}$	$\frac{3\times 6\times 9\times 12}{5\times 13\times 16\times 19\times 22}$
vel $\frac{6}{4\times 7}$	$\frac{6\times 6}{6\times 9\times 12}$	$\frac{6\times 6\times 9}{8\times 11\times 14\times 17}$	$\frac{6\times 6\times 9\times 12}{10\times 13\times 16\times 19\times 22}$

Atque idem etiam in aliis Tabellis præſtare non erit difficile, ſi proceſſui cujuſvis Tabellæ attendatur.

At quo pacto licebit eaſdem Tabellas interpolare quoad latitudinem, ſeriebus ſcilicet erectis alias interponendo; (puta radicum univerſalium Reſiduorum, Radicum quadraticarum Cuborum, &c. vel Radicum cubicarum Reſiduorum, Quadratorum, Biquadratorum, &c. vel ſimilium;) non adeo facilis eſt labor, ſi quidem poſſibilis. Illud autem deinceps, quoad potero, conabor, & quidem aliquouſque præſtabo, licet illud univerſaliter efficere vix ſpondere auſim aliter quam approximando.

Interim de ſeriebus auctis aliqua dicenda ſunt, ne videar eas penitus omittere; ſed breviter, ne ſim tædio.

PROP. CLV.

Theorema.

SI exponatur ſeries Æqualium aucta ſerie analoga Primanorum; Aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$R+a$	$R^2+2aR+a^2$	$R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$
&c. ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$R+R$	$R^2+2RR+R^2$	$R^3+3RR^2+3R^2R+R^3$
$AR+\frac{1}{2}AR$	$AR^2+\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$	$AR^3+\frac{3}{2}AR^3+\frac{3}{3}AR^3+\frac{1}{4}AR^3$
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	$1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ubi numerator quilibet conſtat ex præcedentis duplo unitate aucto: Denominator ex præcedente unitate aucto.

PROP. CLVI.

Corollarium.

IDeoque, *Si Trapezio (ex Parallelogrammo & Triangulo, æqualium baſium & altitudinum, conflato) aptetur Conoeides (vel Pyramidoeides) truncatum (ſive converſione circa axem, ſive alias;) erit illud ad Cylindrum vel Priſma inſcriptum, ut $\frac{7}{3}$ ad 1, vel, ut 7 ad 3.*

Nempe ut quadrata ſeriei æqualium ſerie Primanorum auctæ, ad ſeriem æqualium.

Sin Parallelogrammi & Trianguli baſes ſint inæquales, moderamen adhibendum eſt.

PROP.

PROP. CLVII.

Corollarium.

SI autem *Conoeides vel Pyramidoeides illud Cylindrice vel Prismatice excavetur; residuum erit (ad exemtum Cylindrum vel Prisma maximum inscriptum) ut* 4 *ad* 3.

Nempe ut $\frac{1}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$ ad 1.

PROP. CLVIII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium aucta serie Secundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta, si Parallelogrammum complemento Semiparabolæ augeatur.)

Nempe, pro quovis termino seriei Primanorum posito a (ad abbreviandam operationem,) & propterea pro quovis termino Secundanorum a^2, &c. Erunt

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$R^2 + a^2$ &c.	$R^4 + 2a^2R^2 + a^4$ &c.	$R^6 + 3a^2R^4 + 3a^4R^2 + a^6$ &c.
$1AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$ $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$1AR^4 + \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$ $\frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$	$1AR^6 + \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$ $\frac{1}{1} + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{288}{105}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si series Æqualium augeatur serie Tertianorum, Quartanorum, &c. Ut patet.

PROP. CLIX.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium aucta serie Subsecundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta si Parallelogrammum augeatur Semiparabola.) Nempe

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R} + \sqrt{a}$ &c.	$\sqrt{R^2} + 2\sqrt{a}R + \sqrt{a^2}$ &c.	$\sqrt{R^3} + 3\sqrt{a}R^2 + 3\sqrt{a^2}R + \sqrt{a^3}$ &c.
$A\sqrt{R} + \frac{2}{3}A\sqrt{R}$ $\frac{2}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$	$A\sqrt{R^2} + \frac{4}{3}A\sqrt{R^2} + \frac{2}{4}A\sqrt{R^2}$ $\frac{2}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{4} = \frac{68}{24} = \frac{17}{6}$	$A\sqrt{R^3} + \frac{6}{3}A\sqrt{R^3} + \frac{6}{4}A\sqrt{R^3} + \frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$ $\frac{2}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{2}{5} = \frac{588}{120} = \frac{49}{10}$

PROP. CLX.

Theorema.

SI series Æqualium augeatur serie Subtertianorum; Aggregata, eorumque Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

(Puta, si Parallelogrammum augeatur Semiparaboloeide Cubicali,) Nempe.

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{a}$ &c.	$\sqrt[3]{R^2} + 2\sqrt[3]{a}R + \sqrt[3]{a^2}$ &c.	$\sqrt[3]{R^3} + 3\sqrt[3]{a}R^2 + 3\sqrt[3]{a^2}R + \sqrt[3]{a^3}$ &c.
$\frac{3}{3} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$\frac{3}{3} + \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{31}{10}$	$\frac{3}{3} + \frac{9}{4} + \frac{9}{5} + \frac{3}{6} = \frac{111}{35}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si exponatur series Æqualium aucta serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. vel etiam serie radicum-quadraticarum Cuborum, Supersolidorum, &c. vel radicum Cubicarum Secundanorum, Quartanorum, &c. Et pariter in aliis.

PROP. CLXI.

Theorema.

PAriter, Si ſeries Primanorum augeatur ſerie Secundanorum; Aggregata, eorumque Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$aR+a^2$ &c.	$a^2R^2+2a^3R+a^4$ &c.	$a^3R^3+3a^4R^2+3a^5R+a^6$ &c.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}AR^2$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}AR^4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{1}{7}=\frac{209}{140}AR^6$

SCHOLIUM.

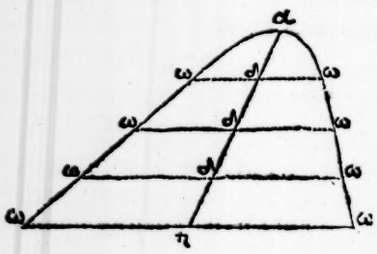
Et pari modo procedendum erit, ſi exponatur ſeries Primanorum (vel etiam Secundanorum, Tertianorum, &c.) aucta ſerie qualibet alia; ut non ſit opus hiſce diutius immorari. In quibus omnibus Conſecutio Numerorum, tum in Numeratoribus tum in Denominatoribus, eſt ad oculum conſpicua.

PROP. CLXII.

Corollarium.

IDeoque, *Conoeides vel Pyramidoeides Hyperbolicum, ad ſemiſſem Cylindri vel Priſmatis circumſcripti, eſt ut 5 ad 6: ad totum vero, ut 5 ad 12.*

Intellige, ſi tam tranſverſa diameter, quam diameter intercepta maxima, ponatur æqualis latori recto: ſecus enim adhibenda erit moderatio.



Nam, ſi ponatur Hyperbolæ latus rectum l vel R, tranſverſa diameter $t=l$, & diameter intercepta d, erunt quadrata ordinatim-applicatarum $dl+\frac{d}{t}dl$ (per pr. 33. Con. Sect.) vel (propter $t=l$) $dl+d^2$. Et propterea (cum ſit l vel R, certa quantitas, & d mutabilis & quidem altitudini proportionalis, pro qua igitur ſubſtitui poteſt a, b, c, &c.) erunt omnium Quadrata, (adeoque & plana Conoeidis vel Pyramidoeidis,) ſeries infinita Primanorum aucta ſerie Secundanorum; puta $aR+a^2$, $bR+b^2$, $cR+c^2$, &c. uſque ad R^2+R^2. Adeoque ſeries illa ad ſemiſſem ſeriei totidem maximo ($R^2+R^2=2R^2$) æqualium (puta ad AR^2,) erit ut 5 ad 6, per præced. Et propterea ad integram illam ſeriem æqualium, ut 5 ad 12. Quod erat propoſitum.

SCHOLIUM.

Idem etiam eveniet, ſi ſaltem ſumatur Diameter-intercepta maxima æqualis Diametro-tranſverſæ. Ut colligi poterit ex propoſitione ſequente.

PROP. CLXIII.

Corollarium.

SI autem non adſit limitatio prop. præced. Erit ratio Conoeidis vel Pyramidoeidis ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, utut non eadem quæ illic innuitur, cognita tamen.

Cum enim, utcunque, quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola ſit $dl+\frac{dd}{t}l$, vel $dL+\frac{dd}{T}L$, vel $\frac{dT+dd}{T}L$; ſi pro diametris interceptis, d, d, &c. ponantur ſucceſſive a, b, c, &c. ſitque omnium maxima D, adeoque quadratum ordinatim-applicatæ maximæ $\frac{DT+DD}{T}L$: Erunt omnia $aT+bT+cT$ &c. (uſque ad DT) $=\frac{1}{2}ADT$; & omnia $a^2+b^2+c^2$ &c. (ad D^2) $=\frac{1}{3}AD^2$; quorum aggregatum $\frac{1}{2}ADT+\frac{1}{3}AD^2$ ſi ducatur in L, & factum illud dividatur

tur per T; prodibit $\frac{\frac{1}{3}ADT+\frac{1}{3}AD^2}{T}L$, vel etiam $\frac{\frac{1}{3}T+\frac{1}{3}D}{T}ADL$, vel denique $\frac{3T+2D}{6T}ADL$: Quam autem habet rationem $\frac{3T+2D}{6T}ADL$, aggregatum Quadratorum omnium ordinatim-applicatarum; ad $\frac{DT+D^2}{T}AL$ vel $\frac{T+D}{T}ADL$, Aggregatum totidem Quadrato maximæ æqualium: eam habet Conoeides vel Pyramidoeides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, (propter plana Quadratis illis proportionalia;) nempe, ut $\frac{3T+2D}{6T}$ ad $\frac{T+D}{T}$, vel, ut $3T+2D$ ad $6T+6D$. vel, ut $\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}D$ ad $T+D$. Adeoque ——

PROP. CLXIV.

Corollarium.

UT semissis Diametri Transversæ auctus triente Diametri Interceptæ, ad Transversæ & Interceptæ Aggregatum; seu, ut Triplum Transversæ simul cum Duplo Interceptæ, ad simul utriusque Sextuplum: sic est Conoeides vel Pyramidoeides Hyperbolicum, ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi) circumscriptum.

Patet ex præcedente.

PROP. CLXV.

Corollarium.

ITem, *Hyperbola ad Parallelogrammum circumscriptum, est ut Series Radicum-universalium, respective auctæ, ad seriem totidem Radicum maximæ æqualium.*

Nempe si adsit limitatio Prop. 162, ut $\surd:aR+a^2:+\surd:bR+b^2:+\surd:cR+c^2:$ &c. (usque ad $\surd:R^2+R^2:$) ad $A\surd:R^2+R^2:=A\surd 2R^2=AR\surd 2$. Hoc est, ut omnes ordinatim-applicatæ ad maximam toties positam.

Si vero illa limitatio non adsit; saltem erit ut $\surd:\frac{aT+a^2}{T}L:+\surd:\frac{bT+b^2}{T}L:+\surd:\frac{cT+c^2}{T}L:$ &c. (usque ad $\surd:\frac{DT+D^2}{T}L:$) ad $A\surd:\frac{DT+D^2}{T}L:$ Hoc est, (dividendo omnia per $\surd L$ & multiplicando in $\surd T$) ut $\surd:aT+a^2:+\surd:bT+b^2:+\surd:cT+c^2$ &c. (usque ad $\surd:DT+D^2:$) ad $A\surd:DT+D^2:$ ut patet ex demonstratione prop. 163.

SCHOLIUM.

At quo pacto tandem ratio Aggregati Radicum illarum Universalium, ad Aggregatum totidem maximæ æqualium, numeris explicari poterit, non ita facile ostendetur.

Adeoque & hic incidimus in eandem difficultatem in Quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de Quadratura Circuli vel Ellipseos, (aliarumque aliquot figurarum curvilinearum:) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita series Radicum universalium Binomiorum, sicut illic Apotomarum.

Et quidem aliquando proclivis eram ut crederem rem plane impossibilem esse ut Radices surdæ numero infinitæ & invicem incommensurabiles ita in unum aggregatum coire possint ut illud, ad expositam aliquam quantitatem rationalem, rationem habeat explicabilem.

Atque hoc quidem eo magis adhuc confirmatum esse videbatur, quoniam ejusmodi series finita ad seriem totidem maximæ æqualium vix aliam passa est ratio-

nis explicationem quam omnes ſigillatim repetendo; raro enim duæ vel plures occurrunt commenſurabiles quæ in unam additione colligi poſſint.

Verbi gratia, ſi ponatur circuli Radius æqualium partium 6, Sinus recti ſeu Ordinatim-applicatæ in Quadrante ſingulis partium iſtarum terminis inſiſtentes, erunt, $\sqrt{:}36-0:+\sqrt{:}36-1:+\sqrt{:}36-4:+\sqrt{:}36-9:+\sqrt{:}36-16:+\sqrt{:}36-25:+\sqrt{:}36-36:$ (per ea quæ dicta ſunt ad pr. 121.) vel quod eodem recidit, $\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+\sqrt{0}$; vel, ut irrationalitas ad minimos terminos reducatur, $6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0$: Ratio igitur quam habet illud radicum aggregatum ad radicem maximam toties poſitam, puta $7\sqrt{:}36-0:$ vel $7\sqrt{36}$ vel 7×6 hoc eſt 42; non explicatius efferri poteſt quam $\frac{6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0}{42}$. Atque ea eſt ratio quam habent illi Sinus recti ſeu Ordinatim-applicatæ in Quadrante ad totidem rectas Radio æquales & parallelas in Quadrato circumſcripto.

Pariter, ſi ponatur radius partium 10; erunt ſinus recti $\sqrt{:}100-0:+\sqrt{:}100-1:+\sqrt{:}100-4:+\sqrt{:}100-9:+\sqrt{:}100-16:+\sqrt{:}100-25:+\sqrt{:}100-36:+\sqrt{:}100-49:+\sqrt{:}100-64:+\sqrt{:}100-81:+\sqrt{:}100-100:$ Hoc eſt $\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$. Vel etiam $10+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+8+\sqrt{51}+6+\sqrt{19}+0$. Quod aggregatum non aliter abbreviari poteſt quam pro $10+8+6+0$ ſubſtituendo 24; ut ratio iſtius aggregati ad radicem maximam toties poſitam, puta ad $11\sqrt{100}$ vel 11×10 vel 110, non explicatius efferri poſſit quam $\frac{24+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+\sqrt{51}+\sqrt{19}}{110}$; quæ minus adhuc videtur intelligibilis quam ubi ponitur radius partium pauciorum, puta 6.

Atque eodem modo quo plures ſupponuntur radii partes eo intricatior neceſſe eſt ut fiat rationis explicatio; quæ quidem fere omnium radicum repetitionem poſtulet, cum paucæ admodum, raro quidem, & non niſi fortuito quaſi, occurrunt, quæ vel rationales ſint vel quidem invicem commenſurabiles. Et propterea ſi ſupponatur Radius partium numero infinitarum, ratio proveniens etiam minus adhuc videatur explicabilis.

Idem contingeret, ſi, juxta tenorem prop. 135. ponatur circuli Diameter partium 12. Ita enim eſſent Sinus recti correſpondentes in Semicirculo, $\sqrt{:}0\times12-0:+\sqrt{:}1\times12-1:+\sqrt{:}2\times12-4:+\sqrt{:}3\times12-9:+\sqrt{:}4\times12-16:+\sqrt{:}5\times12-25:+\sqrt{:}6\times12-36:+\sqrt{:}7\times12-49:+\sqrt{:}8\times12-64:+\sqrt{:}9\times12-81:+\sqrt{:}10\times12-100:+\sqrt{:}11\times12-121:+\sqrt{:}12\times12-144$. Hoc eſt $\sqrt{:}0-0:+\sqrt{:}12-1:+\sqrt{:}24-4:+\sqrt{:}36-9:+\sqrt{:}48-16:+\sqrt{:}60-25:+\sqrt{:}72-36:+\sqrt{:}84-49:+\sqrt{:}96-64:+\sqrt{:}108-81:+\sqrt{:}120-100:+\sqrt{:}132-121:+\sqrt{:}144-144$. Hoc eſt $\sqrt{0}+\sqrt{11}+\sqrt{20}+\sqrt{27}+\sqrt{32}+\sqrt{35}+\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+\sqrt{0}$. Vel propter eaſdem radices bis poſitas, $2\sqrt{0}+2\sqrt{11}+2\sqrt{20}+2\sqrt{27}+2\sqrt{32}+2\sqrt{35}+\sqrt{36}$. Vel, reducendo irrationalitatem ad minimos terminos, $0+2\sqrt{11}+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{35}+6$. Ratio igitur quam habet hoc aggregatum ad totidem radices maximæ æquales, puta ad $13\sqrt{36}$ vel 13×6, hoc eſt, ad 78, non explicatius efferri poterit quam $\frac{2\sqrt{11}+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{35}+6}{78}$, vel $\frac{\sqrt{11}+2\sqrt{5}+3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+\sqrt{35}+3}{39}$. Atque ea eſt ratio quam habet aggregatum iſtorum Sinuum rectorum in Semicirculo, ad totidem rectas Radio æquales & parallelas in Parallelogrammo huic ſemicirculo circumſcripto. Si autem ſinus maximus $\sqrt{36}=6$ ſupponatur bis poni (pro utroque ſcilicet quadrante ſemel) atque eapropter pro 13 æqualibus, ponantur 14; (puta, pro $13\times6=78$ ponatur $14\times6-84$;) eadem erit hæc ratio cum ea quam ſupra provenire diximus poſito radio partium ſex.

Pariter, ſi Diameter ponatur partium 20; Sinus recti in Semicirculo erunt $\sqrt{:}0\times20-0:+\sqrt{:}1\times20-1:+\sqrt{:}2\times20-4:+\sqrt{:}3\times20-9:+\sqrt{:}4\times20-16:+\sqrt{:}5\times20-25:+\sqrt{:}6\times20-36:+\sqrt{:}7\times20-49:+\sqrt{:}8\times20-64:+\sqrt{:}$

$+\sqrt{:}\ 9\times 20-81:+\sqrt{:}\ 10\times 20-100:+\sqrt{:}\ 11\times 20-121:+\sqrt{:}\ 12\times 20-144:+\sqrt{:}\ 13\times 20-169:+\sqrt{:}\ 14\times 20-196:+\sqrt{:}\ 15\times 20-225:+\sqrt{:}\ 16\times 20-256:+\sqrt{:}\ 17\times 20-289:+\sqrt{:}\ 18\times 20-324:+\sqrt{:}\ 19\times 20-361:+\sqrt{:}\ 20\times 20-400$. Hoc eſt $\sqrt{0}+\sqrt{19}+\sqrt{36}+\sqrt{51}+\sqrt{64}+\sqrt{75}+\sqrt{84}+\sqrt{91}+\sqrt{96}+\sqrt{99}+\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$. Vel $2\sqrt{0}+2\sqrt{19}+2\sqrt{36}+2\sqrt{51}+2\sqrt{64}+2\sqrt{75}+2\sqrt{84}+2\sqrt{91}+2\sqrt{96}+2\sqrt{99}+\sqrt{100}$. (Nempe iidem ipſi qui ſupra in quadrante habentur poſito radio partium 10, bis hic poſiti; niſi quod ſinus maximus utrique quadranti communis non repetatur.) Vel etiam $0+2\sqrt{19}+12+2\sqrt{51}+16+10\sqrt{3}+4\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}+10$. Vel denique (quia $0+12+16+10=38$) $38+2\sqrt{19}+2\sqrt{51}+10\sqrt{3}+4\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}$. Adeoque ratio quam habet aggregatum illud radicum, ad maximam toties poſitam, (puta $21\times 10=210$)

eſt $\frac{38+2\sqrt{19}+2\sqrt{51}+10\sqrt{3}+4\sqrt{21}+2\sqrt{91}+8\sqrt{6}+6\sqrt{11}}{210}$.

vel $\frac{19+\sqrt{19}+\sqrt{51}+5\sqrt{3}+2\sqrt{21}+\sqrt{91}+4\sqrt{6}+3\sqrt{11}}{105}$.

Et quidem quo plures ponantur Radii vel Diametri partes, eo minus videtur explicabilis ratio ſinuum omnium ad maximum toties ſumptum: adeoque ſi ſupponantur radii vel diametri partes numero infinitæ, (quod ad ſcopum noſtrum faciendum videtur,) ratio ſinuum omnium ad radium toties poſitum, hoc eſt, Quadrantis vel Semicirculi ad Quadratum vel Parallelogrammum circumſcriptum, videatur penitus inexplicabilis, ſaltem niſi ejuſmodi explicatio ſufficere judicanda ſit, qualem prop. 121 & 135. exhibuimus.

His itaque perpenſis, prope abfuit ut rem quaſi penitus conclamatam ulterius inveſtigando deſiſterem. Id unicum quod ſpem fecit hoc erat. Nempe quod eadem difficultate non obſtante, in radicibus quadraticis, cubicis, biquadraticis, &c. numerorum Arithmetice proportionalium res non male ſucceſſit.

Nam, verbi gratia, ſi ſeries Subſecundanorum aliquouſque continuetur, puta $\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$, ipſius ratio ad maximum toties poſitum, puta $7\sqrt{6}$, non videtur alias explicabilis quam $\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel, $\frac{0+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel ſaltem (propter $0+1+2=3$) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$; niſi forſan placeat tam antecedentem quam conſequentem rationis ducere in $\sqrt{6}$, ut prodeat ratio $3\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}+\sqrt{36}$, ad 7×6; vel potius $3\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}+6$, ad $7\times 6=42$. Et ſimiliter in aliis ejuſmodi ſeriebus.

Verum ſi eadem ſeries ſupponatur in infinitum continuanda, prodibit tandem ratio $\frac{2}{3}$, vel 2 ad 3, aut 1 ad $1\frac{1}{2}$, ut dictum eſt prop. 53, 54. ipſa quidem infinitate (quod mirum videatur) irrationalitatem deſtruente.

Et ſimiliter in ſubtertianis, ſubquartanis, &c. continget, ut patet ex ſuperius traditis prop. 54, 59.

Cum itaque, illa difficultate non obſtante, quadratura Parabolæ & ab aliis antehac & à nobis etiam noſtra methodo, ſed & Paraboloeideos cujuſvis quadratura (eadem manente difficultate) à nobis in ſuperioribus ſatis feliciter tradita ſit; non plane omnis aberat ſpes rationem tandem inveniendi quam Radicum univerſalium (ſeriei vel auctæ vel mulctatæ) ſeries habeat ad ſeriem æqualium, & quidem ſi non univerſaliter, in quibuſdam ſaltem, quadantenus explicandi; fortaſſis etiam in illis ipſis quæ Circuli vel Ellipſeos, & quæ Hyperbolæ quadraturam attingunt nonnihil proficere.

Ut autem quid deinceps ſit inquirendum rectius perſpiciatur, meminiſſe licet nos (inter alia) Circuli (vel etiam Ellipſeos cujuſvis) quadraturam huc uſque perduxiſſe.

Nempe, per prop. 118, & 121, ſi rationum ſeries illa $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \frac{384}{945}$, &c. interpolari poterit; ratio illa quæ primæ & ſecundæ ponenda eſt intermedia, eſt ea quam habet Circuli Quadrans ad Quadratum Radii, vel Circulus ipſe ad Quadratum Diametri.

Item,

Item, per prop. 133, & 135, si interpolari poterit rationum series ista $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet Semicirculus ad Quadratum diametri.

Sed & insuper, si interpolari poterunt numeri diagoniales tabellæ prop. 132. nempe 1, 2, 6, 20, 70, &c. ratio quam habet unitas ad numerum eorundem primo & secundo intermedium, est ea quam habet Circulus ad Quadratum Diametri: & Ellipsis ad Parallelogrammum circumscriptum. Ut probabitur, ex prop. seq.

PROP. CLXVI.

Theorema.

SI series infinita Æqualium, Primanorum, Secundanorum, aut Tertianorum, &c. respective ducatur in seipsam inverse positam; atque eadem etiam in seipsam directe positam: erit Aggregatum rectangulorum illorum, ad Aggregatum horum; ut 1 ad 1, 2, 6, 20, 70, &c. numeros diagoniales Tabellæ prop. 132.

Nam si series Æqualium in seipsam (sive directe sive inverse positam) respective ducatur, fit series Æqualium: cui convenit ratio 1 ad 1.

Si autem series Primanorum in seipsam directe positam sic multiplicetur; fiet series Secundanorum; si series Secundanorum sic ducatur, fiet series Quartanorum; si series Tertianorum, fiet series Sextanorum, &c. per prop. 73. Quibus conveniunt rationes $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9}$. &c. per prop. 44. vel 64.

Si autem Series Primanorum respective ducatur in seipsam inversam; (puta series a, b, c, &c. in seriem $D-a$, $D-b$, $D-c$, &c. Item series Secundanorum in seipsam inversam, (puta series a^2, b^2, c^2, &c. in seriem $Q:D-a.\ Q:D-b.\ Q:D-c$ &c. vel $D^2-2aD+a^2.\ D^2-2bD+b^2.\ D^2-2cD+c^2$. &c.) Item series Tertianorum in seipsam inversam; (puta series a^3, b^3, c^3, &c. in seriem $C:D-a.\ C:D-b.\ C:D-c$. &c.) Et sic de reliquis; Rationes ipsis convenient, $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. per prop. 133, 134.

$\frac{1}{1})\frac{1}{1}(\frac{1}{1}$
$\frac{1}{3})\frac{1}{6}(\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5})\frac{1}{30}(\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7})\frac{1}{140}(\frac{1}{20}$
$\frac{1}{9})\frac{1}{630}(\frac{1}{70}$

Ratio igitur rationum harum ad rationes illas, ea est quam habet 1 ad numeros 1, 2, 6, 20, 70, &c. nempe numeros diagoniales tabellæ prop. 132. (ut ex calculo patet.) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Notandum hic, in serie rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, &c. Denominatores sive consequentes sunt Arithmetice-proportionales; adeoque si in singulis intervallis totidem essent interponendæ rationes, essent illæ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, &c. juxta analogiam Arithmetice-proportionalium, & leges prop. 44, & 64.

In serie vero rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. consequentes 1, 6, 30, 140, 630, &c. &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, &c. vel $1 \times \frac{12 \times 20 \times 28 \times 36 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$ (ubi fractionum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progressionis illius analogiam) si numerus primo & secundo interponendus dicatur A; fient reliqui, reliquis intervallis interponendi, continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{16 \times 24 \times 32 \text{ \&c.}}{3 \times 5 \times 7 \text{ \&c.}}$ (Et quidem numerus primo anteponendus $\frac{1}{8}$ A; juxta eandem analogiam. In præcedenti autem, & propterea in mox sequenti serie, numerus primo anteponendus evanescit; nempe, illic in nihil, istic in infinitum.)

In serie denique rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{70}$, &c. Consequentes 1, 2, 6, 20, 70, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14 \text{ \&c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ \&c.}}$ vel $1 \times \frac{4 \times 12 \times 20 \times 28 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$ (ubi,

ut

ut ſupra, tam numeratores quam denominatores fractionum ſunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progreſſionis analogiam) ſi numerus primo & ſecundo interponendus dicatur α, fiunt reliqui continua multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{8\times16\times24\ \&c.}{3\times5\times7\ \&c.}$ (Eſt autem $\alpha = \frac{1}{2}A$; propter $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{A}$ ($\frac{2}{A} = \frac{1}{\frac{1}{2}A} = \frac{1}{\alpha}$.)

PROP. CLXVII.

Theorema.

Ideoque, Si ſeries infinita Subſecundanorum (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) reſpective ducatur in ſeipſam inverſam (puta $\sqrt{:}\,D-a$. $\sqrt{:}\,D-b$. $\sqrt{:}\,D-c$. &c.) atque eadem etiam in ſeipſam directe poſitam: (puta ſeries $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in ſeriem $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) erit aggregatum rectangulorum illorum (puta $\sqrt{:}\,a\,D-a^2 : +\sqrt{:}\,b\,D-b^2 : +\sqrt{:}\,c\,D-c^2$: &c.) ad aggregatum horum (puta $\sqrt{a} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}$ &c. vel $a+b+c$ &c.) ut unitas ad numerum intermedium, numeris diagonialibus 1, 2, in Tabella prop. 132 interponendum.

Sequitur ex præcedente. Nam ſeries Subſecundanorum eſt ſeriei Æqualium, & ſeriei Primanorum intermedia, (ut patet ex dictis prop. 64.)

Series autem Subſecundanorum in ſeipſam directe poſitam (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) eſt ſeries Primanorum (puta $\sqrt{a^2}, \sqrt{b^2}, \sqrt{c^2}$, &c. vel a, b, c, &c.) cui convenit ratio $\frac{1}{2}$ per prop. 44, vel 64. Et propterea, ſi ratio quæ convenit ſeriei Primanorum in ſeipſam inverſam ductæ (intermedia nempe rationibus $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}$,) dicatur $\frac{1}{2\square}$: Ratio rationis hujus $\frac{1}{2\square}$ ad illam $\frac{1}{2}$, puta $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{3\square}$ ($\frac{1}{\square}$, erit (per præced.) ea quam habet 1 ad numerum inter 1 & 2 interponendum, in ſerie diagonialium 1, 2, 6, 20, 70, &c. tabellæ prop. 132. *Qui numerus igitur in poſterum dicatur* $\square$. Eſtque ſemiſſis numeri inter 1 & 6 interponendi in ſerie 1, 6, 30, 140, 630, &c.

PROP. CLXVIII.

Corollarium.

ET propterea, *Circulus ad Quadratum Diametri, eſt ut* 1 *ad* $\square$, *numerum nempe inter* 1 *&* 2 *interponendum in ſerie Diagonialium* 1, 2, 6, 20, 70, *&c. tabellæ prop.* 132.

Cum enim (per prop. 133, 135.) Semicirculus ad Quadratum diametri ſit ut 1 ad $2\square$ (numerum intermedium inter 1 & 6 in ſerie 1, 6, 30, 140, 630, &c.) erit circulus (quippe ſemicirculi duplus) ut 1 ad $\square$, (numerum intermedium inter 1 & 2 in ſerie 1, 2, 6, 20, 70, &c.) per præced.

Et quidem eadem ratio $\frac{1}{\square}$; ea eſt, quæ intermedia ponenda eſt inter $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$, in ſerie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. prop. 118, & 121. ut & deinceps etiam ulterius patebit.

SCHOLIUM.

Cum igitur (ut ad ea quæ monuimus in Schol. prop. 165. tandem redeamus) res eo redacta ſit, ut ſi poſſimus rationes illas interpolare (prop. 118. memoratas) $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. hoc eſt, quas habet 1 ad $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}$, &c. (hoc eſt, ad $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{7}{8}, 2\frac{9}{48}$, &c.) qui termini conſequentes fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{3\times5\times7\times9\ \&c.}{2\times4\times6\times8\ \&c.}$

Vel etiam illas (Prop. 133.) $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$, &c. quarum termini conſequentes 1, 6, 30, 140, &c. fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6\times10\times14\times18\ \&c.}{1\times2\times3\times4\ \&c.}$

Vel denique ſi illas $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}$, &c. nempe quas habet 1 ad 1, 2, 6, 20, &c. (numeros diagoniales tabellæ Prop. 132.) qui fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{3} \times \frac{14}{4}$ &c.

Si, inquam, harum rationum ſeriem unam aliquam interpolare poſſimus, habebitur accuratiſſima Circuli Quadratura. Et quidem in prima & tertia interponenda erit (poſt primam) ratio $\frac{1}{\square}$: in ſecunda vero ratio $\frac{1}{2\square}$. Adeoque interpolatione in una præſtita, in reliquis etiam non difficulter fiet.

Placet igitur (ut inde exordium ſumamus, unde major elucet ſpes quæſitum conſequendi,) Tabellam illam Prop. 132. aggredi, ut videamus numqua poſſimus arte illam interpolare: Adeoque, ipſam repetere intermiſſis alternatim ſpatiis, (ut quæ iſtic ſunt ſeries prima, ſecunda, tertia, &c. ſint hic ſecunda, quarta, ſexta, &c.) & paulo accuratius examinare; quod ſequentibus aliquot propoſitionibus fiet.

PROP. CLXIX.

Theorema.

NUmeri omnes Tabellæ prop. 132. ſunt Figurati. Nempe, qui in illius ſerie prima (ſive erecta ſive tranſverſa) ſunt Monadici; qui in ſecunda, Laterales; qui in tertia, Triangulares; qui in quarta, Pyramidales; & ſic deinceps, puta Trianguli-triangulares, Trianguli-pyramidales, Pyramidi-pyramidales, &c.

Patet hoc inſpecta tabella: & comparatis (ſi opus) iis, quæ de numeris figuratis apud Maurolicum aut alios occurrunt. Nominibus autem illis utor, quibus utitur Dn. *Oughtredus* noſtras (Mathematicus eximius) in ipſius *Clavi Mathematicæ* cap. 17. n. 11.

Quæ autem ſunt in illa tabella Prop. 132. ſeries prima, ſecunda, tertia, &c. jam in eadem hic repetita fiunt (propter intermiſſa ſpatia, numeris, ſi fieri poſſit, replenda) ſecunda, quarta, ſexta, &c.

Numeri	Monadici.	Laterales.	Triangulares.	Pyramidales.	Trian. triang.	Tri. pyram.
Monadici.	1	1	1	1	1	1
□						
Laterales.	1	2	3	4	5	6
Triangulares.	1	3	6	10	15	21
Pyramidales	1	4	10	20	35	56
Triangulitriang.	1	5	15	35	70	126
Triangulipyram.	1	6	21	56	126	252

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

PROP.

PROP. CLXX.

Theorema.

SEries duæ, in expoſita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari poſſunt (locis interponendis quotlibet;) interpoſitis ſcil. illic quot opus eſt, unitatibus; hic, totidem mediis Arithmeticis.

Puta, ſi placet unum ubique numerum interponere; erit monadicorum ſeries interpolata, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Lateralium vero $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6. vel $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6.
Ratio patet; quoniam numeri ſunt illic æquales, hic Arithmetice-proportionales.

SCHOLIUM.

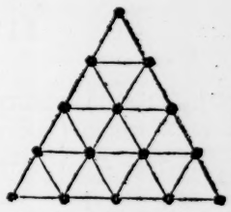
Reliquæ autem ſeries non ita facile interpolantur, niſi invento prius cujuſque ſeriei proprio charactere; quod ſequentibus propoſitionibus inveſtigabimus.

PROP. CLXXI.

Lemma.

PRopoſitum ſit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulares, ad ſuum latus.

Illud hoc progreſſu inveſtigabimus.



1. Si puncta totidem, quot numerus aliquis triangularis poſtulat, debita forma triangulari diſponantur, & rectis conjungantur, ut in appoſito ſchemate; manifeſtum eſt totam figuram triangularem in tot triangula dividi (tam toti, quam inter ſe ſimilia,) quot eſt quadratum numeri lateralis unitate minuti, (quod ſi opus ſit, demonſtrari poteſt ex 19 e 6.) Adeoque ſi ipſius numerus lateralis ſit l, erit numerus triangulorum particularium $Q : l - 1 := l^2 - 2l + 1$.

2. Quum horum triangulorum quodlibet habeat tres angulos, erit horum angulorum numerus $3l^2 - 6l + 3$.

3. Notandum eſt ad totius figuræ tria puncta angularia, non niſi tot angulos adjacere (nempe ad ſingula unum:) & propterea illi tres anguli occupant tria puncta, ſeu 3 P.

4. Ad reliqua puncta in lateribus, terminantur anguli terni; quorum igitur quilibet occupat trientem puncti. Sunt autem intermedia illa puncta lateralia, in quolibet latere $l - 2$, ergo in omnibus $3l - 6$, (nempe propter tria latera;) & anguli ad hæc intermedia puncta adjacentes $9l - 18$, (propter ternos angulos ad ſingula puncta;) quorum quilibet occupat trientem puncti, ſeu $\frac{1}{3}$ P; adeoque omnes occupant $\frac{9l-18}{3}$ P.

5. Ad reliqua quæ ſuperſunt puncta, intra aream figuræ, terminantur anguli ſeni (ad quodlibet nempe ſex,) qui propterea occupant ſextantem puncti. Quot autem illi ſunt anguli, ſic colligitur. Totus angulorum numerus eſt (ut diximus) $3l^2 - 6l + 3$: Hinc ſi ſubducantur 3 (ad totius figuræ angulos poſiti,) & $9l - 18$ (ad puncta lateralia adjacentes) manebunt $3l^2 - 15l + 18$; qui eſt numerus angulorum ad puncta intra aream terminatorum. Cum vero horum quilibet occupat ſextantem puncti, ſive $\frac{1}{6}$ P; occupabunt hi omnes $\frac{3l^2-15l+18}{6}$ P.

Denique, si simul addantur puncta sic inventa; nempe 3 P & $\frac{9l-18}{3}$ P & $\frac{3l^2-15l+18}{6}$ P; erit horum aggregatum $\frac{l^2+l}{2}$ Puncta; numerus punctorum omnium: Hoc est, numerus triangularis cujus latus l. Ideoque ——

PROP. CLXXII.

Theorema.

LAtus numeri cujusvis Triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^2+l}{2}$.

Ut ostensum est in præced.

Adeoque, dato latere l dabitur numerus Triangularis isti lateri conveniens, puta $n=\frac{l^2+l}{2}$.

Et contra, Dato numero Triangulari, invenietur ipsius latus.

Nempe, resolvendo hanc Æquationem $2n=l^2+l$, erit $\sqrt{:\frac{1}{4}+2n:}-\frac{1}{2}=l$.

PROP. CLXXIII.

Corollarium.

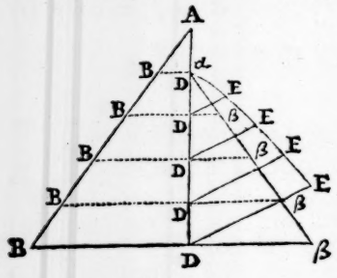
SI Hyperbolæ Diameter transversa sit 1, *& Latus rectum* $\frac{1}{2}$; *sumptis diametris* (*puncto applicationis & vertice interceptis*) 1, 2, 3, 4, 5, *&c. Ordinatim-applicatarum quadrata erunt* 1, 3, 6, 10, 15, *&c. nempe numeri Triangulares, cujus latera sunt* 1, 2, 3, 4, 5, *&c.*

Probatur per 17 vel 33 prop. Con. Sect. nost. Hyperbolam ipsam exhibebit figura prop. seq.

PROP. CLXXIV.

Corollarium.

ITem, *Si fiant ad eandem rectam A α D duo triangula similia, α D β, A D B; sitque ut* 1 *ad* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *sic AD ad DB, & α D ad D β; & sumantur æquales A α = 1 = α D = DD &c. Rectangula B D β, B D β, &c. erunt ad invicem ut* 1, 3, 6, 10, *&c. numeri Triangulares, quorum latera sunt α D, α D, &c. Mediæ vero proportionales inter B D, D β; B D, D β, &c. sunt ordinatim-applicatæ in Hyperbola α DE; cujus diameter transversa A α, & latus rectum α B, vel ipsi æquale.*



Patet ex calculo. Nam rectangulorum B D β, primum erit $\sqrt{\frac{1}{2}}\times 2\sqrt{\frac{1}{2}}=1$. Secundum $2\sqrt{\frac{1}{2}}\times 3\sqrt{\frac{1}{2}}=3$. Tertium $3\sqrt{\frac{1}{2}}\times 4\sqrt{\frac{1}{2}}=6$. Quartum $4\sqrt{\frac{1}{2}}\times 5\sqrt{\frac{1}{2}}=10$. Et sic deinceps. Quæ sunt quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola, per præced. Ideoque Mediæ proportionales puta $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, &c. ipsæ ordinatim-applicatæ.

SCHOLIUM.

Si autem sumpta fuissent A D = D B, & α D = D β, tum rectangula fuissent 1×2=2. 2×3=6. 3×4=12. 4×5=20, &c. dupla numerorum Triangularium;

rium: & Mediæ proportionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, &c. essent ordinatim applicatæ in Hyperbola, cujus tam latus rectum quam latus transversum sit 1. ut, ex dictis, consideranti patebit. Quod aliis rationibus Lateris Recti ad Diametrum Transversam, facile accommodabitur.

PROP. CLXXV.

Theorema.

SEries numerorum Triangularium, in præmissa tabella, commode interpolari poterit, si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ Arithmeticæ, quot opus est, & ex iis formentur numeri Triangulares, juxta prop. 172.

Puta si in serie numerorum triangularium 1, 3, 6, 10, 15, &c. unus ubique interponendus est numerus; eorum latera 1, 2, 3, 4, 5, &c. mediis Arithmeticis debite interpolata, erunt $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, &c. quibus lateribus (per prop. 172.) respondent numeri triangulares, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6, $7\frac{1}{8}$, 10, $12\frac{3}{8}$, 15, $17\frac{1}{8}$, 21, &c. Vel $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{15}{8}$, 3, $\frac{35}{8}$, 6, $\frac{63}{8}$, 10, $\frac{99}{8}$, 15, $\frac{143}{8}$, 21, &c. Vel denique $\frac{3}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{24}{8}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{48}{8}$, $\frac{63}{8}$, $\frac{80}{8}$, $\frac{99}{8}$, $\frac{120}{8}$, $\frac{143}{8}$, $\frac{168}{8}$, &c. quorum quidem differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

Pari modo, si interponendi sint in singulis intervallis duo loci; prodirent numeri, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, 1, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, 3, $\frac{35}{9}$, $\frac{44}{9}$, 6, $\frac{65}{9}$, $\frac{77}{9}$, 10, &c. Vel $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$, &c. quorum item differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

PROP. CLXXVI.

Lemma.

PRopositum sit inquirere quam habeant rationem numeri Pyramidales, ad latus suum.

Liceret & hanc propositionem pari progressu investigare, quo in prop. 171. usus sum: (observato interim discrimine quo differt debita numeri Pyramidalis dispositio à dispositione numeri Triangularis:) quod qui volet experiri poterit. Verum cum non ita facile esset lectori concipere debitum punctorum situm in pyramide, (ut quæ non omnia supponenda sunt in eodem plano,) & angulorum solidorum ad ea puncta positionem: satius videtur illud hac quæ sequitur methodo præstare. (Quæ quidem, nisi mallem utrumque modum ostendisse, adhiberi potuisset etiam ad prop. 171.)

1. Numerus Pyramidalis æquatur aggregato numerorum Triangularium (ut patet ex dictis ad prop. 130. & 132.) nempe ab Unitate ad numerum Triangularem sibi collateralem inclusive: (sicut & numeri Triangulares fiunt aggregatione Lateralium; & Laterales, Monadicorum; ut & Trianguli-triangulares, Pyramidalium; & sic deinceps.)

2. Est autem lateris l, numerus quilibet Triangularis $\frac{l^2+l}{2}$. per prop. 171.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. summa horum a^2+a, b^2+b, c^2+c, d^2+d, &c. erit duplum aggregati Triangularium; (quorum numerus erit æqualis lateri maximi:) & hujus propterea semissis, erit numerus Pyramidalis, cujus latus æquatur lateri maximi Triangularium.

$$\text{Num Pyramid.} = \frac{a^2+a \;+\; b^2+b \;+\; c^2+c \;+\; d^2+d \;+\; \&c.}{2}$$

4. Est igitur numerus Pyramidalis, semissis aggregati duarum serierum; eousque ab unitate continuatarum, donec numerus locorum æquetur lateri numeri Pyramidalis quæsiti, quod supponatur l: Quibus si præponatur locus alter 0^2+0, (ut series intelligantur ab 0 inchoatæ,) fiet harum numerus $l+1$. Et utriusque seriei summa seorsim innotescet per prop. 2 & 20.

5. Nempe, summa seriei Primanorum $0+a+b+c$, &c. quorum ultimum est l, numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}\,l$. per prop. 2.

6. Et ſumma ſeriei Secundanorum $0+a^2+b^2+c^2$ &c. quorum ultimum eſt l^2, & numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3}l^2+\frac{l+1}{6l}l^2$; vel $\frac{l+1}{3}l^2+\frac{l+1}{6}l$. per Prop. 20.

7. Utriuſque igitur ſummæ aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2}l+\frac{l+1}{3}l^2+\frac{l+1}{6}l$,) nempe $\frac{3l^2+3l+2l^3+2l^2+l^2+l}{6}=\frac{2l^3+6l^2+4l}{6}$, eſt aggregatum duarum ſerierum; cujus aggregati ſemiſſis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$ eſt numerus Pyramidalis cujus latus l. Ideoque ——

PROP. CLXXVII. *Theorema.*

LAtus numeri cujuſvis Pyramidalis ad ipſum numerum ſuum, eſt ut l ad $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$

Ut oſtenditur in præced.

At, dato numero Pyramidali n, non innoteſcit ipſius latus, niſi reſolvendo Æquationem Cubicam $6n=l^3+3l^2+2l$.

PROP. CLXXVIII. *Theorema.*

SEries numerorum Pyramidalium, in præmiſſa tabella commode interpolari poterit; ſi ipſorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ Arithmeticæ quot opus eſt, & ex iis formentur numeri Pyramidales, juxta prop. præced.

Puta, ſi numerorum Pyramidalium 1, 4, 10, 20, 35, 56, latera 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſic interpolata ſint $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. hiſce lateribus reſpondebit ſeries Pyramidalium $\frac{5}{16}$, 1, $2\frac{3}{16}$, 4, $6\frac{9}{16}$, 10, $14\frac{1}{16}$, 20, $26\frac{13}{16}$, 35, $44\frac{11}{16}$, 56, &c. vel etiam $\frac{5}{16}$, 1, $\frac{35}{16}$, 4, $\frac{105}{16}$, 10, $\frac{231}{16}$, 20, $\frac{429}{16}$, 35, $\frac{715}{16}$, 56, &c. Vel potius $\frac{15}{48}$, 1, $\frac{105}{48}$, 4, $\frac{315}{48}$, 10, $\frac{693}{48}$, 20, $\frac{1287}{48}$, 35, $\frac{2145}{48}$, 56, &c.

PROP. CLXXIX. *Lemma.*

PRopoſitum ſit inquirere, quam habeant rationem numeri Trianguli-triangulares ad latus ſuum.

Præſtabitur hoc eadem methodo qua prop. 176. Nempe,

1. Numerus Trianguli-triangularis æquatur aggregato numerorum omnium Pyramidalium, (intellige quorum latera ſunt numeri integri, nam de interpolatis hic non agitur,) ab unitate ad numerum ſibi collateralem, incluſive.

2. Eſt autem lateris l, numerus Pyramidalis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$. per prop. 177.

6)
a^3+3a^2+2a
b^3+3b^2+2b
c^3+3c^2+2c
d^3+3d^2+2d
&c. &c. &c.

Num. Trianguli-triang.

3. Ergo, ſumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. ſumma horum $a^3+3a^2+2a, b^3+3b^2+2b, c^3+3c^2+2c, d^3+3d^2+2d$, &c. erit ſextuplum aggregati Pyramidalium, (quorum omnium numerus erit æqualis lateri eorum maximi, ut patet:) & propterea hujus aggregati ſextans erit numerus Trianguli-triangularis, cujus latus idem erit cum latere maximi Pyramidalium.

4. Adeoque numerus Trianguli-triangularis eſt ſexta pars aggregati trium ſerierum, eouſque ab unitate continuatarum donec numerus terminorum ſit æqualis lateri numeri Trianguli-triangularis propoſiti, quod dicatur l: adeoque ſi ipſis præponatur terminus alter 0^3+0^2+0 (ut ſeries intelligantur ab 0 inchoatæ,) fiet numerus terminorum $l+1$. Et ſingularum ſerierum illarum ſumma ſeorſim innoteſcet per Prop. 2. 20. & 40.

5. Nempe

5. Nempe ſumma duplicatæ ſeriei Primanorum, $0+2a+2b+2c$, &c. cujus terminus ultimus $2l$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}\cdot 2l$. per. Prop. 2.

6. Summa triplicatæ ſeriei Secundanorum, $0+3a^2+3b^2+3c^2$ &c. cujus terminus ultimus $3l^2$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3}3l^2+\frac{l+1}{6l}3l^2$. per Prop. 20.

7. Summa ſeriei Tertianorum, $0+a^3+b^3+c^3$ &c. cujus terminus ultimus l^3, numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$. per Prop. 40.

Harum igitur ſummarum aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2}2l+\frac{l+1}{3}\cdot 3l^2+\frac{l+1}{6l}3l^2+\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$.) nempe

$$\frac{24l^2+24l+24l^3+24l^2+12l^2+12l+6l^4+6l^3+6l^3+6l^2}{24}$$

$$=\frac{6l^4+36l^3+66l^2+36l}{24}$$, eſt Aggregatum trium illarum ſerierum; cujus aggregati ſextans $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$ eſt numerus Trianguli-triangularis cujus latus l, Ideoque ———

PROP. CLXXX.

Theorema.

LAtus numeri Trianguli-triangularis ad ipſum numerum, eſt ut l ad $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Adeoque, Dato latere l dabitur numerus Trianguli-triangularis, puta $n=\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Dato autem numero Trianguli-triangulari, non invenitur ipſius latus niſi reſolvendo hanc æquationem $24n=l^4+6l^3+11l^2+6l$.

PROP. CLXXXI.

Theorema.

SEries numerorum Trianguli-triangularium, in præmiſſa Tabella, commode interpolari poterit; ſi ipſorum numeris lateralibus, tot interponantur medii Arithmetici, quot opus eſt, & ex iis formentur numeri Trianguli-triangulares, per præcedentem.

Puta lateribus interpolatis $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. reſpondent numeri Trianguli-triangulares $\frac{35}{128}$, 1, $2\frac{69}{128}$, 5, $9\frac{3}{128}$, 15, $23\frac{59}{128}$, 35, $50\frac{35}{128}$, 70, $94\frac{123}{128}$, 126, &c. vel etiam $\frac{35}{128}$, 1, $\frac{315}{128}$, 5, $\frac{1155}{128}$, 15 $\frac{2003}{128}$, 35, $\frac{6435}{128}$, 70, $\frac{12155}{128}$, 126, &c. Vel potius $\frac{105}{384}$, 1, $\frac{945}{384}$, 5, $\frac{3465}{384}$, 15, $\frac{9039}{384}$, 35, $\frac{19305}{384}$, 70, $\frac{36465}{384}$. 126, &c.

PROP. CLXXXII.

Lemma.

PRopoſitum ſit inquirere, quam ad latus ſuum rationem habeant ſequentium ſerierum numeri Figurati, puta Trianguli-pyramidales, Pyramidi-pyramidales, &c.

Poſſet quidem hoc præſtari eadem methodo qua uſus ſum ad Prop. 176, & 179, ope propoſitionum ibidem memoratarum, nempe prop. 2, 20, & 40, ſimul cum prop.

prop. 43. ſaltem ſi prius ulterius profecuti fuerimus traditionem rationum quas habent ſeries finitæ Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, (cum ſequentibus,) ad ſeries Æqualium; quam traditionem non niſi leviter innuimus ad prop. 43. Eam vero ſiquis ulterius continuandam velit, licebit ipſi vel alia quæ ſibi maxime placeat methodo id præſtare, vel etiam (niſi meliora ipſi occurrant auxilia) ope hujus ipſius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, poſtquam via mox docenda oſtenderimus rationes numerorum figuratorum ad ſuum cujuſlibet latus in ſequentibus ſeriebus inveſtigare. Nam ut ad prop. 176 & 179, ex cognitis rationibus ſimplicium ſerierum finitarum (puta Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, per prop. 2, 20, 40. ad ſeriem Æqualium) inveſtigantur rationes hujus Tabellæ (puta numerorum Triangularium, Pyramidalium, Trianguli-triangularium, ad ſua reſpective latera:) ita, vice verſa, ex cognitis his licebit & illas expiſcari, adeoque illam propoſitionis 43 traditionem quouſque libet continuare.

Quoniam autem illud (ut diximus) non niſi leviter traditum eſt ad prop. 43. Nec quidem neceſſe ſit ad præſens inſtitutum illud ulterius proſequi, cum ex cognitis paucarum iſtius Tabellæ ſerierum characteribus (ſive rationibus quas numeri iſti figurati habent ad ſua reſpective latera,) ſequentium etiam characteres inveſtigandi methodus eluceſcat, ego illa ut faciliori jam utar, quæ hæc eſt.

Patet ex præmiſſis, character ſeriei numerorum.

Monadicorum 1. Triangularium $\frac{l^2+l}{2}$.

Lateralium l.

Pyramidalium $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$. Trianguli-triang. $\frac{l^6+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Patet etiam, accuratius intuenti, characteres hos fieri continua multiplicatione harum quantitatum,

$$1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4} \text{ \&c. vel } 1 \times \frac{l \text{ in } l+1 \text{ in } l+2 \text{ in } l+3}{1 \text{ in } 2 \text{ in } 3 \text{ in } 4}.$$

$$\text{Nam } 1 \times \frac{l+0}{1} = l.$$

$$l \times \frac{l+1}{2} = \frac{l^2+l}{2}$$

$$\frac{l^2+l}{2} \times \frac{l+2}{3} = \frac{l^3+3l^2+2l}{6}$$

$$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} \times \frac{l+3}{4} = \frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$$

Adeoque, ſi continuetur ulterius multiplicatio rationis ultimo inventæ in $\frac{l+4}{5} \times \frac{l+5}{6} \times \frac{l+6}{7}$ &c. habebimus ſequentium ſerierum characteres.

Puta. $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

Item $\frac{l^6+15l^5+85l^4+225l^3+274l^2+120l}{720}$

Item $\frac{l^7+21l^6+175l^5+735l^4+1624l^3+1764l^2+720l}{5040}$

Et ſic deinceps, quouſque libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus ſive characteribus præſentis Tabellæ continuatis, deduci poſſe continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortaſſe non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in tranſitu oſtendere. Quod quidem ut ſine incommodo hic poſſit inſeri, ita quibuſdam forſan ingratum non erit. Ideoque, exempli gratia, ——

Propoſitum

Propoſitum ſit inquirere, Quam habeat rationem ſeries finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad ſeriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Trianguli-triangularis, (per prop. 180:) eſt $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$; Et Trianguli-pyramidalis $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$, per prop. 182.

$$24)\ \left.\begin{array}{l} o^4+o^3+o^2+o \\ a^4+6a^3+11a^2+6a \\ b^4+6b^3+11b^2+6b \\ c^4+6c^3+11c^2+6c \\ \text{\&c. ad} \\ l^4+6l^3+11l^2+6l \end{array}\right\}\ \text{Addita.}$$

$$\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l.}{24\times 5=120}\ \text{Aggregatum.}$$

2. Eſt autem, (ut ſæpius dictum eſt,) numerus Figuratus unius gradus (in præſenti tabella) aggregatum omnium præcedentium in gradu ſibi proximo: Adeoque numerus Trianguli-pyramidalis, eſt aggregatum Trianguli-triangularium.

3. Et propterea, ſumptis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) a, b, c, &c. (quorum maximum dicatur l,) & formatis inde numeris Trianguli-triangularibus; Horum aggregatum erit numerus Trianguli-pyramidalis ejuſdem lateris, nempe $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

4. Summa autem ſeriei $o+6a+6b+6c$ &c. eſt (per prop. 2.) $\frac{l+1}{2}6l=\frac{6l^2+6l}{2}$.

5. Summa ſeriei $o+11a^2+11b^2+11c^2$ &c. eſt (per prop. 20.) $\frac{l+1}{3}11l^2+\frac{l+1}{6l}11l^2=\frac{11l^3+11l^2}{3}+\frac{11l^2+11l}{6}=\frac{22l^3+33l^2+11l}{6}$.

6. Summa ſeriei $o+6a^3+6b^3+6c^3$ &c. eſt (per prop. 40.) $\frac{l+1}{4}6l^3+\frac{l+1}{4l}6l^3=\frac{6l^4+6l^3}{4}+\frac{6l^3+6l^2}{4}=\frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}$.

7. Hæ tres ſummæ in unam collectæ, ſunt $\frac{6l^2+6l}{2}+\frac{22l^3+33l^2+11l}{6}+\frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}=\frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}$.

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur ſumma trium ſerierum.

Nempe ſi ex 5) $l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l.$
auferatur 6) $9l^4+40l^3+60l^2+29l.$

Hoc eſt, Si ex 30) $6l^5+60l^4+210l^3+300l^2+144l.$
auferatur 30) $+45l^4+200l^3+300l^2+145l.$

Manebit ſumma ſeriei quartæ, quæ eſt Quartanorum 30) $6l^5+15l^4+10l^3+00l^2-1l.$

Hoc eſt,
$$\begin{array}{r} 6l^5+6l^4 \\ +9l^4+9l^3 \\ +1l^3+1l^2 \\ -1l^2-1l \end{array}$$

Hoc eſt, $\frac{l+1}{5}l^4+\frac{3l+3}{10}l^3+\frac{l+1}{30}l^2-\frac{l+1}{30}l.$

Quæ eſt igitur ſumma ſeriei Quartanorum cujus terminus ultimus eſt l^4 numerus terminorum $l+1$.

Vel; ſi pro numero terminorum $l+1$, ſubſtituatur m, & propterea ſeries æqualium ml^4; erit ſeries Quartanorum $\frac{1}{5}ml^4+\frac{3}{10}ml^3+\frac{1}{30}ml^2-\frac{1}{30}ml.$ (ſi nempe terminus primus ſit o, ſecundus 1:) vel $\frac{ml^4}{5}+\frac{3ml^4}{10l}+\frac{ml^4}{30l^2}-\frac{ml^4}{30l^3}$.

9. Adeoque series finita Quartanorum ad seriem totidem maximo Æqualium est ut $\frac{1}{5} + \frac{3}{10l} + \frac{1}{30l^2} - \frac{1}{30l^3}$ ad 1. Quod erat inquirendum.

Et pari modo, his cognitis, ratio quam habet ad seriem Æqualium series Quintanorum, invenietur ope characteris in proxima præsentis tabellæ serie: Et deinde, quam habet series Sextanorum, ope characteris seriei proxime subsequentis in hac tabella; & sic deinceps quousque libet.

10. Nimirum; cum character numeri Trianguli-pyramidalis sit $\frac{l^3 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l}{120}$; & Pyramidi-pyramidalis sit $\frac{l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l}{720}$.

Trianguli-pyramidalium omnium continue additorum aggregatum (ut ostensum est,) est correspondens numerus Pyramidi-pyramidalis.

$$\left.\begin{array}{r} 0^5 + 0^4 + 0^3 + 0^2 + 0 \\ a^5 + 10a^4 + 35a^3 + 50a^2 + 24a \\ 120)\, b^5 + 10b^4 + 35b^3 + 50b^2 + 24b \\ \text{\&c. ad} \\ l^5 + 10l^4 + 35l^3 + 50l^2 + 24l \end{array}\right\} \text{Addita}$$

$$\frac{l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l}{720 = 120 \times 6} \quad \text{Aggregatum.}$$

11. Sunt autem omnes $24a$ &c. $\frac{l+1}{2} 24l = 12l^2 + 12l$.

12. Et omnes $50a^2$ &c. sunt $\frac{l+1}{3} 50l^2 + \frac{l+1}{6l} 50l = \frac{50}{3}l^3 + \frac{50}{3}l^2 + \frac{25}{3}l^2 + \frac{25}{3}l$

13. Item omnes $35a^3$ &c. sunt $\frac{l+1}{4} 35l^3 + \frac{l+1}{4l} 35l^3 = \frac{35}{4}l^4 + \frac{35}{4}l^3 + \frac{35}{4}l^3 + \frac{35}{4}l^3$.

14. Item omnes $10a^4$ &c. (per jam modo demonstrata) sunt $\frac{l+1}{5} 10l^4 + 3\frac{l+3}{10l} 10l^4 + \frac{l+1}{30l^2} 10l^4 - \frac{l+1}{30l^3} 10l^4$
$= 2l^5 + 2l^4$
$+ 3l^4 + 3l^3$
$+ \frac{1}{3}l^3 + \frac{1}{3}l^2$
$- \frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{3}l$.

15. Quæ omnia simul addita, (§ 11, 12, 13, 14, comprehensa,) sunt $2l^5 + 13\frac{3}{4}l^4 + 37\frac{1}{2}l^3 + 45\frac{3}{4}l^2 + 20l$, $= \frac{8l^5 + 55l^4 + 150l^3 + 183l^2 + 80l}{4}$.

16. Hæc itaque si ex Aggregati $120\,pla$ auferantur. Hoc est

Si ex 6) $l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l$
auferantur 4) $8l^5 + 55l^4 + 150l^3 + 183l^2 + 80l$
Hoc est, si ex 12) $2l^6 + 30l^5 + 170l^4 + 450l^3 + 548l^2 + 240l$
auferantur 12) $24l^5 + 165l^4 + 450l^3 + 549l^2 + 240l$

Restabunt 12) $2l^6 + 6l^5 + 5l^4 - 1l^2$
Quæ itaque est summa omnium a^5 &c.
Nimirum $2l^6 + 2l^5$
12) $+ 4l^5 + 4l^4$
$+ 1l^4 + 1l^3$
$- 1l^3 - 1l^2$.

Hoc est $\frac{l+1}{6}l^5 + \frac{l+1}{3}l^4 + \frac{l+1}{12}l^3 - \frac{l+1}{12}l^2$.

Vel

Vel (posito $m = l+1$;) $\frac{1}{6}ml^5 + \frac{1}{3}ml^4 + \frac{1}{12}ml^3 - \frac{1}{12}ml^2$. Quæ itaque est summa Seriei Quintanorum ab o inchoatorum, quorum ultimum est l^5: & terminorum numerus $m = l+1$.

17. Ad eandem formam ; Cum sit character Numeri

Pyramidi-pyramidalis $720) l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l.$

Trianguli-trianguli-pyram. $5040) l^7 + 21l^6 + 175l^5 + 735l^4 + 1624l^3 + 1764l^2 + 720l.$

Adeoque omnes $720) a^6 + 15a^5 + 85a^4 + 225a^3 + 274a^2 + 120a$

sint $5040) l^7 + 21l^6 + 175l^5 + 735l^4 + 1624l^3 + 1764l^2 + 720l.$

Hoc est, omnes $a^6 + 15a^5 + 85a^4 + 225a^3 + 274a^2 + 120a.$

sint $7) l^7 + 21l^6 + 175l^5 + 735l^4 + 1624l^3 + 1764l^2 + 720l.$

18. Suntque Omnes $120a = \frac{l+1}{2} \cdot 120l = 60l^2 + 60l.$

$$\text{Omnes } 274a^2 = \frac{l+1}{3}274l^2 + \frac{l+1}{6}274l = 91\tfrac{1}{3}l^3 + 91\tfrac{1}{3}l^2 + 45\tfrac{2}{3}l^2 + 45\tfrac{2}{3}l.$$

$$\text{Omnes } 225a^3 = \frac{l+1}{4}225l^3 + \frac{l+1}{4}225l^2 =$$
$$= 56\tfrac{1}{4}l^4 + 56\tfrac{1}{4}l^3 + 56\tfrac{1}{4}l^3 + 56\tfrac{1}{4}l^2.$$

$$\text{Omnes } 85a^4 = \frac{l+1}{5}85l^4 + \frac{3l+3}{10}85l^3 + \frac{l+1}{30}85l^2 - \frac{l+1}{30}85l =$$
$$= 17l^5 + 17l^4 + 25\tfrac{1}{2}l^4 + 25\tfrac{1}{2}l^3 + 2\tfrac{5}{6}l^3 + 2\tfrac{5}{6}l^2 - 2\tfrac{5}{6}l^2 - 2\tfrac{5}{6}l.$$

Omnesque $15a^5$ (per jam modo demonstrata)

$$= \frac{l+1}{6}15l^5 + \frac{l+1}{3}15l^4 + \frac{l+1}{12}15l^3 - \frac{l+1}{12}15l^2 =$$
$$= \tfrac{5}{2}l^6 + \tfrac{5}{2}l^5 + 5l^5 + 5l^4 + \tfrac{5}{4}l^4 + \tfrac{5}{4}l^3 - \tfrac{5}{4}l^3 - \tfrac{5}{4}l^2.$$

19. Erit harum quinque summarum Aggregatum,

$$\tfrac{5}{2}l^6 + 24\tfrac{1}{2}l^5 + 105l^4 + 232\tfrac{1}{6}l^3 + 252l^2 + 102\tfrac{5}{6}l.$$

Hoc est $6) 15l^6 + 147l^5 + 630l^4 + 1393l^3 + 1512l^2 + 617l.$

Quod itaque, una cum omnibus a^6, complet integrum

$$7) l^7 + 21l^6 + 175l^5 + 735l^4 + 1624l^3 + 1764l^2 + 720l.$$

20. Si ex hoc itaque subducatur illud, habetur omnium a^6 aggregatum: vel (sumpto communi denominatore)

Si ex $42) 6l^7 + 126l^6 + 1050l^5 + 4410l^4 + 9744l^3 + 10584l^2 + 4320l.$

Subducatur $42) 105l^6 + 1029l^5 + 4410l^4 + 9751l^3 + 10584l^2 + 4319l.$

Restabit $42) 6l^7 + 21l^6 + 21l^5 - 7l^3 + 1l.$

Quæ itaque est summa omnium a^6, ab o inchoatarum, quorum maximum est l^6, & omnium numerus $m = l+1$.

Hoc est, $6l^7 + 6l^6 + 15l^6 + 15l^5$

$42) + 6l^5 + 6l^4 - 6l^4 - 6l^3 - 1l^3 - 1l^2 + 1l^2 + 1l.$

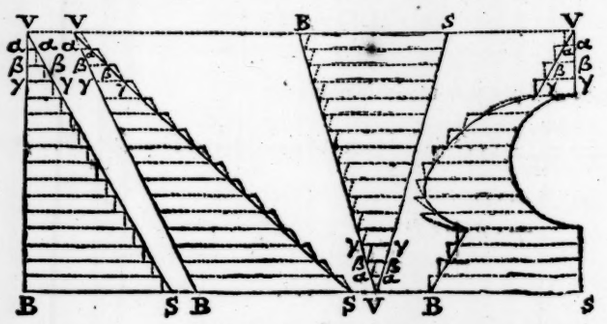
Vel (posito $m = l + 1$,) sunt omnes a^6
$= \frac{1}{7} m l^6 + \frac{1}{14} m l^5 + \frac{1}{7} m l^4 - \frac{1}{7} m l^3 - \frac{1}{42} m l^2 + \frac{1}{42} m l.$

Et similiter de aliis potestatibus faciendum erit.

Quo melius autem hoc intelligatur, operæ fortasse pretium erit, quæ jam tradita sunt, paulo distinctius aperire: Utut enim ea satis aperte tradidisse nos nobis videamur, fieri tamen potest ut lector illis minus assuetus nonnunquam forsan hæsitet.

Notandum igitur est, nos hic (ut & alibi semper, ubi de finita serie verba fiunt,) numerum terminorum assignare $l + 1$, (nempe si terminus primus 0, secundus dicatur 1,) nimirum unitate majorem quam est numerus particularum ex quibus conflatur terminus maximus, hoc est, omnium differentiarum terminorum continue positorum, quarum omnium aggregato terminus maximus æquatur, sive differentiæ illæ sint æquales, ut in serie primanorum, (puta 1, 1, 1, 1, &c. differentiæ numerorum Arithmetice-proportionalium,) sive crescentes, ut in serie secundanorum, tertianorum, &c. (puta 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum quadraticorum, vel 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; &c.) sive etiam decrescentes, ut in serie subsecundanorum, subtertianorum, &c. (nam verbi gratia, differentia $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ minor est quam $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, atque hæc minor quam $\sqrt{1} - \sqrt{0}$; & sic in cæteris.) Harum omnium differentiarum (in qualibet serie) numerus l, unitate minor est quam numerus terminorum, ut patet; earumque omnium aggregatum (propter termini primi 0 nullitatem) est ipse terminus maximus. Ubi autem numerus seu multitudo terminorum dicitur m, numerus differentiarum, sive particularum in maximo, erit $m - 1$.

Exemplum esto, series primanorum, quale est Aggregatum Parallelogrammorum æque-altorum figuram triangulo adscriptam complentium: quorum si primum dicatur 0, (quippe nullius latitudinis, utut altitudinis ejusdem cum reliquis;)



secundum 1, &c. omnium numerus 16, erunt differentiæ 15, (invicem æquales, nempe 1 ubique,) & maximum propterea 15. Adeoque cum in singulis parallelogrammis altitudo communis sit $\frac{1}{16}$ VB (in fig. 1.) & latitudinum incrementum continuum $\frac{1}{16}$ BS: Omnes simul altitudines, hoc est, figuræ inscriptæ altitudo, $VB = \frac{16}{16} VB$; at omnia simul latitudinum incrementa, hoc est, Basis figuræ inscriptæ, non BS, sed $\frac{15}{16}$ BS, sive $BS - \frac{1}{16} BS$. Si autem uno adhuc gradu ulterius procedatur, adjuncto infra basem uno adhuc parallelogrammo, erit quidem illius latitudo BS præcise, sed altitudo jam fiet auctior, nempe $VB + \frac{1}{16} VB$. Si vero (ut in fig. 2.) sumatur figura ex parallelogrammis circumscripta, erunt tum omnium simul parallelogrammorum altitudines, hoc est, figuræ circumscriptæ altitudo VB, (quam finge jam basi perpendicularem,) tum latitudinum simul omnes particulæ, hoc est, basis figuræ circumscriptæ, BS præcise: at vero jam non ab 0, sed 1, series inchoatur: sin series hæc supra verticem uno adhuc gradu continuetur (ut inchoetur ab 0,) erit jam altitudo sic aucta $VB + \frac{1}{16} VB$, ut patet. Adeoque figura inscripta uno infra basin gradu continuata, & figura circumscripta continuata uno gradu supra verticem, tantundem valent.

Atque hoc totum in Triangulo, (atque eadem ratione in figuris aliis, nisi quod illic incrementa sint inæqualia,) satis est manifestum. Nam (præterquam quod ex jam dictis satis pateat) si in Triangulo ducantur quotlibet rectæ basi parallelæ (in quarum censu & basin ipsam, & punctum verticis, censeri volumus,) eisque

eiſque totidem adjaceant parallelogramma: ſi illa omnia ſupponantur infra ſuas rectas jacere, erit eorum infimum ſubter baſem; ſin ſupra, erit ſupremum ſupra verticem; ſi autem ſupponamus rectas illas neque in parallelogrammorum ſuorum ſummo neque in imo jacere, ſed per ipſorum media tranſire, tum eorum tam ſupremum quam infimum erit partim intra partim extra Triangulum. Adeoque quemcunque ſitum habere ſupponantur illæ rectæ ad ſua parallelogramma, figura illa ex parallelogrammis conſtans (dummodo ab o inchoetur,) habebit vel baſin ſuam una parte minorem, vel altitudinem una parte majorem quam habet verum illud Triangulum.

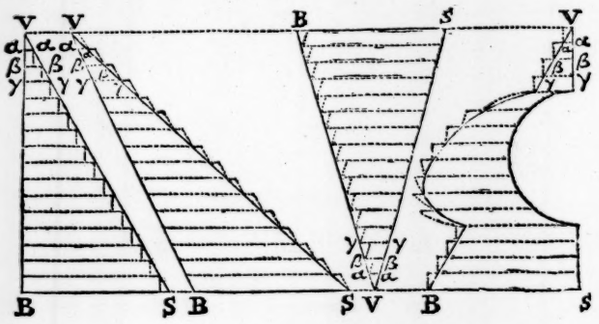
Atque hic quidem ſive exceſſus ſive defectus, quamdiu de finita ſerie agitur, omnino animadvertendus eſt: ubi autem de ſerie infinita agitur, tuto poterit negligi. Cum enim quo plures ſupponantur termini eo minor illa evadat ſive baſium ſive altitudinum differentia, ubi in infinitum proceditur evaneſcet, quippe $\frac{1}{\infty}$ (pars infinite parva) habenda erit pro nihilo; (ea ſaltem adhibita limitatione de qua mox dicetur.) Sic, verbi gratia, ſi Triangulo cujus altitudo A, baſis B, inſcribatur figura ex parallelogrammis quorum ſingulorum altitudo $\frac{1}{\infty}$ A, & longitudinum incrementa $\frac{1}{\infty}$ B, erit inſcriptæ altitudo $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$, baſis non B ſed $B - \frac{1}{\infty} B$: eſt enim altitudinum numerus ∞, at differentiarum $\infty - 1$. Si vero figura ſic inſcripta continuetur uno gradu infra baſem, vel circumſcripta uno gradu ſupra verticem, erit baſis $\infty \times \frac{1}{\infty} B = B$, altitudo $A + \frac{1}{\infty} A$; quippe jam numerus incrementorum eſt ∞, altitudinum $\infty + 1$. Ubi igitur de ſerie finita agitur, per altitudinem & baſin intelligendæ ſunt altitudo & baſis figuræ ſic adſcriptæ (ſive inſcripta ſit, ſive circumſcripta,) non autem iſtius cui adſcribitur; at vero in ſerie infinita perinde eſt ſive hujus ſive illius intelligantur, propter differentiam infinite exiguam, adeoque evaneſcentem ſive nullam. Nam ∞, $\infty + 1$, $\infty - 1$, perinde ſunt. Et quemadmodum ubi polygonum infinitorum laterum, pro circulo habetur, perinde eſt ſive inſcriptum ſive circumſcriptum intelligatur, (hoc eſt, ſive ſupponatur circuli radius æqualis rectæ quæ à centro ad angulos, ſive illi quæ à centro ad medium lateris ducitur, quarum differentia, propter latera numero infinita, eſt infinite exigua:) ſic in adſcriptionibus noſtris perinde eſt (propter differentiam infinite parvam,) an inſcriptæ an circumſcriptæ altitudo aut baſis ſumatur pro vera. Et quidem ut in polygono infinitorum laterum inſcripto & circumſcripto, latera ſupponuntur invicem æqualia, hoc eſt, ejuſdem arcus ſinus rectus & tangens æquales tam invicem quam ipſi arcui, ita & hic figuræ ex parallelogrammis inſcriptæ & circumſcriptæ tam baſes quam altitudines ſupponendæ ſunt æquales tam inter ſe quam illius cui adſcribuntur; hoc eſt, ſi accurate loqui libeat, non niſi infinite exigua ſui parte differre.

Eodem modo, in fig. prop. 5. Figura ex ſimilibus ſectoribus ſpirali inſcripta, ſi ſectorum numerus ſit finitus, erit ſeries finita, cujus terminus primus eſt o, ultimus vero ſectorum inſcriptorum ultimus, (cujus radius eſt una parte minor quam ultimi circumſcriptorum,) omniumque horum ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquantur ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe qui eſt figuræ ex ſectoribus conflatæ conterminus, non qui conterminus eſt veræ ſpirali; at ſi numerus ſectorum (prout ibi ſupponitur) ſupponatur infinitus, erunt adhuc omnium ſectorum arcus ſimul ſumpti, æquales ſemiſſi arcus circuli contermini, nempe contermini figuræ ex his infinitis ſectoribus conflatæ, qui tamen vel ille ipſe eſt cum contermino veræ ſpirali, vel ipſo ſaltem infinite-exigua ſui parte (hoc eſt, nihilo,) minor. Si vero pro ſectoribus inſcriptis ſumantur circumſcripti, arcus circuli contermini erit una ſui parte augendus (ſive finita ſive infinita, pro numero ſectorum,) ut ipſius ſemiſſis æqualis habeatur omnibus ſectorum arcubus ſimul ſumptis, adeoque ſupponendus eſt incepiſſe uno gradu ante initium veræ ſpiralis, ut primi ſectoris arcus ſit o: nam in Arithmetice-proportionalibus, niſi primus terminus ſit o, aggregatum omnium non erit æquale ſemiſſi ultimi in numerum terminorum ducti.

Quod autem de his figuris oſtenſum eſt, intelligendum erit (mutatis mutandis) de quibuſvis aliis, nempe numerum terminorum (ſi ab o incipiatur) eſſe unitate majorem quam eſt numerus differentiarum, ſive particularum ex quibus maximus conſtat; (ſive æquales ſint illæ differentiæ ſive inæquales;) adeoque ſi adſcriptæ figuræ (ſive ſit inſcripta ſive circumſcripta,) baſis ſumatur æqualis baſi figuræ propoſitæ cui adſcribitur, (ſive continuando inſcriptam uno gradu infra

baſin, vel circumſcriptam uno gradu ſupra verticem) erit iſtius altitudo una parte major quam altitudo hujus, (ſive pars illa finita ſit ſive infinita;) ubi autem numerus partium altitudinis hujus ſupponitur ∞, erit in illa $\infty + 1$; vel ſi hujus altitudo A, erit illius $A + \frac{1}{\infty} A$; ſi illius A (quod nos ponere ſolemus) erit hujus $A - \frac{1}{\infty} A$, quod tamen (in infinitis) tantundem valet ob differentiam infinite parvam.

Dum vero differentiam infinite parvam, pro nulla habendam dicimus: caute hoc accipiendum eſt; neque enim id ubique obtinet, ſed aliquando lapſui occaſionem præbet. Cum enim infinite parvum infinities multiplicatur, aſſurgit nonnunquam quantitas ſatis magna, nempe illa ipſa cujus illa fuit aliquota pars utut infinite parva: Nam $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$, & $\frac{1}{\infty} A \times \infty = A$.



Exemplum oſtendimus in Schol. prop. 13. Si enim (in fig. 1 & 2) concluderet quis, quoniam infinitorum parallelogrammorum latera (rectam VB conſtituentia,) & trapeziorum latera (complentia rectam VS) ſigillatim ſumpta non niſi differentia infinite parva ab invicem differant, (cum tam hæc quam illa ſint infinite parva, quippe $\frac{1}{\infty}$ rectarum VB, VS,) eam igitur contemnendam eſſe, ipſaque parallelogrammorum atque trapeziorum latera dicenda æqualia, & propterea (cum ex æqualium æqualibus additione aggregata ſint æqualia,) infinita hæc infinitis illis æqualia, hoc eſt, totam VS, æqualem eſſe toti VB: manifeſtus eſſet paralogiſmus, (in quem tamen lapſus eſt admodum proclivis, ni caveatur:) Quamvis enim differentiæ ſint ſigillatim infinite-parvæ, (nempe $\frac{1}{\infty}$ VS — $\frac{1}{\infty}$ VB) omnium tamen (numero infinitorum) aggregatum ſat notabilem habet magnitudinem, nempe SV — VB.

At interim eadem parallelogramma atque trapezia (ſi aream ſpectemus,) non modo ſigillatim ſumpta differentiam habent infinite parvam; ſed & eorum aggregatum & aggregatum horum, (hoc eſt infinita illa parallelogramma ſimul ſumpta, atque infinita hæc trapezia,) differentia non niſi infinite parva ab invicem differunt: quod de ipſorum lateribus non obtinet.

Diſcriminis ratio hæc eſt: Quoniam ubi de lateribus comparandis agitur, quamvis in binis quibuſlibet reſpective ſumptis differentia minor eſt quo major eſt omnium numerus, at in eadem ſemper ratione qua ſingulæ differentiæ minuuntur, differentiarum numerus augetur; adeoque differentiarum aggregatum dividendo non minuitur: At ubi de areis agitur, non modo binorum (trapezii & parallelogrammi) reſpective ſumptorum differentiæ ſingulæ minuuntur, ſed & omnium aggregatum; & quidem quo plures ſunt differentiæ eo minus eſt omnium aggregatum, donec tandem non modo à ſingulis ſingula, (quod demonſtraſſe non ſufficeret,) ſed & ab omnibus omnia differant ſpatio infinite-parvo, ut ex demonſtrationibus liquet. Atque hæc aliquanto fuſius notaſſe operæ pretium duxi, quoniam hic loci nonnullos lapſui proclives animadverti.

Ne autem hinc aliquid periculi quis ſuſpicetur dum nos altitudinem figuræ cujuſlibet accuratam, atque eandem aliquota ſui parte infinite-parva auctam, perinde habemus: hoc unum ſat ſecuros reddat, quod, cæteris paribus, auctio altitudinis figuræ cujuſlibet (ſive planæ ſive ſolidæ,) non niſi in eadem ratione auget ipſius aream ſive magnitudinem; adeoque ubi altitudinis augmentum eſt non niſi aliquota ſui parte infinite-parva, erit etiam totius figuræ non niſi in eadem ratione auctio, hoc eſt aliquota parte ſui infinite-parva, ſive $\frac{1}{\infty}$ totius figuræ;

quod

quod (cum non infinities, ſed ſemel tantum ſumatur,) omni aſſignabili ſpatio minus erit, adeoque pro nullo habendum.

Sin tandem quæratur, cur ego figurarum inſcriptionem, potius quam circumſcriptionem, elegerim; adeoque ab 0 potius quam ab 1, ubique fere inchoaverim? præſertim cum figura circumſcripta (non uno gradu ſupra verticem continuata, ut ab 0 incipiat, ſed potius ab 1) eandem habeat præciſe & baſin & altitudinem cum ea cui adſcribitur, ſive in ſerie Primanorum, ſive Secundanorum, aut aliorum ſequentium; item ſive finita ſit ſive infinita ſeries?

Dicimus: Poſſe quidem id quod agimus utrovis modo fieri, nempe vel per figurarum inſcriptionem vel circumſcriptionem (quod & ſupra monuimus ad prop. 43. quæ toti huic Scholio anſam dedit, cujus quidem pars magna tradi citius non potuit, ut quæ à propoſitione proxime præcedente dependeat,) adeoque, verbi gratia, ſeries Primanorum indifferenter deſignari, per 1, 2, 3, &c. vel per 0, 1, 2, &c. nam terminus primus 0 reliquorum quantitati nihil addit. Et quidem ego jam olim utroque modo lemmata mea ordinaveram, ut ut alterutrum demonſtrationibus noſtris ſufficeret, quapropter lectorem utroque onerandum non cenſui; præſertim cum ego Series Infinitas maxime ſpectabam, finitis vix aliter quam lemmatum inſtar ad infinitorum theoremata uſus.

At interim figuræ circumſcriptæ, ſi res accuratius perpendatur, non magis congruunt figuris illis quibus circumſcribuntur, quam inſcriptæ: Nam verbi gratia, inſcripta cum expoſita congruit altitudine & verticis latitudine, ſed quoad baſin (hoc eſt latitudinem in imo) differt; eadem inſcripta uno infra baſin gradu continuata, (vel circumſcripta ſic continuata ſupra verticem) convenit expoſitæ quoad baſin & verticis latitudinem, ſed quoad altitudinem differt; circumſcripta vero (non continuata) convenit quidem expoſitæ quoad baſin & altitudinem, ſed non quoad latitudinem verticis, quippe in altera eſt 0 in altera 1.

Cum itaque admodum ſe indifferenter habebant ad negotium noſtrum figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ; mallem ego ſeries noſtras ab 0 quam ab 1 inchoare: partim quod illud, utut inſcriptionem potius referre videatur, utriſque tamen accommodari poſſit, (ut jam dictum eſt,) prout vel ſupra verticem vel infra baſin ſupponatur continuari: partim quod hoc pacto (propter minimi termini nullitatem) extremorum aggregatum idem ſit atque terminus maximus: præſertim vero ut poſſim, ſine longo verborum ambitu, ſeriei Primanorum appellatione comprehendere non modo 0, 1, 2, 3, &c. ſed & 0, 2, 4, 6, &c. vel 0, 3, 6, 9, &c. vel 4, 8, 12, &c. ſimileſque alias ab 0 inchoatas quicunque ſit terminus ſecundus; & ſub ſerie Secundanorum nomine, non modo 0, 1, 4, 9, &c. ſed & 0, 2, 8, 18, &c. vel 0, 3, 12, 27, &c. ſimileſque: & pariter in ſeriebus ſequentibus.

Siquis autem mallet ab 1, ſeries inchoare, poterit ad hunc modum lemmata ordinare.

Ad ſeriem Primanorum;

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2}{3+3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4}{5+5+5+5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6}=\frac{1}{2}$$

&c. &c.

Aut

Aut etiam,

$\frac{0+1}{2+2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1+2}{2+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{0+1+2}{3+3+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3}{3+3+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$\frac{0+1+2+3+4}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$. $\qquad$ $\frac{1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

&c. $\qquad$ &c.

Ad seriem Secundanorum;

$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$

$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{1+4}{9+9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}$

$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9}{16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$

$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$. $\qquad$ $\frac{1+4+9+16}{25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{1}{30}$

&c. $\qquad$ &c.

Aut etiam

$\frac{0+1}{4+4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$ $\qquad$ $\frac{1+4}{4+4}=\frac{1}{3}+\frac{7}{24}$

$\frac{0+1+4}{9+9+9}=\frac{1}{3}-\frac{12}{81}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9}{9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{14}{81}$

$\frac{0+1+4+9}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{23}{192}$. $\qquad$ $\frac{1+4+9+16}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{26}{192}$

$\frac{0+1+4+9+16}{25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{35}{375}$. $\qquad$ $\frac{1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{40}{375}$

&c. $\qquad$ &c.

Ad seriem Tertianorum.

$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

$\frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+8}{27+27}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$

$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{1+8+27}{64+64+64}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}$

$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$ $\qquad$ $\frac{1+8+27+64}{125+125+125+125}=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}$

&c. $\qquad$ &c.

Et

Et ſimiliter ad ſeries ſequentes, quibus recenſendis abſtineo ne ſim prolixus. Poterit, ſi lubet, lector non magno negotio vel hæc ipſa lemmata in Theoremata formare, vel alia his ſimilia ſequentibus ſeriebus aptare, ſi ad ea quæ jam tradidimus attenderit.

Sed & alius adhuc eſt (ſi varietate lector delectetur) ſeries has ordinandi modus, qui etiam aliquando non minus erit accommodus: Si nempe nec ab 0 (ut in figuris inſcriptis,) nec ab 1 (ut in figuris circumſcriptis,) ſed ab intermedia quantitate, puta $\frac{1}{2}$, ſeries inchoetur, (adeoque figuram repræſentet quæ inſcriptæ & circumſcriptæ eſt intermedia, ſive major quam inſcripta & minor quam circumſcripta:) Ut ſit, verbi gratia, ſeries primanorum $\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$ &c. vel (quod eodem recidit) $1+3+5+7$ &c. Quo caſu lemma ſic erit ordinandum, pro ſerie primanorum.

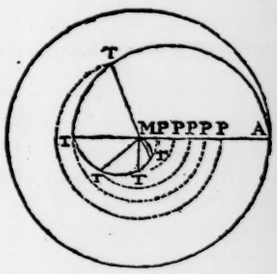
$\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}}{2+2}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3}{4+4}=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{3+3+3}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5}{6+6+6}=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5+7}{8+8+8+8}=\frac{1}{2}$

Atque hic quidem modus omnium optime convenit prop. 15, 16, ubi figuram Spirali adjacentem cum Parabolica comparamus. Nam ſi, in figura ſpirali, ductis quotlibet rectis MT angulos facientibus continuos invicem æquales, ſi in ſingulis ſpatiis ſectores inſcribi ſupponantur, erunt eorum arcus, ut 0, 1, 2, 3, &c. ſin circumſcribi, ut 1, 2, 3, 4, &c. ſi vero ita adſcribi ut ſectorum arcus à ſpirali biſecentur, erunt ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. vel ut 1, 3, 5, 7, &c. (nempe ut differentiæ numerorum quadraticorum:) adeoque ſi arcus illi (ſive numero infiniti ſive finiti, quamvis ibidem de infinitis tantummodo verba facta ſint, adeoque hanc curioſitatem illic omittendam duxerim,) ſupponantur in rectum extendi & invicem continuari, ut fiant totidem ſegmenta diametri parabolæ (continue poſita;) unde evadant diametri interceptæ 1, 4, 9, 16, &c. (nam $1+3=4$, $1+3+5=9$, &c.) quibus conveniant ordinatim-applicatæ (quippe in diametrorum ratione ſubduplicata) quæ erunt ad invicem, ut 1, 2, 3, 4, &c. hoc eſt ut ipſæ rectæ MT, MT, &c. in figura ſpirali vera per ſimilium ſectorum terminos tranſeuntes.



Atque hoc pacto comparare licet, non modo figuram ex ſectoribus numero infinitis (quod nos illic fecimus,) ſed etiam ex numero finitis conflatam, ſpirali adjacentem, cum figura ex totidem parallelogrammis adjacente parabolæ. Quod quidem (ſine nova figura) ſatis intelligi poterit. Si illi ſectorum arcus ponantur $1a$, $3a$, $5a$, &c. radii vero (ipſis proportionales) $2r$, $6r$, $10r$, &c. erunt ſectores $1ar$, $9ar$, $25ar$, &c. (nempe ſemiſſes parallelogrammorum radiis & arcubus reſpectivis contentorum.) Sumptis item in parabolæ diametro continuis ſegmentis $1a$, $3a$, $5a$, &c. adeoque diametris interceptis $1a$, $4a$ ($=1a+3a$,) $9a$ ($=4a+5a$) &c. & ordinatim-applicatis quæ illis diametris conveniant (in diametrorum ratione ſubduplicata) $2r$, $4r$, $6r$, &c. (quæ ſpacia abſcindant non æque-alta, ſed quorum altitudines ſint Arithmetice-proportionales, ut 1, 3, 5, &c. ut patet;) parallelogramma ſpaciis illis inſcripta erunt $1a\times 0r$, $3a\times 2r$, $5a\times 4r$, &c. vel $0ar$, $6ar$, $20ar$, &c. circumſcripta, erunt $1a\times 2r$, $3a\times 4r$, $5a\times 6r$, &c. vel $2ar$, $12ar$, $30ar$, &c. his autem intermedia partim inſcripta partim circumſcripta, (quæ nempe eam habent latitudinem quæ eſt Arithmetice media in-

ter duas ordinatim-applicatas ſpatium terminantes,) vel (quod tantundem valebit) inſcripta trapezia, erunt $1a \times 1r$, $3a \times 3r$, $5a \times 5r$, &c. vel $1ar$, $9ar$, $25ar$, &c. expoſitis ſectoribus ſigillatim æqualia: iis nempe quorum arcus ſunt parallelogrammorum altitudinibus (hoc eſt, ſegmentis diametri parabolæ) æquales, radii vero latitudinum parallelogrammorum dupli: vel, ſi ſectorum radii ſint parallelogrammorum illorum latitudinibus æquales, erunt parallelogramma ſectorum dupla.

Sed tempus eſt ut prolixo Scholio finem imponam; quod, cur in hunc locum rejecerim, ſupra dictum eſt.

PROP. CLXXXIII.

Theorema.

LAtus numeri Figurati cujuſlibet, in qualibet ſerie Tabellæ expoſitæ (prop. 132.) quouſque libet continuandæ; ad ſuum illum numerum Figuratum; rationem habet cognitam.

Nempe eam quam indicat prop. præced.

PROP. CLXXXIV.

Theorema.

ET *propterea*, Series ſequentes in præmiſſa Tabella quouſque libet continuata, non erit difficile interpolare.

Nempe, invento per prop. 182. cujuſque proprio charactere, fiat interpolatio ut in prop. 175, 178, 181.

Tabella vero, ut dictum eſt, interpolata ſic ſe exhibebit.

Numeri		Monadici.		Laterales.		Triangulares.		Pyramidales.		Triang. triang.	
	8	1		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{48}$		$\frac{1}{48}$		$\frac{105}{384}$	
Monadici.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$	
Laterales.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	l
		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$	
Triangulares.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{48}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2}$
		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$	
Pyramidales.	$\frac{1}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$
		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{39}{48}$		$50\frac{105}{384}$	
Trianguli-triang.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$

Et ſic deinceps.

Vel

Vel aliter expeditius. Poſtquam per Prop. 170, 175, &c. interpolatio ſerierum tam tranſverſarum quam erectarum aliquouſque incepta eſt, licet eam ulterius continuare quouſque libet ſola additione numerorum jam inventorum; nam non modo numeri tabellæ Prop. 132. (prout ibidem monuimus,) ſed & qui interpolatione immiſcentur, fiunt ex duobus aliis additis, altero ſuperius altero ad ſiniſtram, (non quidem proximis, ut in Prop. 132. ſed, propter loca jam interpolata,) poſt unum locum interjectum poſitis. Ut animadvertenti patebit.

Quod autem de interpolatione unius in ſingulis ſpatiis loci, in propoſitionibus aliquot præcedentibus jam dictum eſt, etiam ad duorum vel trium pluriumve interpoſitionem, mutatis mutandis, facile accommodari poterunt.

SCHOLIUM.

Notandum hic, totum hoc interpolationis negotium, huc uſque præſtitum, perfici poſſe (etiam ſine inventis cujuſque ſeriei propriis characteribus) ope monitorum quæ habentur in Scholiis Prop. 126. & 154. Interpolatis nempe primo ſeriebus erectis, & iſtis deinde interpolationibus in ſeries item tranſverſas relatis. Verum cum ſingularum ſerierum characteres inveſtigare, res eſſet non injucunda, & lectori forſan non ingrata: placuit ea potius quam habetis methodo incedere.

Cum autem huc perventum eſt, patet, intercalatione facta in ſingulis ſeriebus tam erectis quam tranſverſis Tabellæ Prop. 132. novas jam emerſiſſe ſeries ipſis interpoſitas: nondum tamen completas, ſed hiantes. Et quidem locus ille (nota □ inſignitus) quem quam maxime ſuppletum vellem, manet adhuc vacuus. Si autem vel unus ex vacuis illis locis ſuppleri datum ſit, & reliqui non difficulter ſuppleri poterunt; ut ex Prop. 188. patebit.

Cum vero Tabella Prop. 132. jam habetur novis ſeriebus interpolata, ut interjectæ ſeries ſuos habeant titulos juxta tenorem illius tabellæ accommodatos, obſervanda eſt hæc ſequens Propoſitio,

PROP. CLXXXV.

Theorema.

Si ſeriebus Tabellæ Prop. 132. novæ interſerantur ſeries, ut ſuum quæque debitum ſortiatur titulum; obſervandi ſunt indices poteſtatum illic appoſitarum; eæque poteſtates ſunt interponendæ quarum indices cum illarum indicibus debitam analogiam retinent.

Puta, cum poteſtates, in ſummitate Tabellæ iſtius repertæ, indices habeant, 0, 1, 2, 3, 4, &c. Interpolatione unius loci ubivis jam facta, poteſtatum apponendarum indices eruut $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4$. &c.

Item cum poteſtatum illic ad marginem appoſitarum indices ſint $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. ſeu $\frac{2}{0}, \frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}$, &c. poteſtatum jam appoſitarum indices erunt $=\!\!-\frac{2}{1}, \frac{2}{0}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}$, &c. (vel pro $-\!\!-\frac{2}{1}$, ſubſtituas, $-\frac{2}{1}$, vel $\overline{-}\frac{2}{1}$, vel -2, tantundem enim valent.)

Adeoque Tabella illa jam interpolata ſic ſe habebit.

Si infinita ſeries Æqualium mulctetur analoga ſerie Subprimanorum, vel Subſecundanorum, vel Subtertianorum, &c. Reſidua, eorumque Quadrata, Cubi, &c. eam rationem habebunt ad Æqualium ſeriem congruam, quam habet unitas ad numeros Tabellæ ſequentis.

Seriei Æqualium mulctatæ ſerie

	Recip. √q Reſiduorum.	Æqualia.	√q Reſiduorum.	Reſidua.	√q. Cuborum.	Quadrata.	√q. Quintanorum.	Cubi.	√q. Septimanorum.	Biquadrata.
Recipr. Quadrat.	8	1		$\frac{1}{15}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$
Nulla. ſeu Æqualium.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Secundanorum.		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$
Prim. ſeu Subprim.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quadr. Subtert.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$
Subſecundanorum.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15
Qu. Subquintanor.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$
Subtertianorum.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35
Qu. Subſeptiman.		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{39}{48}$		$50\frac{105}{384}$
Subquartanorum.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

SCHOLIA.

Atque hic jam notare licet alteram etiam ſeriem earum quarum in Scholiis Prop. 165 & 168. meminimus, nempe eam quam Prop. 118 & 121 prius tradideram, etiam in hac ipſa Tabella inexſpectato prodire: in ſerie nempe tranſverſa tertia.

PROP. CLXXXVI.

Theorema.

HInc *patet, quod* Series infinita radicum univerſalium, ad ſeriem totidem Æqualium, rationem habere poteſt ſatis explicabilem.

Nempe per prop. præced. erit.

√q Reſid.	Reſidua.	√q Cuborum.
$\sqrt{u} : \sqrt{R} - \sqrt{a} :$	$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$\sqrt{u} : \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2}a + 3\sqrt{R}a^2 - \sqrt{a^3} :$
$\sqrt{u} : \sqrt{R} - \sqrt{b} :$	$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$\sqrt{u} : \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2}b + 3\sqrt{R}b^2 - \sqrt{b^3} :$
$\sqrt{u} : \sqrt{R} - \sqrt{c} :$	$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$\sqrt{u} : \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^2}c + 3\sqrt{R}c^2 - \sqrt{c^3} :$
&c. ad	&c. ad	&c. uſque ad
$\sqrt{} : \sqrt{R} - \sqrt{R} :$	$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$\sqrt{u} : \sqrt{R^3} - 3\sqrt{R^3} + 3\sqrt{R^3} - \sqrt{R^3} :$
$\frac{8}{15} A \sqrt{q} q R$	$\frac{1}{3} A \sqrt{R}$	$\frac{8}{35} A \sqrt{q} q R^3$

√q Reſiduorum.	Reſidua.	√q. Cuborum.
$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a} :$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a}$	$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2}a + 3\sqrt[3]{R}a^2 - \sqrt[3]{a^3} :$
$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b} :$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2}b + 3\sqrt[3]{R}b^2 - \sqrt[3]{b^3} :$
$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c} :$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{c}$	$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2}c + 3\sqrt[3]{R}c^2 - \sqrt[3]{c^3} :$
&c. ad	&c. ad	&c. uſque ad
$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R} :$	$\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{R}$	$\sqrt{u} : \sqrt[3]{R^3} - 3\sqrt[3]{R^2}R + 3\sqrt[3]{R}R^2 + \sqrt[3]{R^3}.$
$\frac{48}{105} A \sqrt[6]{R}$	$\frac{1}{4} A \sqrt[3]{R}$	$\frac{48}{315} A \sqrt[6]{R^3} = \frac{48}{315} A \sqrt{R}$
vel $\frac{16}{35} A \sqrt[6]{R}$		$\frac{16}{105} A \sqrt[6]{R^3} = \frac{16}{105} A \sqrt{R}$

Et

Et pari modo in quibuſvis aliis iſtius Tabellæ ſeriebus in quibus interpolatio perfecta eſt.

Adeoque nihil deeſt ad idem in reliquis ſeriebus perficiendum, (& ſpeciatim ad quadrandum circulum,) niſi ut methodus ſupplendi loca vacua reperiatur, vel (quod eodem recidit) ut ſerierum iſtarum proprius character inveniatur. Et quidem quamvis non obvium ſit interpoſitarum ſerierum characteres invenire, tamen, quam habent illi ad invicem rationem, ex prop. ſeq. innoteſcet: ut ſiqua poſſimus arte eorum unum invenire, ſtatim invenientur & reliqui.

PROP. CLXXXVII.

Theorema.

IN Tabella prop. 184. Ut, poſito ſeriei ſecundæ (hoc eſt, parium primæ) charactere 1, reliquarum (ex paribus) characteres fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. (ut dictum eſt prop. 178.) vel (quod tantundem valet) $1 \times \frac{2l}{2} \times \frac{2l+2}{4} \times \frac{2l+4}{6} \times \frac{2l+6}{8}$ &c. Sic, poſito ſeriei primæ (imparium) charactere A, reliquarum ex imparibus characteres fiunt continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{2l-1}{1} \times \frac{2l+1}{3} \times \frac{2l+3}{5} \times \frac{2l+5}{7}$ &c. Adeoque ex horum uno cognito innoteſcent ſtatim & reliqui.

Nam id poſtulat analogia progreſſionis Arithmeticæ, quæ & in Numeratoribus & in Denominatoribus conſpicitur. Atque id ipſum comprobat inductio locorum omnium qui complentur; ut non ſit dubium quin & idem de vacuis judicandum ſit.

Adeoque ex imparium characteribus, uno cognito innoteſcent etiam & reliqui.

PROP. CLXXXVIII.

Theorema.

IN ſeriebus Tabellæ prop. 184. Si primi termini A dicantur α, A, β, B, γ, C, δ, D, ϵ, E, &c. ſecundi (hoc eſt, primi parium,) 1. Reliqui omnes (tam pares quam impares) fiunt continua multiplicatione numerorum ſequentium. Nempe

	Impares.	Pares.
In prima	$\alpha \times \frac{0\times2\times4\times6\times8\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In ſecunda	$A \times \frac{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In tertia	$\beta \times \frac{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{3\times5\times7\times9\times11\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In quarta	$B \times \frac{3\times5\times7\times9\times11\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{4\times6\times8\times10\times12\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In quinta	$\gamma \times \frac{4\times6\times8\times10\times12\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{5\times7\times9\times11\times13\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In ſexta	$C \times \frac{5\times7\times9\times11\times13\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{6\times8\times10\times12\times14\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In ſeptima	$\delta \times \frac{6\times8\times10\times12\times14\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{7\times9\times11\times13\times15\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$
In octava	$D \times \frac{7\times9\times11\times13\times15\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$	$1 \times \frac{8\times10\times12\times14\times16\ \&c.}{2\times4\times6\times8\times10\ \&c.}$

Et ſic deinceps.

Probabitur hæc ex præcedente. Vel etiam (ut præcedens) ex analogia progreſſionis Arithmeticæ. Et quidem inductione comprobatur in locis omnibus repletis; ut non ſit dubium quin idem de vacuis etiam judicandum ſit.

Si quis autem hæſitat de imparibus ſeriei primæ, (quos aio fieri ex continua multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{0\times2\times4\times6\times8\ \&c.}{1\times3\times5\times7\times9\ \&c.}$) nempe, ne o ciphra quæ iſtic conſpicitur, totam continuam multiplicationem, quantacunque fuerit, penitus deſtruat, faciatque omnes iſtius ſeriei terminos evaneſcere in o ciphram ſeu Nihil: Sciendum eſt, inde huic malo cautum eſſe quod terminus A in iſta ſerie ſit ∞ Infinitum, (prout ſuperius oſtendimus in Scholiis ad prop. 166.) adeoque niſi ſequeretur o (ad iplius ∞ vires minuendas) excreviſſent omnes iſtius ſeriei termini in ∞ Infinitum. Sed eorum alterum alterius malo medetur commode. Quamvis enim $\infty \times 0$ non aliquem determinate numerum deſignet, (& propterea nihil inde certi de reliquis quantitatibus concludi poſſit,) poteſt tamen quaſi virtualiter cujuſvis numeri vices ſubire. Nam quicunque numerus per ∞ dividatur, quotientem dabit o, & contra. Puta ∞) 1 (0 : 0) 1 (∞ . ∞) 2 (0 . 0) 2 (∞ . ∞) 3 (0 . 0) 3 (∞. Et ſic de quovis alio: Et propterea (cum *Diviſor* in *Quotientem* ductus reſtituere debeat numerum *Dividendum*) eſſet $\infty \times 0 = 1$, vel $\infty \times 0 = 2$, vel $\infty \times 0 = 3$; Et ſic de quovis alio numero.

PROP. CLXXXIX.

Theorema.

Hinc ſequitur, quod Si ex Tabellæ prop. 184. locis vacuis unus quilibet numero noto ſuppleatur, erunt & reliqui omnes cogniti.

Verbi gratia; ſi numerus hac nota □ deſignatus ſupponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoſcentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic ſubtus indicatur.

∞	1	$\frac{1}{2}$□	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$□	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$□	$\frac{15}{48}$	$\frac{8}{35}$□	$\frac{105}{384}$	A
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$□	1	□	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$□	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$□	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}$□	$\frac{945}{384}$	$A \times \frac{2l-1}{1}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$l = \frac{2l \mp 0}{2}$
$\frac{1}{3}$□	1	$\frac{4}{3}$□	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$□	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{3465}{384}$	$A \times \frac{4l^2-1}{3}$
$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15	$\frac{l^2+1}{2} = \frac{4l^2+4l}{8}$
$\frac{4}{15}$□	1	$\frac{8}{5}$□	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}$□	$\frac{693}{48}$	$\frac{512}{35}$□	$\frac{9009}{384}$	$A \times \frac{8l^3+12l^2-2l-3}{15}$
$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	$\frac{1287}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{8l^3+24l^2+16l}{48}$
$\frac{8}{35}$□	1	$\frac{64}{35}$□	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{99}{8}$	$\frac{512}{35}$□	$\frac{1287}{48}$	$\frac{1024}{35}$□	$\frac{19305}{384}$	$A \times \frac{16l^4+64l^3+56l^2-16l-15}{105}$
$\frac{105}{384}$	1	$\frac{945}{384}$	5	$\frac{3465}{384}$	15	$\frac{9009}{384}$	35	$\frac{19305}{384}$	70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24} = \frac{16l^4+96l^3+176l^2+96l}{384}$

Totus

Totus proceſſus demonſtratur ex prop. præced.

Notandum autem & hic numerum quemvis intermedium aggregatum eſſe ex duobus altero ſurſum altero ad dextram, (non proximis, ſed poſt unum interminum,) poſitis.

Cujuſque ſeriei characterem (quatenus per prop. 182 & 187 innoteſcit,) libuit etiam adjungere, quo melius perſpiciat lector quouſque rem perduximus.

SCHOLIUM.

Atque hactenus quidem rem perduxiſſe videamur ſatis feliciter. Verum hic tandem hæret aqua. Neque enim video quo pacto poſſim vel quantitatem □ reperire, vel characterem ſeriei A. (Et propterea, nec characteres ſerierum imparium penitus aſſequi, licet eorum ad invicem rationes cognoſcantur; nec imparium ſerierum locos impares, quamvis & horum etiam cognoſcantur quas habent ad invicem rationes.) Quanquam enim ſi numeri laterales ſint integri, puta 1, 2, 3, 4, &c. noti ſint ſerierum illarum termini primi; puta $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{15}{48}$, &c. non tamen facile eſt deprehendere quo pacto horum numerorum ad ſuos reſpective numeros laterales ratio poſſit una aliqua æquatione explicari: unde & reliquis lateribus (locorum imparium) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, &c. accommodari poſſit ſuæ cujuſque ſeriei primus terminus. Quanquam enim hinc ſpes non exigua viſa eſt affulſiſſe, lubricus tamen quem præ manibus habemus Proteus tam hic quam ſuperius non raro elapſus, ſpem fefellit. Quem autem & hic comprimenti vultum oſtenderit, non erit fortaſſis ingratum appoſuiſſe. Nempe ——

PROP. CXC.

Theorema.

IN ſerie quarta, (ſive parium ſecunda,) cujus numeri alterne ſumpti (in locis paribus) 1, 2, 3, 4, 5, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum ſeu rationum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}$, &c. ſeu $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6} \times \frac{10}{8}$ &c. &, (in locis imparibus,) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. ex multiplicatis $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7}$, &c. Si, propter intercalationem unius in ſingulis ſpaciis numeri, (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermiſtis una fiat ſeries,) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus omnium tam parium quam imparium primus, in binas dirimenda eſt, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 compoſita eſt ex ratione 1 ad $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ad 2,) hoc modo

$$\overbrace{1}\times\overbrace{\tfrac{4}{2}}\times\overbrace{\tfrac{6}{4}}\times\overbrace{\tfrac{8}{6}}\times\text{&c.}$$
$$\overbrace{\tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{1}}\times\overbrace{\tfrac{3}{2}\times\tfrac{4}{3}}\times\overbrace{\tfrac{5}{4}\times\tfrac{6}{5}}\times\overbrace{\tfrac{7}{6}\times\tfrac{8}{7}}\times\tfrac{9}{8}$$
$$\tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{1}\times\tfrac{4}{3}\times\tfrac{7}{5}\times\tfrac{9}{7}$$

In ſerie ſexta, (ſive, parium tertia,) ſi idem faciendum ſit; diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraque eſt ex duabus compoſita; ad hunc modum.

$$\overbrace{1}\times\overbrace{\tfrac{6}{2}}\times\overbrace{\tfrac{8}{4}}\times\overbrace{\tfrac{10}{6}}\quad\text{&c.}$$
$$\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{2\times4}{1\times3}\times\frac{3\times5}{2\times4}\times\frac{4\times6}{3\times5}\times\frac{5\times7}{4\times6}\times\frac{6\times8}{5\times7}\times\frac{7\times9}{6\times8}\times\frac{8\times10}{7\times9}\quad\text{&c.}$$
$$\overbrace{\tfrac{3}{8}\times\tfrac{2}{1}}\times\tfrac{7}{5}\times\overbrace{\tfrac{9}{5}}\quad\text{&c.}$$

Nempe, diviſa prius qualibet ratione in quaternas, (puta $\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$, & $\frac{7}{8} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$, & ſic in cæteris,) & tum diſtributione alternatim facta in binas claſſes.

In

In ſerie Octava (ſive parium quarta) diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraque eſt ex ternis compoſita, ſic.

$$\overbrace{\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}}^{1}\times\frac{2\times4\times6}{1\times3\times5}\times\overbrace{\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}}^{\frac{8}{2}}\times\frac{4\times6\times8}{3\times5\times7}\times\overbrace{\frac{5\times7\times9}{4\times6\times8}}^{\frac{10}{4}}\times\frac{6\times8\times10}{5\times7\times9}\ \&c.$$

$$\overbrace{\frac{15}{48}}\times\overbrace{\frac{7}{1}}\times\overbrace{\frac{9}{3}}\ \&c.$$

Nempe, diviſa prius qualibet ratione in ſenas, (puta $\frac{8}{2}=\frac{3\times4\times5\times6\times7\times8}{2\times3\times4\times5\times6\times7}$, & $\frac{9}{3}=\frac{4\times5\times6\times7\times8\times9}{3\times4\times5\times6\times7\times8}$, &c.) quæ poſtea diſtribuendæ ſunt alternatim in duas claſſes.

Et ſimiliter in ſerie Decima, Duodecima, &c. dividenda quælibet ratio in Octonas, Denas, &c. quæ alternatim diſtribuenda ſunt in duas claſſes.

(In ſerie autem Secunda (ſive parium Prima) nulla rationum diviſione opus eſt, ſed cum omnes ſint eadem æqualitatis ratio, ſive $\frac{1}{1}$; eadem illa eſt & ubique interponenda, nam $\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$.)

Verum ſi in ſeriebus Imparibus illud aggrediamur; nempe ut quælibet ratio in duas (æquabiliter progrediendo) diſtribuatur; res non ita feliciter ſuccedit.

Nam (verbi gratia) cum (ex analogia reliquarum) rationes ſeriei Quintæ dividendæ eſſent in ternas, Septimæ in quinas, &c. (numero ſemper impares,) non poteſt fieri iſta æquabilis earum diſtributio in duas claſſes quæ ad debitam interpolationem requiritur.

Tota propoſitio (inſpecta Tabella) ſatis per ſe patet animadvertenti.

Res aliquanto clarius fortaſſe patebit ubi ſerierum aliquot rationes in binas, ternas, quaternas, &c. (prout ſeries quælibet poſtulat) diviſero. Nempe

In ſerie tertia.	In ſerie quarta.
$\frac{2}{1}=\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}=\frac{2\times3}{1\times2}$
$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}=\frac{3\times4}{2\times3}$
$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}=\frac{4\times5}{3\times4}$
$\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}=\frac{5\times6}{4\times5}$
$\frac{6}{5}=\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}=\frac{6\times7}{5\times6}$
$\frac{7}{6}=\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}=\frac{7\times8}{6\times7}$
$\frac{8}{7}=\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}=\frac{8\times9}{7\times8}$
$\frac{9}{8}=\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}=\frac{9\times10}{8\times9}$

In ſerie quinta.	In ſerie ſexta.
$\frac{4}{1}=\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}$	$\frac{5}{1}=\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}$
$\frac{5}{2}=\frac{3\times4\times5}{2\times3\times4}$	$\frac{6}{2}=\frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$
$\frac{6}{3}=\frac{4\times5\times6}{3\times4\times5}$	$\frac{7}{3}=\frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$
$\frac{7}{4}=\frac{5\times6\times7}{4\times5\times6}$	$\frac{8}{4}=\frac{5\times6\times7\times8}{4\times5\times6\times7}$
$\frac{8}{5}=\frac{6\times7\times8}{5\times6\times7}$	$\frac{9}{5}=\frac{6\times7\times8\times9}{5\times6\times7\times8}$
$\frac{9}{6}=\frac{7\times8\times9}{6\times7\times8}$	$\frac{10}{6}=\frac{7\times8\times9\times10}{6\times7\times8\times9}$
$\frac{10}{7}=\frac{8\times9\times10}{7\times8\times9}$	$\frac{11}{7}=\frac{8\times9\times10\times11}{7\times8\times9\times10}$
$\frac{11}{8}=\frac{9\times10\times11}{8\times9\times10}$	$\frac{12}{8}=\frac{9\times10\times11\times12}{8\times9\times10\times11}$

In

In ſerie ſeptima.

$$\frac{7}{3} = \frac{3\times4\times5\times6\times7}{2\times3\times4\times5\times6} \qquad \frac{6}{1} = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{4\times5\times6\times7\times8} \qquad \frac{8}{3} = \frac{4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{7\times8\times9\times10\times11}{6\times7\times8\times9\times10} \qquad \frac{10}{5} = \frac{6\times7\times8\times9\times10}{5\times6\times7\times8\times9}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{9\times10\times11\times12\times13}{8\times9\times10\times11\times12} \qquad \frac{12}{7} = \frac{8\times9\times10\times11\times12}{7\times8\times9\times10\times11}$$

In ſeriebus hiſce (quantumlibet continuatis) & ſequentibus omnibus, notandum eſt, Rationes cujuſlibet ex paribus ſeriei dividi in alias numero pares, quæ propterea commode diſtribui poſſunt (ut dictum eſt) in duas Claſſes: cujuſlibet autem ex ſeriebus imparibus, rationes dividi in alias numero impares, quæ propterea ſic diſtribui non poſſunt.

SCHOLIUM.

Si quis autem putet huic malo medelam ſatis commode applicari poſſe, dividendo rationes ſeriei quintæ, ſeptimæ, &c. (non in ternas, quinas, &c. ſed) in ſenas, denas, &c. (nempe bis ternas, bis quinas, &c.) ut ita rationes (jam numero pares) diſtribui poſſint in binas claſſes: Res neutiquam ex voto ſuccedet. Nam hoc quidem tantundem eſt acſi Rationes ſeriei quartæ, ſextæ, octavæ, &c. dividantur (non in binas, quaternas, ſenas, &c. ſed) in quaternas, octonas, duodenas, &c. Et harum poſtea fiat alternatim diſtributio in duas claſſes. Quod quidem ſi fieret, non ipſæ prodirent rationes quæſitæ, (quas ſupra exhibuimus,) ſed aliæ ab ipſis ſatis diverſæ, ut experienti patebit.

Et quidem proclivis ſum ut credam (quod & ab initio ſuſpicatus ſum,) rationem illam quam quærimus talem eſſe ut quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera ſurda; (quale quid innuit Schootenius, de radicibus Æquationum quarundam cubicarum, in ipſius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum deſcriptione*, idque ad mentem Vietæi, Carteſii, & aliorum:) ut neceſſe videatur alium ejuſmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per recepta latera ſurda.

Atque hæc quidem noſtra ſive ſententia, ſive conjectura, hinc confirmari videtur; Quoniam, ſi, ut ſerierum parium quælibet (in Tabella Prop. 184.) ſuum habet appoſitum characterem, ita & imparium quælibet ejuſmodi characterem nacta eſſet: tum, ut per characteres parium, rationem inveſtigari docuimus quam habet ſeries finita Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo Æqualium, (in Scholiis ad Prop. 182.) ita per ejuſmodi characteres ſerierum imparium, ſimiliter inveſtiganda videretur ratio quam habet finita ſeries Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. ad ſeriem totidem horum maximo Æqualium: cur autem hoc non ſperandum ſit, oſtendimus in Scholiis ad Prop. 165.

Et propterea, quod in aliis Arithmetices negotiis fieri ſolet; illud & hic faciendum erit: nempe, ubi ad ἀδύνατον aliquid pervenitur, quod quidem fieri ſupponendum eſt, nec tamen actu fieri poteſt; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri ſupponitur utut factum non ſit.

Atque hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus reſolutoriis uſu venit. v. g. In Subductione; ſi proponitur numerus major ex minori auferendus, puta 3 ex 2, vel 2 ex 1; quoniam id actu præſtari non poteſt, excogitantur numeri negativi quibus exprimatur ejuſmodi ſuppoſititia ſubductio, puta, $2-3$, vel $1-2$, vel -1.

In diviſione; ſi proponatur numerus per alium dividendus qui ipſum non metitur, puta 3 per 2; cum hoc actu præſtari non poſſit, inventus eſt modus ejuſmodi ſuppoſititiam diviſionem indicandi ad hanc formam $\frac{3}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$.

In extractione Radicum; si proponatur numerus resolvendus qui non sit sui generis vere figuratus; verbi gratia, si quæratur radix quadratica numeri 12; quoniam radix illa non potest ullis numeris sive integris sive fractis exponi, ideo inventa est methodus ejusmodi Radicem suppositiam utcunque indicandi ad hanc formam, $\surd 12$, vel $2\surd 3$.

Pariter, in Progressione Geometrica, puta 3, 6, 12, &c. Si quæratur terminus novus inter 3 & 6 interponendus, dicetur ille $3\surd 2$, vel $\surd 18$, vel $\surd : 3\times 6$: vel forte (quod tantundem valet) $\surd : 2\times 9$: quod idem est atque explicatius dicere, *terminus medius inter* 3 & 6 *in progressione* 3, 6, 12, &c. aut *inter* 2 *&* 9 *in progressione* 2, 9, $40\frac{1}{2}$ &c. Ita si inter 3, 6, interponendi essent duo medii Geometrici, esset eorum prior $\surd c : 3\times 3\times 6$: vel $\surd c\, 54$ vel potius $3\surd c\, 2$, (nempe 3 ducti in radicem cubicam communis multiplicatoris 2,) & sic in cæteris.

Si autem Progressio Geometrica, quæ supponitur fieri ex continua multiplicatione primi termini in numeros quotlibet invicem æquales, (puta 3, 6, 12, 24, &c. ex continua multiplicatione $3\times 2\times 2\times 2$ &c.) non semper admittat terminos intermedios rationales: non mirandum est si neque illud contingat in progressione facta ex termini primi continua multiplicatione in quotlibet succedentes numeros inæquales, sive crescentes sive decrescentes; (puta 1, 2, 6, 24, &c. ex continue multiplicatis $1\times 2\times 3\times 4$ &c. vel $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}$, &c. ex continue multiplicatis $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}$, &c.

Quoties autem hoc contingit, cum illud veris numeris designari non possit, (& ne quidem solis radicibus surdis dictis,) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunque exprimendi. Si igitur ut $\surd : 3\times 6$: significat *terminum medium inter* 3 *&* 6 *in progressione Geometrica æquabili* 3, 6, 12, &c. (continue multiplicando $3\times 2\times 2$ &c.) ita $m^{\sim} : 1 \mid \frac{3}{2}$: significet *terminum medium inter* 1 *&* $\frac{3}{2}$ *in progressione Hyper-geometrica decrescente* $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}$, &c. (continue multiplicando $1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$ &c.) erit $\square = m^{\sim} : 1 \mid \frac{3}{2}$: Et propterea *circulus est ad quadratum diametri, ut* 1 *ad* $m^{\sim} : 1 \mid \frac{3}{2}$. Quæ quidem erit Vera Circuli Quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur, explicata.

Et quidem, sicut in progressione Geometrica æquabili, 3, 12, 48, &c. quanquam qui terminum inter 3 & 12 intermedium dicit $\surd : 3\times 12$: non dicendus erit rem satis explicasse, quoniam terminus ille explicatius dici possit 6, (est enim $\surd : 3\times 12 : = \surd 36 = 6$:) attamen qui inter 3 & 6 (in progressione 3, 6, 12, &c.) terminum assignat intermedium $\surd : 3\times 6$: (vel saltem $\surd 18$, aut $3\surd 2$,) rem satis explicasse dicendus erit, quoniam non potest vero numero assignari: Ita qui in progressione $1, \frac{15}{8}, \frac{945}{384}$, &c. terminum inter 1 & $\frac{15}{8}$ intermedium dicit $m^{\sim} : 1 \mid \frac{15}{8}$: non satis explicate rem tradit, dicere enim potuisset $\frac{3}{2}$; At qui inter 1 & $\frac{3}{2}$ medium terminum assignat $m^{\sim} : 1 \mid \frac{3}{2}$: satis rem explicasse dicendus est, cum iste terminus non possit veris numeris exprimi: adeoque sufficit si utcunque indicetur.

Atque insuper, ut $\surd : 3\times 6$: (in progressione 3, 6, 12, &c.) vel $\surd 18$, vel $3\surd 2$, quamvis veris numeris explicari non potest accurate, potest tamen quam proxime designari; (puta major quam $4\underline{|24}$, minor tamen quam $4\underline{|25}$; item major quam $4\underline{|2426}$, minor quam $4\underline{|2427}$; item major quam $4\underline{|2426}39$, minor quam $4\underline{|2426}40$; & sic deinceps,) ita & numerus $\square = m^{\sim} : 1 \mid \frac{3}{2}$: designari potest veris numeris quam proxime, licet non accurate; puta major quam $1\underline{|27}$, minor tamen quam $1\underline{|28}$; item major quam $1\underline{|2732}$, & minor quam $1\underline{|2733}$; item major quam $1\underline{|27323}9$, & minor quam $1\underline{|27324}0$; & sic deinceps, prout vel ex tabella nostra (quod sequente propositione ostensurus sum) vel etiam aliunde variis modis colligi potest.

Adeo ut nihil videam cur non ratio Circuli ad Quadratum circumscriptum, (vel etiam Ellipseos ad circumscriptum Parallelogrammum,) nempe ut 1 ad $\square = m^{\sim} : 1 \mid \frac{3}{2}$: vel $\square = 1\ m^{\sim}\frac{3}{2}$. (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in progressione $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}$ &c.) æque τεχνικῶς explicari dicenda sit, atque ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1\surd 2$, vel ad $\surd : 1\times 2$: (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 & 2 in progressione 1, 2, 4, &c.) nisi quod hæc notatio $\surd 2$ vel $\surd : 1\times 2$: jamdiu fuerit recepta (sed quæ aliquando fuit nova;) nostra vero jam primitus introducta, propter novum progressionis genus jam primum (quod sciam) detectum. Sicut autem notatio numeri surdi (puta $\surd 2$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda; ita non erit difficile ejusmodi operationes ad novum hunc nostrum notationis modum applicare; quod tamen præsentis instituti non est. Non ignoro

interim

interim ad hanc ipſam notationem accuratius perficiendam, apponendas eſſe notæ m^{-} diſtinctiones ſuas, puta m^{-2}, m^{-3}, m^{-4}, &c. prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c. ſicut & notæ $\surd$ fieri ſolet, puta $\surd^2$, $\surd^3$, $\surd^4$, &c. prout deſignat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c. hoc eſt, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium: Item alias apponendas eſſe diſtinctiones quæ indicent, an continuæ multiplicationes (in expoſita ſerie interpolanda) vel unitate, vel numero binario, ternario, &c. continue creſcant. Verum ea omnia, & ſiqua ſunt ſimilia, remittenda ſunt ad accuratiorem hujuſce progreſſionis diſquiſitionem ſi illam in Arithmeticam admittendam ſentiant Mathematici, (quod quo minus fiat nihil video.) Præſenti ſufficit inſtituto illud quod volumus utcunque indicare, & quod in charactere deficit apertis verbis ſupplere. Si autem notationis modus ille à nobis excogitatus Mathematicis minus placuerit; ego quam lubentiſſime illum mutari patiar modo aptiorem oſtendant.

Ut ut ſit: Ego quidem neceſſe habeo ut fatear, me nec ejuſmodi pro ſeriebus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres; nec ſerierum imparium locos impares, adhuc ſupplere poſſe, juxta aliquem (quem adhuc receptum ſcio) notationis modum; (quanquam eorum ad invicem rationes jam oſtenderim.) Et quanquam in ſuperioribus, per avia non raro, & tramites nulli quod ſciam antea calcatos perrumpens, inſperatos exitus aliquoties invenerim: vix tamen (ob cauſas jam expoſitas) auſim ſperare, & hic item ex voto omnia ſucceſſura. Si forſan alius aliquis noſtra dehinc premens veſtigia eo tandem perveniat quo mihi non datum eſt pervenire, (nollem enim pro noſtri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere,) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (ſi quid ego judico) prorſus contemnendam, obſcuro ſatis de Circuli Quadratura problemati, lucem præbuiſſe; eamque eatenus numeris explicaſſe quatenus ipſa numerorum natura ferat.

Quod autem jam invenimus, libet etiam, in ſequentibus aliquot propoſitionibus, mutata aliquantulum forma proponere. Et primo quidem quî id poſſit numeris abſolutis quam proxime deſignari, & deinde etiam lineis rectis.

PROP. CXCI.

Problema.

PRopoſitum ſit inquirere, quantus ſit terminus □ (tabellæ Prop. 189.) in numeris abſolutis quam proxime.

Quo facilius res ſuccedat, progreſſionis (ibidem repertæ) termini

$$\tfrac{1}{2}\square . 1 . \square . \tfrac{3}{2} . \tfrac{4}{3}\square . \frac{3\times5}{2\times4} . \frac{4\times6}{3\times5}\square . \frac{3\times5\times7}{2\times4\times6} . \text{ &c.}$$

dicantur, $\alpha . a . \beta . b . \gamma . c . \quad \delta . \quad d . \quad$ &c.

Eſt autem $1.2::\alpha.\beta$. Et $2.3::a.b$. Et $3.4::\beta.\gamma$. Et $4.5::b.c$. Et $5.6::\gamma.\delta$. Et $6.7::c.d$.

Hoc eſt, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}, \frac{b}{a}=\frac{3}{2}, \frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}, \frac{c}{b}=\frac{5}{4}, \frac{\delta}{\gamma}=\frac{6}{5}, \frac{d}{c}=\frac{7}{6}$, &c.

Ideoque (cum rationes continue multiplicantes perpetuo decreſcant,) erit

$$\frac{\beta}{a}\begin{cases}\text{minor duarum} \begin{cases}\frac{a}{\alpha}\times\frac{\beta}{a}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}\end{cases}\\ \text{major duarum} \begin{cases}\frac{\beta}{a}\times\frac{b}{\beta}=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}.\end{cases}\end{cases}\Bigg\}\text{Ideoque}\begin{cases}\text{minor quam, } \surd\tfrac{2}{1}=\surd 1\tfrac{1}{1}.\\ \text{major quam, } \surd\tfrac{3}{2}=\surd 1\tfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\text{Et propterea } \beta=a\times\frac{\beta}{a}=\square,\begin{cases}\text{minor quam, } 1\surd 2=1\surd 1\tfrac{1}{1}.\\ \text{major quam, } 1\surd\tfrac{3}{2}=1\surd 1\tfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Item $\frac{\gamma}{b}$ $\begin{cases}\text{minor duarum} \begin{cases}\frac{b}{\beta}\times\frac{\gamma}{b}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}\end{cases}\\ \text{major duarum} \begin{cases}\frac{\gamma}{b}\times\frac{c}{\gamma}=\frac{c}{b}=\frac{3}{4}.\end{cases}\end{cases}$ Ideoque $\begin{cases}\text{minor quam, } \sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{1\frac{1}{3}}.\\ \text{major quam, } \sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{1\frac{1}{4}}.\end{cases}$

Et propterea $b\times\frac{\gamma}{b}=\gamma=\frac{4}{3}\square$, $\begin{cases}\text{minor quam } \frac{3}{2}\times\sqrt{1\frac{1}{3}}.\\ \text{major quam } \frac{3}{2}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}.\end{cases}$

Hoc est, $\square$ minor quam $\frac{3\times3}{2\times4}\times\sqrt{1\frac{1}{3}}$. major quam $\frac{3\times3}{2\times4}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}$.

Et (pari ratione) erit $\delta=c\times\frac{\delta}{c}=\frac{4\times6}{3\times5}\square$, $\begin{cases}\text{minor quam } \frac{3\times5}{2\times4}\times\sqrt{1\frac{1}{5}}.\\ \text{major quam } \frac{3\times5}{2\times4}\times\sqrt{1\frac{1}{6}}.\end{cases}$

Hoc est, $\square$ minor quam $\frac{3\times3\times5\times5}{2\times4\times4\times6}\sqrt{1\frac{1}{5}}$. major quam $\frac{3\times3\times5\times5}{2\times4\times4\times6}\sqrt{1\frac{1}{6}}$.

Et (continuata ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square\begin{cases}\text{minor quam } \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14}\times\sqrt{1\frac{1}{13}}.\\ \text{major quam } \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14}\times\sqrt{1\frac{1}{14}}.\end{cases}$$

Et sic deinceps quousque libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis positos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c. bis item positos, exceptis primo & ultimo, qui semel ponuntur: Et tota denique ratio seu fractio, sic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquota-parte sui auctæ; ea nempe quæ denominatorem habet eum qui est ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, si quæramus numerum justo majorem, vel parium, si justo minorem.

Atque hoc pacto eousque tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis assignata minor; (quæ propterea, si supponatur in infinitum continuanda operatio, tandem evanitura est.) Quod quidem, si opus sit, sic demonstrabitur.

Numerorum, ita ut jam dictum est, continue multiplicatorum, parium maximus (nempe, ex Denominatoris factoribus ultimus) dicatur z; adeoque imparium maximus (nempe, ultimus ex factoribus Numeratoris,) erit $z-1$, (quippe qui ab isto unitate deficit.) Erit igitur (propter eundem utrobique multiplicatorem compositum) numerus justo major ad numerum justo minorem ut $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$ ad $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, (nempe, ut terminalis numerus surdus in illo ad terminalem numerum surdum in hoc,) hoc est, ut $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ ad $\sqrt{\frac{z+1}{z}}$ hoc est, ut $\sqrt{\frac{z^2}{z-1}}$ ad $\sqrt{:}\,z+1$: hoc est, ut $\sqrt{z^2}=z$ ad $\sqrt{:}\,z^2-1$. Fieri autem potest (aucta nempe, quantum opus est, quantitate z) ut differentia radicum $\sqrt{z^2}$ & $\sqrt{:}\,z^2-1$: nempe $z-\sqrt{:}\,z^2-1$: minor evadat quavis assignanda, (ut notum est, & alibi etiam à nobis dictum ad prop. 39. Con. Sect.) Et propterea numerus justo major excedat numerum justo minorem, secundum eam rationem quæ minor sit quavis assignata. Quod erat ostendendum.

Cum autem, ut ex dictis patet, aucto in infinitum numero z, numerus justo major numerum justo minorem ea ratione superet quæ minor sit quavis assignata: erit

erit eorum ab invicem differentia (& propterea utriuſvis à juſto) infinite parva, hoc eſt, nulla.

Porro; Quoniam, numero z ſic in infinitum aucto, illa Unitati adjuncta pars ſui aliquota, futura eſt infinite parva; eritque, ſive $\sqrt{1-\frac{1}{z}}$, ſive $\sqrt{1-\frac{1}{z-1}}$, tantundem atque $\sqrt{1}$, ſive 1, (propter evaneſcentem partem infinite parvam,) quæ multiplicando nihil mutat: Dicimus, fractionem illam $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\text{ \&c.}}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\text{ \&c.}}$ ſeu $\frac{9\times25\times49\times81\text{ \&c.}}{8\times24\times48\times80\text{ \&c.}}$ in infinitum continuatam, eſſe ipſiſſimum quæſitum numerum □ præciſe; ad quem ita ſe habet 1, ut Circulus ad Quadratum Diametri: Vel, (ſi id magis placeat,) ut eſt iſtius fractionis Denominator ad Numeratorem, ſic eſſe dicimus Circulum ad Diametri Quadratum: Et, ut Numerator ille ad Denominatorem, ſic Quadratum illud ad Circulum; Nempe ut factum ex continue multiplicatis $9\times25\times49\times81$ &c. (quadratis numerorum imparium,) ad factum ex $8\times24\times48\times80$ &c. (eiſdem quadratis unitate minutis) in infinitum continuatis.

Si quis autem curioſius inquirat, quouſque continuanda erit illa multiplicatio continua, ut tandem ad differentiam datam, ſive ipſa minorem perveniatur: Nempe ut numerus juſto major, numerum juſto minorem, ipſius parte quamlibet exigua (vel ne illa quidem) ſuperet: Id hoc modo inveſtigabitur.

Quantitas major dicatur m, minor n, ſitque earum differentia, iſtius pars quantumvis exigua; puta $\frac{a}{b}m=m-n$; & quæratur quouſque continuanda erit operatio, hoc eſt, quis futurus eſt numerus z multiplicatorum (ſimplicium) maximus, ut illa differentia (vel ſaltem ipſa minor) prodeat.

Quoniam igitur $m-n=\frac{a}{b}m$, erit $n=m-\frac{a}{b}m$; & $m.n::m.m-\frac{a}{b}m::\frac{b}{b}m.\frac{b-a}{b}m::b.b-a::z.\sqrt{:}z^2-1$. (per modo demonſtrata.) Ideoque $b\sqrt{:}z^2-1:=bz-az$. Et (utrinque quadrando) $b^2z^2-b^2=b^2z^2+a^2z^2-2abz^2$. Atque (delendo utrinque b^2z^2, & reliqua tranſponendo,) $2abz^2-a^2z^2=b^2$. Et denique (utrinque dividendo) $z^2=\frac{b^2}{2ab-a^2}$. Hujus igitur numeri radix quadratica, (ſi fuerit numerus par,) vel ſaltem, (ſi vel fractus vel ſurdus ſit vel numerus impar,) par numerus illa radice proxime major, futurus eſt multiplicatorum maximus, ut aſſignata differentia, vel ipſa ſaltem minor, proveniat. Quod erat inveſtigandum.

Idem Aliter.

Poſt hanc autem noſtram, ipſius quantitatis □ deſignationem; libet etiam aliam ſubjungere, quam à Nobiliſſimo Viro, atque acutiſſimo ſimul Geometra, Dom. Guliel. Vicecom. & Barone *Brouncker*, accepi.

Cum illi progreſſionum aliquot mearum propoſuerim, & qua lege procederent indicaverim, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam commode deſignandam putaverit, indicaret; Nobiliſſimus Vir ille, re apud ſe perpenſa, methodo item Infinitorum ſibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodiſſime deſignandam judicavit. $\square=1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{2}$ &c. Nempe ſi unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continue fractum; ea lege, ut particularium fractionum Numeratores ſint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubique 2 cum adjuncta fractione, & ſic in infinitum. Hoc ſimul addito, ut, ubicunque tandem placeat conſiſtere, pro ultimo numero 2 cum fractione deinceps inſecutura, ponatur horum aliquis (prout locus ubi conſiſtitur poſtulaverit) 3, 5, 7, 9, &c. (deinceps ab 1, numero integro, Arithmetice proportionalium;) nempe ſi in primo loco ſiſtatur, 3; ſi in ſecundo,

1. justo minor.

$1\frac{1}{3}$. justo major.

$1\frac{1}{2}\frac{2}{5}$. justo minor.

$1\frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{7}$. major.

$1\frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{4}{9}$. minor.

5; si in tertio, 7; & sic deinceps; posito numeri qui locum denominat duplo unitate aucto. Atque hoc pacto, si in fractionis loco impari sistatur, prodibit numerus justo major; sin pari, justo minor. Quo longius autem procedatur eo propius utrinque ad numerum justum acceditur.

Atque ad eandem formam numeros reliquos tabellæ nostræ quæsitos designavit; aliasque ex progressionibus nostris, iis in exposita tabella similes, interpolavit. Totum vero illius methodi processum aperire, longius esset quam ut hic inseratur. Sperabam autem aliquando fore ut id ipsum ab illo in formam digestum publice exhiberetur.

SCHOLIUM.

Quum vero Nobilissimo Viro difficilius persuasum iri video ut illud ipse suscipere velit: conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim proxime, breviter exhibere.

Animadvertit siquidem Nobilissimus Vir, numeros duos impares continue proximos, si invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris sit unitate minus (puta $1\times3=3=4-1=Q2-1$. $3\times5=15=16-1=Q4-1$. &c.) Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis, (puta $0\times2=0=1-1=Q1=1$. $2\times4=8=9-1=Q3-1$. $4\times6=24=25-1=Q5-1$. &c.) Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. Invenit autem id fieri posse, si utrique factores fractione augeantur, quæ denominatorem haberet continue fractum in infinitum, ad eam formam quam superius exhibuimus: Nempe ut particularium fractionum Numeratores sint quadrata numerorum imparium, Denominator vero ubique integri duplus fractione auctus in infinitum. Ad hanc formam, quousque libet continuandam.

$$\overbrace{1=Q1}\quad\overbrace{9=Q3}\quad\overbrace{25=Q5}\quad\overbrace{49=Q7}\quad\overbrace{81=Q9}$$

$$0\tfrac{1}{0}\tfrac{9}{0}\tfrac{25}{0}+\quad 2\tfrac{1}{4}\tfrac{9}{4}\tfrac{25}{4}+\quad 4\tfrac{1}{8}\tfrac{9}{8}\tfrac{25}{8}+\quad 6\tfrac{1}{12}\tfrac{9}{12}\tfrac{25}{12}+\quad 8\tfrac{1}{16}\tfrac{9}{16}\tfrac{25}{16}+\quad 10\tfrac{1}{20}\tfrac{9}{20}\tfrac{25}{20}+$$

$$1\tfrac{1}{2}\tfrac{9}{2}\tfrac{25}{2}+\quad 3\tfrac{1}{6}\tfrac{9}{6}\tfrac{25}{6}+\quad 5\tfrac{1}{10}\tfrac{9}{10}\tfrac{25}{10}+\quad 7\tfrac{1}{14}\tfrac{1}{14}\tfrac{25}{14}+\quad 9\tfrac{1}{18}\tfrac{9}{18}\tfrac{25}{18}+\quad 11\tfrac{1}{22}\tfrac{9}{22}\tfrac{25}{22}+$$

$$\underbrace{4=Q2}\quad\underbrace{16=Q4}\quad\underbrace{36=Q6}\quad\underbrace{64=Q8}\quad\underbrace{100=Q10}$$

Factores autem illi sic constituti, quantumlibet continuati, (modo ne in infinitum,) rectangulum facient debito quadrato vel minus, si numerus fractionum integro adjunctarum sit par; vel majus, si impar; ita tamen ut quo longius procedatur eo propius ad quadratum debitum accedat. Quod hac demonstratione confirmatur.

Esto, ex debitis factoribus quibusvis, prioris numerus integer F, adeoque posterioris $F+2$; numerus igitur interjectus (quod latus est quadrati) $F+1$. Eorum rectangulum $Fq+2F$ minus est quam hujus quadratum $Fq+2F+1$.

Jam adjungatur utrique factori fractio una; Factores igitur

$F\frac{1}{2F}$, $F+2+\frac{1}{2F+4}$, constituent rectangulum

$\frac{4Fqq+16Fc+20Fq+8F+9}{4Fq+8F}$, quod majus erit quam quadratum

$Fq+2F+1=\frac{4Fqq+16Fc+20Fq+8F}{4Fq+8F}$.

Adjungantur deinde fractiones binæ; Factores emergentes

$F\frac{1}{2F}\frac{9}{2F}$, $F+2+\frac{1}{2F+4+\frac{9}{2F+4}}$, constituent rectangulum

4Fc+

$$\frac{4Fc+11F}{4Fq+9} \times \frac{4Fc+24Fq+59F+54}{4Fq+16F+25} =$$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+594F}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

quod minus est quam quadratum $Fq+2F+1 =$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+594F+225}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

Et sic quousque procedatur, prodibit rectangulum quod erit nunc minus nunc majus (alternis vicibus) quam expositum quadratum, (quæ tamen differentia perpetuo minuitur, ut patet,) quod erat demonstrandum.

His autem sic inventis; poterunt illa ad series nostras ita accommodari, ut inde innotescant termini in tabella desiderati juxta hunc notationis modum designandi.

Exempli gratia; (posito A pro primo termino cujusvis seriei.) Tabellæ nostræ series prima componitur, (ut supra ostensum est) in locis imparibus, ex continua multiplicatione. $A \times \frac{0}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$ &c. vel $A \times \frac{0}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{8}{10} \times \frac{12}{14}$ &c. Et in locis paribus $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{2}{4} \times \frac{6}{8} \times \frac{10}{12} \times \frac{14}{16}$ &c. Hoc est

$$A \times \frac{0}{1} \times \frac{2}{1\frac{1}{2}\frac{2}{2}} \times \frac{4}{1\frac{1}{2}\frac{2}{2+}} \times \frac{6}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}} \times \frac{8}{5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}} \times \frac{10}{7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}} \times \frac{12}{9\frac{1}{18}\frac{2}{18+}} \times \frac{14}{11\frac{1}{22}\frac{2}{22+}} \times \text{&c.}$$

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12$$

$$2\times4)Q2\left(\tfrac{2}{4}\right) \qquad 6\times8)Q6\left(\tfrac{6}{8}\right) \qquad 10\times12)Q10\left(\tfrac{10}{12}\right)$$

Vel etiam, (quod eodem plane recidit,) ad hanc formam.

$$Q2)0\times2\left(\tfrac{0}{2}\right) \qquad Q6)4\times6\left(\tfrac{4}{6}\right) \qquad Q10)8\times10\left(\tfrac{8}{10}\right)$$

$$A \times \frac{0}{1} \times \frac{2}{1\frac{1}{2}\frac{2}{2+}} \times \frac{4}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}} \times \frac{6}{5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}} \times \frac{8}{7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}} \times \frac{10}{9\frac{1}{18}\frac{2}{18+}} \times \frac{12}{11\frac{1}{22}\frac{2}{22+}} \times \frac{14}{13\frac{1}{26}\frac{2}{26+}} \times \text{&c.}$$

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12$$

$$Q4)2\times4\left(\tfrac{2}{4}\right) \qquad Q8)6\times8\left(\tfrac{6}{8}\right) \qquad Q12)10\times12\left(\tfrac{10}{12}\right)$$

Utrovis modo, rationes quibus numeri vel paribus vel imparibus locis ponendi constituuntur, resolvi possunt in binas (ut patet) quibus constituantur numeri locis continuis ponendi; numeris nempe locorum tum parium tum imparium in unam seriem interpolatione mutua redactis.

Similiter in serie tertia, cujus numeri in locis imparibus positi, constituuntur ex continue multiplicatis $A \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{5} \times \frac{8}{7}$ &c. vel $A \times \frac{4}{2} \times \frac{8}{6} \times \frac{12}{10} \times \frac{16}{14}$ &c. Et locis paribus $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{8} \times \frac{14}{12} \times \frac{18}{16}$ &c. Hoc est

$$2\times4)Q4\left(\tfrac{4}{2}\right) \qquad 6\times8)Q8\left(\tfrac{8}{6}\right) \qquad 10\times12)Q12\left(\tfrac{12}{10}\right)$$

$$A \times \frac{2}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}} \times \frac{4}{5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}} \times \frac{6}{7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}} \times \frac{8}{9\frac{1}{18}\frac{2}{18+}} \times \frac{10}{11\frac{1}{22}\frac{2}{22+}} \times \frac{12}{13\frac{1}{26}\frac{2}{26+}} \times \frac{14}{15\frac{1}{30}\frac{2}{30+}} \times \text{&c.}$$

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14$$

$$4\times6)Q6\left(\tfrac{6}{4}\right) \qquad 8\times10)Q10\left(\tfrac{10}{8}\right) \qquad 12\times14)Q14\left(\tfrac{14}{12}\right)$$

Atque hæc quidem abunde sufficiant ad omnes tabellæ nostræ numeros complendos, cum jam supra ostensum sit prop. 188. uno aliquo desideratorum invento reliquos statim innotescere. Si quis tamen cupiat, ut nos seriei primæ & tertiæ rationes resolvimus, ita & reliquarum serierum rationes item resolutas habere: poterit quidem & illud fieri, ita tamen ut in serie quarta (hoc est, post unitatum seriem secunda) erit rationum prodeuntium quælibet bimembris, in quinta trimembris, & sic deinceps.

Nempe,

Nempe, in quarta, ad hanc formam.

$$A\times\frac{3\frac{1}{6}\frac{9}{8_+}\times 5\frac{1}{10}\frac{9}{10_4}\quad 5\frac{1}{10}\frac{9}{10_4}\times 7\frac{1}{14}\frac{9}{14_4}}{2\times 4}\times\frac{7\frac{1}{14}\frac{9}{14_+}\times 9\frac{1}{18}\frac{9}{18_4}\quad 9\frac{1}{18}\frac{9}{18_4}\times 11\frac{1}{22}\frac{9}{22_4}}{8\times 10}\ \&c.$$

$2\times4\times4\times6)\ Q:4\times6:(\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$; $6\times8\times8\times10)\ Q:8\times10:(\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$; $4\times6\times6\times8)\ Q:6\times8:(\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$

In serie quinta, ad hanc formam.

$$A\times\frac{3\frac{1}{6}\frac{9}{8_4}\times 5\frac{1}{10}\frac{9}{10_+}\times 7\frac{1}{14}\frac{9}{14_4}\quad 5\frac{1}{10}\frac{9}{10_4}\times 7\frac{1}{14}\frac{9}{14_4}\times 9\frac{1}{18}\frac{9}{18_+}}{2\times4\times6}\times\frac{}{4\times6\times8}\ \&c.$$

$2\times4\times6\times4\times6\times8)\ Q:4\times6\times8:(\frac{8}{2}=\frac{4}{1}$; $4\times6\times8\times6\times8\times10)\ Q:6\times8\times10:(\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

Et similiter in sequentibus seriebus. Nempe singulæ rationes seriei quartæ, quintæ, sextæ, &c. componuntur ex seriei tertiæ rationibus binis, ternis, quaternis, &c.

Cum autem in singulis his rationum jam inventarum seriebus (ex quarum continuo ductu constituuntur Tabellæ nostræ numeri) commodum videatur ut in variis formis exhiberi possint, & (prout opus videbitur) ab una in aliam transformari, quo melius (aliarum fractionum instar) operationes Arithmeticas suscipiant: Potest & id commode fieri per ea quæ in hujus Scholii initio tradita sunt. Nempe, resolutis (ut ibidem docetur) quadratis numerorum parium in rectangulorum illis æqualium latera illic indicata, notentur singula (ob commodiorem processum) suis symbolis, hoc modo,

Q2	Q4	Q6	Q8	Q10	Q12	Q14	Q16	
□	B	C	D	E	F	G	H	I
$1\frac{1}{2}\frac{9}{2_4}$	$3\frac{1}{6}\frac{9}{8_4}$	$5\frac{1}{10}\frac{9}{10_4}$	$7\frac{1}{14}\frac{9}{14_4}$	$9\frac{1}{18}\frac{9}{18_4}$	$11\frac{1}{22}\frac{9}{22_4}$	$13\frac{1}{26}\frac{9}{26_4}$	$15\frac{1}{30}\frac{9}{30_4}$	$17\frac{1}{34}\frac{9}{34_4}$
		$\frac{4}{1}$□	$\frac{9}{4}$B	$\frac{16}{9}$C	$\frac{25}{16}$D	$\frac{36}{25}$E	$\frac{49}{36}$F	$\frac{64}{49}$G
				$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}$□	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}$B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$C	$\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$D	$\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$E
						$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$□	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$C
								$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$□

Cum enim sit □B = Q2 = 4, & BC = Q4 = 16:
Erit 4. 16 :: □B. BC :: □. C = $\frac{16}{4}$□ = 4□;
Et $\frac{1}{4}$C = □. Item □) 4 (B, & B) 4 (□.
Et similiter in locis reliquis.

Adeoque cum rationes nuper inventæ, sint in serie

Prima $A\times\frac{0}{1\frac{1}{2}\frac{9}{2_4}}\times\frac{2}{3\frac{1}{6}\frac{9}{8_4}}\times\frac{4}{5\frac{1}{10}\frac{9}{10_4}}\times\frac{6}{7\frac{1}{14}\frac{9}{14_4}}\times\frac{8}{9\frac{1}{18}\frac{9}{18_4}}\times\frac{10}{11\frac{1}{22}\frac{9}{22_4}}\times\frac{12}{13\frac{1}{26}\frac{9}{26_4}}\times$ &c

hoc est $A\times\frac{0}{\square}\times\frac{2}{B}\times\frac{4}{C}\times\frac{6}{D}\times\frac{8}{E}\times\frac{10}{F}\times\frac{12}{G}\times$ &c.

Secunda, $A\times\frac{2}{2}\times\frac{4}{4}\times\frac{6}{6}\times\frac{8}{8}\times\frac{10}{10}\times\frac{12}{12}\times$ &c.

Tertia,

Tertia, $A \times \frac{B}{2} \times \frac{C}{4} \times \frac{D}{6} \times \frac{E}{8} \times \frac{F}{10} \times \frac{G}{12} \times \frac{H}{14} \times$ &c.

Quarta, $A \times \frac{BC}{2\times4} \times \frac{CD}{4\times6} \times \frac{DE}{6\times8} \times \frac{EF}{8\times10} \times \frac{FG}{10\times12} \times \frac{GH}{12\times14} \times \frac{HI}{14\times16} \times$ &c.

Quinta, $A \times \frac{BCD}{2\times4\times6} \times \frac{CDE}{4\times6\times8} \times \frac{DEF}{6\times8\times10} \times \frac{EFG}{8\times10\times12} \times \frac{FGH}{10\times12\times14} \times \frac{GHI}{12\times14\times16} \times$ &c.

Et ſic in cæteris: (ubi tamen intelligendum eſt A non eandem eſſe ubique quantitatem, ſed in ſerie prima $A = \infty$ vel potius $\infty \square$, in ſecunda $A = 1 = \infty \square \times \frac{9}{\square}$, in tertia $A = \frac{1}{2}\square = 1 \times \frac{2}{B}$, in quarta $A = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\square \times \frac{1}{\square}$, in quinta $A = \frac{1}{3}\square = \frac{1}{2} \times \frac{6.}{D} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \times \frac{4}{8}\square$. Et ſic deinceps. Nam ſeries prima erecta, eadem eſt cum prima tranſverſa ; (ut ſupra liquet.) Poſſunt illæ, per æquipollentiam modo demonſtratam, ſic exhiberi, ut non niſi uno aliquo numerorum horum interminabilium opus ſit in ſingulis exprimendis ; & ſæpe quidem ne uno. Exempli gratia, In ſerie quinta, ratio Secunda $\frac{CDE}{4\times6\times8} = \frac{36E}{4\times6\times8} = \frac{64C}{4\times6\times8} = \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c. hac igitur ratione, quolibet modorum illorum deſignata, ducta in iſtius ſeriei terminum ſecundum 1, (in tabella noſtra repertum) habetur terminus tertius, $1 \times \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c.

Tertius autem hic terminus, ductus in rationem ſequentem

$$\frac{DEF}{6\times8\times10} = \frac{64F}{6\times8\times10} = \frac{100D}{6\times8\times10} = \frac{900B}{1920} = \frac{15}{8\square} = \frac{15B}{32} = \frac{15}{2C} = \frac{5D}{24} = \frac{40}{3E} \text{ &c.}$$

exhibebit ejuſdem ſeriei terminum quartum $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, eundem nempe quem exhibet Tabella. (Sed & idem terminus pariter exhibebitur ex ductu ſecundi termini 1, in rationem ex ſecunda & tertia compoſitam.) Atque ad hunc modum licebit ſingulos tabellæ noſtræ terminos indicare, adhibito nonnunquam uno quovis, ſæpius autem ne uno quidem, numerorum iſtorum interminabilium; quorum quidem nos primum, hac nota $\square$ deſignatum, in tabella noſtra adhibuimus.

Eſt igitur ratio Circuli ad Quadratum Diametri, (per jam dicta) $\frac{1}{4}p\,d\,.\,d^2$ $::1.\square = \frac{4}{B} = \frac{C}{4} = \frac{9}{D} = \frac{9E}{64} = \frac{225}{16F} = \frac{25G}{256}$ &c. Et ſimiliter (cum ſit ratio perimetri ad diametrum quadrupla rationis circuli ad quadratum, quia nempe $\frac{1}{4}p\,d\,.\,d^2 :: \frac{1}{4}p\,.\,d\,.$) ratio perimetri ad diametrum $p\,.\,d :: 4\,.\square$: & diametri ad perimetrum $d\,.\,p :: \square\,.\,4$ ::

$$:: 1\,.\,\frac{4}{\square} = B = \frac{16}{C} = \frac{4D}{9} = \frac{256}{9E} = \frac{64F}{225} = \frac{1024}{25G} \text{ &c.}$$

Nempe $\left\{\begin{matrix}\square\\ B\end{matrix}\right.$: ſic Circulus ad Quadratum Diametri.
ut 1 ad
: ſic Circuli Diameter ad Perimetrum.

Supereſt, ut rationem oſtendam cur in aſſignando valorem quantitatis $\square$, ſuperius dixerim, pro fractionis continue fractæ denominatore ultimo (ubicunque ſiſtendum quis velit) ponendum eſſe, non 2, ſed vel, 3, 5, 7, 9, &c. prout locus ubi conſiſtitur poſtulaverit, (quod non tam neceſſitatis, quam perſpicuitatis cauſa factum eſt.) Quæ quidem ratio, hæc eſt.

Cum ſupponatur (juxta jam tradita) $\square \times B = Q2 = 4$. ſitque $\square = 1\frac{1}{3}\frac{2}{4}$ & $B = 3\frac{1}{6}\frac{2}{4}$. Adeoque ſi numerum $4 = Q2$ dividamus per B (factorem poſteriorem) prodibit $\square$. Si quantitas B imperfecte ſumatur, non prodibit ipſa quantitas $\square$, ſed alia quæ major ſit vel minor, prout B imperfecte ſumpta, ſit ipſa B accurate, minor vel major. Nempe ſi pro diviſore B ſumatur 3, diviſione facta, pro $\square$ prodibit $1\frac{1}{3}$: ſi pro diviſore $3\frac{1}{6}$. prodibit $1\frac{1}{3}\frac{2}{5}$: ſi $3\frac{1}{6}\frac{2}{6}$, prodibit $1\frac{1}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}$. Et ſic deinceps: ut ex ipſo calculo patebit.

Et ſic in $B = 3\frac{1}{64}$, $C = 5\frac{1}{164}$, $D = 7\frac{1}{164}$, &c. faciendum erit. Nempe in B,

denominator ultimus erit unus ex his 5, 7, 9, 11, &c. (is nempe quem locus ubi sistitur postulaverit;) quia 3 (numero integro unde quantitatis B designatio inchoatur) in progressione Arithmetica binario continue crescunt. Et similiter, in C, unus ex his 7, 9, 11, 13, &c. Et, in D, unus ex illis 9, 11, 13, 15, &c. (qui nempe illic a 5, hic a 7, in Arithmetica progressione continua, binario crescunt:) Et in sequentibus similiter: quod ipse calculus indicabit.

Adeoque universaliter; in earum quantitatum qualibet designanda, (quocunque tandem loco sistere libuerit,) pro denominatore ultimo sumendus erit numeri qui fractionum locum denominat duplus numero integro quæ designationem inchoat auctus.

Si quis autem quærat, cur in hoc processu (in denominatore ultimo designando) per factorem posteriorem potius quam priorem divisionem faciamus: Ratio est, quia sic res commodius procedit. Nam uti jam denominatores illi ab inchoante numero integro Arithmetice procedunt crescendo; si per factorem priorem fieret divisio, denominatores illi ab inchoante numero integro retrocederent decrescendo, donec tandem perveniatur ad numeros negativos (qui designationem magis turbabunt) ut experimento facto patebit. Adeoque ad illam legem, si (verbi gratia) designanda sit quantitas F, dividendo Q 10 = 100 per E, denominatores illi sic prodeuntes futuri sunt 9, 7, 5, 3, 1, — 1, &c. Si autem ad methodum priorem dividatur Q 12 = 144 per G, fuissent 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, &c. nempe à numero 11 illic decrescendo, hic crescendo: ubi autem hac methodo tota quantitas prodit justa major, illa prodibit etiam justa major, & contra. Unde etiam patet, priorem illam methodum designandi ultimum denominatorem non modo minus turbatam, sed & magis accuratam esse, quam est posterior. Cum enim excessus & defectus sit semper penes ultimam fractionem, (cujus nempe adjectione quantitas quæ prius erat justa major fit, justa minor, aut contra,) ubi denominator est major (eodem manente numeratore) fractio minor est, adeoque sive excessus sive defectus minor, quam si denominator ille fuisset major: adeoque denominatorum illorum assumptio per continuum augmentum minuit, at quæ per continuum decrementum auget errorem. Quod quidem eousque verum est, ut ne quidem illa nostra emendatio, quæ per continuum denominatorum incrementum procedit, quicquam adfert commodi (sed incommodi potius ob dictam rationem,) donec eousque procedatur ut denominator ille auctus major sit denominatore communi, (eo nempe qui æquatur duplo inchoantis numeri integri,) nam, donec eo perveniatur, mutatio illa communis denominatoris in denominatorem crescentem, non minuit, sed auget adjunctam illam fractionem, adeoque & errorem.

Hoc unicum adhuc restare videtur; nempe ut ostendam qua lege Fractiones hujusmodi continue fractæ ad fractiones ordinarias commode reducantur.

Cum autem id fieri possit methodo nemini ignota, inchoando à fine, & recedendo donec ad principium tandem deveniatur: Optandum interim videtur, ut id fieri possit inchoando à principio & procedendo quousque libet. Hoc igitur qui fieri possit jam sumus ostensuri.

Esto igitur fractio ejusmodi continue fracta quælibet, sic designata.

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma}\,\frac{d}{\delta}\,\frac{e}{\iota}\ \&c.$$

Cum igitur constet, recepta methodo, reductionem institui posse ad hunc modum,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b+\alpha\beta}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma} = \frac{ac+a\beta\gamma}{\alpha c+b\gamma+\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma}\,\frac{d}{\delta} = \frac{a\beta d+ac\delta+a\beta\gamma\delta}{bd+\alpha\beta d+\alpha c\delta+b\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\delta}$$

Et

Et ſic deinceps, quantum opus erit. Nos inde hanc colligimus regulam, cujus ope à principio reductionem inchoemus quouſque libet continuandam;

$$\left.\begin{array}{cccccc} P & Q & P & Q & & Q \\ \hline N_3 \times & \frac{N_1}{D_1} & + D_3 \times & \frac{N_2}{D_2} & = & \frac{N_3}{D_3} \end{array}\right\}$$

Hoc eſt; Si (trium continue ſequentium fractionum) tam Numerator tertius propoſitus ducatur in Numeratorem primum jamjam quæſitum, quam Denominator tertius propoſitus in Numeratorem ſecundum jamjam quæſitum, aggregatum erit Numerator tertius quæſitus. Et ſimiliter, ſi tam Numerator tertius propoſitus ducatur in Denominatorem primum jamjam quæſitum, quam Denominator tertius propoſitus in Denominatorem ſecundum jamjam quæſitum, aggregatum erit Denominator quæſitus.

Exemplo res fiet manifeſta.

Sit fractio reducenda $\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{11}$

Operatio ſic inſtituetur. Inventa fractione ſecunda modo uſitato; tertia & quæ deinceps ſic reperientur.

$\frac{25}{2}$	$\times 1 = 25$	} 29	
	$\times 2 = 4$		
$\frac{25}{2}$	$\times 2 = 50$	} 76	
	$\times 13 = 26$		
$\frac{49}{2}$	$\times 2 = 98$	} 156	
	$\times 29 = 58$		
$\frac{49}{2}$	$\times 13 = 637$	} 789	
	$\times 76 = 152$		
$\frac{81}{11}$	$\times 29 = 2349$	} 4065	
	$\times 156 = 1716$		
$\frac{81}{11}$	$\times 76 = 6156$	} 14835	
	$\times 789 = 8679$		

P	Q
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{2}{13} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}$
$\frac{25}{2}$	$\frac{29}{76} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\frac{156}{789} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}$
$\frac{81}{11}$	$\frac{4065}{14835} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\,\frac{81}{11}$

Et ſic deinceps quouſque opus erit. Ratio operationis ex jam dictis patet.

Siquis autem adhuc miretur, unde factum ſit quod fractiones hæ continue fractæ, (prout hic vel illic cuiquam ſiſtere placuerit) ſint alternatim nunc majores nunc minores quantitate debita: hujus rei cauſam ſic breviter accipiat. Cum certum ſit numerum integrum ſine ulla adjuncta fractione juſto minorem eſſe; fractio prima, huic integro adjuncta, quantitatem auget: ſed eo minus auget quo ipſa minor fuerit. Hæc igitur prima fractio quantitatem auget, & quidem eouſque ut jam, quæ fuerat juſta minor, fiat juſta major. Hujus autem fractionis, eodem manente numeratore, ſi denominator augeatur, (quod fit adjecta fractione ſecunda,) fractio prima, adeoque & tota quantitas, adjectione ſecundæ minuitur. Hæc autem diminutio eo minor erit, (adeoque & tota quantitas major,) quo ipſius ſecundæ fractionis (manente numeratore) denominator augetur; quod fit adjectione tertiæ fractionis. Tertia igitur fractio ſecundam minuit, adeoque primam auget, ut & totam igitur quantitatem. Et ſimiliter in ſequentibus. Puta quartæ adjectio minuit tertiam, hoc eſt, auget ſecundam, adeoque minuit primam, totamque quantitatem. Quinta minuit quartam, adeoque auget tertiam, minuit ſecundam, augetque primam totamque quantitatem. Adeoque fractionum adjectio in locis imparibus auget, in paribus minuit quantitatem: Quod non de his tantum, ſed de quibuſvis aliis fractionibus ita (quoad denominatores) continue fractis, intelligendum erit.

Atque hactenus Nobiliſſimi Viri mentem, quanta potui brevitate ſimul atque perſpicuitate expoſui; quæque de ipſius methodo dicenda habui breviter indicavi.

PROP. CXCII.

Theorema.

SI ſit æquabilis Curva (non hinc inde ſubſultans) VC, cujus Axis VX, & Tangens in vertice VT; unde ductis ad curvam rectis axi parallelis, & ab invicem æqualibus diſtantiis remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, &c. (in locis paribus,) ſint ut 1, 6, 30, 140, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$, &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis 1, 6, interponendum,) ſic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Sequitur ex Prop. 139, & 135.

PROP. CXCIII.

Theorema.

SI exponatur æquabilis curva VC, cui occurrat in vertice VT, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus,) ſint ut 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, $\frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam, (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis 1, $\frac{3}{2}$, interponendum,) ſic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, ſic Triplum Circuli ad Quadruplum iſtius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, & 185.

PROP. CXCIV.

Theorema.

SI ſit æquabilis curvæ VC, axis VX, tangens in vertice VT, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interſtitiis diſſitæ) ſecunda, quarta, ſexta, octava, decima, &c. (in locis paribus) ſint ut 1, $\frac{5}{2}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{315}{48}$, $\frac{3465}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{6} \times \frac{11}{8}$ &c.) Erit, ut ſecunda ad tertiam (hoc eſt, ut 1 ad numerum ipſis 1, $\frac{5}{3}$, interponendum;) ſic Circulus ad $\frac{4}{3}$ Quadrati circumſcripti (ſive Quadrati ex Diametro;) Sive Triplum Circuli ad Quadruplum Quadrati circumſcripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, ſic Triplum Circuli ad Octuplum iſtius Quadrati, &c.)

Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

SCHOLIUM.

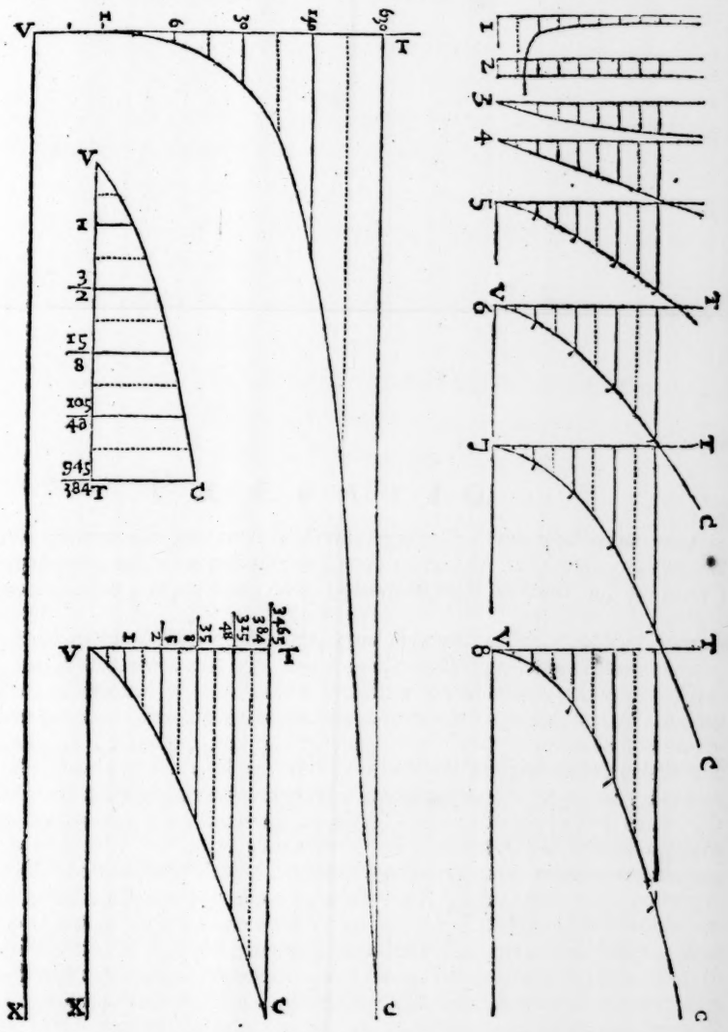
Et quidem hujuſmodi aliæ propoſitiones innumeræ ex eadem Tabella (prop. 189.) deduci poſſunt: formatis ſcilicet aliis atque aliis ejuſmodi curvis juxta iſtius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ ſint iſtæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibuſdam obſervare licet. Nempe; In ſerie ſexta, numeri (Triangulares) 1, 3, 6, 10, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{6}{2} \times \frac{8}{4} \times \frac{10}{6}$ &c.) Sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola; ut dictum eſt prop. 173.

In ſerie Quarta, numeri (Arithmetice proportionales) 1, 2, 3, 4, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6}$ &c.) ſunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola: ſive ut rectæ in Triangulo: ut patet.

In

In ſerie Secunda, numeri (æquales) 1, 1, 1, 1, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{6}$ &c.) ſunt ut quadrata rectarum (vel etiam ipſæ rectæ) in Parallelogrammo, ut patet. Adeoque in Secunda & Quarta ſerie,



pro curvis prodeunt revera rectæ, latus nempe hic Trianguli, illic Parallelogrammi.

In ſeriebus ſexta, octava, decima, &c. (alternatim ſumptis,) prodibunt curvæ magis adhuc compoſitæ, ſed quarum characteres non minus accurate deſignantur in dicta tabella, quam Parabolæ, Hyperbolæ aut Ellipſeos characteres noti.

In reliquis autem ſeriebus interjectis, prima, tertia, quinta, &c. (in locis imparibus,) provenient item æquabiles curvæ & regulares (quales puta pro Geometricis agnoſceret Carteſius,) quamvis earum characteres difficilius explicari poſſint, ut qui expoſitis ſerierum, in locis paribus poſitarum, characteribus ſunt intermedii juxta illam quam exhibuimus progreſſionis formam in Prop. 187.

Qualiter autem ad aſpectum ſe præbent expoſitæ curvæ, (tam quæ locis paribus quam quæ imparibus conveniant,) ſingulis tabellæ ſeriebus indicatæ, oſtendit appoſita figura, quæ ſigillatim illas depictas exhibet, debitis ſuis menſuris ex eadem (ut loquuntur) *Scala* deſumptis.

Notandum interim eſt (quod & ipſe aſpectus indicat,) quod convexitas curvæ VC (rectam VT verſus obverſa) quæ in curvarum ultima eſt maxima, (ſi retro

computemus,) in anterioribus ſenſim decreſcit; donec in loco quarto curva illa in rectam (ſecantem) tranſeat (quæ inter convexam & concavam eſt media,) deinde loco tertio in concavam, ſecundo autem in parallelam, & in primo denique in recurvam, (quæ nempe ex iis partibus ad rectam continue appropinquat quibus reliquæ inde recedunt.) Item recta V T, quæ in quinta & ſequentibus eſt tangens, in quarta rectam ſecat, in tertia fit curvæ diameter, in ſecunda fit parallela, & in prima denique Aſymptota.

Quænam autem ſint curvarum harum omnium affectiones, & quibus modis commodiſſime deſcribantur, non libet mihi (feſſo jam, varioque & impedito itinere ſatis laſſato) curioſius impræſentiarum inquirere; ut nec Hyperbolæ quadraturam ulterius (quam ſupra factum eſt) attingere. Et quidem fieri poteſt ut gratum nonnullis negotium vel ea tacendo præſtiturus ſim, quo liceat ipſis, indicata jam methodo, eiſdem inveſtigandis oblectari.

Eas autem omnes tales eſſe quales pro *Geometricis* haberi velit Carteſius, quo minus dubitem id facit, quod de locis paribus jam ſatis conſtet, detectis jamjam eorum characteribus, adeoque & de locis imparibus (quamvis eorum characteres non ita commode deſignari poſſint) non aliter cenſendum eſt. Quales autem illæ ſint Æquationes quæ ſingulis conveniant, ex ipſo ordine patebit. Cum enim ſeriei quartæ conveniat æquatio Lateralis, ſextæ Quadratica, octavæ Cubica, &c. (puta quarum ſuprema poteſtas eſt, Latus, Quadratum, Cubus, &c.) ad ſeries interjectas tales neceſſe eſt æquationes pertinere quæ ſint his intermediæ; (puta, quintæ, talis quæ ſit quadraticæ & laterali intermedia; & de cæteris pariter judicandum.) An autem ejuſmodi Æquationes ſat commode poſſint recepto more deſignari, dubitandum forſan erit.

Mihi interim ſufficiat (nec quidem ſuſceptorum laborum pœnitet) rem hactenus perduxiſſe; novamque ingreſſo ſemitam, eandem aliis aperuiſſe: quæ quidem quo me duceret, in principio non adeo facile erat hariolari, ſed quæ ad curvilinearum (ſaltem quarundam) quadraturam, aliaque ejuſmodi abſtruſiora problemata, recta tendere videbatur. Nec quidem ſpem fefellit. Utut enim in Circulo, ratio ea quam habet ille ad Quadratum (quam mihi præ oculis etiam ab initio fuiſſe non nego) non ita plane ex voto ſe prodat, ut in aliis aliquot curvilineis, recepto aliquo notationis modo explicanda, (ſed per varios Mæandros me deduxerit, & tandem in ἄῤῥητον quiddam deſinat:) Operæ tamen pretium eſt eatenus eam indicaſſe quatenus ipſa numerorum natura patitur; ut nihil inſuper reliquum ſit quam ut inter Mathematicos conveniat qua velint notatione (ſive mea ſive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam ἄῤῥητον indicare. In aliis autem curvilineis non paucis ita ex voto ſucceſſerunt omnia (& quidem ſupra ſpem non raro,) ut innumeras Curvilineorum quadraturas, partim antehac plane incognitas, partim etiam cognitas quidem antea, ſed nova jam & faciliori methodo traditas, indicaverim: Aliaque innumera ex intricatioribus Matheſeos problematis, (puta de Pyramidoeidibus, Conoeidibus, & Sphæroeidibus, de linea Spirali, & Spatiis ipſi adjacentibus, de Paraboloeidibus, aliiſque paſſim,) vel primus detexerim, vel multum elucidaverim: Figuras item in infinitum continuatas (non unam aliquam, quod tamen à Toricellio factum, ſatis videbatur mirandum, ſed varias) tam planas quam ſolidas, ad menſuram notam & finitam reduxerim.

Facile quidem fuiſſet (modo libuiſſet) innumeras paſſim propoſitiones alias inſeruiſſe, (quod nemini harum rerum perito dubium eſſe poteſt,) cum ſit ea quam trado doctrina conſectariorum ſatis ferax. Et quidem in primoribus hujuſce tractatus partibus copioſius hujuſmodi conſectaria interſerui, ideo præſertim ut quo tenderet hæc doctrina indicarem. Verum in ſequentibus illud parcius proſecutus ſum, partim quod jam ex præcedentibus eouſque pateret methodus noſtra, ejuſque utilitas, ut jam ſuo Marte poſſit quilibet id ipſe præſtare; partim etiam ne propoſitionum numerus (qui jam turgere videbatur) adeoque totius tractatus moles nimis excreſceret. Adeoque multa paſſim in tranſitu leviter indicata ſunt, quæ, ſi libuiſſet curioſius proſequi, integram potius diſquiſitionem ſibi ſigillatim poſtularent.

Quod reliquum eſt; orandi ſunt harum rerum periti, ut quod nos præſtare valuimus candide dignentur acceptare, & ſiquid ipſis rectius obtigit in publicum Matheſeos augmentum impertire.

LAUS DEO.

ECLIPSIS SOLARIS

OXONII VISÆ

Anno Æræ Christianæ 1654.

2° *Die Mensis Augusti,*

STILO VETERI,

OBSERVATIO.

Anno 1655 Edita.

AMPLISSIMO VIRO

JOHANNI HEVELIO,

SENATORI DANTISCANO,

Matheseos peritissimo;

JOHANNES WALLISIUS

S.

NON illud agitur hisce literis (Vir Illustris) ut quanta Tua fuerit in rebus Mathematicis peritia, quanta industria, aut quantum etiam ipsa Mathesis sedulitati Tuæ debeat, literato Orbi innotescat. Quotusquisque enim est qui illa nescit? Aut quidem, si nesciretur, quis ego sum ut ea mihi de Te prædicanti major quam ipsis tuis operibus debeatur fides? Non patiuntur autem egregia illa quæ ex tuis exstant opera, non patitur nominis tui celebritas, nec Mathematicorum omnium in te conversi oculi patiuntur, ut HEVELII *nomen ab erudito Orbe vel ignoretur, vel amplis laudibus undique non efferatur. Quisquis enim limatissimum illud opus Selenographicum, (ut cætera taceam,) quod Te authorem prædicat, inspexerit; &, quanta cura, quantis sumptibus, quantis vigiliis, quanto denique (ut uno verbo omnia complectar) Viro opus sit, ut egregium illud opus instruatur, satis perpenderit; non poterit ille non in admirationem rapi. Quis enim illum vel tacere poterit, vel satis eloqui, qui unus isthæc omnia peregerit! Ego quidem non satis mirari valeo, summum virum, tam rebus domesticis, quam negotiis publicis, & obeundo magistratu, occupatissimum, eousque cœlestibus observationibus vacare posse, eisque tanta cum sedulitate, tanto & temporis & facultatum & valetudinis etiam impendio, tam pertinaciter invigilare. Tanto enim apparatu, tanto molimine, tantis sumptibus, in conficiendis instrumentis, in vitris excolendis, aptisque parandis observationi locis, in tot insuper Lunæ phasibus, aliisque Cœli Phænomenis, accurate notandis, delineandis, ærique incidendis, opus esse nemo non fatebitur, ut ea non unum aliquem, licet summum virum, sed sat multos potius viros egregios postulare videantur.*

Cum autem mihi contigerit, non modo Tuis quæ publice extant scriptis, sed & humanissimis ad me literis Tuis aliquoties frui; à gratitudinis officio neutiquam alienum duxi, quæ nobis nuper observare licuit tecum communicare. Quamvis enim hujusmodi conatus nostri, tanti non sint ut cum Tuis illos comparandos velim, (cum neque tantus mihi suppetat instrumentorum delectus, nec eam mihi vendicem, minus exercitato, in observando

ἀκρίβειαν) *attamen Tibi non ingratum fore facile judico, quid ab aliis observatum fuerit intelligere: præsertim cum ea quæ à Luminarium Eclipsibus addisci solent, non tam ab una aliqua, utut accurata, uno in loco præstita observatione, quam ex collatis variis, in variis Terræ locis peractis, innotescant. Ideoque hanc nostram qualemqualem deficientis Solis Observationem* Oxonii *habitam, sive observantiæ, sive gratitudinis ergo, Tuis oculis subjicere visum est, simul cum ea qua usus sum observandi methodo. Siquid autem inde vel delectationis vel commodi perceperis, omnino mihi gratissimum erit aliquid præstitisse tanto viro non ingratum. Superest, ut à Deo Opt. Max. omnia Tibi felicia precatus, Tuique observantissimum me professus, Valere jubeam. Dabam* Oxonii, *ipsis Calendis Januarii, Anno* 1655.

Eclipsin

ECLIPSIN SOLAREM,

OXONII VISAM,

Aug. 2. 1654. *Stil. Vet.*

Obſervandi Methodus.

CUM Ephemeridum indicio moniti, Eclipſin Solarem ſatis quidem amplam ſecundo die Menſis Auguſti (ſtylo veteri) Anno Æræ Chriſtianæ vulgaris currente 1654, tempore matutino, conſpiciendam exſpectavimus: parabam ea quæ huic negotio neceſſaria videbantur, ut, ſi cœlo propitio frui datum fuerit, Eclipſis exſpectata commode ſpectari poſſet. Cameram nempe curavi probe obſcurandam, ut meræ eſſent tenebræ; in quam per Teleſcopium ſatis limatum Solares radii intromiſſi in adverſa tabula reciperentur, quam ita Teleſcopio accommodaveram, ut, ubi ad Solem illud directum fuerit, hæc ſemper Solari diſco maneret parallela: eodem ipſo inſtrumento uſus, quo ante biennium eodem in loco Eclipſin (quantum per cœlum nubilum tunc licuit) obſervaveram.

Huic tabellæ, ſive aſſerculo ligneo, chartam affixeram, quæ circulum continebat tantæ magnitudinis ut illum exacte impleret per Teleſcopium intromiſſa Solaris corporis effigies. Hunc circulum (duabus diametris decuſſatim poſitis diviſum, quarum altera lineam verticalem, altera horizontalem oſtenderet,) ita dividebant alii circuli concentrici ut in qualibet diametro digiti & digitorum quadrantes diſtinguebantur. Et perpendiculum etiam appenſum erat, cujus umbra moneret ſiquando linea verticalis à debito ſitu deflecteret.

Habui autem obſervationis comites duos egregios viros, Artium Magiſtros, & rerum Mathematicarum peritiſſimos, D. *Richardum Rawlinſon* Collegii Reginalis Socium, & D. *Chriſtophorum Wren* Socium Collegii Omnium-Animarum, quorum etiam alterius ope in ære incidendo uſus ſum.

Ubi dies advenerat, metuebam primo mane ne nubilum cœlum aſpectum Solis penitus impediret. Sed nubes paulatim diſperſæ, ante Eclipſeos initium, cœlum ſudum oſtendebant, & negotio noſtro ſatis accommodum.

Ipſum Eclipſeos principium non obſervavi, quippe quod paulo citius contigit quam exſpectaveram; ſed ex ſequentibus obſervationibus aliquammultis ſatis illud colligi poterit: incidiſſe nempe (apud nos) hor. 7. 45′. (circiter) tempore matutino: in limbi Solaris gradu 22° à puncto verticali Occidentem verſus.

Deinde vero phaſes umbræ creſcentes notavi ſex, prout illas habes in Typo delineatas; ut & decreſcentes quindecim.

Maximam vero Solis obſcurationem omnino non vidi, non tam injuria Cœli quam loci ubi fueram impeditus. Camera enim ubi habita eſt obſervatio eum habuit ſitum ut non per unam aliquam feneſtram tota potuerit Eclipſis obſervari; ſed principium quidem per unam, finis autem per aliam. Maxima autem omnium obſcuratio tum contigit cum inſtrumentum ab hac ad illam movendo fuimus occupati, dum neutra feneſtra ſatis erat commoda: Sol enim ab una digreſſus nondum ad alteram pervenerat. Quanta autem illa fuerit, ex reliquis phaſibus collatis ſatis colligitur. Erat nempe illa (juxta eam quam exhibemus obſervationem) decem integris digitis paulo minor. Incidit autem (apud nos) hora 8. 58′½. circiter, paulo ante obſervationem noſtram ſeptimam.

Ubi denique Eclipſis ad finem vergebat, curavimus tam momentum exitus, quam punctum marginis Solaris quod ultimum umbram paſſum eſt ſatis curioſe obſervare. Incidit nempe (apud nos) hora 10. 14. (ante meridiem:) in limbi Solaris gradu 43°, à puncto infimo Orientem verſus. Duravit igitur Eclipſis per horas duas integras cum ſemiſſe, circiter.

Quem autem in ſingulis phaſibus ſitum habuerint lucis cornua, & quem Solaris limbi gradum tetigerint, in ipſo quem vides Typo expreſſum habes; ut non ſit

opus multis illud verbis explicare. In omnibus autem illis quas notavimus phasibus; consensus ipse satis indicio esse videtur, totam observationem satis accurate fuisse peractam, saltem errores siqui sint non adeo magnos esse.

Diametrum Solis visibilem deprehendimus in hac Eclipsi minorem esse quam in ea quæ accidit duobus abhinc annis, (Martii 29. 1652. st. vet.) quod eo statim indicio patuit, quod idem Circulus Observatorius quem tunc adhibui nonnisi in remotiori à Perspicillo distantia implebatur.

Diametrum Lunæ visibilem, quamvis illam exhibeant Tabulæ Diametro Solari paulo majorem, invenimus potius æqualem esse, ab ea saltem vix notabili quantitate differre. Quod hoc indicio deprehensum est. Circulos habebam aliquot chartaceos antea paratos, diversæ paulo ab invicem magnitudinis, Circulo Observatorio (qui discum Solarem exhibuit) partim majores partim minores aut æquales; quos sigillatim umbræ in Solari disco visæ applicando illum inveni arcui lucem ab umbra separanti optime convenire, qui circulo Observatorio congruebat.

Atque hoc quidem circulo chartaceo usus sum in singulis phasibus observandis. Cum enim celerior motus umbræ non passus est notabilem moram in una aliqua phasi delineanda; circulo chartaceo umbræ applicato, per ipsius statim marginem arcus eos plumbo descripsimus quos in ipso Typo vides expressos. Hoc enim pacto, & expeditioni melius prospectum, & confusioni cautum, iri judicavi, quam si singulos arcus ternis punctis indicatos circino tandem post observationem peractam delineandos reliquerim.

Cum autem visibilem Lunæ Diametrum respectu Diametri Solaris paulo minorem nobis apparuisse dictum est quam indicabant Tabulæ: non tamen propterea Tabulas illas eo nomine suspectas statim insinuo aut erroris incuso; cum & salva Tabularum fide satis illud contingere possit. Corpus enim lucidum, dum radiis suis corpus opacum lambit, ipsius marginem ita perstringere solitum est acsi nonnihil inde abraderet, & corpus opacum paulo minus apparere facit quam revera est. Quod familiari instantia contueri licet. Si enim bacillum teres oculum inter & lucernam transverſim colloces, ut lucernæ flamma partim supra baculum partim subtus conspiciatur; videbitur rotundum illud bacillum eo loci ubi radiis perstringitur aliquanto minus esse, quam alibi ubi radiis flammulæ liberatur; quasi utrinque aliquid radiis perstringentibus ablatum esset. Quod quidem de corpore Lunari si concedatur, Solem inter & oculum posito; necesse est ut ipsius discus, radiis Solaribus quasi detersus, minor aliquanto appareat, quam vel revera sit, vel in alio situ videatur esse. Quod quidem animadvertisse, in Solaribus Eclipsibus æstimandis, non levis erit momenti. Hinc enim eveniet ut Eclipses Solares semper videantur paulo minores quam Luminarium proportio & situs postulant. Et (eadem de causa) Eclipses Lunares etiam justo minores apparere possunt, diminuto scilicet umbræ terrestris cono (abrasis quasi lumine Solari ipsius particulis exterioribus,) unde necesse erit ut & minuatur Lunaris disci obscuratio. Quantum autem, in utraque Eclipsi, hanc ob causam deesse judicandum erit, accuratiori indagine non indignum videatur.

Temporis momenta quod attinet; ea indicio Horologii ambulatorii, singula minuta prima & secunda monstrantis, æstimavi; prout illa habes in adjuncta Tabella indicata. Quamvis enim isthæc automata, utut artificiose facta, non ita plane æquabili motu procedant ut Mathematicam ἀκρίβειαν attingant; si tamen minuto forsan integro (vel etiam altero) aliquando peccatum fuerit, non eapropter eorum usus esset contemnendus. Sed & altitudinem Centri Solaris aliquoties interim æneo Quadrante observavi, non quidem adeo magno, sed accurate diviso & fideliter etiam tractato. Ex quibus comparatis liquet, Horologium, in principio Eclipseos, potius sequi justum tempus, sed properanter; in fine vero, præire, sed & segnescere.

Plura temporis mensurandi media non adhibui, partim quod ad manum alia non erant, partim etiam quod non totidem adjutores habui, illarum rerum peritos, quot pluribus attenti esse possent.

Tota Observationis serie sic peracta: cum tandem esset ære incidenda, non ulla placuit emendatione uti, ne correctionis prætextu depravare videar: sed observationem integram, sicut in protographo primitus depicta fuerat, fideliter in æneam laminam transferre. Schematis tamen totius situm inversum, ex radiorum decussatione ortum, in integrum restituendum duxi, (quod sola chartæ conversione præstitum

præſtitum eſt,) quo melius apparentiæ cœleſti congrueret. Totum etiam in minorem aliquanto formam redigere coactus ſum; quia circulus, quo uſus eram, Obſervatorius aliquanto major fuerat quam ut una pagina commode contineri poſſit.

Centri denique Lunaris tranſitum, per diſcum Solis, depictum habes; quatenus ex obſervatorum arcuum centris colligitur. Quæ quamvis linea ſit non ita plane æquabilis, quin aliquantulum hinc inde fluctuet; tantillum tamen aberratum eſt, ut vix majorem ἀκρίβειαν ſperare auſus eſſem; cum in accuratiſſimis quas videre contigit Obſervationibus, non minorem deprehendi centrorum divaricationem, nonnunquam etiam & longe ampliorem; quod & quivis alius deprehendere poterit, cui libet in aliorum Obſervationibus arcuum obſervatorum centra examinare. Neque mirum illud illis videbitur qui rebus hujuſmodi ſunt exercitati: Norunt enim leviſſimam in obſervandis umbræ arcubus (præcipue minoribus) aberrationem, ſatis notabilem nonnunquam centri divarication em creare poſſe; præſertim ſi accedat vel leviuſcula inſtrumenti titubatio, vel perpendiculi à ſuo ſitu deflexio: quid quod & ipſum lucis & umbræ confinium non adeo accurate, quaſi linea Mathematica, determinare datum eſt, quin aliqua latitudo concedatur ſit neceſſe non niſi conjectantis oculi æſtimatione determinanda. Ne autem ſit linea plane recta, impedire debent mutata ſubinde in ſingulis momentis tam Luminarium Parallaxes quam Solaris Diſci puncta Verticalia.

Tandem præcipuas aliquot phaſes ſeorſum placuit in minori forma deſcribere: non quidem eas ipſas quas in Obſervationis curriculo notavimus, ſed quæ integris potius diametri Solaris digitis reſpondeant, prout eas ex majori Schemate colligere licuit.

Quis autem fuerit Zodiaci ſitus in ſingulis obſervatis phaſibus, nec erat neceſſe, nec quidem conveniens adnotare; adeoque nec nodi Ecliptici poſitionem. Cum enim Zodiaci ad Horizontem inclinatio non eadem permaneat, ſed in ſingulis ſubinde momentis immutetur; opus eſſet Zodiacum vel non omnino notare, vel toties quot ſunt ipſæ obſervatæ phaſes, unde linearum confuſio nimia oriretur ſit neceſſe. Nec tamen eapropter placuit obſervationis Typum primarium (quem nempe tempore Obſervationis deſcripſimus) immutare, ut omnes obſervatæ phaſes ad unum aliquod perpendiculum reducerentur, cujus reſpectu Zodiacus in eodem ſemper perſiſtat ſitu. Sed mallem rem ipſam ſimpliciter ut facta eſt exhibere, & ejuſmodi calculum ſeu reſtitutionem cujuſvis arbitrio permittere.

Atque hæc ſunt quæ de præſenti Obſervatione monenda duxi. Reliqua ex ipſa Typi, qui ſequitur, inſpectione ſatis patebunt.

Observatio Eclipseos Solaris

OXONII habita;

Anno Æræ Christianæ 1654. Die 2 Augusti st. vet. Elevatio Poli 51°, 46′ circiter.

Phasium Observatarum ordo.		Digiti Ecliptici.	Tempus secundum Horologium ambulatorium Hor.			Altitudines centri Solaris Gr.	Mi.	Tempus ex altitudine Solis erutum Hor.	′	″
	1	* 2 2/3 D.	8	2′	20″.					
	2	4 circ.	8.	9.	30.					
	3	5 circ.	8.	15.	23.					
Crescentes			8.	22.	0.	33.	34′	8.	23.	7.
	4	6 2/3 4/4 1/3	8.	28.	29.					
	5	7	8.	34.	24.					
	6	8	8.	39.	31.					
	7	9 7/8	8.	59.	42.					
	8	9 2/3 2/3 7/8	9.	4.	50.					
	9	9 7/8 7/8 7/8	9.	8.	34.					
	10	8	9.	12.	45.					
Decrescentes			9.	15.	15.	40.	34.	9.	13.	31.
	11	8 1/4 1/2	9.	17.	29.					
	12	7 1/2	9.	23.	54.					
	13	6 3/4	9.	28.	37.					
	14	6 1/8	9.	33.	18.					
	15	5 1/2	9.	37.	7.					
			9.	42.	30.	43.	45.	9.	38.	53.
	16	3 3/8	9.	53.	17.					
	17	3 circ.	9.	56.	24.					
	18	2 1/3	9.	59.	14.					
	19	1 7/8	10.	2.	57.					
	20	1 3/8	10.	6.	19.					
	21	1 1/8	10.	7.	50.					
	22	Finis.	10.	14.	0.					
			10.	20.	35.	47.	57.	10.	17.	31.

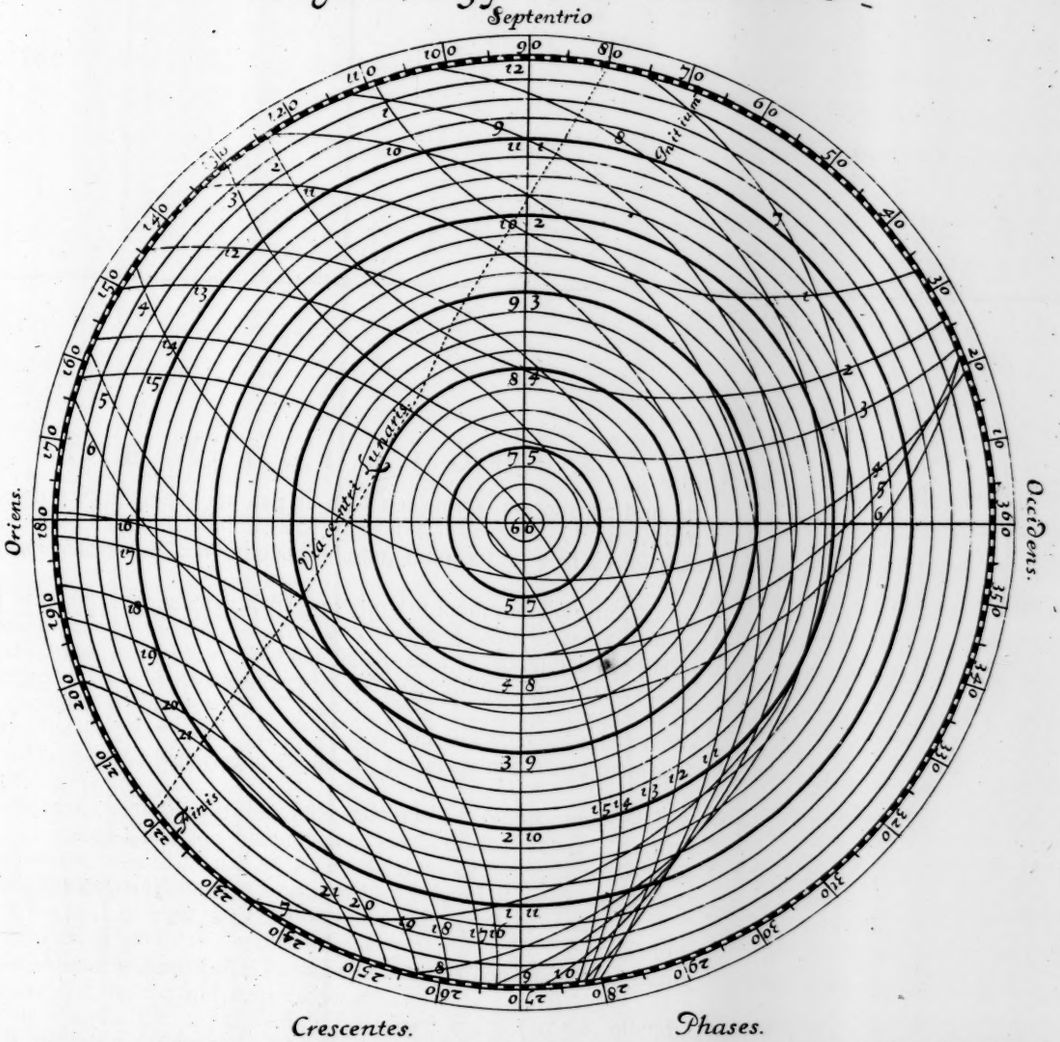
* *Paulo major quam in Typo.*

Speciales aliquot Phases ad analogiam Schematis Universalis.

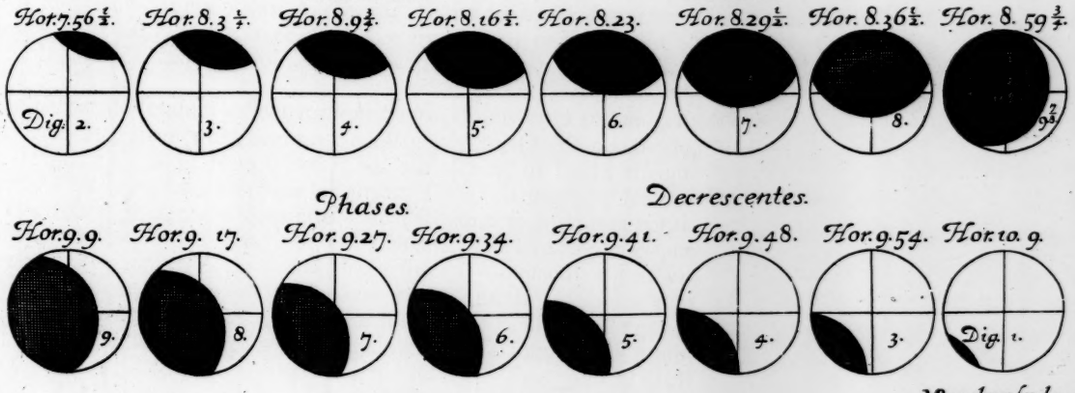
Crescentes			Decrescentes		
Initium.	Hor.	Min.		Hor.	Min.
	7.	45.	9 Dig.	9.	11.
1 Dig.	7.	51.	8 Dig.	9.	19 1/2.
2 Dig.	7.	57.	7 Dig.	9.	26 1/2.
3 Dig.	8.	3 1/2.	6 Dig.	9.	34.
4 Dig.	8.	10.	5 Dig.	9.	41.
5 Dig.	8.	16 1/2.	4 Dig.	9.	48.
6 Dig.	8.	23.	3 Dig.	9.	55.
7 Dig.	8.	29 1/2.	2 Dig.	10.	1 1/2.
8 Dig.	8.	36 1/2.	1 Dig.	10.	8.
9 Dig.	8.	45.	Finis.	10.	14.
10 Fere.	8.	58.			

F I N I S.

Typus Eclipseos Solaris, ut apparuit OXONII 2 Augusti, 1654. ante meridiem.



Crescentes. Phases. Decrescentes.



MBurghers sculp.

TRACTATUS DUO.

Prior,

DE CYCLOIDE

Et corporibus inde genitis.

Posterior, EPISTOLARIS;

In qua agitur,

DE CISSOIDE,

Et Corporibus inde genitis:

Et

DE CURVARUM,

Tum Linearum Εὐθυώσει, tum Superficierum Πλατυσμῷ.

Anno 1659 Editi.

Monitum ad Lectorem.

MOnendus eſt Lector, plurima eorum quæ de Cycloide habentur in hoc Tractatu (qui, propter Dettonvilii tractatum interea prodeuntem, relictus erat imperfectus) fuſius haberi, & plenius tradita (ſed alio ordine) in Tractatu (poſt plures annos edito) de *Mechanicis*, ſive de *Motu*. Quæ erant ibidem repetenda, ne Tractatus ille (ſeparatim editus) foret mutilatus.

Honorabili Doctiſſimoque Viro,

D. ROBERTO BOYLE

ARMIGERO,

Tum illuſtri Familia, Tum magnis Virtutibus Nobili.

QUUM, *Scientiam nullos habituram inimicos, præter ignorantes, jam olim ſit ſcitiſſimum: Nemo, credo, aut inique aut imprudenter à me factum exiſtimabit, quod Scientiſſimum Virum opuſculo huic noſtro patronum advocaverim. Qui præter tuam in Theologicis tum cognitionem tum praxin; atque in Linguis, tum ſacris, antiquiſque, tum modernis etiam peritiam; in Politicis item, & negotiis publicis, & rerum & perſonarum, domi peregreque, intimam notitiam;*

Qui mores hominum multorum nôris & urbes:

In Phyſicis etiam, & veræ Philoſophiæ venatione, ita perpetuis & ſubtiliſſimis Experimentis, Medicis, Chymicis, Anatomicis, aliiſque omne genus, Naturam quaſi ferro & igne proſequeris, (nedum per omnes ſubtiliorum in quacunque arte Opificum officinas,) in ſecretos abditiſſimoſque ſequeris receſſus, & quaſi in viſcera penetras; ut mirum ni tibi tandem ſe in prædam dedat. Quique Naturam, tanquam equuleo impoſitam, ſevera ſaltem, ne crudeli dicam, quæſtione, torquendo vexas & retorquendo, quo verum tandem faſſa ſecreta pandat omnia: idem, in Matheſi, Æquationes Analyticas (Equuleum Mathematicum) verſas; quo vix ſubtilius aliud inſtrumentum abdita perquirendi, aut extricandi involuta.

Quanquam enim tam perſpicacis ingenii Virum, atque ſubacti judicii, reformidare debere videar, qui de noſtris ſententiam feras; ut qui, vel leviora παραράματα aut ἀκυρίας, vel ἀμεθοδίας etiam, ſi qua deviatum eſt, potis es dignoſcere; Tu tamen, qui cætera noris, etiam noris quam in feſtino ſcripto multa ſint condonanda, quamque omnino arduum ſit, omnem unguis critici ſcalpturam devitare.

Invenies autem, ex ſubtiliſſimis præſentis ſeculi inventis, ſi non omnia, præcipua ſaltem, vel ex profeſſo tradita, vel obiter inſinuata: Eaque, utut non nova omnia, aut nulli hactenus reperta, at novis ſaltem demonſtrationibus ornata, & methodis noſtris accommodata. Et quidem ab aliis nonnulla per longiores ambages & particulatim inventa, mirabere forſan tam facile ex principiis noſtris, & univerſaliter traditis, ſimplicius & ſponte fluere.

Tu vero, ut ſoles, & doctis favere pergas, & ſtudia promovere: nec averſeris interim,

VIR NOBILISSIME,

Tui obſervantiſſimum

& amantiſſimum,

JOHANNEM WALLIS.

PRÆFATIO.

QUO, quid in ſequentibus agatur, rectius perſentiſcat Lector, quaque anſa data hæc fuerim meditatus; præviam hanc totius rei geſtæ, quatenus ea me ſpectet, narrationem præmittere viſum eſt, quæque ad id operis me impulerunt cauſas breviter aperire. Cum Illuſtriſſimi Equitis Digbæi *literis (Julii 17, 1658, Pariſiis datis) duas ſimul incluſas chartulas, pridie Cal. Auguſti, ſtylo noſtro, hoc eſt Aug. 10. ſtylo novo, Oxonii accepi. Quarum prior, hæc continebat Problemata; (Pariſiis, quod audio, ineunte menſe Junio primum divulgata)*

Dato, in Cycloide quacunque A B C D fig. 1. quolibet puncto Z, ex quo ducta Z Y recta, baſi A D parallela, axem C F in puncto Y ſecet: Quæruntur;

Dimenſio ſpatii C Z Y; Ejuſque centrum gravitatis:

Solidaque ex ejuſdem C Z Y converſione, tum circa Z Y, tum circa C Y, genita; & horum Solidorum Centra gravitatis.

Quod ſi eadem ſolida, tum quod circa Z Y, tum quod circa C Y, plano per axem biſariam ſecentur: Horum item ſemiſolidorum quæruntur centra gravitatis.

Quorum quidem Problematum ſolutionem, à præſtantiſſimis toto orbe Geometris, ſupplex poſtulat *Anonymus, propoſito ſimul* præmio *in hæc verba*, Quiſquis ſuperius propoſita, intra primam diem Menſis Octobris anni 1658 ſolverit & demonſtraverit, magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem conſequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hiſpanicorum, quos ipſi Hiſpani *Dublones*, & Galli *Piſtolles* vocant: Secundus vero viginti ejuſmodi duplos aureos: Si unus tantum ſolverit, ſexaginta ſolus habebit.

Charta poſterior, indicat; Per [Cycloidem quamcunque] non aliam ab ipſo intelligi, quam Cycloidem primariam à Toricellio deſcriptam; cujus nempe Baſis perimetro circuli generantis æquatur; *Seque* rationem quam habet Baſis Cycloidis ad altitudinem, ſive ad diametrum circuli generantis, pro data reputare: *Remittit denique nonnihil de propoſitionum præcedentium rigore, nempe* multorum caſuum calculum, & abſolutam ſolutionum conſcriptionem; *Adeoque his tandem verbis conditiones ſuas exponit*, Qui publico Inſtrumento, intra præſtitutum tempus, Illuſtriſſimo D. de Carcavi ſignificaverit, eorum quæ quæſita ſunt demonſtrationem penes ſe habere; & aut ipſammet demonſtrationem quantumvis compendioſam ad ipſum miſerit; aut ſi chartæ mandare nondum per otium licuerit, ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem, caſus quem mox deſignabimus calculum dederit; ſeque paratum eſſe profeſſus fuerit omnia omnino demonſtrare ad ipſius D. de Carcavi nutum, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus: Et conſentimus, primum qui hæc fecerit primo, ſecundum ſecundo, præmio donandum, ſi ſua ſolutio ab ipſo D. de Carcavi viriſque ad id ſecum adhibitis, cum ipſi viſum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur: Salvo ſemper erroris calculo, (*lege*, errore calculi.) Caſus autem cujus ſolius ſufficiet calculus ille eſt. Si ſemicyclois A C F circa baſin A F convertatur, & ſolidum inde genitum ſecetur plano per ipſam A F (quæ jam hujus ſolidi axis eſt) ducto, quod quidem ſolidum dividet in duo ſemiſolida paria. Alterius horum ſemiſolidorum centrum gravitatis aſſignari poſtulamus.

His acceptis literis cum inde perſpexerim Illuſtriſſimo Equiti in votis eſſe, ut ego huic me inquiſitioni accingerem; id ſtatim feci, non tam expoſito præmio (quod quidem ad pompam facere viſum eſt) quam Illuſtriſſimi Equitis deſiderio inductus. Videbam autem non parum temporis propoſiti (mediam ſaltem partem) jam effluxiſſe: Et quidem (quod intellexi poſtea) non exiguum etiam à calce amputandum erat; quantum ſaltem exſcribendis, tranſmittendis & tradendis literis ſufficiat: (*Quod enim in charta prima dictum eſt*, qui intra primam diem Octobris ſolverit & demonſtraverit; *id in ſecunda ſonat*, qui publico Inſtrumento, intra præſtitutum tempus D. Carcavio ſignificaverit; *quod tandem exponunt Paſcalii ad Wrennum literæ*, ſi intra dictum tempus Carcavius id acceperit.) *In*

anguſtias

angustias itaque temporis conjectus eram; (*& quantas quidem tam perplexæ disquisitioni vix sufficere vel author ipse judicabit*;) *Præsertim cum rudis ego ad id operis accesserim, quod ipsum, & Gallos suos, jam per viginti annos & ultra, neaum quadraginta, exercuit*: (*neque enim ego de Cycloide quidpiam ante meditatus eram quam his Problematis fuerim excitatus.*) *Quod itaque temporis angustiæ postulabant, nec abnuebant oblatæ conditiones, rem ego summatim aperiendam duxi: adeoque literis Aug.* 19. *Oxonii datis, paragraphis* 55, (*eisdem fere verbis cum totidem tractatus insequentis primoribus,*) *ad D. Carcavium amandabam*; *quibus totius methodi summa continetur*: *reservata mihi, quam & oblatæ conditiones patiuntur, libertate, lapsus* (*si qui forte fuerint*) *emendandi.* (*Non enim tam ipsum calculum quam calculi methodum tum exponere satagebam.*) *Et quoniam* Instrumenti publici *mentionem factam videram, quamquam quid illæ voces ibidem innuebant non satis perspiciebam, ne tamen & hac ex parte quidquam deficeret,* Notarii publici *subscriptione rem confirmandam curabam.*

Has meas literas, ad D. Carcavium 10 *Septemb. pervenisse intelligo*; *vel saltem* (*eo absente*) *ad ipsum Pascalium*: *qui tum ea Problemata, quod jam intelligimus, Anonymus proposuerat, tum D. Carcavio permittente aliorum scripta literasque ad eum ea de re datas accepit & perlustravit, id enim in suis ad D. Wren literis* 13 *Sept. datis innuit, his verbis.* Absentia communis amici nostri D. de Carcavi qui tuas ad me misit Epistolas, causa est cur non ille sed ego quamvis ignotus audeam respondere. *Et tandem* (*post alia multa*) Unum tibi, *inquit,* dicere habeo, scilicet hic receptas esse ab eximio ex vestris Geometra epistolas in quibus omnium quæ de Cycloide problematum sunt propositæ solutionem tradit. Et ipsi suum ordinem religiose servandum ab illa die scilicet quo recepta fuerunt, nempe à decimo die hujus mensis stilo novo. Sic enim habetur intentio Anonymi proponentis, ut qua die D. de Carcavi excipit solutionem alicujus eo die ordo ejus sumatur. Et quidem conformius fuisset Anonymi ipsius intentioni ut per Notarios Parisienses attestatio facta fuisset quam per Oxonienses. Parisienses enim fidem facerent receptionis D. de Carcavi, unde ordo sumitur; Oxonienses vero nihil ad hoc facere possunt. (*Tanta siquidem solennitate res transigenda erat! Quasi quidem nesciverit Carcavius, sine Notariorum plurium Publicorum testimonio, se accepisse*; *vel etiam quo die acceperit.*) *Ne autem isthæc non satis intelligantur*; *Ad ea verba impressæ chartulæ posterioris.* Qui publico instrumento ante præstitutum tempus, Illustrissimo D. de Carcavi significaverit; *hanc adscriptam transmisit notam marginalem,* id est, per Notarios Parisienses, per extraneos enim nihil significari potest D. de Carcavi: Et in hoc est aliquantulum plus gratiæ in Gallos, quam in alios Geometras; sic autem voluit Anonymus, suæ legis dominus: Itaque quicquid ante Calendas Octob. ad D. de Carcavi mittetur, ordinem obtinebit, quod autem postea, non recipietur quamvis probaretur actum fuisse ante Calendas Octobris: significatio enim facta ad D. de Carcavi, seu ejus receptio, sola valet ad ordinem præmii. Et siquis è regione magis remota jam mittat solutionem actam ante 29 Augusti (qua die acta est solutio vestri dicti Geometræ;) ipsa quamvis prior, posterior habebitur, utpote posterius recepta. *Atque hæc sunt quæ ad D.* Wren *de me scripserat. De quibus mihi nihil quicquam contra disputare in animo est. Ad præmium enim quod attinet, de quo videtur ille admodum solicitus, id me omnium minime solicitum tenet. Rem ipsam quod spectat*; *Geometrarum illud judicio permittendum est. De Instrumento publico quod dicitur*: *putarim quidem ego, vel eo hoc opus esse ut D. Carcavio fidem faceret, quo tempore solutio quælibet alibi facta fuerit*; *vel non omnino opus esse*: *ut enim sibi se accepisse constet, vel quo die acceperit, quid Instrumento publico vel publicis notariis opus esset non videbam. Sed affigat quam velit mentem suis verbis, & de præmio quod lubet statuat, non repugno*; *Gallisque suis præ aliis favorem quem velit largiatur. Facti siquidem ego rem refero, non de jure litigaturus.*

Interea vero temporis, literis secundis 3 *Septemb. datis, minutiora quædam in literis præcedentibus contenta, partim explicabam partim immutabam* (*reservata tamen qua prius libertate,*) *adeoque in eundem plane statum quo jam habentur redigebam*: *Nisi quod, etiam tum, non satis attentus,* § 30. *falsos adhuc numeros apposueram*; (*& similiter* § 45.) *Illis utique numeris investigandis, trilineum* CzFA *fig.* 1. *hoc est* CFA *fig.* 7. (*qui facilis lapsus est*) *circa rectam* AF *converteram, quod circa*

CF *convertendum erat,* (*ut* § 77, *ubi calculus instituitur, videre est,*) *nempe ut habeatur aggregatum omnium* FY, *sive* ζZ *fig.* 7. *in* Zz *Arithmetice proportionales ductarum. Quam quidem oscitantiam ubi animadverterem* (*quodque unicum in jam traaitis emendavimus*) *ultimis tandem literis, eodem mense datis insinuabam*: superesse, *nempe,* in prioribus nonnihil immutandum, quod & ipsis, ni nondum ad examen redegerint, perspectum esse possit: cum autem ipsis adhuc plura videri forte possint supplenda, ad justam eorum demonstrationem quæ vel strictim insinuaverim, vel ut pro concessis habuerim, exspectaturum me *aicebam,* donec quid ipsis videretur intelligerem, ut eadem opera immutarem immutanda, supplenda supplerem, & supremam adjicerem manum. *Atque hæc quidem ego ipsorum conditionibus conformia esse duxi,* (*qui nonnisi* demonstrationem quantumvis compendiosam *peterent, vel ne hanc quidem, modo numeros uni casui accommodos quis exhiberet,*) *idque* salvo semper errore calculi: *modo saltem* (*quod in literis ad D.* Wren *additum est*) *parati simus reliqua exhibere ubi fuerimus à D. Carcavio ad hoc moniti.*

Lapsus autem ille quis fuerit quem emendaturus eram, speciatim literis illis non indicabam; quia jam mihi subolebat lupus in fabula. Conjiciebam enim ex literis ad D. *Wren scriptis,* (*me enim nullis hactenus dignati sunt,*) *Paschalium hunc cui* D. *Carcavius literas accipiendi, perlustrandi, eisque respondendi copiam feciße diceretur,* (*fortasse & sententiam ferendi num conditionibus satisfiat,*) *eundem esse qui hæc problemata Anonymus proposuerat. Cui cur ego mea ulterius aperirem non videbam. Accedebat, quod jam edoctus fueram, quocunque tempore quidpiam alibi factum fuisse constet, nisi id Parisiis ante indictum diem Carcavio tradatur,* (*quocunque id fato fiat,*) *non admittendum fore; adeoque cum non sperandum videbatur ut quicquid ego tum scriberem* (*exeunte Septembri*) *ante primum diem Octobris eo accederet; id saltem insinuare visum est, tum deprehendisse me errorem illum calculi, tum paratum esse vel illum emendare, vel etiam, quæ ultra desiderentur, ad eorum nutum supplere.*

Cum vero ego per aliquot menses, ut monitus eram, (*sive* D. *Carcavii, sive potius*) *Paschalii nutus expectaveram, quid ultra postularent, aut quid suppletum adhuc vellent; nec quicquam literarum acceperim,* (*licet literas meas ternas ad* D. *Paschalium rite fuisse traditas aliunde intelligam;*) *Tandem prodiit, quasi rei gestæ Narratio,* Histoire de la Roulette; *quam exeunte mense Novembri primum vidi. In qua, utut de solutionibus à me exhibitis* (*quod & de aliorum item evenisse conjicio*) *altum fuerit silentium; tamen etiam adhuc exspectandum insinuatum erat dum alii nescio qui a* D. *Carcavio ad id designati* (*siqui saltem designati,*) *judicium tulerint de scriptis sive nostris, sive & aliorum, quorum etiam nomina reticere voluit.*

Innuit quidem hæc historiola, Considerationem Cycloidis, Mersenno proponente, jam ab anno 1615 (*dum ego nondum natus eram*) *Gallos exercuisse; Robervallium vero anno* 1634 *demonstrasse primum,* Figuram Cycloidalem circuli genitoris triplam esse: *quod & post illum demonstrasse dicuntur Fermatius & Cartesius, sed quorum demonstrationes, præ illa Robervalli, extenuatum itur.* (*Eorum vero nemo, quod sciam, demonstrationem suam typis vulgari hactenus curavit.*) *Torricellius deinde, qui anno* 1644, *harum rerum nescius, vulgavit suas* (*omnium, credo, primus,*) *insimulatur plagii;* (*quam juste, nedum candide, non inquiro; postquam per complures annos sit demortuus;*) *non quod Robervallii demonstrationem pro sua venditaverit, sed quod* (*sic utique suspicantur*) *inter Galilæi schediasmata vidisse forte potuerit propositionis istius demonstrationem a* D. *Beaugrand ad Galilæum olim transmißam. Cui simile quid de Lalouera Jesuita videntur suspicari, qui eorum nonnulla protulerat quæ sibi peculiaria putaverit Robervallius. Fortassis etiam & nos ejusdem insimulandi, ubi viderit eadem & a nobis inveniri.* Inveniri, *inquam; non enim si se prius hæc sciviße contendat, utut id verum esse possit, nos ideo minus inveniße dicendi sumus, dummodo clam nobis sit quod ipse fecerit; qui nec vel scrinia ejus vel scripta compilavimus, nec ab illo quidquam fuimus edocti. Didiceram quidem a Toricellio,* (*a* Toricellio, *inquam, nam Robervalium de rebus hisce quidpiam meditatum esse, quæ mea erat infelicitas, ne per somnia cogitabam;*) *didiceram, inquam, ab illo, tum Cycloidis aream circuli triplam esse; tum Tangentes describendi methodum: Plura vero de Cycloide, quempiam excogitasse, nesciebam plane; ut &* (*quantum hactenus intelligo*) *nostri juxta mecum ignorabant*

omnes:

bimnes: Nec quidem ullo jure cenſendi ſumus cognoviſſe; cum illud omne quod ſe inveniſſe contendit, vel intra privata ſua ſcrinia recondidit, vel familiaribus ſaltem aliquot communicavit; in publicum certe (quantum mihi hactenus aſſequi licuit) nondum edidit.

Pergit deinde eadem hiſtoriola ediſſerere, quid Robervallius, quid author ipſe invenerit. (Se ſolos autem eadem inveniſſe, non dicent, credo.) Quid autem invenerint alii, ſubticuiſſe mirandum non eſt, cum palam profiteatur peculiarem ſe Gallis ſuis favorem exhibere voluiſſe. Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrennium noſtrum prodidiſſe, Portionem Cycloidis quam abſcindit recta ad axem ordinatim-applicata, ejuſdem axis partem quartam vertici proximam abſcindens, æqualem eſſe ſpatio rectilineo: (*Quod quidem verum eſt*; *æquat utique* $\frac{3}{8} R^2 \sqrt{3}$: *ut ex calculo* § 23 *liquet*; *uti & trilineum* C b B *fig.* 1. *vel* 7, *æquare* R^2 *quadratum radii*; *Et priſmatis oblique ſecti portionem, ſive momentum ejuſdem* C b B *trilinei reſpectu* c B, *æquare* R^3 *cubum radii*; *item ejuſmodi portionem, ſive momentum trilinei* B F C, *ſive reſpectu* c β, *ſive reſpectu* β F, *æquare* $2 R^3$, *duos cubos radii circuli generantis*: *quæ nos in ſequentibus demonſtravimus*:) *Eundemque Wrennium noſtrum* Cycloidis curvæ, ejuſque partibus, æquales rectas inveniſſe. *Atque hinc denique anſam deſumit novas proponendi quæſtiones,* De centro gravitatis tum lineæ curvæ Cycloidis, tum partium ejuſdem, deque ſuperficiebus ejuſdem curvæ tum converſione tum ſemiconverſione, tam circa baſem, quam circa axem, deſcriptis, & harum ſuperficierum centro gravitatis. *Nos autem (nullius nominis in narratione ſua) quid præſtitimus, patebit in ſequentibus.*

Exſpectandum autem aliquandiu videbatur (prout ſuperius inſinuatum diximus,) numquid aliquando nobis injunctum foret a Carcavio ad demonſtrationes noſtras ſummatim traditas pro libitu ſuo perficiendas. Atque interea quæſtiones de novo propoſitas ſolvebam, (quod quidem poſt ſolutas præcedentes non erat factu difficile.) Tandem vero, cum nihil prorſus acceperim, nec noverim quid ageretur; quæ ad ſolutiones meas qua priores, qua poſteriores, elucidandas, viſa ſunt neceſſaria, (quæ nempe poſt § 55 inſequuntur,) ſcholiorum inſtar ſubjunxi, eaque prout nunc ſunt ad D. *Vicecomitem Brounker Menſe Martio tranſmiſi: neque ex eo tempore quicquam innovandum putavi.*

Rem autem ipſam quod attinet; Id animo propoſitum habui, quam ſuccincte omnia, ſed & perſpicue proponere: Non tamen quæ ſubinde occurrunt Lemmata ſingula ſeorſim ſemper demonſtrare, (id enim ſi feciſſem, nimis increviſſet operis moles,) ſed ea ſaltem quæ videbantur obſcuriora; reliquorum fontes vel digito indicaſſe ſatis eſſe ratus. Sed & eadem non raro, variis in locis, variis etiam modis demonſtrata reperiantur. Nec eandem ſemper demonſtrandi methodum ſecutus ſum, ſed nunc ad morem veterum, nunc ex Geometria Indiviſibilium, nunc etiam & ex Infinitorum Arithmetica noſtra petitis demonſtrationibus. Non quidem quod illud neceſſe habui; ſed quoniam id Lectori, & magis utile, nec minus gratum fore credidi, quam eandem ſæpe cramben recoquere. Quod moneo, ne miretur forſan aliquis ſi in ſe quidem ſimilia, diſſimili nonnunquam demonſtrandi methodo probata videat. Non raro etiam a minutioribus nonnullis demonſtrandis conſulto abſtinui; nec ad ſingulos forſan caſus poſſibiles ubique deſcendi; ſatis id ratus, ſi viam demonſtrandi palam oſtenderim, ſingulos interim apices (ſi illud ἐργοδιῶκται poſtulent) paratus exhibere.

Atque hæc ſunt quæ Lectorem præmonendum putabam. Quæ quidem paulo fuſius expoſui, ut, qui ſupra-memoratas chartas non viderint, earum ſaltem ſummam, adeoque rei geſtæ narrationem, hinc intelligant; & cauſam ſimul cur hac methodo mea diſponantur, quæ ſecus alia forſan methodo rectius diſponenda eſſe, ſi res eſſet integra, exiſtimare poſſent.

Libet hic ſubjungere Anonymi duo ſcripta, ad me miſſa, quæ huc ſpectant.

SCRIPTO-

SCRIPTORUM PRIUS.

Cycloidis definitio ad finem hujus Scripti habetur.

CUM ab aliquot menſibus, quædam circa Cycloeidem ejuſque centra gravitatis meditaremur, In propoſitiones ſatis arduas ac difficiles, ut nobis viſum eſt, incidimus, quarum ſolutionem à præſtantiſſimis toto orbe Geometris ſupplices poſtulamus, propoſito ipſis præmio, non mercedis gratia, quod abſit, ſed in obſequii noſtri, aut potius meriti eorum qui hæc invenerint, publicum argumentum.

Quæ vero proponimus ſunt ejuſmodi.

Dato puncto quolibet Z in quacunque Cycloeide ABCD, ex quo ducta ſit ZY baſi AD parallela quæ axem CF ſecet in puncto Y. Quærimus.

Dimenſio ſpatii CZY. Ejuſdemque centrum gravitatis. Solida genita ex circumvolutione dicti ſpatii CZY, tam circa ZY quam circa CY. Et horum ſolidorum centra gravitatis.

Quod ſi eadem ſolida, plano per axem ducto ſecentur, & ſic fiant utrinque duo ſolida, duo ſcilicet ex ſolido circa baſem ZY, & duo ex ſolido circa axem CY genito. Cujuſque horum ſolidorum quærimus etiam centra gravitatis.

Quia vero quæſitorum demonſtratio forſan adeo prolixa evadet ut vix intra præſtitutum tempus exequi ſatis commode poſſit, genio & otio doctiſſimorum Geometrarum conſulentes, ab his tantum poſtulamus, ut demonſtrent, vel more antiquorum, vel certe per doctrinam indiviſibilium (hanc enim demonſtrandi viam amplectimur) omnia quæ quæſita ſunt, data eſſe: Ita ut facile ex demonſtratis, quælibet puncta quæſita ex datis in hypotheſibus poſſint inveniri.

Et ut apertius mentem meam explicem, nec ſublit aliquid ambiguum, exemplo rem illuſtro. Proponatur, verbi gratia, parabola ABC, cujus axis AB, baſis AC, tangens BD, parallela axi CD. Inveniendum centrum gravitatis trilinei DCB. Satisfactum eſſe problemati cenſerem, ſi demonſtretur, datum eſſe centrum gravitatis parabolæ ABC, nec non & centrum gravitatis rectanguli CDBA, & proportionem hujus rectanguli cum parabola CBA, ideoque & datum eſſe centrum gravitatis quæſitum trilinei CDB; nam etſi præciſe punctum in quo reperitur centrum gravitatis non exhibeatur, demonſtratum tamen eſt datum eſſe, cum ea ex quibus invenitur data ſint; reſque eo deducta erit ut nihil aliud ſuperſit præter calculum, in quo nec vis ingenii, nec peritia artificis requiruntur, ideoque non is à nobis calculus exigitur; cur enim in iis immoraremur? ſed tantummodo petimus demonſtrari, res quæ proponuntur datas eſſe.

Verum doctiſſimi Geometræ, prorſus neceſſarium judicabunt & ab his poſtulamus, duarum propoſitionum, vel duorum caſuum integram conſtructionem, ſeu integrum calculum.

Primus caſus eſt, cum punctum Z conſtituitur in A.

Secundus cum idem punctum Z datur in B, in quod tranſit parallela GB ducta à puncto G centro circuli genitoris Cycloeidis.

Quod ſi aliquis error calculi in his duobus caſibus ſubrepſerit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipſi peteremus facile promerebuntur.

Quiſquis ſuperius propoſita, intra primam diem menſis Octobris anni 1658. ſolverit & demonſtraverit, magnus erit nobis Apollo.

Et primus quidem conſequetur valorem quadraginta duplorum aureorum hiſpanicorum quos ipſi Hiſpani *doblones* & galli *piſtolles* vocant, vel certe, ſi mavult, ipſos duplos aureos.

Secundus vero viginti ejuſmodi duplos aureos. Si unus tantum ſolverit, ſexaginta ſolus habebit.

Et quia ſerio rem agimus, dictos sexaginta duplos aureos Illuſtriſſimo Domino de Carcavy Regio Conſiliario Pariſiis commoranti, apud Celſiſſimum dominum ducem de Liencourt deponi curavimus, qui eos exſolvet ſtatim ac demonſtrationes quæ ad ipſum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipſo ad id deputatis judicabuntur. Et cum Illuſtriſſimum conſiliarium, jam à multis annis virum probum, & matheſeos amantiſſimum, agnoverimus, audacter pollicemur rem ſincere & abſque fallacia exequendam.

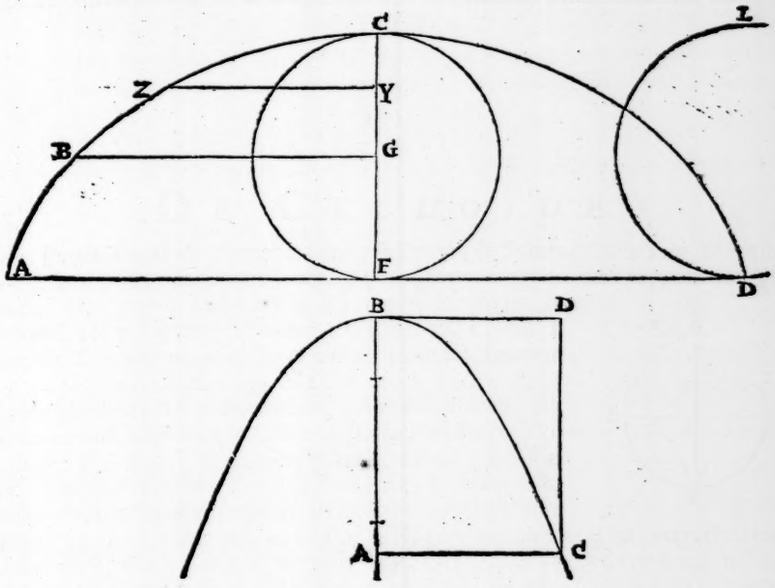
Quod ſi his circiter tribus elapſis menſibus nullus inveniatur qui quæſita noſtra

noſtra ſolverit, non denegabimus quæ ipſi invenimus, nec aliis invidebimus unde majora jam inventis nanciſcantur, & ex quibus forſan apud poſteros gratiam inibimus.

Hoc unum reſtat ut lineæ Cycloidis deſcriptionem exhibeamus, à qua brevitatis cauſa abſtinendum arbitrabamur, cum hæc linea jampridem Galileo, Toricellio, & aliis innotuerit, ſed quia eorum libri omnibus non ſunt obnoxii, ideo hanc ex Toricellio damus.

Deſcriptio Cycloidis.

Concipiatur ſuper manente recta linea AD, circulus DL contingens rectam DA in puncto D. noteturque punctum D tanquam fixum in peripheria circuli DL: tum intelligatur ſuper manente recta DA converti circulum DL motu circulari ſimul & progreſſivo verſus partes A, ita ut ſubinde aliquo ſui puncto rectam lineam AD ſemper contingat, quouſque fixum punctum D iterum ad contactum revertatur, puta in A. Certum eſt quod punctum D fixum in peripheria circuli rotantis AC, aliquam lineam deſcribet, ſurgentem primo à ſubjecta linea AD, deinde culminantem verſus C, poſtremo pronam deſcendentemque verſus punctum A. Et talis linea vocata eſt Cyclois.



SCRIPTORUM POSTERIUS.

CUM circa ea quæ de Cycloide propoſuimus duo orta eſſe dubia, nobis Illuſtriſſimus D. D. De Carcavy ſignificaverit, his ſtatim occurrendum duximus, & ita occurrimus.

Prius inde oritur, quod in proponendis noſtris de Cycloide problematis hac voce uſi fuerimus, *in quacunque Cycloide*, cum tamen unius tantum ſpeciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verum nihil aliud intelleximus præter ſolam illam ſimplicem naturalem ac primariam Cycloidem cujus ex Toricellio deſcriptionem dedimus, cum enim quæ de illa reſolvuntur facile ſit ad omnes alias ſpecies protrahere, qui noſtra problemata de hac ſola ſolverit, nobis omnino ſatisfecerit.

Posterius in eo consistit, quod à nobis non sit præcise positum an supponamus datam esse rationem basis Cycloidis A F, cum sua altitudine, seu cum diametro circuli genitoris F C. Sed ipsam datam esse rationem pro concesso usurpandum arbitrabamur, & ut omnino æquum est datam esse supponimus.

Nihil ergo jam supereſt obscuritatis. Unum tamen restare videtur ut doctissimos geometras ad propositiones nostras commodius & libentius investigandas invitemus: scilicet ea omnia removere quæ à perspicacitate ingenii, quam solam magni facimus & explorare ac coronare instituimus, sunt aliena, qualia sunt tam calculus integer multorum casuum quem postulabamus, quam absoluta solutionum conscriptio, cum ea non à viribus ingenii, sed ab aliis circumstantiis pendeant. Hoc itaque tantummodo jam instituimus ut sola problematum difficultas remaneat superanda. Nempe

Qui publico instrumento, intra præstitutum tempus, Illustrissimo Domino *de Carcavi* significaverit, eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere; & aut ipsammet demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit; aut si cartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit; seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. *de Carcavi* nutum, hunc nobis satisfeciſſe declaramus, & consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo, præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. *de Carcavi* virisque, ad id secum adhibitis, cum ipsi visum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur, salvo semper erroris calculo.

Casus autem cujus solius sufficiet calculus ille est. Si Semicyclois A C F circa basim AF convertatur, & Solidum inde genitum secetur plano per ipsam A F (quæ jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem, solidum dividet in duo Semisolida paria. Alterutrius horum Semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

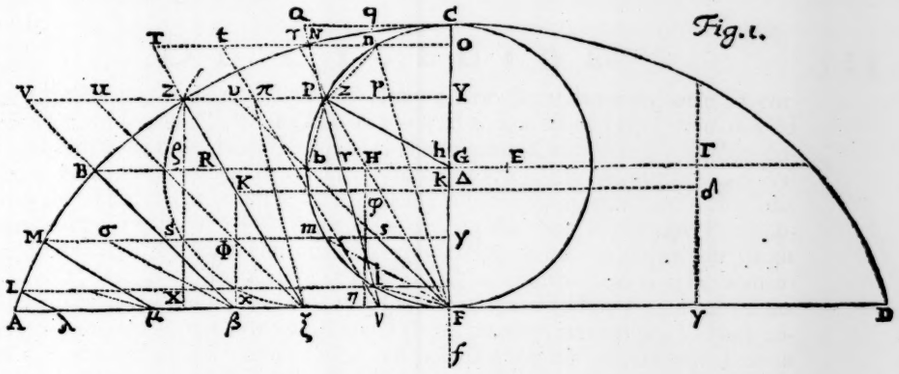
DE CYCLOIDE ET CORPORIBUS

Inde genitis, Problematum Solutio.

PARS PRIOR.

§1. MAnifeſtum eſt, in conſtructione Cycloidis, Peripheriam Circuli generantis, propter continuam ſui quæ ſupponitur ad rectam D A applicationem, huic æqualem eſſe: Adeoque & ſemiſſem ſemiſſi, &c. *Recta Z r.*

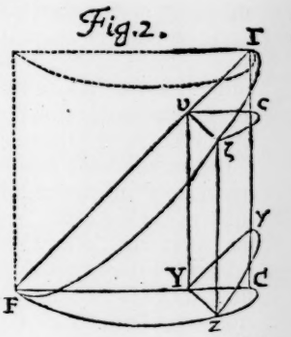
2. Et quidem, particulatim, dum Circulus Genitor, baſin in ζ contingens,



puncto ſuo lineante deſignat Cycloidis punctum Z, manifeſtum eſt (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) rectam ζ A congruere curvæ ζ Z, hoc eſt (ducta Z z baſi parallela, quæ occurrat in z circulo C z F circa Cycloidis axem) curvæ F z: Adeoque & reliquam reliquæ: nempe ζ F, hoc eſt Z z, ipſi z C. Et ſic ubique.

3. Recta igitur Z Y æquat ubique aggregatum Arcus & Sinus recti, Sinui verſo C Y convenientium.

4. Si ſuper circulo C z F circa Cycloidis Axem conſtituto, aut huic æquali, erigatur Cylindrus rectus F z C r, altitudinem habens C r, diametro Baſis æqualem: Tota ſuperficies hujus Cylindri (cum baſibus) eſt dupla Cycloidis A C D F; (nempe duæ baſes Cylindri fig. 2. ſunt duplæ circuli C z F fig. 1. & Cylindrica ſuperficies curva, dupla reliquorum ſegmentorum:) Atque ſi eadem ſuperficies (*ſuperficies*, inquam; non Cylindrus, ne novæ ſuperficies ſecando emergant) plano F C r per axem biſecetur: Semiſuperficies Cylindri erit dupla Semicycloidis A F C; (nempe duæ ſemibaſes, ſunt duplæ ſemicirculi C z F fig. 1; & Semicylindrica ſu-



Semicyclois.

perficies

perficies curva, dupla trilinei C A F z :) Et denique si ea Semisuperficies bisecetur adhuc plano elliptico F ζ r υ quod plano F C r rectum sit ; Semisuperficiei illius semissis r ζ F z C Y F æquabit Semicycloidem C A F ; (nempe Semicirculus basis C z F fig. 2. æquabit Semicirculum C z F fig. 1. & superficies curva r ζ F z C r æquabit trilineum C A F z.)

5. Nam, sumpto ubivis in Cycloidis axe puncto Y, unde parallela basi ducatur Y z Z : rectæ C Y in axe Cycloidis sumatur C Y æqualis in diametro basis Cylindricæ, unde ducatur Y υ lateri C r parallela, diagonali F r occurrens in υ ; & per punctum υ, plano basi F z C parallelo, puta υ ζ c, secetur superficies Cylindrica sectionem exhibens ζ c arcum circuli, quæ (propter parallelas) congruet arcui z C in base Cylindri, hoc est arcui z C circuli genitoris, adeoque z Z rectæ æqualis, (sicut υ ζ congruit rectæ Y z sive in base Cylindri sive in circulo generante.) Quod cum ubique fiat, erunt omnes curvæ in superficie Cylindrica r ζ F z C r, ipsi ζ c parallelæ, æquales rectis omnibus ipsi z Z parallelis in Trilineo Cycloidis C A F z, & singulæ singulis, & similiter positæ (in eisdem puta sive à base sive à vertice distantiis :) Adeoque, propter æqualem etiam utriusque figuræ altitudinem, figura figuræ æqualis : superficies Cylindrica, plano Trilineo ; (sed & segmenta illius respectivis segmentis hujus, ut patet :) Et si addantur utrobique æquales Semicirculi C z F, erit aggregatum aggregato æquale, & duplum duplo, quadruplum quadruplo, &c. Hoc est, superficies r ζ F z C Y F, Semicycloidi A C F ; & Semisuperficies Cylindri (quippe istius dupla) Cycloidi A C D F ; & tota superficies, hujus dupla. Quod erat propositum.

Cyclois Circuli tripla.

6. Est igitur Cyclois A C D F, circuli genitoris tripla. Quod sic colligitur. Cylindri integri modo expositi superficies curva, æquatur facto ex altitudine (quæ æqualis est diametro Basis) in basis Circumferentiam ; adeoque est quadrupla Circuli basis : Cui si basis utraque adjiciatur, aggregatum erit, baseos (hoc est circuli genitoris) sextuplum. Est autem, ut supra ostensum est, duplum Cycloidis : Ergo Cyclois ipsa est circuli Genitoris Tripla. Nempe Trilineum C A F z Semicirculi C z F duplum.

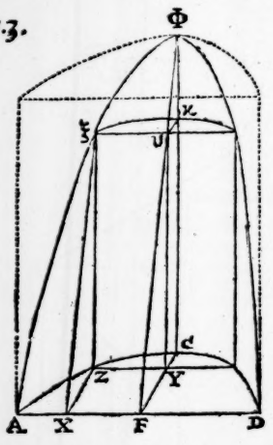
Segmentum CYZ.

7. Porro, si exposita quæ prius superficies (nempe Semisuperficei Cylindricæ semissis) r ζ F z C Y F, secetur adhuc plano z γ Y, quod sit plano elliptico F ζ r υ parallelum : Superficies abscissa γ z C Y z, æquabit segmentum Cycloidis C Y Z. Nam, propter Cylindricæ superficiei sectiones parallelas, congruet γ z C ipsi r ζ c, hoc est Trilineo C z Z Cycloidis ; sed & C Y z utrobique æqualis ; Ergo aggregatum aggregato æquale.

Solidum axis AD.

8. Si super Cycloide A C D erigatur Semicylindrus rectus, sive Prisma, (utrovis enim nomine dicatur perinde est) altitudinem habens C Φ duplam rectæ A D ; quod per axem secet F C Φ planum, sectionem in latere faciens C Φ rectam ; cui plano intelligatur planum aliud recte insistens, per rectam F Φ transiens, solidum abscindere D A Φ C D : Huic solido æquatur solidum factum ex conversione Cycloidis A C D circa rectam A D. Cum enim sit A D æqualis peripheriæ diametri F C ; erit ipsius dupla C Φ, æqualis peripheriæ Semidiametri F C ; adeoque (propter angulum F C Φ rectum) triangulum F C Φ æquatur circulo ex conversione radii F C facto. Et similiter ostendetur triangulum X Z ξ æquale circulo radii X Z : & sic ubique. Ergo omnia Triangula omnibus circulis, adeoque solidum solido æquatur, & segmenta segmentis respective sumptis : Puta, solidum X Z ξ A, solido ex conversione plani X Z A facto ; & sic ubique : Item Prisma X Z ξ υ Y F solido ex conversione Parallelogrammi X Z Y F ; adeoque & solidum Z Y C Φ υ ξ solido Cylindrice excavato conversione plani Z Y C circa rectam A F facto. Sin adhuc secetur plano ξ υ κ basi parallelo, segmentum Φ ξ υ κ æquabitur solido ex conversione plani Z Y C circa rectam Z Y facto. Nam & hic eodem modo ostendetur, triangulum υ κ Φ æquale circulo radii υ κ ; & de reliquis similiter.

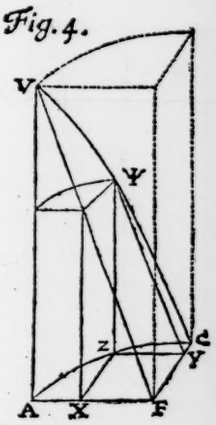
Fig. 3.



9. Simili-

9. Similiter, ſi ſuper Semicycloide A F C erigatur Priſma, ſive Cylindri recti quadrans, altitudinem habens A V, quæ ſit ad A F, ut 4 A F ad F C; (nempe ut circuli Perimeter ad Radium;) ſecetur autem plano F C V: Solido F V C Z A æquatur ſolidum ex converſione plani F C Z A circa rectam F C; & ſegmenta ſegmentis reſpective ſumptis; puta ſegmentum Y Z ϒ C ſegmento converſione plani Z C Y facto. Nam & hic triangulum F A V æquatur circulo radii F A; & Triangulum Y Z ϒ circulo radii Y Z: Et ſic ubique.

Fig. 4.



Solidum axis F C.

10. Atque hactenus quidem utut tum planorum tum ſolidorum omnium expoſitorum dimenſionem aliquatenus hac methodo tradidiſſe videamur: Cum tamen de Gravitatis Centris nihil hinc conſtet, libet in ſequentibus, reſumpto iterum toto negotio, rem aliter expedire, hoc modo.

11. Ut ſupra oſtendimus rectam z Z fig. 1. æqualem arcui z C: ita oſtendetur, angulum Z ζ A, hoc eſt z F A, arcui Z ζ ſive z F, hoc eſt rectæ A ζ, proportionalem eſſe: (nempe, ut arcus F z, hoc eſt A ζ recta, ad arcum F z C, hoc eſt rectam A F, ſic eſſe angulum Z ζ A vel z F A, ad C F A rectum:) propter angulum z G F anguli z F A ubique duplum, & propterea utrumque arcui F z ubique proportionalem. *Angulus Z ζ A.* Fig. 1.

12. Adeoque, diviſa recta A F in partes quotlibet æquales, in punctis λ, μ, β, ζ, &c. ductiſque rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. à puncto contactus ad punctum lineans, (quibus parallelæ exiſtunt in circulo F l, F m, F b, F z, &c.) anguli L λ A, M μ A, B β A, Z ζ A, &c. ſunt Arithmetice-proportionales; quorum continuus excellus primo æqualis eſt, nempe angulo L λ A.

13. Ductis itaque tum in Cycloide rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. tum ipſis reſpondentibus in circulo F l, F m, F b, F z, &c. diſtribuentur Semicyclois & Semicirculus in ſegmenta numero æqualia; ſingula ſingulis (reſpective) correſpondentia.

14. Ductis item in Cycloide, à punctis ν, ζ, β, &c. rectis ν π, ζ ρ, β σ, &c. quæ parallelæ ſint rectis ζ Z, β B, μ M, &c. Erunt anguli omnes N ν π, Z ζ ρ, B β σ, &c. æquales tum inter ſe, tum angulo L λ A, tum etiam cuilibet angulorum A F l, l F m, m F b, &c. qui item (propter æquales arcus F l, l m, m b, &c.) ſunt inter ſe æquales.

15. Ductis porro tum in Cycloide rectis N O, Z P, B R, &c. tum in circulo n O, z p, b r; &c. inſcribatur tum Cycloidi figura ex Trapeziis, tum circulo figura ex Triangulis correſpondentibus conſtans.

16. Erunt autem illa Trapezia, Triangulorum horum reſpective ſumptorum, ubique pluſquam tripla. Conſtat enim quodlibet Trapeziorum, ex Triangulo ſimul & Parallelogrammo: quorum illud, triangulo correſpondenti in circulo (ut ex dictis facile colligitur) ubique æquale eſt; hoc illius (ut jam oſtendetur) pluſquam duplum.

17. Nam, verbi gratia, in Trapezio O N ν F, Triangulum O n F eſt utrique figuræ commune; & Parallelogrammum N n F ν (æqualtum) pluſquam duplum Trianguli, propter rectam N n, hoc eſt curvam n C, majorem n O recta.

18. Sin aliud ſumatur Trapezium, puta P Z ζ ν; Erit inibi Triangulum P ν π, Triangulo p F z æquale; & Parallelogrammum Z ζ ν π pluſquam duplum, propter rectam Z π, hoc eſt, ζ ν, hoc eſt curvam z n, majorem quam z p, vel π P. Nam ſi aptetur chorda z n; erit angulus p F Y (propter tum ſemiperipheriam C z F, tum angulum rectum C F A, in ſex partes æquales diviſum) $\frac{1}{6}$ anguli recti; adeoque angulus Y p F, hoc eſt z p n, $\frac{2}{3}$ recti; cui ſi addatur angulus n z p, qui eſt $\frac{2}{3}$ recti, (ſubtendit utique duplo arcus z C, minus z n;) aggregatum $\frac{8}{6}$ recti ex 2 rectis ſubductum, relinquet angulum z n p, $\frac{4}{6}$ recti. Major itaque eſt angulus z p n angulo z n p, (nempe ut 5 ad 4,) adeoque latus oppoſitum z n recta, major quam z p; ideoque à fortiori, z n curva, hoc eſt recta Z π, multo major erit quam recta z p, hoc eſt π P. Et ſimiliter oſtendetur (inſcripta chorda b z) angulum b r z majorem eſſe angulo b z r, (nempe ut 4 ad 3,) & ſic alibi. Nempe, univerſaliter,

perficies curva, dupla trilinei C A F z :) Et denique ſi ea Semiſuperficies biſecetur adhuc plano elliptico F ζ r υ quod plano F C r rectum ſit ; Semiſuperficiei illius ſemiſſis r ζ F z C Y F æquabit Semicycloidem C A F ; (nempe Semicirculus baſis C z F fig. 2. æquabit Semicirculum C z F fig. 1. & ſuperficies curva r ζ F z C r æquabit trilineum C A F z.)

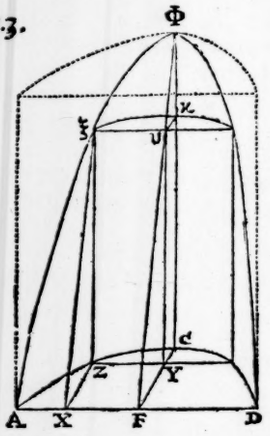
5. Nam, ſumpto ubivis in Cycloidis axe puncto Y, unde parallela baſi ducatur Y z Z : rectæ C Y in axe Cycloidis ſumatur C Y æqualis in diametro baſis Cylindricæ, unde ducatur Y υ lateri C r parallela, diagonali F r occurrens in υ; & per punctum υ, plano baſi F z C parallelo, puta υ ζ c, ſecetur ſuperficies Cylindrica ſectionem exhibens ζ c arcum circuli, quæ (propter parallelas) congruet arcui z C in baſe Cylindri, hoc eſt arcui z C circuli genitoris, adeoque z Z rectæ æqualis, (ſicut υ ζ congruit rectæ Y z ſive in baſe Cylindri ſive in circulo generante.) Quod cum ubique fiat, erunt omnes curvæ in ſuperficie Cylindrica r ζ F z C r, ipſi ζ c parallelæ, æquales rectis omnibus ipſi z Z parallelis in Trilineo Cycloidis C A F z, & ſingulæ ſingulis, & ſimiliter poſitæ (in eiſdem puta ſive à baſe ſive à vertice diſtantiis:) Adeoque, propter æqualem etiam utriuſque figuræ altitudinem, figura figuræ æqualis : ſuperficies Cylindrica, plano Trilineo ; (ſed & ſegmenta illius reſpectivis ſegmentis hujus, ut patet :) Et ſi addantur utrobique æquales Semicirculi C z F, erit aggregatum aggregato æquale, & duplum duplo, quadruplum quadruplo, &c. Hoc eſt, ſuperficies r ζ F z C Y F, Semicycloidi A C F ; & Semiſuperficies Cylindri (quippe iſtius dupla) Cycloidi A C D F ; & tota ſuperficies, hujus dupla. Quod erat propoſitum.

Cyclois Circuli tripla. 6. Eſt igitur Cyclois A C D F, circuli genitoris tripla. Quod ſic colligitur. Cylindri integri modo expoſiti ſuperficies curva, æquatur facto ex altitudine (quæ æqualis eſt diametro Baſis) in baſis Circumferentiam ; adeoque eſt quadrupla Circuli baſis : Cui ſi baſis utraque adjiciatur, aggregatum erit, baſeos (hoc eſt circuli genitoris) ſextuplum. Eſt autem, ut ſupra oſtenſum eſt, duplum Cycloidis : Ergo Cyclois ipſa eſt circuli Genitoris Tripla. Nempe Trilineum C A F z Semicirculi C z F duplum.

Segmentum CYZ. 7. Porro, ſi expoſita quæ prius ſuperficies (nempe Semiſuperficei Cylindricæ ſemiſſis) r ζ F z C Y F, ſecetur adhuc plano z γ Y, quod ſit plano elliptico F ζ r υ parallelum : Superficies abſciſſa γ z C Y z, æquabit ſegmentum Cycloidis C Y Z. Nam, propter Cylindricæ ſuperficiei ſectiones parallelas, congruet γ z C ipſi r ζ c, hoc eſt Trilineo C z Z Cycloidis ; ſed & C Y z utrobique æqualis ; Ergo aggregatum aggregato æquale.

Solidum axis AD. 8. Si ſuper Cycloide A C D erigatur Semicylindrus rectus, ſive Priſma, (utrovis enim nomine dicatur perinde eſt) altitudinem habens C Φ duplam rectæ A D ; quod per axem ſecet F C Φ planum, ſectionem in latere faciens C Φ rectam ; cui plano intelligatur planum aliud recte inſiſtens, per rectam F Φ tranſiens, ſolidum abſcindere D A Φ C D : Huic ſolido æquatur ſolidum factum ex converſione Cycloidis A C D circa rectam A D. Cum enim ſit A D æqualis peripheriæ diametri F C ; erit ipſius dupla C Φ, æqualis peripheriæ Semidiametri F C ; adeoque (propter angulum F C Φ rectum) triangulum F C Φ æquatur circulo ex converſione radii F C facto. Et ſimiliter oſtendetur triangulum X Z ξ æquale circulo radii X Z : & ſic ubique. Ergo omnia Triangula omnibus circulis, adeoque ſolidum ſolido æquatur, & ſegmenta ſegmentis reſpective ſumptis : Puta, ſolidum X Z ξ A, ſolido ex converſione plani X Z A facto ; & ſic ubique : Item Priſma X Z ξ υ Y F ſolido ex converſione Parallelogrammi X Z Y F ; adeoque & ſolidum Z Y C Φ υ ξ ſolido Cylindrice excavato converſione plani Z Y C circa rectam A F facto. Sin adhuc ſecetur plano ξ υ ϰ baſi parallelo, ſegmentum Φ ξ υ ϰ æquabitur ſolido ex converſione plani Z Y C circa rectam Z Y facto. Nam & hic eodem modo oſtendetur, triangulum υ ϰ Φ æquale circulo radii υ ϰ ; & de reliquis ſimiliter.

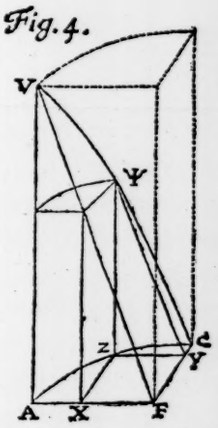
Fig. 3.



9. Simili-

9. Similiter, si super Semicycloide A F C erigatur Prisma, sive Cylindri recti quadrans, altitudinem habens A V, quæ sit ad A F, ut 4 A F ad F C; (nempe ut circuli Perimeter ad Radium;) secetur autem plano F C V: Solido F V C Z A æquatur solidum ex conversione plani F C Z A circa rectam F C; & segmenta segmentis respective sumptis; puta segmentum Y Z ϒ C segmento conversione plani Z C Y facto. Nam & hic triangulum F A V æquatur circulo radii F A; & Triangulum Y Z ϒ circulo radii Y Z: Et sic ubique.

Fig. 4.



Solidum axis F C.

10. Atque hactenus quidem utut tum planorum tum solidorum omnium expositorum dimensionem aliquatenus hac methodo tradidisse videamur: Cum tamen de Gravitatis Centris nihil hinc constet, libet in sequentibus, resumpto iterum toto negotio, rem aliter expedire, hoc modo.

11. Ut supra ostendimus rectam z Z fig. 1. æqualem arcui z C: ita ostendetur, angulum Z ζ A, hoc est z F A, arcui Z ζ sive z F, hoc est rectæ A ζ, proportionalem esse: (nempe, ut arcus F z, hoc est A ζ recta, ad arcum F z C, hoc est rectam A F, sic esse angulum Z ζ A vel z F A, ad C F A rectum:) propter angulum z G F anguli z F A ubique duplum, & propterea utrumque arcui F z ubique proportionalem. *Angulus Z ζ A.* Fig. 1.

12. Adeoque, divisa recta A F in partes quotlibet æquales, in punctis λ, μ, β, ζ, &c. ductisque rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. à puncto contactus ad punctum lineans, (quibus parallelæ existunt in circulo F l, F m, F b, F z, &c.) anguli L λ A, M μ A, B β A, Z ζ A, &c. sunt Arithmetice-proportionales; quorum continuus excessus primo æqualis est, nempe angulo L λ A.

13. Ductis itaque tum in Cycloide rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. tum ipsis respondentibus in circulo F l, F m, F b, F z, &c. distribuentur Semicyclois & Semicirculus in segmenta numero æqualia; singula singulis (respective) correspondentia.

14. Ductis item in Cycloide, à punctis ν, ζ, β, &c. rectis ν π, ζ ρ, β σ, &c. quæ parallelæ sint rectis ζ Z, β B, μ M, &c. Erunt anguli omnes N ν π, Z ζ ρ, B β σ, &c. æquales tum inter se, tum angulo L λ A, tum etiam cuilibet angulorum A F l, l F m, m F b, &c. qui item (propter æquales arcus F l, l m, m b, &c.) sunt inter se æquales.

15. Ductis porro tum in Cycloide rectis N O, Z P, B R, &c. tum in circulo n O, z p, b r; &c. inscribatur tum Cycloidi figura ex Trapeziis, tum circulo figura ex Triangulis correspondentibus constans.

16. Erunt autem illa Trapezia, Triangulorum horum respective sumptorum, ubique plusquam tripla. Constat enim quodlibet Trapeziorum, ex Triangulo simul & Parallelogrammo: quorum illud, triangulo correspondenti in circulo (ut ex dictis facile colligitur) ubique æquale est; hoc illius (ut jam ostendetur) plusquam duplum.

17. Nam, verbi gratia, in Trapezio O N ν F, Triangulum O n F est utrique figuræ commune; & Parallelogrammum N n F ν (æqualtum) plusquam duplum Trianguli, propter rectam N n, hoc est curvam n C, majorem n O recta.

18. Sin aliud sumatur Trapezium, puta P Z ζ ν; Erit inibi Triangulum P ν π, Triangulo p F z æquale; & Parallelogrammum Z ζ ν π plusquam duplum, propter rectam Z π, hoc est, ζ ν, hoc est curvam z n, majorem quam z p, vel π P. Nam si aptetur chorda z n; erit angulus p F Y (propter tum semiperipheriam C z F, tum angulum rectum C F A, in sex partes æquales divisum) $\frac{1}{6}$ anguli recti; adeoque angulus Y p F, hoc est z p n, $\frac{5}{6}$ recti; cui si addatur angulus n z p, qui est $\frac{2}{6}$ recti, (subtendit utique duplo arcus z C, minus z n;) aggregatum $\frac{8}{6}$ recti ex 2 rectis subductum, relinquet angulum z n p, $\frac{4}{6}$ recti. Major itaque est angulus z p n angulo z n p, (nempe ut 5 ad 4,) adeoque latus oppositum z n recta, major quam z p; ideoque à fortiori, z n curva, hoc est recta Z π, multo major erit quam recta z p, hoc est π P. Et similiter ostendetur (inscripta chorda b z) angulum b r z majorem esse angulo b z r, (nempe ut 4 ad 3,) & sic alibi. Nempe, universaliter,

ſi ponamus arcum ſemicirculi C F, adeoque angulum rectum C F A, dividi in partes æquales numero s; quarum arcus z C, adeoque & angulus z F C, contineat partes numero n, (adeoque angulus p F C partes $n-1$, & propterea angulus Y p F, hoc eſt z p n, partes $s-n+1$;) erit angulus n z p partium $2n-1$; qui ſi addatur angulo z p n, & utriuſque aggregatum $s+n$ ex duobus rectis, hoc eſt ex $2s$, auferatur; manebit angulus z n p partium $s-n$, minor angulo z p n partium $s-n+1$.

19. Sin iſtiuſmodi figuræ tum Cycloidi tum Circulo circumſcribantur; erunt ſingula Cycloidis Trapezia, reſpectivorum Circuli Triangulorum, minus quam tripla. Triangula ſiquidem erunt in utraque figura æqualia; Parallelogramma minus quam dupla Triangulorum; cum æque alta ſint, ſed ſuper minore baſe. Fig. 1.

20. Nam, verbi gratia, In Trapezio C Q, F, recta Q q, hoc eſt, F recta, hoc eſt arcus n C, minor eſt tangente q C. Utut enim ſecans F q, non à centro G, ſed ab oppoſito diametri termino F ducatur, adeoque minor ſit q C quam Tangens vulgo dicta quæ rectæ à G centro per arcus terminum n tranſeunti occurrat; eſt tamen ipſo arcu n C major; Nam ſi intelligatur à centro G duci recta rectæ F q parallela; biſecabit illa tum arcum n C, tum rectam q C; adeoque erit q C æqualis duabus Tangentibus Semiarcus, quas ſimul ipſo arcu majores eſſe conſtat.

21. Atque eodem fere modo oſtendetur, n , hoc eſt N t, majorem eſſe quam eſt n z curva, hoc eſt recta T t; item z , hoc eſt Z u, majorem quam z b curva, hoc eſt recta V u; & in reliquis pariter. Et quidem quo longius à puncto C receſſum eſt, eo inſignior erit exceſſus. Nam, in ejuſmodi Triangulo quovis, ut z F , fig. 1. vel 7. arcum z b intercipiente; continuata z, donec occurrat Diametro C F in Y; ductiſque tum ſubtenſa b C, tum b x Tangente quæ occurrat rectæ z (extra Peripheriam) in x: Manifeſtum eſt, propter æquales angulos x b C, F C, (communem arcum b C intercipientes;) eorum item ad rectum reſiduos x b , F Y, æquales eſſe; ideoque & rectas x b, x , invicem æquales: Et, propterea, rectam z, æqualem duabus b x, x z, majorem curva b z. Et ſic ubique.

Semicyclois ſemicirculi tripla. 22. Quoniam igitur figura ſic circumſcripta Semicycloidi C Z A, aut ipſius parte C Z, (utrobique enim eodem modo procedit demonſtratio,) minor eſt quam tripla figuræ Semicirculo C z F, aut ipſius parti C z, circumſcriptæ, (quotcunque fuerint illic Trapezia, hic Triangula;) inſcripta vero inſcriptæ major quam Tripla: Et quidem augendo illic numerum Trapeziorum, hic Triangulorum, eo tandem devenietur utrobique, ut differentia figuræ inſcriptæ à circumſcripta minor futura ſit quavis aſſignata, (adeoque in infinitum procedendo evaneſcat:) erunt tum figuræ ſingulæ quadrilineæ (qualis B ß ζ Z) ſingularum reſpective ſumptarum Trilinearum (qualis b F z,) tum omnes omnium, Triplæ. Hoc eſt, tum Semicycloidis C Z A F Semicirculi C z F, tum iſtius ſegmentum B ß ζ Z ſectoris hujus b F z, tum Segmentum Z A ζ ſegmenti z F z, tum ſegmentum Z ζ F C ſectoris z F C, (& ſic ubique) triplum.

Segmentum CZY. 23. Jam vero, ex ductu Semiradii (½ G z) in arcum z C, hoc eſt rectam Z z, habetur ſector G z C; atque ex ductu ſemiradii (½ G F) in altitudinem z Y, habetur Triangulum G z F: Ergo ex ductu Semiradii in totam Z Y, habetur ſector F z C: Atque ex ductu Seſquiradii in eandem Z Y, habetur ſegmentum ζ Z C F: Unde ſi auferatur ζ Z Y F trapezium, habetur dimenſio ſegmenti C Z Y quæſita: Vel etiam, ſubducto inſuper C z Y, habetur C z Z trilineum.

Solidum axis A F. 24. Porro, Quoniam ſi ponamus ſemicirculum ex infinitis trilineis, qualia C n F, n z F, &c. vel etiam (nam & hoc, propter infinitatem, adeoque & approximationem in infinitum, tantundem valet,) ex infinitis triangulis, qualia O n F, p z F, &c. conſtare: ponendum & ſemicycloeidem conſtare ex totidem quadrilineis, ut C N , F, N Z ζ , &c. vel etiam trapeziis numero infinitis, ut O N , F, P Z ζ , &c. quorum quodvis exhibeat tum Triangulum tum Parallelogrammum iſtius duplum. Ex converſione autem Parallelogrammi, ut N F, circa axem A F, fiet Cylindrus, ſaltem diſtortus; & ex ſimili converſione Trianguli, ut O n F, in hoc ſitu, fiet ſimilis Cylindrus conice excavatus, qui erit ⅔ cylindri pleni: Ex converſione igitur Trapezii, ex parallelogrammo ſimul & triangulo conſtantis, fit ſolidum quod ad ſolidum converſione Trianguli eſt ut $1+\frac{2}{3}$ ad ⅔, ſive ut 5 ad 2. Quod cum ubique fiat; erit ſolidum ex converſione cycloidis, ad ſolidum ex converſione circuli circa rectam A F, ut 5 ad 2. (Quod ipſum etiam ſic colligitur. Centrum gravitatis Trapezii P Z ζ , diſtat ab A F, per ⅗ rectæ F Y; centrum autem gravitatis Trianguli p z F ab eadem A F recta, diſtat ⅔ vel ⅘ ejuſdem F Y: Centrorum

trorum itaque ab AF distantiæ sunt ut 5 ad 6; Et magnitudines ostensæ sunt ut 3 ad 1. Ergo quæ ex illis componitur, sive momentorum respectu AF rectæ, sive solidorum circa eandem AF conversione factorum, ratio, est ut 5 ad 2. Nempe $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{1}$.)

25. Ex ea vero conversione circuli, fiet annulus (ut loquuntur) clausus, æqualis Cylindro cujus basis est ille circulus, & altitudo æqualis istius circuli circumferentiæ, hoc est rectæ AD, fig. 1. Solidum itaque ex ea conversione Cycloidis, æquatur Cylindro cujus basis est idem circulus CF, & altitudo æqualis rectæ quæ sit ad istius circumferentiam ut 5 ad 2; hoc est, dupla sesqui altera rectæ AD. (Est utique annulus ille $\frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{P} \times \mathcal{P} = \frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{P}^2$; & solidum illud Cycloidicum $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}^2$. Intelligendo scilicet per $\mathcal{D}$, diametrum, &, per $\mathcal{P}$, peripheriam circuli generantis: ut & deinceps alibi passim.)

26. Sed & pari argumento de partibus judicandum erit. Nempe tum solidum ex conversione segmenti ζZA, ad solidum ex conversione segmenti FzF; tum solidum ex conversione Quadrilinei ζZCF, ad solidum ex conversione sectoris FzC; tum solidum ex conversione Quadrilinei βBZζ, ad solidum ex conversione sectoris bFz; est ut 5 ad 2. Dantur autem hæc, ergo & illa. *Segmenta solidi circa AF.*

27. Sed & insuper, si ex solido ex conversione quadrilinei ζZCF, auferatur solidum ex conversione trapezii ζZYF, manebit annulus conversione segmenti CZY circa axem AF factus; qui itaque datus est.

28. Est autem Annulus ille, æqualis solido ZYCΦυξ fig. 3. (ut § 8. ostenditur;) unde si auferatur datum prisma YZξυκC (cujus basis est segmentum modo repertum CZY, altitudo Yυ, quæ est ad CΦ sive 2AD, ut FY ad FC;) quod supereſt solidum Φξυκ æquatur solido ex conversione segmenti CZY circa rectam ZY facto. Fig. 3.

29. Ut vero habeamus solidum ex conversione Semicycloidis circa rectam CF, ejusque solidi segmenta, libet paulo immutare constructionem, (nulla necessitate, sed phantasiæ juvandæ gratia.) Nempe cum prius ostendimus, in figura circumscripta, Trapezii Parallelogrammum minus esse quam Trianguli duplum, sed majus in figura inscripta; differentiam vero utrobique (sectione in infinitum continuata) evanescere; adeoque reapse perinde esse sive inscriptæ sive circumscriptæ figuræ Trapezia perpendamus, (& de Triangulis similiter:) Commodum jam videtur viam inter utramque mediam sectari, adeoque tum Trapezia Cycloidis, tum Triangula circuli, partim circumscribere, partim inscribere; puta pro Trapezio Zζ,P fig. 1. Trapezium Vβ,P; &, pro Triangulo zFp, Triangulum υFp substituendo; ut tum illic recta Zζ Trapezium, tum hic recta zF Triangulum, quasi medium secet. (Utut enim in sectione definita VZ major sit quam ZP, & υz quam zp, hæc tamen differentia, sectione in infinitum continuata, evanescit; adeoque in figuris infinite exiguis, tum Trapeziis tum triangulis, supponenda est æqualitas.) Sed & insuper, si libet, licebit (ducta recta ζπ) Trapezii Triangulum uζπ parallelogrammo medium interponere; adeoque substituere, pro uno parallelogrammo integro, duo parallelogramma dimidia Vζ & ζP (supponitur utique, propter continuatam in infinitum sectionem, tum Zπ, πP, tum ζυ, πP, invicem æquales esse;) quæ duo parallelogramma dimidia tantundem circumvolvendo præstant sive rectæ Zζ utrinque contigua, sive æqualiter utrinque remota fuerint: cum sit idem utrobique centrum gravitatis. (Supponimus enim, quod & facile si opus fit probabitur, planum quodvis tantundem hujusmodi conversione producere quantum est quod fit ex eodem plano in lineam ipsius centro gravitatis descriptam ducto; quod & de linea quavis sive recta sive curva in eo plano descripta pariter intelligendum est. Quod quidem quum ipse olim me primum invenisse putaverim, monitus mox eram nonnihil apud Guldinum exstare quod huc spectat. Id autem si animadvertisset Tacquetus, dum *de Cylindricis & Annularibus* acutum opus conscripsit, non parum illi fuisset adjumento; multaque quæ illic exstant tum universalius tum & contractius forte fuissent tradita. [*Quod & Tacquetus tandem deprehendit, ut patet ex ejus libro Quinto, Anno 1659 edito, primoribus Quatuor Anno 1651 editis, addendo.*] *Solidum axis CF.* Fig. 1.

30. Re sic constructa; Ratio Solidi ex conversione Trapezii Vβ,P, ad solidum ex conversione Trianguli υFp; componitur ex ratione Trapezii ad Triangulum, (hoc est, sectione in infinitum continuata, ut 3 ad 1;) atque ex ratione distantiarum centri gravitatis in utraque figura à conversionis axe; Nempe, in Trapezio,

Trapezio, puncti K, quod ita dividit rectam Zζ, ut sit ζK ad Zζ, ut 5 ad 9; (adeoque distantia Kk erit zZ+⅔zY;) In Triangulo, puncti H, quod ita dividit rectam Fz, ut sit FH ad Fz ut 2 ad 3; (adeoque distantia Hh est ⅔zY.) Ratio itaque distantiarum est, ut zZ+⅔zY ad ⅔zY; sive ut 3zZ+⅔zY ad 2zY; quæ si cum ratione planorum 3 ad 1 componatur, emergit solidorum ratio ad invicem ut 9zZ+5zY ad 2zY; sive, ut 5zY ad 2zY (hoc est, ut 5 ad 2,) atque insuper ut 9zZ ad 2zY. Quod quidem cum ubique fiat, sitque eadem ubique ratio 5zY ad 2zY, adeoque & omnium ad omnes; non autem eadem ubique ratio 9zZ ad 2zY, sed neque æqualia ubique triangula υFp circumducta, (quorum si utrumvis esset, pro omnibus 9zZ ad 2zY, ponendum esset 18 ad 2; quia nempe omnes zZ ad omnes zY, hoc est trilineum CAFz ad semicirculum CzF, est ut 2 ad 1; quum autem eorum neutrum sit, non licet sic arguere;) præter rationem illam 5 ad 2, quærenda est alia ratio; nempe quam habeat noncuplum omnium zZ (sive zC arcuum Arithmetice proportionalium) in respectiva Triangula υFp, ad duplum omnium zY (sinuum rectorum eorundem arcuum) in eadem respective triangula. Hoc est (propter triangulorum

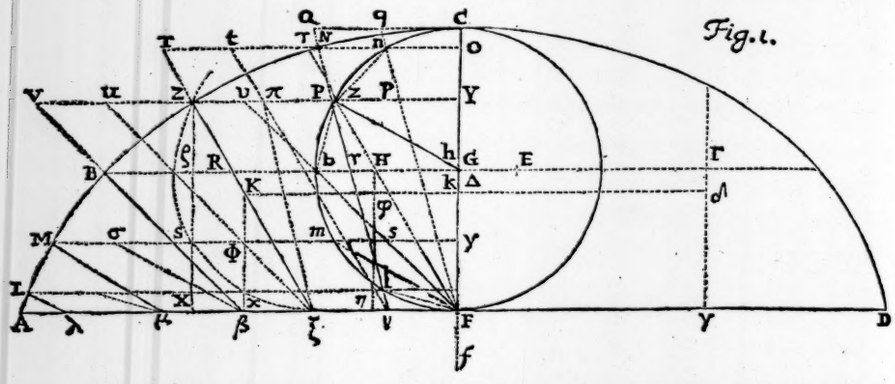


Fig. 1.

bases æquales) noncuplum arcuum Arithmetice proportionalium, in residuorum sinus versos ductorum (utpote Triangulorum altitudines;) ad duplum sinuum rectorum in eosdem sinus versos, Hoc est (ut deinceps fusius ostendetur § 74, &c.) ut differentia quadratorum basis AF & altitudinis CF, ad ⅔ quadrati CF, sive ut 9AFq—9CFq ad 2CFq. Cui si adjungatur ratio 5 ad 2, hoc est 5CFq ad 2CFq; fiet 9AFq—4CFq ad 2CFq, ratio solidi ex semicycloidis conversione circa CF, ad sphæram circuli genitoris.

Segmenta solidi circa CF.

31. Eodem fere modo etiam de solidis ex conversione segmentorum arguendum. Nam & hic omnia minuta Trapezia segmenti, verbi gratia ζZCF, circumducta: ad omnia minuta Triangula sectoris FzC sic circumducta, circa eandem rectam CF: sunt ut 5 ad 2, atque insuper, ut noncuplum omnium zZ in respectiva Triangula, ad duplum omnium zY in eadem triangula: sin ex hoc demum solido, auferatur solidum ex conversione Trapezii ζZYF circa rectam CF factum; manebit solidum ex conversione segmenti CZY circa rectam CY.

32. Et pari fere processu, si demissa recta ZX rectæ CF parallela abscindi intelligatur segmentum ZXA; istius segmenti tum dimensio, tum & solidi inde facti, sive conversione circa rectam CF, sive circa rectam ZX, facile colligitur. Sed hæc inter quæsita non sunt.

Centrum Gravitatis Semicycloidis.

33. Ad centrum gravitatis inveniendum, supponimus ob datas CF, AD, fig. 1. datam esse circuli quadraturam; adeoque & centrum gravitatis in segmentis. Nam ut, ex dato centro gravitatis in circuli segmentis, colligi posse circuli quadraturam, jam ab aliis ostensum est; sic vice versa, ex data quadratura facile colligitur centrum gravitatis in segmentis. (Quod, si opus sit, deinceps ostendetur § 67. & seqq.)

Quantum distat à CF.

34. Ponamus itaque primo centrum libræ in G, & rectam CF lineam æquilibrii (libræ transversam:) sitque utriusvis semicirculi CF centrum gravitatis punctum E (in circuli diametro basi Cycloidis parallela.) Quoniam vero momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu lineæ CF; est in ratione composita

ex

ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem æquilibrii linea CF; atque ex eisdem rationibus componatur ratio solidorum ex eorundem planorum circa CF conversione genitorum, (ut supra insinuatum est § 29.) eadem erit momentorum ratio, atque ratio solidorum sic genitorum. Nempe, ut 9AFq—4CFq ad 2CFq. Ut § 30. dictum est.

35. Ducta itaque Ge basi Cycloidis parallela, quæ sit ad GE, ut 9AFq—4CFq ad 2CFq: Si intelligatur ex puncto e suspendi æqualis semicirculus, æquiponderabit ille semicycloidi oppositæ in suo situ. Quoniam vero magnitudo semicycloidis est ad magnitudinem semicirculi, ut 3 ad 1; si sumatur (in utravis semicycloide) recta Gγ (basi parallela) quæ sit ad Ge, ut 1 ad 3; & ducatur recta γγ rectæ CF parallela; erit centrum gravitatis istius semicycloidis in recta γγ.

36. Ponamus deinde Centrum libræ in F, & rectam AD lineam æquilibrii. Quoniam momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu rectæ AD, est in ratione composita ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem AD; adeoque in eadem ratione cum solidis ex conversione circa rectam AD factis, hoc est (ut supradictum est § 24.) ut 5 ad 2; Si in continuata GF, sumatur Ff, quæ sit ad FG ut 5 ad 2; semicirculus in puncto f, æquiponderabit semicycloidi in suo situ: Cumque semicyclois sit ad semicirculum ut 3 ad 1; si sumatur (in recta FG) recta FΔ, quæ sit ad Ff ut 1 ad 3; atque à puncto Δ ducatur basi Cycloidis parallela Δδ (rectæ γγ occurrens in δ,) erit centrum gravitatis semicycloidis in recta Δδ; adeoque in illius puncto δ. *Quantum distat ab AF.*

37. Atque ex iisdem principiis, eodem fere processu, colligetur Centrum Gravitatis segmenti CZY. Erit enim momentum segmenti CZY ad momentum segmenti CzY respectu lineæ æquilibrii CF, ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa eandem CF factum: sed hæc ratio dari supponitur ex § 31; ergo & illa: Esto ut α ad ζ. Sed & data est ratio magnitudinis ad magnitudinem, per § 23: Esto hæc ut α ad γ. Datur item segmenti CzY centrum gravitatis (ut § 33. supponitur, & § 67. &c. deinceps ostendetur;) adeoque & ipsius distantia ab æquilibrii linea CF: Esto ea ε. Erit itaque, propter $\frac{\alpha}{\gamma})\frac{\alpha}{\beta}(\frac{\gamma}{\beta}$, Distantia centri gravitatis segmenti CZY ab eadem CF recta, ad distantiam ε, ut γ ad β. (Nempe in ratione quæ componitur ex ratione momentorum, α ad β; atque reciproca magnitudinum, γ ad α.) puta $\frac{\gamma}{\beta}$. *Centrum gravitatis segmenti CZY.*

38. Similiter momentum segmenti CZY ad momentum segmenti CzY, respectu lineæ ZY, est ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa rectam ZY factum. Sed hæc ratio superius data est, per § 28; Ergo & illa. Esto ut α ad δ. Magnitudinum autem ratio (ut prius) ut α ad γ. Distantia vero centri gravitatis segmenti CzY à recta ZY, sit ζ. Erit distantia centri gravitatis segmenti CZY ad distantiam ζ, ut γ ad δ. Nempe $\frac{\gamma\zeta}{\delta}$.

39. Cum itaque data sit istius distantia tum à recta CF, tum à recta ZY, (atque intra ipsum segmentum esse constet,) datur & ipsum gravitatis centrum quæsitum.

40. Deinde, ad inveniendum centrum gravitatis in solidis; Supponimus ut supra in segmentis circularibus, ita jam in sphæralibus segmentis centrum gravitatis datum esse: vel, si exigatur, parati sumus exhibere, ut infra § 67 & seqq. *Centrum solidi circa AF.*

41. Ponamus jam solidum factum ex conversione Semicycloidis CAF circa rectam AF, secari plano quod plano CAF recte insistat in AF recta, semisolidum abscindens; cujus propterea centrum gravitatis in plano CAF esse manifestum est.

42. Deinde, cum solidum sive ex conversione, sive ex semiconversione Trapezii Vβγ P (circa rectam AF,) ad solidum ex simili conversione vel semiconversione trianguli υFp, sit ut 5 ad 2, (ut § 24 ostensum est;) quærantur utriusque centra gravitatis, ut habeatur ratio distantiarum tum à recta AF tum à recta CF.

43. Habetur autem solidi ex semiconversione Trapezii centrum gravitatis, si in recta ζZ intelligatur punctum K abscindere rectam ζK quæ sit ad ζZ ut 7 ad 10 (quod quidem centrum gravitatis esset si curvatura figuræ demeretur; puta, si pro

singulis semicirculis sive superficiebus semicylindricis circa axem AF intelligantur totidem lineæ rectæ vel superficies planæ plano CAF ad angulos rectos positæ atque ab eo bisectæ;) atque deinde in recta K κ quæ sit basi AD perpendicularis, sumatur (propter curvaturam) ut CF ad FA, (hoc est, ut Diameter ad Semiperipheriam circuli,) sic κΦ ad κK, (qua nempe ratione dividendus est axis semicirculi ut habeatur Semiperipheriæ centrum gravitatis:) Erit Φ centrum gravitatis solidi ex semiconversione Trapezii Vβ, P circa rectam AF.

44. Centrum autem gravitatis solidi ex semiconversione Trianguli, habetur, si à rectæ Fz puncto H, quod jam intelligatur abscindere rectam FH, quæ sit ad Fz, ut 3 ad 4, (quod nempe centrum gravitatis esset si demeretur curvatura,) perpendicularis Hν intelligatur (propter curvaturam) ita dividi in φ ut modo divisimus Kκ in Φ. Erit utique φ centrum gravitatis solidi ex semiconversione Trianguli νFp circa rectam AF. (Quamquam revera perinde omnino est ad hoc negotium an omnino reperiantur puncta Φ, φ, an tantum puncta K, H: Nam eadem est distantia, quantum ad rectam CF, punctorum K & Φ, item punctorum H & φ; &, quantum ad rectam AF, eadem saltem distantiarum ratio, sive puncta K, H, sive Φ, φ, considerentur.)

Quantum distat ab AF.

45. Cum igitur ratio distantiarum sive punctorum K, H, sive Φ, φ, à recta AF, sit ut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{3}{4}$, sive 28 ad 30, vel 14 ad 15; & magnitudinum, ut 5 ad 2: Erit, quæ ex his componitur, ratio momentorum, ut 70 ad 30, sive 7 ad 3. Quod cum ubique fiat; eadem erit & ratio momenti solidorum ex semiconversione Trapeziorum omnium ad omnium Triangulorum sic conversorum momentum, hoc est, momenti solidi ex semiconversione semicycloidis, ad momentum solidi ex semiconversione semicirculi, (circa rectam AF,) respectu rectæ AF: Nempe ut 7 ad 3. Unde colligentur puncta, f, Δ, ♪, ut supra. Nempe si intelligatur G centrum gravitatis solidi ex semiconversione circuli circa rectam AF, (quod punctum G dari supponimus, vel, si exigatur, deinceps exhibebimus § 56;) & fiat, ut 3 ad 7, sic FG ad Ff; & deinde, ut 5 ad 2, sic Ff ad FΔ; atque ducatur Δ♪ basi parallela; erit centrum gravitatis solidi ex semiconversione semicycloidis circa rectam AD, in recta Δ♪.

Quantum distat à CF.

46. Cum vero distantia puncti sive K sive Φ à recta CF sit $zZ+\frac{7}{10}zY$; atque distantia puncti H vel Φ ab eadem recta sit $\frac{3}{4}zY$; (quorum utrumque ex dictis patet:) erit distantiarum ratio, ut $zZ+\frac{7}{10}zY$ ad $\frac{3}{4}zY$, sive ut $20zZ+14zY$ ad $15zY$: Quæ si cum ratione magnitudinum 5 ad 2 componatur, habetur momentorum ratio $100zZ+70zY$ ad $30zY$, sive $10zZ+7zY$ ad $3zY$. Quod cum ubique fiat; pro ratione momenti solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) semicirculi circa rectam AF, respectu lineæ æquilibrii CF, sumenda erit tum ratio 7 ad 3 (propter $7zY$ ad $3zY$) tum (propter $10zZ$ ad $3zY$) ea ratio quam habet decuplum momenti solidorum ex conversione Triangulorum νFp circa AF, suspensorum in distantiis zZ respective, ad triplum momenti eorundem solidorum suspensorum in distantiis zY: Nempe ut $\frac{5}{32}RP^3-\frac{10}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$, sive ut $15AFq-20CFq$ ad $4CFq$. (Quod § 87 & seqq. fusius declaratur.) Quæ quidem ratio si cum ratione 7 ad 3 conjungatur, habetur ratio momenti (respectu rectæ CF) solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis circa rectam AF, ad momentum solidi ex simili conversione (vel semiconversione) semicirculi: Nempe $\frac{5}{32}RP^3-\frac{16}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$, sive ut $45P^2-512R^2$ ad $192R^2$, Hoc est, ut $45AFq-32CFq$ ad $12CFq$.

47. Si itaque ponamus GE distantiam centri gravitatis solidi ex ea conversione vel semiconversione semicirculi, (à recta CF;) & fiat, ut $12CFq$ ad $45AFq-32CFq$, sic GE ad Ge; iterumque, ut 5 ad 2, sic Ge ad Gγ; & ducatur γγ parallela rectæ CF: Erit semisolidi ex conversione (hoc est solidi ex semiconversione) Semicycloidis circa rectam AF, centrum gravitatis in recta γγ; adeoque in ipsius eo puncto ubi occurritur rectæ Δ♪ modo inventæ § 45. (Designamus autem in schemate centrum gravitatis in ea semicycloide, ubi minor futura esset linearum confusio; perinde enim ad rem est, in utra designetur.)

Centrum solidi integri, circa AF.

48. Habito autem centro gravitatis in semisolido, à fortiori in solido integro haberi certum est: puta in Axis puncto γ.

49. Eodem fere processu (mutatis mutandis, ut supra § 31.) colligitur centrum gravitatis semisolidi ex conversione segmenti ζZCF circa rectam AF; &

conse-

conſequenter etiam centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione ſegmenti CZY, tum circa rectam AF, tum & circa rectam ZY.

50. Tandem ſupereſt ut centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione Semicycloidis circa rectam CF inveſtigemus. Nempe ſi ſemiſolidum illud plano abſcindatur quod plano CAF in recta CF recte inſiſtat; manifeſtum eſt gravitatis centrum fore in ipſo plano CAF. Quæritur, in quonam ejus puncto. Hoc modo. *Centrum ſemiſolidi circa CF.*

51. Semiſolidum ex converſione trianguli ϖFp, erit ſemiconus excavatus; cujus propterea centrum gravitatis, ſi curvaturam demas, erit in rectæ zF puncto H, quod abſcindat FH = ¾zF; (nempe in recta zF ſic ſecta ut ſecanda eſſet FY ad inveniendum centrum gravitatis hujus ſolidi integri;) ſed deinde, propter curvaturam ſemicircularem verſus rectam CF, (ſi verum gravitatis centrum indagare liceat,) abſcindenda eſt rectæ Hh, ea portio verſus h, quæ ſit ad totam Hh ut diameter circuli ad ſemicircumferentiam; (ſic utique dividendus eſt axis ſemicirculi ut habeatur ſemiperipheriæ centrum gravitatis.)

52. Semiſolidum autem ex converſione Trapezii VβϖP, eſt fruſtum coni excavatum, cujus centrum gravitatis (ſi curvaturam demas) eſt in rectæ ζZ eo puncto, puta K, quo ita dividitur ut dividenda eſſet FY ad inveniendum centrum gravitatis hujus ſolidi integri, nempe excavati fruſti conici. Centrum autem gravitatis verum, eſt (propter curvaturam) in rectæ Kk eo puncto quo ita dividitur ut de Hh modo diximus.

53. Cum itaque horum ſemiſolidorum ratio momentorum, tum reſpectu rectæ CF, tum rectæ AF, componatur ex rationibus magnitudinum & diſtantiarum; reperientur puncta Γ, Δ, ſimili fere methodo quo ſupra; adeoque & punctum δ, centrum gravitatis ſemiſolidi; & ſimul centrum gravitatis ſolidi integri, puta punctum Axis Δ.

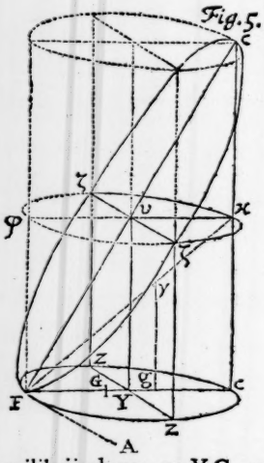
54. Cumque ſimiliter faciendum ſit (mutatis mutandis ut § 31, 49,) de ſemiſolido ex converſione ſegmenti, puta ζZCF; pariter datum erit & hujus centrum gravitatis; & conſequenter (propter datum etiam centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione Trapezii ζZYF,) centrum gravitatis ſemiſolidi (adeoque & ſolidi integri) ex converſione ſegmenti CZY circa CF. Dabuntur itaque quæ quærebantur omnia. *Centrum ſolidi ex ſegmento.*

55. Poſſumus autem hæc eadem exhibere, etiam ſine ope centrorum K, H, &c. methodo mihi quidem facili & familiari, ex principiis in noſtra *Infinitorum Arithmetica* traditis deſumpta, (& quidem in multis expeditius:) ſed quam alii forſan haud ita prompte ſine longiori verborum apparatu aſſequerentur.

Atque hactenus ea ſunt quæ ad D. Carcavium menſibus Auguſto & Septembri, Anni 1658, miſeram (hoc eſt, intra tempus à proponente limitatum,) methodum meam, totiuſque rei quaſi ſceleton, exhibentia: Et quidem iſidem fere tum verbis tum ordine; Niſi quod ad § 30. numeros emendaverim qui vitioſi erant, utpote quos inveſtigando Trilineum CAF fig. 7. circa rectam AF incautus converteram cum circa CF convertendum eſſet, & ſimiliter ad § 46; Quem calculi lapſum ubi deprehenderam, literis eodem Septembri datis inſinuabam; neque inſuper tum iſtius emendationem, tum alia quæ ſibi ſuiſve ad juſtam demonſtrationem deeſſe vifa forent, ubi hoc indicaverint, exhibiturum. Cum autem nihil inde hactenus monitus fuerim, (quod oblatæ conditiones exſpectandum innuunt, ut & emendandi calculi veniam impune permittunt;) ea tamen quæ ſequuntur, quaſi ſcholiorum inſtar, ad præcedentium tum illuſtrationem tum juſtam demonſtrationem, libet hic ſubjungere.

56. Quum ſupra § 45. deſiderari videatur punctum G, quod ibidem deſignat (non centrum circuli, ſed) centrum gravitatis ſemiannuli ex ſemiconverſione circuli CF circa rectam AD: Illud hac methodo inveſtigamus. Super circulo CzF fig. 5. (qui circulo CzF genitori Cycloidis æquetur) erigatur Cylindrus rectus Fc, altitudinem habens Cc circuli genitoris perimetro æqualem, adeoque æqualem ſemiperipheriæ circuli radio FC deſcripti. Et intelligatur Cylindrus ille biſecari, tum per axem plano FcC parallelogrammo; tum per hujus diagonalem Fc tranſeunte plano elliptico Fcζ, quod plano FCc recte inſiſtat; tum denique plano baſi parallelo φκ; reliquaque conſtruantur ut in ſchemate. Dico primo, Cylindri portionem plano elliptico abſciſſam FζζcC, per omnia æquari *Centrum portionis cylindri oblique ſecti, & ſemiannuli.*

Fig. 5.



ſemiannulo expoſito, dempta curvatura. Nempe rectam Cc æquari ſemicirculo à puncto C deſcripto; & ſimiliter rectas Yυ, zζ, (ſumptis ubivis in baſe Cylindri reſpectivis punctis Y, z,) ſemiperipheriis punctorum ſimiliter poſitorum in ſemiannulo; item Yζ parallelogrammum, ſemiſuperficiei cylindricæ recta Yz in annulo deſcriptæ; & ſic ubique. Nec aliter differt hæc portio Cylindrica ab illo ſemiannulo, quam quod ſemiſuperficies cylindricæ omnes rectis Yz in annulo deſcriptæ, in portione Cylindri in planum expandantur; adeoque hæc Cylindri portio tantundem valet atque ſemiannulus dempta curvitate.

57. Centrum autem gravitatis in expoſita Cylindri portione, ſic colligitur. Si ponamus Cc lineam æquilibrii (adeoque planum huic perpendiculariter inſiſtens, æquilibrii planum;) erunt, tum altitudines Yυ ad invicem, ut rectæ FY; tum diſtantiæ ab æquilibrii plano, ut YC; adeoque, quæ ab ipſis fiunt, ut rectangula FYC, hoc eſt, ut quadrata Yz; quæ quidem in ipſas Yz ducta, hoc eſt, facta ex baſis in altitudinem & diſtantiam continuo ductu, hoc eſt, planorum Yζ momenta reſpectu rectæ Cc, ſunt ut cubi rectarum Yz. (Per *momentum* autem, tum hic, tum paſſim alibi, intelligo factum ex magnitudine in diſtantiam ab æquilibrii plano ducta; ut quæ momentis ſunt proportionalia.) Sunt autem omnes cubi rectarum Yz, ad totidem cubos rectæ CF; hoc eſt, momentum FYυζcC portionis ſemicylindri in ſuo ſitu, ad momentum Parallelepipedi æquealti baſin habentis quadratum FC ex puncto F ſuſpenſi; ut 3 ad 32 □; (ubi per 1 ad □ intelligo rationem circuli ad quadratum diametri, ſive ut $\mathcal{P}$ ad $4\mathcal{D}$;) quod mox probabitur § 60, &c. adeoque, ad momentum Cylindri parallelepipedo illi inſcripti ſimiliter ſuſpenſi, ut 3 ad 32; (ſubſtitutis ſcilicet circulis pro diametri quadratis:) Et propterea, momentum FζζcC Portionis integri Cylindri in ſuo ſitu, ad momentum Cylindri ſic ſuſpenſi, ut 3 ad 16. Eſt autem magnitudo ad magnitudinem, ut 1 ad 2. Ergo, diſtantia ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Si itaque dividatur FC in g, ut ſit Cg ad CF ut 3 ad 8; & ducatur gγ rectæ Cc parallela: Erit centrum gravitatis portionis expoſitæ FζζCc in recta gγ. Sed & (quod tamen ad præſens negotium quæſitu non eſt neceſſarium, ipſum enim g punctum jam inventum nobis ſufficit,) idem gravitatis centrum eſt in recta Fκ, (quippe quæ per omnium zζ parallelogrammorum centra tranſit, ipſique revera FC in annulo reſpondet;) ergo in eorum communi puncto γ.

58. Si itaque ut rectam Fκ in γ, vel FC diametrum baſis Cylindri in g, ita & FC axem annuli dividamus in g, (quod ſemiannuli centrum gravitatis eſſet dempta curvatura:) ipſamque $Fg = \frac{8}{15}\mathcal{D}$ dividamus iterum (propter curvaturam) in G, ita ut ſit FG ad Fg, ut circuli diameter ad ſemicircumferentiam; erit G centrum gravitatis ſemiannuli ex ſemiconverſione circuli FC circa AF rectam. Habetur itaque (quod § 45. ſupponitur) ſemiannuli centrum gravitatis G. (nempe, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D}$, ſic $Fg = \frac{8}{15}\mathcal{D}$ ad $\frac{5\mathcal{D}}{4\mathcal{P}}$ $D = FG$.) Et conſequenter, propter $\frac{5}{2}$) $\frac{1}{3} \times \frac{5\mathcal{D}^2}{4\mathcal{P}}$ $\left(\frac{7\mathcal{D}^2}{6\mathcal{P}}\right.$, erit $\frac{7\mathcal{D}^2}{6\mathcal{P}}$, vel $\frac{14R^2}{3\mathcal{P}}$, $= F\Delta$ fig. 1. diſtantia centri gravitatis ſolidi (ſemiconverſione ſemicycloidis circa AF facti) ab AF.

59. Ut autem habeatur E, centrum gravitatis ſemiannuli ex ſimili ſemiconverſione ſemicirculi, ſumenda adhuc erit, à puncto G jam proxime invento, recta GE (baſi parallela) quæ tanta ſit quanta diſtantia centri gravitatis ſemicirculi FC à circuli centro; quæ nempe ſit ad $\frac{1}{3}$FC (ſive $\frac{2}{3}$ radii) ut FC ad FA, ſive ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$.

60. Quod autem § 57. probandum ſuſcepimus, Nempe omnes cubos rectarum Yz ad totidem cubos CF, eſſet ut 3 ad 32 □; ſic oſtenditur ex noſtræ *Infinitorum Arithmeticæ* principiis. Si ponamus diametrum $FC = \mathcal{D}$ in partes æquales numero infinitas dividi in punctis Y; erunt omnes $FY = a$ ſeries infinita Primanorum,

norum, ſive Arithmetice proportionalium, quorum maximum eſt $\mathcal{D}$; quæ in $YC = \mathcal{D} - a$ reſpective ductæ, dant Reſidua $a\mathcal{D} - a^2$ omnia rectangula FCY, hoc eſt omnia Quadrata Yz; quæ ad totidem $\mathcal{D}^2$ ſunt ut 1 ad 6; Reſiduorum vero Quadrata, hoc eſt rectarum Yz Biquadrata, ad totidem $\mathcal{D}^4$, ut 1 ad 30; Reſiduorum cubi, hoc eſt rectarum Yz poteſtates ſextæ, ad totidem $\mathcal{D}^6$, ut 1 ad 140, &c. Unde colligitur ſeries 1, 6, 30, 140, 630, &c. (Arith. Infin. pr. 133.) Quæ non alia eſt quam ſeries $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c. in ſeriem Geometrice proportionalium 1, 4, 16, 64, 256, &c. reſpective ducta: Adeoque ſeries illa (ibid. prop. 189.) interpolata $1, \square, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\square, \frac{15}{8}, \frac{8}{5}\square$, &c. in hanc item interpolatam 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. reſpective ducta, exhibebit illam primam interpolatam $1, 2\square, 6, \frac{32}{3}\square, 30, \frac{256}{5}\square, 140$, &c. Et propterea, ſicut 1 ad 6, 30, 140, &c. exhibent rationes quas habent rectarum omnium Yz poteſtates ſecunda, quarta, ſexta, &c. ad totidem $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^4$, $\mathcal{D}^6$, &c. Sic 1 ad $2\square, \frac{32}{3}\square, \frac{256}{5}\square$, &c. exhibebunt rationes quas habent earundem rectarum Yz poteſtates prima, tertia, quinta, &c. ad totidem $\mathcal{D}, \mathcal{D}^3, \mathcal{D}^5$, &c. Et ſpeciatim (quod noſtra jam intereſt) omnes cubi rectarum Yz, ad totidem $\mathcal{D}^3$ ſive cubos FC, rationem habebunt 1 ad $\frac{32}{3}\square$, ſive ut 3 ad $32\square$. Quod ſuſcepimus probandum.

61. Porro, quum calculus ad § 51, 52, 53, 54, (ubi agitur de centro gravitatis ſolidorum ex converſione Semicycloidis circa rectam CF) omiſſus ſit, & calculi tantum fundamenta remotiora exhibita: libet hic calculum illum aliquatenus exhibere, juxta methodum quam § 55 inſinuavi. Et primo quidem perpendemus converſionem Trianguli υFp, deinde Trapezii V$\beta\upsilon$P. Rectam autem in Triangulo υp, adeoque & $\beta\upsilon$ in Trapezio, dicemus B; ejuſque aliquotam partem infinite exiguam b; adeoque VP erit $B+B$, vel $2B$. Item zY, dicemus T; ejuſque partem infinite exiguam, y. Et rectam FY, hoc eſt altitudinem, vel etiam diſtantiam ab AF, dicemus A; ejuſque partem infinite exiguam, a. Rectam denique zZ, dicemus Z. *Centrum gravitatis ſemiſolidi circa CF.*

62. His poſitis; ſupponimus in Triangulo υFp infinitas rectas parallelas Arithmetice-proportionales, à vertice F ad baſin uſque υp continuatas, $0, 1b, 2b, 3b$, uſque ad B earum maximam, quæ eſt ipſa υp. Hæ autem rectæ, dum circa rectam FC convertuntur, deſcribunt totidem annulos planos (ſaltem hujuſmodi annulorum partes ſimiles) æquales totidem rectangulis parallelogrammis a rectis ipſis quæ convertuntur, & peripheriis quæ earum punctis mediis deſcribuntur, contentis; quas peripherias, ſive integras ſive dimidias, cum ſint radiis proportionales, per ipſos radios deſignabimus, nempe $0, 1y, 2y, 3y$, &c. uſque ad T, hoc eſt zY radiorum illorum maximum. Erunt igitur plana illa, ut $00, 1b \times 1y, 2b \times 2y, 3b \times 3y$, &c. hoc eſt $00, 1by, 4by, 9by$, &c. uſque ad BT. Deinde, cum horum planorum momenta reſpectu rectæ AF, ſint factis ex magnitudinibus in diſtantias proportionalia; ſintque diſtantiæ, ut $0, a, 2a, 3a$, &c. uſque ad A; erunt ea momenta ut $0by \times 0a$, $1by \times 1a$, $4by \times 2a$, $9by \times 3a$, &c. hoc eſt $000, 1aby, 8aby, 27aby$, &c. uſque ad ABT. Hoc eſt, omnia momenta, ſunt ſeries Tertianorum; Quæ Tertianorum ſeries, ad totidem maximo æqualia, hoc eſt ad maximum in altitudinem ductum, hoc eſt ad Cylindrum vel Priſma ejuſdem vel æqualis baſis æquealtum, ex puncto Y ſuſpenſum, eſt ut 1 ad 4. Quod dicamus igitur $\frac{1}{4}AABT$.

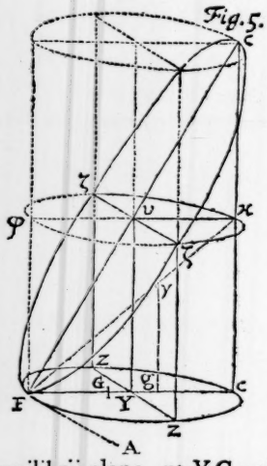
63. Eodem modo; Infinitæ rectæ Trapezii, à minima B, hoc eſt $\beta\upsilon$, ad uſque $B+B$, ſive $2B$, hoc eſt VP; ſunt $B+0$, $B+b$, $B+2b$, $B+3b$, &c, uſque ad $B+B$. Radii vero peripheriarum à mediis rectarum punctis deſcriptarum, ſunt $Z+0, Z+y, Z+2y, Z+3y$, &c. uſque ad $Z+T$. Ex quibus ſeriebus invicem reſpective ductis fit ſeries magnitudinum, $BZ+0Z+0B+00, BZ+bZ+yB+by, BZ+2bZ+2yB+4by, BZ+3bZ+3yB+9by$, &c. uſque ad $BZ+BZ+TB+BT$. Quæ ſi ducantur in reſpectivas ſuas ab AF diſtantias $0, a, 2a, 3a$, &c. uſque ad A; fiet ſeries Momentorum

$$\begin{array}{l} 0BZ+000Z+00B+000 \\ aBZ+abZ+ayB+aby \\ 2aBZ+4abZ+4ayB+8aby \\ 3aBZ+9abZ+9ayB+27aby \end{array}$$

&c. uſque ad

$$ABZ+ABZ+ATB+ABT$$

Cujus ſumma eſt $\frac{1}{2}AABZ+\frac{1}{3}AABZ+\frac{1}{3}AATB+\frac{1}{4}AABT$.
ſive $\frac{5}{6}AABZ+\frac{1}{12}AABT$.



ſemiannulo expoſito, dempta curvatura. Nempe rectam Cc æquari ſemicirculo à puncto C deſcripto; & ſimiliter rectas Yυ, zζ, (ſumptis ubivis in baſe Cylindri reſpectivis punctis Y, z,) ſemiperipheriis punctorum ſimiliter poſitorum in ſemiannulo; item Yζ parallelogrammum, ſemiſuperficiei cylindricæ recta Yz in annulo deſcriptæ; & ſic ubique. Nec aliter differt hæc portio Cylindrica ab illo ſemiannulo, quam quod ſemiſuperficies cylindricæ omnes rectis Yz in annulo deſcriptæ, in portione Cylindri in planum expandantur; adeoque hæc Cylindri portio tantundem valet atque ſemiannulus dempta curvitate.

57. Centrum autem gravitatis in expoſita Cylindri portione, ſic colligitur. Si ponamus Cc lineam æquilibrii (adeoque planum huic perpendiculariter inſiſtens, æquilibrii planum;) erunt, tum altitudines Yυ ad invicem, ut rectæ FY; tum diſtantiæ ab æquilibrii plano, ut YC; adeoque, quæ ab ipſis fiunt, ut rectangula FYC, hoc eſt, ut quadrata Yz; quæ quidem in ipſas Yz ducta, hoc eſt, facta ex baſis in altitudinem & diſtantiam continuo ductu, hoc eſt, planorum Yζ momenta reſpectu rectæ Cc, ſunt ut cubi rectarum Yz. (Per *momentum* autem, tum hic, tum paſſim alibi, intelligo factum ex magnitudine in diſtantiam ab æquilibrii plano ducta; ut quæ momentis ſunt proportionalia.) Sunt autem omnes cubi rectarum Yz, ad totidem cubos rectæ CF; hoc eſt, momentum FYυζcC portionis ſemicylindri in ſuo ſitu, ad momentum Parallelepipedi æquealti baſin habentis quadratum FC ex puncto F ſuſpenſi; ut 3 ad 32□; (ubi per 1 ad □ intelligo rationem circuli ad quadratum diametri, ſive ut $\mathcal{P}$ ad 4 $\mathcal{D}$;) quod mox probabitur § 60, &c. adeoque, ad momentum Cylindri parallelepipedo illi inſcripti ſimiliter ſuſpenſi, ut 3 ad 32; (ſubſtitutis ſcilicet circulis pro diametri quadratis:) Et propterea, momentum FζζcC Portionis integri Cylindri in ſuo ſitu, ad momentum Cylindri ſic ſuſpenſi, ut 3 ad 16. Eſt autem magnitudo ad magnitudinem, ut 1 ad 2. Ergo, diſtantia ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Si itaque dividatur FC in g, ut ſit Cg ad CF ut 3 ad 8; & ducatur gγ rectæ Cc parallela: Erit centrum gravitatis portionis expoſitæ FζζCc in recta gγ. Sed & (quod tamen ad præſens negotium quæſitu non eſt neceſſarium, ipſum enim g punctum jam inventum nobis ſufficit,) idem gravitatis centrum eſt in recta Fx, (quippe quæ per omnium zζ parallelogrammorum centra tranſit, ipſique revera FC in annulo reſpondet;) ergo in eorum communi puncto γ.

58. Si itaque ut rectam Fx in γ, vel FC diametrum baſis Cylindri in g, ita & FC axem annuli dividamus in g, (quod ſemiannuli centrum gravitatis eſſet dempta curvatura:) ipſamque Fg = $\frac{5}{8}\mathcal{D}$ dividamus iterum (propter curvaturam) in G, ita ut ſit FG ad Fg, ut circuli diameter ad ſemicircumferentiam; erit G centrum gravitatis ſemiannuli ex ſemiconverſione circuli FC circa AF rectam. Habetur itaque (quod § 45. ſupponitur) ſemiannuli centrum gravitatis G. (nempe, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D}$, ſic Fg = $\frac{5}{8}\mathcal{D}$ ad $\frac{5\mathcal{D}}{4\mathcal{P}}$ D = FG.) Et conſequenter, propter $\frac{5}{8}$) $\frac{7}{3} \times \frac{5\mathcal{D}^2}{4\mathcal{P}}$ ($\frac{7\mathcal{D}^2}{6\mathcal{P}}$, erit $\frac{7\mathcal{D}^2}{6\mathcal{P}}$, vel $\frac{14R^2}{3\mathcal{P}}$, = FΔ fig. 1. diſtantia centri gravitatis ſolidi (ſemiconverſione ſemicycloidis circa AF facti) ab AF.

59. Ut autem habeatur E, centrum gravitatis ſemiannuli ex ſimili ſemiconverſione ſemicirculi, ſumenda adhuc erit, à puncto G jam proxime invento, recta GE (baſi parallela) quæ tanta ſit quanta diſtantia centri gravitatis ſemicirculi FC à circuli centro; quæ nempe ſit ad $\frac{1}{3}$FC (ſive $\frac{2}{3}$ radii) ut FC ad FA, ſive ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$.

60. Quod autem § 57. probandum ſuſcepimus, Nempe omnes cubos rectarum Yz ad totidem cubos CF, eſſet ut 3 ad 32□; ſic oſtenditur ex noſtræ *Infinitorum Arithmeticæ* principiis. Si ponamus diametrum FC = $\mathcal{D}$ in partes æquales numero infinitas dividi in punctis Y; erunt omnes FY = *a* ſeries infinita Primanorum,

norum, ſive Arithmetice proportionalium, quorum maximum eſt $\mathcal{D}$; quæ in $YC = \mathcal{D} - a$ reſpective ductæ, dant Reſidua $a\mathcal{D} - a^2$ omnia rectangula FCY, hoc eſt omnia Quadrata Yz; quæ ad totidem $\mathcal{D}^2$ ſunt ut 1 ad 6; Reſiduorum vero Quadrata, hoc eſt rectarum Yz Biquadrata, ad totidem $\mathcal{D}^4$, ut 1 ad 30; Reſiduorum cubi, hoc eſt rectarum Yz poteſtates ſextæ, ad totidem $\mathcal{D}^6$, ut 1 ad 140, &c. Unde colligitur ſeries 1, 6, 30, 140, 630, &c. (Arith. Infin. pr. 133.) Quæ non alia eſt quam ſeries $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{105}{448}, \frac{945}{3584}$, &c. in ſeriem Geometricæ proportionalium 1, 4, 16, 64, 256, &c. reſpective ducta: Adeoque ſeries illa (ibid. prop. 189.) interpolata $1, \square, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\square, \frac{1}{8}, \frac{8}{7}\square$, &c. in hanc item interpolatam 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. reſpective ducta, exhibebit illam primam interpolatam $1, 2\square, 6, \frac{32}{3}\square, 30, \frac{256}{5}\square, 140$, &c. Et propterea, ſicut 1 ad 6, 30, 140, &c. exhibent rationes quas habent rectarum omnium Yz poteſtates ſecunda, quarta, ſexta, &c. ad totidem $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^4$, $\mathcal{D}^6$, &c. Sic 1 ad $2\square, \frac{32}{3}\square, \frac{256}{5}\square$, &c. exhibebunt rationes quas habent earundem rectarum Yz poteſtates prima, tertia, quinta, &c. ad totidem $\mathcal{D}, \mathcal{D}^3, \mathcal{D}^5$, &c. Et ſpeciatim (quod noſtra jam intereſt) omnes cubi rectarum Yz, ad totidem $\mathcal{D}^3$ ſive cubos FC, rationem habebunt 1 ad $\frac{32}{3}\square$, ſive ut 3 ad $32\square$. Quod ſuſcepimus probandum.

61. Porro, quum calculus ad §§ 51, 52, 53, 54, (ubi agitur de centro gravitatis ſolidorum ex converſione Semicycloidis circa rectam CF) omiſſus ſit, & calculi tantum fundamenta remotiora exhibita: libet hic calculum illum aliquatenus exhibere, juxta methodum quam § 55 inſinuavi. Et primo quidem perpendemus converſionem Trianguli υFp, deinde Trapezii V$\beta\upsilon$P. Rectam autem in Triangulo υp, adeoque & $\beta\upsilon$ in Trapezio, dicemus B; ejuſque aliquotam partem infinite exiguam b; adeoque VP erit $B+B$, vel $2B$. Item zY, dicemus Y; ejuſque partem infinite exiguam, y. Et rectam FY, hoc eſt altitudinem, vel etiam diſtantiam ab AF, dicemus A; ejuſque partem infinite exiguam, a. Rectam denique zZ, dicemus Z. *Centrum gravitatis ſemiſolidi circa CF.*

62. His poſitis; ſupponimus in Triangulo υFp infinitas rectas parallelas Arithmetice-proportionales, à vertice F ad baſin uſque υp continuatas, $0, 1b, 2b, 3b$, uſque ad B earum maximam, quæ eſt ipſa υp. Hæ autem rectæ, dum circa rectam FC convertuntur, deſcribunt totidem annulos planos (ſaltem hujuſmodi annulorum partes ſimiles) æquales totidem rectangulis parallelogrammis a rectis ipſis quæ convertuntur, & peripheriis quæ earum punctis mediis deſcribuntur, contentis; quas peripherias, ſive integras ſive dimidias, cum ſint radiis proportionales, per ipſos radios deſignabimus, nempe $0, 1y, 2y, 3y$, &c. uſque ad Y, hoc eſt zY radiorum illorum maximum. Erunt igitur plana illa, ut $00, 1b \times 1y, 2b \times 2y, 3b \times 3y$, &c. hoc eſt $00, 1by, 4by, 9by$, &c. uſque ad BY. Deinde, cum horum planorum momenta reſpectu rectæ AF, ſint factis ex magnitudinibus in diſtantias proportionalia; ſintque diſtantiæ, ut $0, a, 2a, 3a$, &c. uſque ad A; erunt ea momenta ut $0by \times 0a$, $1by \times 1a$, $4by \times 2a$, $9by \times 3a$, &c. hoc eſt $000, 1aby, 8aby, 27aby$, &c. uſque ad ABY. Hoc eſt, omnia momenta, ſunt ſeries Tertianorum; Quæ Tertianorum ſeries, ad totidem maximo æqualia, hoc eſt ad maximum in altitudinem ductum, hoc eſt ad Cylindrum vel Priſma ejuſdem vel æqualis baſis æquealtum, ex puncto Y ſuſpenſum, eſt ut 1 ad 4. Quod dicamus igitur $\frac{1}{4}AABY$.

63. Eodem modo; Infinitæ rectæ Trapezii, à minima B, hoc eſt $\beta\upsilon$, ad uſque $B+B$, ſive $2B$, hoc eſt VP; ſunt $B+0$, $B+b$, $B+2b$, $B+3b$, &c, uſque ad $B+B$. Radii vero peripheriarum à mediis rectarum punctis deſcriptarum, ſunt $Z+0, Z+y, Z+2y, Z+3y$, &c. uſque ad $Z+Y$. Ex quibus ſeriebus invicem reſpective ductis fit ſeries magnitudinum, $BZ+0Z+0B+00, BZ+bZ+yB+by$, $BZ+2bZ+2yB+4by$, $BZ+3bZ+3yB+9by$, &c. uſque ad $BZ+BZ+YB+BY$. Quæ ſi ducantur in reſpectivas ſuas ab AF diſtantias $0, a, 2a, 3a$, &c. uſque ad A; fiet ſeries Momentorum

$$\begin{array}{l} 0BZ+000Z+00B+000 \\ aBZ+abZ+ayB+aby \\ 2aBZ+4abZ+4ayB+8aby \\ 3aBZ+9abZ+9ayB+27aby \end{array}$$

&c. uſque ad

$$ABZ+ABZ+AYB+ABY$$

Cujus ſumma eſt $\frac{1}{2}AABZ+\frac{1}{3}AABZ+\frac{1}{3}AAYB+\frac{1}{4}AABY$.
ſive $\frac{5}{6}AABZ+\frac{1}{12}AABY$.

64. Cum igitur ſit ratio momenti hujus ad momentum illius, ut $\frac{3}{8} AABZ + \frac{7}{12} AA\beta T$ ad $\frac{1}{4} AA\beta T$; hoc eſt (dividendo per AAB) ut $\frac{3}{8} Z + \frac{7}{12} T$ ad $\frac{1}{4} T$, ſive (ductis omnibus in 12) ut $10Z + 7T$ ad $3T$: Nempe, ut $10zZ + 7zY$ ad $3zY$, (eadem ſcilicet ratio quæ & ſupra §46,) Atque hoc ubique: Propter omnes $7zY$ ad $3zY$, ponenda ratio 7 ad 3; & propter $10zZ$ ad $3zY$, eadem quæ ſupra §46. Et quidem eandem utrobique rationem provenire neceſſe eſt, (utut variis modis libuerit inveſtigare:) Nam momentum ſolidi ex converſione ejuſdem figuræ circa AF reſpectu rectæ CF, atque circa CF reſpectu rectæ AF (propter magnitudinum & diſtantiarum reciprocationem) tantundem erit. Adeoque hinc habetur tum diſtantia centri gravitatis ſemiſolidi ex ſemicycloidis ſemiconverſione circa CF, à recta AF; tum integri iſtius ſolidi ipſiſſimum gravitatis centrum, utpote quod in CF ſitum eſſe conſtat.

65. Quantum autem ad diſtantiam centri gravitatis ejuſdem Semiſolidi (ex ſemiconverſione ſemicycloidis circa CF) ab ipſa CF: ſimili methodo inveſtiganda erit. Cum enim ſolidum ex ſemiconverſione Trianguli υFp circa CF, ſit aggregatum ſeriei $0by$, $1by$, $4by$, $9by$, &c. uſque ad BT, (ut ſupra §62:) Et ſolidum ex ſemiconverſione Trapezii $V\beta\gamma P$ circa eandem CF ſit aggregatum ſeriei $BZ + 0Z + 0B + 00$, $BZ + bZ + yB + by$, $BZ + 2bZ + 2yB + 4by$, $BZ + 3bZ + 3yB + 9by$, &c. (ut ſupra §63.) Si utraque ſeries ducatur in ſeriem ſuarum reſpective diſtantiarum à recta CF; (nempe illa, in $0, y, 2y, 3y$, &c. uſque ad T; & hæc, in $Z + 0$, $Z + y$, $Z + 2y$, $Z + 3y$, &c. uſque ad $Z + T$;) habebitur ſeries momentorum eorundem ſolidorum reſpectu lineæ æquilibrii CF. Unde & aggregati ad aggregatum ratio; hoc eſt, momenti Semiſolidi ex Triangulo, ad momentum ſemiſolidi ex Trapezio (circa CF converſo) reſpectu rectæ CF. Nempe

$0byy$	$BZZ + 0bZZ + 0yBZ + 0byZ + 0yyB + 0byy.$
$1byy$	$BZZ + 1bZZ + 2yBZ + 2byZ + 1yyB + 1byy.$
$8byy$	$BZZ + 2bZZ + 4yBZ + 8byZ + 4yyB + 8byy.$
$27byy$	$BZZ + 3bZZ + 6yBZ + 18byZ + 9yyB + 27byy.$
&c. uſque ad	&c. in infinitum uſque ad
BTT	$BZZ + BZZ + 2TBZ + 2BTZ + TTB + BTT.$
Summa $\frac{1}{4} ABTT$ ad ſummã	$ABZZ + \frac{1}{2} ABZZ + \frac{2}{3} ATBZ + \frac{2}{3} ABTZ + \frac{1}{3} ATTB + \frac{1}{4} ABTT.$
ſive $\frac{1}{4} ABTT$	ad $\frac{3}{3} ABZZ + \frac{2}{3} ABTZ + \frac{1}{12} ABTT.$
Eſt ut $\frac{1}{4} TT$	ad $\frac{3}{3} ZZ + \frac{2}{3} TZ + \frac{1}{12} TT.$
ſive ut $3TT$	ad $18ZZ + 20TZ + 7TT.$

Hoc eſt, ut 3 quadrata rectæ zY, ad 18 quadrata rectæ zZ una cum 20 rectangulis ZzY, & 7 quadratis zY. Quod cum ubique fiat: ut habeatur ratio momenti ſolidi ex ſemiconverſione omnium Trapeziorum, hoc eſt Semicycloidis, ad momentum ſolidi ex converſione omnium Triangulorum, hoc eſt Semicirculi, (circa rectam CF;) quærenda ratio tum omnium Quadratorum zZ Arithmetice proportionalium, tum omnium Rectangulorum ZzY, in reſpectiva Triangula υFp, ſive (propter æquales ubique υp) in reſpectivas Altitudines YF; ad omnia Quadrata zY in eadem reſpectiva ſive Triangula ſive Altitudines. Atque iſta demum ratio ſi ducatur in rationem 18 ad 3, ſive 6 ad 1; atque hæc quidem in rationem 20 ad 3; & utriſque tandem (ſic ductis) adjungatur ratio 7 ad 3: Habebitur ratio ea quam habet momentum ſolidi ex ſemiconverſione Semicycloidis circa CF, ad momentum ſolidi ex Semicirculi circa eandem CF ſemiconverſione, reſpectu ejuſdem CF lineæ æquilibrii. Unde ſi eximatur ratio magnitudinum; habebitur ratio diſtantiarum centrorum gravitatis. Fig. 1.

66. Similiter ſi ſumantur (in fig. 1 vel 8) omnes ZY æqualibus intervallis diſſitæ; ex quarum ſemiconverſione circa CF fit ſolidum Cycloidale, ſicut ex ſemiconverſione Semicirculi ſive omnium in eo ordinatim-applicatarum circa eandem rectam fit Hemiſphærium: Erit momentum illius ad momentum hujus, reſpectu ejuſdem CF rectæ, ut omnes cubi rectarum CY, ad omnes cubos rectarum zY: Hoc eſt, ut omnes $zZc + 3zZq \times zY + 3zZ \times zYq + zYc$, ad omnes zYc. Quæ quidem omnia ſimilibus methodis ad calculum revocanda ſunt atque ſuperiora.

67. Porro,

67. Porro. ſiquis de Segmentorum Circularium & Sphæricalium ſive Magnitudinibus ſive gravitatis Centris hæſitet, (quæ ſupra § 33, 40, dari ſupponimus,) ſic habeat. De circulo, nemo neſcit, ex ductu Semiradii in arcum z C vel z z haberi ſectorem z G C vel z G z; cui ſi auferatur Triangulum z G C, vel z G z, manebit ſegmentum z C vel z z C; (intellige, ſi z C z arcus non excedat Semiperipheriam; ubi enim excedit, non auferendum eſt, ſed addendum Triangulum z G z:) Tum, addendo Triangulum z F C vel z F z, haberi Sectorem z F C vel z F z. Et ſic alibi. Et in Sphæra ſimiliter, ſuperficies ſphærica z C z, abſciſſa plano z Y z eſt ad totam ſphæræ ſuperficiem, ſive quadruplum circuli maximi, ut C Y ad C F, (uti notum eſt:) ea vero ducta in trientem radii, dat ſectorem ſphæricum G z z C (factum ex converſione ſectoris circuli z G C circa G C;) unde ſublato cono G z z, manebit portio z z C; (intellige de portione quæ hemiſphærium non excedit; ſin excedat, addendus eſt, non auferendus, conus ille:) cui portioni ſi addatur conus F z z, habetur ſphæricus ſector F z z C, ſive ſolidum ex converſione ſectoris circularis z F C circa C F factum. Et ſimiliter de ſegmentis aliis.

Fig. 6.



68. Vel etiam idem Sector Sphæricus ſic colligi poterit non ineleganter: Inventis nempe tum circumducti Sectoris circularis magnitudine, ut ſupra, tum centro gravitatis, per § ſeq. Sector ille circularis ductus in peripheriam hujus centri converſione deſcriptam, dat ſectoris Sphærici magnitudinem. Sed & memorata ſuperficiei Sphæricæ portio plano abſciſſa, eodem modo colligi poterit: habitis nempe arcus z C tum magnitudine tum centro gravitatis: quippe arcus ille in peripheriam hoc centro circumducto deſcriptam ductus, dat illam ſuperficiei Sphæricæ portionem: (quæ quidem omnia, quod oppido notandum eſt, non tantum de converſionibus integris ſed & partialibus perinde valent;) unde non modo portiones jam dictæ, ſed & aliæ variis modis poſitæ, menſuræ ſubjiciuntur.

Figuræ in ſuperficie Sphærica.

Et quidem, ſuppoſita circuli quadratura, quæ hic ſupponitur, quadrabitur Figura quælibet in ſuperficie Sphæræ circulorum quorumvis (ſive minorum) arcubus terminata. Quod quamvis non ſit hujus loci fuſius proſequi, paucis tamen oſtendam. Nam 1. Poſſe figuram hanc quamcunque in Trilinea Sphærica circulorum peripheriis dirimi, manifeſtum eſt. 2. Trilinea hæc ſi ſint vera Sphærica Triangula (circulorum maximorum arcubus terminata) data ſunt: Quippe, ut Exceſſus quo angulorum in Triangulo Sphærico aggregatum ſuperat duos rectos, ad duos rectos; ſic Triangulum illud, ad Circulum in Sphæra maximum. 3. Si quod vero Trilineorum non ſit tale Triangulum Sphæricum; habetur tamen illius à Sphærico Triangulo, iiſdem punctis angularibus terminato, differentia, habitis Bilineis quæ circulorum maximi & minoris arcubus conterminis interjiciuntur. 4. Habetur autem hujuſmodi Bilineum, ſi intelligantur ab extremis arcus circuli minoris ad polum ſuum duci duos arcus circuli maximi: Qui, cum arcu illo circuli minoris, continebunt Trilineum Iſoſceles, cujus magnitudinem hic (§ 68.) exhibemus; Iidemque, cum contermino arcu circuli maximi, continent Triangulum Sphæricum; Quorum differentia, eſt Bilineum quæſitum. Adeoque, *Suppoſita circuli quadratura, quadrabitur figura quælibet in ſuperficie Sphæræ circulorum quorumvis arcubus terminata*; *non minus quam, in Plano, Figura rectilinea.* Quod nos, ni fallor, primi docemus.

Vel, vice verſa, Habitis tum portionis ſuperficiei Sphæricæ, tum & arcus circularis magnitudinibus, invenietur ipſius arcus centrum gravitatis. Centrum autem gravitatis arcus cujuſvis, in radio biſecante ſitum, diſtat à centro circuli ea radii parte quæ ſit ad radium integrum, ut iſtius arcus ſubtenſa ad ipſum arcum: Diſtat vero idem gravitatis centrum à diametro huic arcui contermina, ſimili ſemiſubtenſæ parte. Arcuum denique, ut C z, momenta, reſpectu conterminæ diametri, ut C F, ſunt ad invicem, ut eorum ſinus verſi, C Y. Sed hæc obiter, atque ex abundanti.)

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti Circularis.

69. De centro gravitatis in Segmentis circuli, res item conſtat. Cum enim, ob datam (quæ dari ſupponitur) rationem altitudinis ad baſin Cycloidis, hoc eſt, Diametri ad Circumferentiam circuli, detur etiam arcus (puta z C z fig. 6.) magnitudo; dabitur etiam ſegmenti centrum gravitatis. Nempe ſi fiat (in radio G C qui arcum biſecat) ut z C z arcus, ad ſui ſubtenſam z z; ſic $\frac{2}{3}$ radii, ad G E: erit

E cen-

E centrum gravitatis Sectoris z G z; sive Semicirculo majus sit, sive minus, sive æquale. [Quod quidem tum ab aliis, & nominatim Hugenio, demonstratum est; tum si opus est, sic more nostro poterit demonstrari: Si intelligatur G z C z Sector, ex æqualibus similibusque Triangulis numero infinitis conflari, quæ totidem radii repræsentent; per horum omnium centra gravitatis quæ transit curva, adeoque radiorum illorum duas tertias abscindit, erit similis arcus circuli radium habentis $\frac{2}{3}$ G C; cujus quidem arcus singula puncta (utpote æqualium triangulorum centra gravitatis) cum supponenda sint æque onerata, idem erit tum hujus arcus, tum expositi Sectoris, centrum gravitatis: Hujus autem arcus centrum gravitatis habetur, si fiat (quod modo dictum est & mox probabitur) ut arcus ille ad suam subtensam, (hoc est, ut arcus similis z C z, ad subtensam suam z z,) sic radius dicti arcus $\frac{2}{3}$ G C (nempe $\frac{2}{3}$ radii Sectoris expositi) ad quartam, quæ erit G E: Est itaque punctum E tum hujus arcus, tum propterea Sectoris expositi, centrum gravitatis: Quod ostendendum erat. Quod autem arcus centrum gravitatis illud est quod diximus; sic probatur. Quoniam parallela plana eadem ratione secant superficiem Sphæricam, qua secant axem, (quod ab Archimede & aliis demonstratum est;) Manifestum est, portionem superficiei Sphæricæ quæ arcu z C z Semicirculum non excedente circa b b axem converso describitur, eam rationem ad totam sphæræ superficiem habere, quam habet z z subtensa (vel axis portio huic respondens) ad b b axem integrum: Puta, ut axis $\mathcal{D}$, ad subtensam s; sic tota Sphæræ superficies $\mathcal{D}\mathcal{P}$, ad portionem arcu descriptam; quæ itaque est $s\mathcal{P}$. Quæ quidem portio si, per magnitudinem arcus a, dividatur, prodibit $\frac{s}{a}\mathcal{P}$ peripheria centro gravitatis istius arcus descripta, adeoque hujus peripheriæ radius, hoc est distantia centri gravitatis dicti arcus à centro circuli, $\frac{s}{a}R$: Nempe ea pars radii G C $= R$; quæ est ad totum, ut s ad a, subtensa dicti arcus ad ipsum arcum: Quod probandum suscepimus.] Et similiter de centro gravitatis Sectoris z G C (aut alius cujusvis) eodem processu constabit. Et speciatim, semicirculi centrum gravitatis, à circuli centro distat, $\frac{8R}{3\mathcal{P}}R$, sive $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$: Nempe ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D} = 2R$, sic $\frac{2}{3}R$ ad $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}} = \frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$. Datis vero Sectoris cujusvis z G C, & z C G trianguli, tum magnitudinibus tum centris gravitatis, datur etiam centrum gravitatis segmenti z C. Datis autem tum segmenti z C, tum trianguli z C Y, magnitudinibus & gravitatum centris, datur etiam centrum gravitatis aggregati z Y C. Et similiter de Sectoris z F C, aliusve, centro gravitatis constabit.

Fig. 6.

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti, Sphærici.

70. In portionibus Sphæræ, centrum gravitatis sic colligitur. Quadratum rectæ z Y fig. 6. æquat ubique quadratum Radii minus quadrato G Y, (quod patet.) Dicamus autem, ut alibi, Radium R, ejusque partem aliquotam infinite exiguam r. Erunt igitur quadrata omnium z Y (quadrantem b C G complentium) $R^2 - 0$, $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c. usque ad $R^2 - R^2$, (quod est punctum verticis C.) Sin pro Quadratis hisce substituamus ubique circulos, lateribus quadratorum ut Radiis descriptos, (adeoque quadratis illis proportionales:) pro omnibus R^2 habebimus circulos Cylindri, hemisphærio circumscripti; pro omnibus $00, r^2, 4r^2, 9r^2$, &c. Circulos Coni, cujus vertex G centrum Sphæræ, basis eadem cum base Cylindri, in plano quod Sphæram in C tangit; pro utrorumque vero differentiis $R^2 - 0, R^2 - r^2, R^2 - 4r^2, R^2 - 9r^2$, &c. Circulos hemisphærii, (quadratis utique rectarum z Y proportionales;) qui propterea æquales deprehenduntur planis annulis cylindri conice excavati: Sed & eadem habebunt gravitatis centra, (nempe respectiva puncta Y, in recta G C:) æquiponderabunt itaque tum singula singulis respective, tum omnia omnibus; idemque erit centrum gravitatis cylindri hujus conice excavati, atque hemisphærii: Nempe in eo axis hemisphærii puncto quo ita dividitur, ut pars ad centrum Sphæræ sit ad reliquam ut 3 ad 5, sive $\frac{3}{8}$ totius: Id enim ob datum tum Cylindri, tum exempti coni, magnitudines & gravitatis centra facile colligitur.

71. Vel sic. Cum circuli hemisphærium complentes, sint (quod modo dictum est) ut $R^2 - r^2, R^2 - 4r^2, R^2 - 9r^2$, &c. (hoc est, juxta nostram Arithmeticam

cam Infinitorum, ut ſeries Æqualium dempta ſerie Secundanorum, quæ ad correſpondentem ſeriem Æqualium, eſt ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, hoc eſt ut $\frac{2}{3}$ ad 1, ſive ut 2 ad 3; quæ itaque eſt ratio Hemiſphærii ad circumſcriptum Cylindrum;) ſintque eorundem Circulorum diſtantiæ à centro ſphæræ, ut r, $2r$, $3r$, &c. nempe ſeries Primanorum: Hæc diſtantiarum ſeries in ſeriem magnitudinum reſpective ducta, dat ſeriem $rR^2 - r^3$, $2rR^2 - 8r^3$, $3rR^2 - 27r^3$, &c. hoc eſt ſeriem Primanorum dempta ſerie Tertianorum, quæ ad correſpondentem ſeriem Æqualium eſt ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, hoc eſt ut $\frac{1}{4}$ ad 1, ſive ut 1 ad 4. Quæ quidem ſeries cum ſit momentis dictorum Circulorum reſpectu Centri ſphæræ proportionales, (quorum utique rationes ſunt ex rationibus magnitudinum & diſtantiarum compoſitæ;) erunt eorundem omnium in ſuis locis momenta, ad momenta totidem maximo æqualium in maxima diſtantia; hoc eſt, momentum Hemiſphærii in ſuo ſitu, ad momentum circumſcripti Cylindri ex puncto C ſuſpenſi, (reſpectu centri G;) ut 1 ad 4. Eſt autem magnitudo ad magnitudinem (quod jam oſtenſum eſt) ut 2 ad 3: Ergo, propter $\frac{2}{3}) \frac{1}{4} (\frac{3}{8}$, diſtantia ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Diſtat itaque centrum gravitatis Hemiſphærii à centro Sphæræ, $\frac{3}{8}$ Radii. Ut prius.

72. Et ſimili proceſſu (juxta utramvis methodum) de centro gravitatis in aliis Sphæræ partibus judicandum eſt. Nempe idem eſſe centrum gravitatis Segmenti Sphærici plano z z abſciſſæ, atque ſegmenti ſic excavati Cylindri eodem plano abſciſſæ. Sed & ſimiliter judicandum eſt de centro ſegmenti Sphærici duobus planis axi rectis interjecti: Et quidem ſive in eodem ſint ſive in oppoſitis Hemiſphæriis ea plana; ſi & circa reliquum Hemiſphærium conſtituatur Cylindrus ſimiliter excavatus. Cum itaque tum Cylindri, tum allati Coni vel fruſti conici magnitudines & centra gravitatis non ignorentur, nec ignorabitur centrum gravitatis figuræ excavatæ, adeoque nec Segmenti Sphærici planis quibuſcunque parallelis abſciſſi.

73. Datis autem ſegmenti Sphærici z z C (ſive hemiſphærium ſit, ſive majus aut minus hemiſphærio) tum magnitudine tum centro gravitatis; ſi eidem adjiciatur, vel auferatur, conus z z G, vel z z F, vel aliud quodvis ſolidum cujus tum magnitudo tum centrum gravitatis innoteſcunt; dabitur & aggregati vel reſidui centrum gravitatis. Et quidem, quantum ad Sectores Sphæricos, ut G z z C, ſunt illi reſpectivis ſuperficiei Sphærici ſegmentis z z C, adeoque & Y C rectis, proportionales; (æquales utique $\frac{1}{3}$ Radii in illam ſuperficiem ducto:) Suorumque centrorum gravitatis à centro circuli diſtantiæ, ſunt rectis G E (ſi intelligatur E punctum medium inter C & Y) proportionales; æquales utique $\frac{3}{4}$ G E. Idem nempe erit centrum gravitatis Sectoris Sphærici G z z C, atque ſegmenti ſuperficiei ſphæricæ ſegmento z z C ſimilis & concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C. Ut enim E (punctum medium rectæ C Y) eſt centrum gravitatis ſegmenti Superficiei ſphæricæ z z C (propter ſegmenta ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis Axis iiſdem planis abſciſſis ubique proportionalia;) ita Segmenti ſimilis concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C (cujus ſingula puncta, utpote conorum vel pyramidum totidem æqualium Sectorem Sphæricum complentium centra gravitatis, æqualiter onerari intelligenda ſunt) centrum gravitatis erit in ſuo radio ſimiliter ſitum. Quod ipſum eſt & centrum gravitatis Sphærici Sectoris, ſive pyramidum ſimul omnium numero infinitarum Sectorem illum complentium.

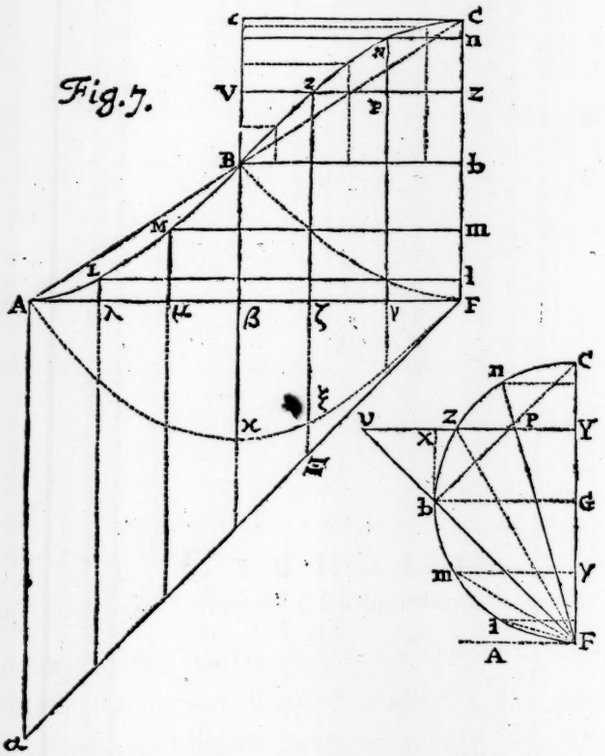
74. Quam ſuperius (§ 30.) ſuſcepimus rationem, $9AFq - 4CFq$ ad $2CFq$, oſtendendum; eam ſic inveſtigamus. Primo quidem cum Trilineum CZAFz fig. 1. in Semicycloide (propter Semicirculi interpoſitionem inter trilineum illud ejuſque axem CF) ſit diſtortum; intelligamus (exempto ſemicirculo) *trilineum illud reſtitui* in ſitum debitum, protruſis ſcilicet omnibus Z z ad rectam CF, ut puncta z coincidant punctis Y: & ſic ubique. (Quod tantundem eſt atque ſuperficiem curvam trilineam $r\zeta FzC$ fig. 2. in planum expandere.) Quo facto, rectæ ζZ &c. prius inclinatæ in Fig. 1. erigentur ut in Fig. 7. Exemptis nempe Trapeziorum omnium Triangulis (quæ Triangulis Semicirculi ubique æquantur) manebunt tantum Parallelogramma, Triangulorum illorum dupla: puta Parallelogrammum $VP\nu\beta$ in *Trilineo reſtituto*, duplum Trianguli νFp in Semicirculo, (& ſic ubique:) Ut eadem jam ſit ratio omnium z Z in hæc reſpectiva Parallelogramma, ad omnes z Y in eadem Parallelogramma; atque prius in ſua reſpective Triangula, vel horum eorumve altitudines.

Momentum ſemicycloidis reſpectu Axis, & ſolidum converſione circa Axem factum.

75. Cum, ſumptis Y, y, æqualiter utrinque à centro G remotis, altitudines binæ Fy FY ſimul ſumptæ æquent ubique F C, ſintque zY my æquales; erit ubique

$zY \times FY + my \times Fy = zY \times FC$. Sive, quod tantundem eſt, quadrilineum $M\mu\lambda L$ una cum quadrilineo $Z\zeta\nu N$, complent Parallelogrammum baſis $\zeta\nu$, altitudinis FC, (altero ſcilicet ſupplente quod in altero deeſt.) Adeoque perinde eſt ſive ducamus omnia Parallelogramma vel Quadrilinea Trilinei reſtituti CZAF in omnes reſpective rectas zY totius Semicirculi, ſive omnia minuta Parallelogramma Parallelogrammi $C\beta$ in omnes reſpective rectas zY unius quadrantis;

Fig. 7.



hoc eſt, in omnes ſinus rectos arcuum Arithmetice proportionalium in Quadrante; hoc eſt, in omnes reſpective rectas, æqualibus intervallis ſumptas, trilinei CBb ipſi Cb parallelas, incipiendo a B (quod ſtatim oſtendetur.) Hoc eſt, perinde eſt ſive ſuper baſe $AF\nu$, erigamus figuram altitudinum reſpective earundem cum trilineo reſtituto CAF: ſive ſuper baſe $F\beta\nu$, hoc eſt BbC, figuram altitudinis CF ubique; (poſito nimirum figuras tum $A\beta\nu$, tum $F\beta\nu$, figuræ BbC congruere.) Quod autem rectæ Trilinei CBb ſint arcuum Arithmetice proportionalium Sinus recti, ſic conſtat: Cum enim propter tum Semiperipheriam CbF, tum rectam AF, in partes æquales diviſam, omnes FY, hoc eſt omnes ζZ (trilinei CAF fig. 7.) ſint ſinus verſi arcuum Fz Arithmetice proportionalium totius Semiperipheriæ; erunt ſimiliter omnes GY (earundem exceſſus ſupra ſemidiametrum) hoc eſt, omnes rectæ trilinei BbC, arcuum bz Arithmetice proportionalium in bC quadrante, Sinus recti; (uti &, eadem ratione, Gy defectus rectarum FY ſive Fy à radio, hoc eſt rectæ trilinei ſimilis BbF, ſunt ſinus recti arcuum Arithmetice proportionalium quadrantis bF:) quod ſuſcepimus oſtendendum.

76. Eſt autem (ut calculus § 23. indicabit) priſmatis modo dicti, baſis BbC, æqualis R^2 quadrato radii circuli generantis. [Nam ſi ponatur punctum Y fig. 1. in centro circuli, ut G, erit tum $FY = R$, tum $zZ = zC = \frac{1}{4}\mathcal{P}$; adeoque $ZY = R + \frac{1}{4}\mathcal{P}$, quæ ſi in $\frac{3}{2}R$ ducatur, habetur $\frac{3}{2}R^2 + \frac{3}{8}R\mathcal{P}$ magnitudo quadrilinei ζZCF, hoc eſt, in hoc caſu, quadrilinei βBCF, fig. 1. unde ſi auferamus trapezium βBGF, hoc eſt, tum parallelogrammum $\beta BbF = GF \times \beta F = R \times \frac{1}{4}\mathcal{P} = \frac{1}{4}R\mathcal{P}$, tum triangulum $FbG = GF \times \frac{1}{2}bG = R \times \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R^2$, manebit $R^2 + \frac{1}{8}R\mathcal{P}$ magnitudo ſegmenti CGB; unde ſi iterum ſubducamus quadrantem

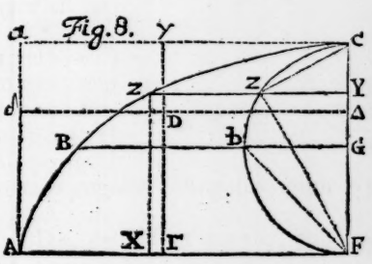
Fig. 1.

tem $CbG = \frac{1}{8}RP$, manebit R^2 magnitudo trilinei CbB fig. 1. hoc eſt CbB fig. 7.] Quæ quidem baſis $Bb\,C = R^2$ in altitudinem $FC = 2R$ ducta, dat $2R^3$ menſuram dicti Priſmatis; ſive aggregatum omnium zY in reſpectiva parallelogramma ductarum. Si autem pro omnibus zY, ſubſtituamus ubique peripherias his radiis (convertendo) deſcriptas; pro $2R^3$, prodibit $2R^2P$. [Quod quidem eſt triplum Sphæræ circuli genitoris: (quod hinc oritur, quia tum parallelogramma $V\beta\nu P$ ſunt triangulorum $\nu F p$ dupla, tum zY diſtantia mediæ baſis trianguli, eſt $\frac{2}{3}$ diſtantiæ centri gravitatis Trianguli à converſionis axe CF; adeoque $\frac{2}{3} \times 2 = 3$:) Sicut &, iiſdem de cauſis, $2R^3$ triplum Momenti Semicirculi reſpectu rectæ CF, eſt Momentum omnium parallelogrammorum ſic ſuſpenſorum. Quod & in ſolidis, mutatis mutandis, perinde valet. Verbi gratia. Si intelligatur tum ſuper Trilineo reſtituto CAF, tum ſuper ſemicirculo CbF, inſiſtere corpus Cylindricum ſive Priſmaticum eodem plano oblique ſectum, ita ut in puncto F & recta AF altitudinem habeat nullam, & in C maximam; atque intelligantur ſingula priſmata parallelogrammis ut $V\beta\nu P$ incumbentia ſuſpendi in diſtantiis zY reſpective: erunt eorum omnium Priſmatum ſic ſuſpenſorum pondus, ad pondus pyramidum triangulis $\nu F p$ incumbentium, hoc eſt ad pondus portionis cylindri ſemicirculo inſiſtentis, reſpectu rectæ CF; ut 2 ad 1. Cum enim Parallelogrammorum Priſmata ſint ſigillatim ad Triangulorum Pyramides, ut 3 ad 2; atque zY diſtantia ſuſpenſi Priſmatis, ſive diſtantia mediæ baſis Pyramidis, eſt ad diſtantiam centri gravitatis iſtius Pyramidis, ut 4 ad 3; erit quæ ex his componitur ratio 2 ad 1. (propter $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque pondus ſic ſuſpenſorum Priſmatum, erit ponderis Pyramidum in ſuo ſitu, hoc eſt ponderis dictæ portionis cylindri, (reſpectu rectæ CF,) duplum. Et ſimiliter alibi. Sed hæc obiter hic loci, quorum tamen uſus eſſe poterit in ſequentibus. Redimus ad ſuſpenſa Parallelogramma.]

77. Si vero eadem trilinei reſtituti CAF Parallelogramma $V\beta\nu P$ fig. 7. ducantur in omnes reſpective rectas zZ arithmetice proportionales (quippe arcubus Arithmetice proportionalibus æquales:) hoc eſt in omnes parallelas rectas Trianguli $FA\alpha$ (quarum maxima $A\alpha = AF$;) habebitur portio Priſmatis, baſin CAF altitudinem $A\alpha$ habentis, oblique abſciſſa plano per baſis lineam CF & verticis punctum α tranſeunte; (quæ quidem portio exhibebit momentum dicti trilinei CAF reſpectu rectæ CF.) Sin pro trianguli rectis $A\alpha$ &c. (ut pridem pro rectis $\beta\kappa$ &c.) ſumantur aliæ quæ ad has ſint ut peripheriæ circuli ad ejuſdem radium; abſciſſa priſmatis portio æqualis erit ſolido ex Trilinei CAF converſione circa CF facta; (tunc enim Triangulum $FA\alpha$ æquale fiet circulo radii FA; reliquaque reſpective triangula reliquis circulis parallelis:) Quod ſolidum, tantiſper dum iſtius magnitudo innoteſcat, appellabimus A^3.

78. Solidum igitur ex omnibus Triangulis $\nu F p$ &c. vel Parallelogrammis $V\beta\nu P$ &c. in reſpectivas rectas zZ, vel peripherias his radiis deſcriptas; ad ſolidum ex iiſdem triangulis vel parallelogrammis in reſpectivas rectas zY, vel peripherias his radiis deſcriptas; eſt ut A^3, ad $2R^2P$, (per § 76, 77:) Adeoque noncuplum iſtius ad duplum hujus ut $9A^3$ ad $4R^2P$: Cui ſi addatur ratio 5 ad 2, ſive $10R^2P$ ad $4R^2P$; habebitur ratio ſolidi ex converſione Semicycloidis, ad ſolidum ex converſione Semicirculi, (circa axem CF,) ut $9A^3 + 10R^2P$ ad $4R^2P$, per § 30.

79. Porro, eorundem Solidorum ad invicem ratio ſic alias colligitur. Solidum ex converſione Semicycloidis (Fig. 1. vel 8.) ad Solidum ex converſione Semicirculi, (circa axem CF,) eſt, ut omnes circuli radiorum ZY (æqualibus ab invicem intervallis ſumptorum,) ad omnes circulos radiorum zY reſpective; hoc eſt, ut omnia quadrata ZY, ad omnia quadrata zY; hoc eſt, ut omnia $zZq + 2 \square ZzY + zYq$ ad omnia zYq.



80. Sed omnia zYq (per prop. 133, 135. *Arithm. Infin.*) æquant $\frac{1}{8}D^3$, vel $\frac{1}{3}R^3$. (Sunt enim omnes ordinatim applicatæ in ſemicirculo, ut ſeries $\sqrt{:aD - a^2}$: adeoque earum quadrata, ut ſeries $aD - a^2$: quæ eſt ad ſeriem æqualium,

nempe $\mathcal{D}^2$ toties ſumptum, hoc eſt, ad $\mathcal{D}^3$; ut $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$, ad 1; ſive ut 1 ad 6.)

81. Item omnia rectangula Z z Y, æquantur ſolido cylindrico, baſem habenti ſemicirculum C b F, altitudines vero z Z reſpective ſumptas, hoc eſt (propter z Y = m y, & Z z + M m = A F = N n + L l, &c.) ſolido Cylindrico habenti balin G b F quadrantem, altitudinem vero ubique A F; hoc eſt $\frac{1}{16}R\mathcal{P}^2$: (quod fit ex $\frac{1}{8}R\mathcal{P}$ quadrante circuli genitoris, in A F = $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ducto:) Adeoque omnium rectangulorum dupla, ſive 2 ▯ Z z Y, ſunt $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2$.

82. Sunt igitur $\frac{2}{3}R^3+\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2$ (hoc eſt, omnia z Y q + 2 ▯ Z z Y,) una cum omnibus z Z q, æqualia omnibus quadratis Z Y. Et (pro radiorum quadratis ſubſtituendo circulos, hoc eſt, dividendo per R & multiplicando per $\frac{1}{2}\mathcal{P}$,) erunt $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3$ una cum omnibus circulis radiorum z Z (æqualibus intervallis ſumptorum,) hoc eſt, una cum ſolido ex converſione trilinei reſtituti C A F fig. 7. circa C F, hoc eſt una cum A^3; nempe $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3+A^3$, æqualia ſolido ex converſione ſemicycloidis circa C F: cujus itaque ratio ad ſphæram circuli genitoris (ex converſione ſemicirculi circa eandem rectam C F factam) eſt ut $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3+A^3$ ad $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$.

83. Verum eadem ratio ſuperius reperta eſt (§ 78) ut $9A^3+10R^2\mathcal{P}$ ad $4R^2\mathcal{P}$, hoc eſt (dividendo utrinque per 6,) ut $\frac{3}{2}A^3+\frac{5}{3}R^2\mathcal{P}$ ad $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$: quam jam reperimus (§ 82) ut $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3+A^3$ ad $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$. Sunt igitur $\frac{3}{2}A^3+\frac{5}{3}R^2\mathcal{P}=\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3+A^3$. Adeoque (ſubductis utrinque æqualibus) $\frac{1}{2}A^3+R^2\mathcal{P}=\frac{1}{16}\mathcal{P}^3$. Hoc eſt, $A^3=\frac{1}{8}\mathcal{P}^3-2R^2\mathcal{P}$. (Hoc eſt A F in A F q − C F q. fig. 1. vel 8.) Habemus itaque magnitudinem ſolidi ex converſione Trilinei reſtituti C A F fig. 7. circa C F, (nempe $\frac{1}{8}\mathcal{P}^3-2R^2\mathcal{P}$;) Adeoque ipſius rationem ad Sphæram circuli genitoris (hoc eſt, ad $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$,) nempe ut $\frac{1}{8}\mathcal{P}^2-2R^2$ ad $\frac{2}{3}R^2$, ſive ut $\frac{3}{4}\mathcal{P}^2-12R^2$ ad $4R^2$, hoc eſt, ut 3 A F q − 3 C F q ad C F q. [Atque eadem eſt ratio momenti iſtius Trilinei, ad momentum ſemicirculi, reſpectu C F rectæ. Eſt utique illud $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2-2R^3$; momentum autem Semicirculi $\frac{2}{3}R^3$:) Adeoque (dividendo per magnitudinem Trilinei $\frac{1}{2}R\mathcal{P}$) diſtabit centrum gravitatis Trilinei ab F C, $\frac{1}{4}\mathcal{P}-\frac{4R^2}{\mathcal{P}}$; & à β B, $\frac{4R}{\mathcal{P}}R$. Diſtat autem (per ſuperius tradita) ab A F, $\frac{3}{4}R$: Cum enim momentum Trilinei ad momentum Semicirculi (reſpectu A F rectæ) ſit ut 3 ad 2, & magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 1; erit propter $\frac{2}{1})\frac{3}{2}(\frac{3}{4}$, diſtantia ad diſtantiam ut 3 ad 4. Diſtantia autem centri gravitatis ſemicirculi, eſt R; Ergo diſtantia centri gravitatis Trilinei ab A F eſt $\frac{3}{4}R$.]

84. Cum igitur $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$ æquetur Sphæræ circuli genitoris; erit (per § 82) $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3+A^3$, hoc eſt, $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}\mathcal{P}^3+\frac{1}{8}\mathcal{P}^3-2R^2\mathcal{P}$, hoc eſt $\frac{3}{16}\mathcal{P}^3-\frac{4}{3}R^2\mathcal{P}$, æquale ſolido ex converſione Semicycloidis circa rectam C F.

85. Vel etiam (per § 78,) cum ejuſdem ſolidi ad Sphæram ratio, ſit, ut $9A^3+10R^2\mathcal{P}$ ad $4R^2\mathcal{P}$, hoc eſt, ut $\frac{3}{2}A^3+\frac{5}{3}R^2\mathcal{P}$ ad $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$; ſitque $\frac{2}{3}R^2\mathcal{P}$ æquale Sphæræ: erit etiam $\frac{3}{2}A^3+\frac{5}{3}R^2\mathcal{P}$, hoc eſt $\frac{3}{16}\mathcal{P}^3-3R^2\mathcal{P}+\frac{5}{3}R^2\mathcal{P}$, hoc eſt $\frac{3}{16}\mathcal{P}^3-\frac{4}{3}R^2\mathcal{P}$, æquale ſolido ex converſione Semicycloidis circa rectam C F, ut prius.

86. Similiter, cum (per § 78) ratio omnium z Z Arithmetice proportionalium, in reſpectiva Triangula υ F p, ad correſpondentes omnes z Y in eadem Triangula, ſit ut A^3 ad $2R^2\mathcal{P}$; hoc eſt, $\frac{1}{8}\mathcal{P}^3-2R^2\mathcal{P}$ ad $2R^2\mathcal{P}$, ſive ut $\frac{1}{8}\mathcal{P}^2-2R^2$ ad $2R^2$, vel $\frac{1}{4}\mathcal{P}^2-4R^2$ ad $4R^2$; (hoc eſt, ut A F q − C F q ad C F q:) Adeoque noncuplum illius ad duplum hujus, $9A^3$ ad $4R^2\mathcal{P}$; hoc eſt, ut $\frac{9}{8}\mathcal{P}^3-18R^2\mathcal{P}$ ad $4R^2\mathcal{P}$, ſive ut $\frac{9}{4}\mathcal{P}^2-36R^2$ ad $8R^2$; (hoc eſt ut 9 A F q − 9 C F q ad 2 C F q:) Si adjungatur ratio 5 ad 2, ſive $20R^2$ ad $8R^2$: Habetur iterum ratio $\frac{9}{4}\mathcal{P}^2-36R^2+20R^2=\frac{9}{4}\mathcal{P}^2-16R^2$, ad $8R^2$: Hoc eſt 9 A F q − 4 C F q ad 2 C F q. Quod ſupra (§ 30) ſuſcepimus demonſtrandum.

Momentum ſolidi circa A F reſpectu C F, & circa C F reſpectu rectæ A F.

87. Oſtenſum eſt ſupra (§ 46,) Momentum ſolidi ex converſione (vel ſemiconverſione) Semicycloidis circa A F (fig. 1.) reſpectu rectæ C F, ad momentum ſolidi annularis ex converſione, (vel ſemiconverſione) ſemicirculi C b F circa eandem A F reſpectu ejuſdem C F rectæ; eſſe, ut 7 ad 3, atque inſuper ut *decuplum* momenti ſolidorum ex tali converſione Triangulorum υ F p in diſtantiis z Z ſuſpenſorum, ad *triplum* momenti eorundem ſolidorum in diſtantiis z Y reſpective ſuſpenſorum. Cujus rationis inveſtigationem ſic aggredimur. Omnes z Z (æquales arcubus in ſemicirculo Arithmetice proportionalibus) in reſpectiva ſolida ex ſic

conver-

converſis triangulis υ F p, ad omnes z Y (arcuum illorum ſinus rectos) in eadem reſpective ſolida; Hoc eſt (propter υ p ubique æquales) omnes illæ z Z in quadrata altitudinum F Y (hoc eſt, ſinuum verſorum reſiduorum arcuum,) ad omnes illas z Y in eadem reſpective quadrata; ſunt, ut momenta omnium circulorum (vel cylindrulorum) Z ζ (æqualibus intervallis ſumptorum) converſione trilinei reſtituti C A F fig. 7. circa A F factorum, ſuſpenſorum in diſtantiis ζ ϖ (trianguli F A α) hoc eſt z Z (trilinei reſtituti;) ad momenta eorundem circulorum (vel cylindrulorum) ſuſpenſorum in diſtantiis ζ ξ (bilinei F α κ;) Hoc eſt, ut momentum ſolidi ex converſione Trilinei reſtituti C A F (circa A F) reſpectu rectæ C F, ad *duplum* momenti annuli ex ſimili converſione C b F ſemicirculi reſpectu C F rectæ. (Dico, ad *duplum* momenti annuli; propter, tum magnitudinem ſolidi ex converſione Parallelogrammi in trilineo, ad magnitudinem ſolidi ex converſione correſpondentis Trianguli in ſemicirculo, ut 3 ad 2; tum z Y diſtantiam mediæ baſis, ad diſtantiam centri gravitatis ſolidi ex triangulo ſic converſo, ut 4 ad 3: Eſt autem $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque *decuplum* omnium z Z in dicta ſolida vel quadrata, ad *triplum* omnium z Y in eadem ſolida vel quadrata; erit, ut *decuplum* momenti ſolidi ex converſione Trilinei reſtituti (circa A F) reſpectu rectæ C F ad *ſextuplum* momenti ſolidi ex ſimili converſione ſemicirculi reſpectu C F rectæ; ſive, ut *quintuplum* illius, ad *triplum* hujus. Fig. 7.

88. Eſt autem Annulus converſione Semicirculi factus, $\frac{1}{4} R \mathcal{P}^2$, (ex ductu nempe ſemicirculi $\frac{1}{4} R \mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ peripheriam centri converſione deſcriptam;) qui quidem ductus in $\frac{8 R^2}{3 \mathcal{P}}$ (diſtantiam centri gravitatis ſemicirculi, adeoque & annuli ſemicirculi converſione facti, à recta C F,) dat $\frac{2}{3} R^3 \mathcal{P}$, momentum annuli reſpectu rectæ C F: (cujus itaque triplum eſt $2 R^3 \mathcal{P}$.) Momentum autem ſolidi converſione Trilinei reſtituti C A F circa A F, reſpectu C F rectæ, dicamus aliquantiſper B^4. Quintuplum igitur hujus, ad Triplum illius, eſt ut $5 B^4$ ad $2 R^3 \mathcal{P}$: Cui rationi ſi adjungatur ratio 7 ad 3, ſive $\frac{14}{3} R^3 \mathcal{P}$ ad $2 R^3 \mathcal{P}$, habetur ratio momenti ſolidi ex converſione Semicycloidis ad momentum ſolidi ex converſione ſemicirculi (circa A F) reſpectu rectæ C F; nempe $5 B^4 + \frac{14}{3} R^3 \mathcal{P}$ ad $2 R^3 \mathcal{P}$, vel $15 B^4 + 14 R^3 \mathcal{P}$ ad $6 R^3 \mathcal{P}$.

89. Sed (quod § 64 dictum eſt) eadem plane ratio eſt momenti, reſpectu rectæ A F, ſolidi ex converſione (vel ſemiconverſione) Semicycloidis circa C F, ad momentum ſolidi ex ſimili converſione (vel ſemiconverſione) ſemicirculi, reſpectu ejuſdem A F lineæ æquilibrii. Quod hinc evenit, quia eædem rationes utrobique componuntur; cum hoc ſaltem diſcrimine, quod duæ magnitudines reciprocantur; nempe Z Y quæ in hoc ſolido ingreditur compoſitionem ſolidi, in altero notat diſtantiam à linea æquilibrii; contra vero recta F Y.

90. Hæc autem eadem ratio ſic alias colligitur. Nempe (ſumptis rectis Z Y fig. 8. æqualiter ab invicem diſtantibus,) momentum illud ſolidi ex converſione Semicycloidis, ad momentum ſolidi ex ſimili converſione Semicirculi, eſt ut momentum omnium Circulorum radiis Z Y deſcriptorum, ad momentum omnium circulorum deſcriptorum radiis z Y; hoc eſt, ut momentum omnium $z Z q + 2 \square Z z Y + z Y q$, ad momentum omnium z Y q, (reſpectu ejuſdem A F rectæ:) hoc eſt, ut momentum reſpectu ejuſdem A F rectæ ſolidi ex converſione trilinei reſtituti C A F fig. 7. circa C F (quod, propter quantitatum reciprocationem, æquipollet iſti quod jam diximus B^4) una cum momento ſolidi ex ſemicirculo ſic converſo (quod æquipollet nuper invento $\frac{2}{3} R^3 P$, § 88,) atque inſuper momento ſolidi ex converſione plani cujus rectæ ſint mediæ proportionales inter Z z z Y (quod dicamus C^4) bis ſumpto; ad momentum ſphæræ ex ſimili converſione ſemicirculi, reſpectu ejuſdem A F rectæ: Hoc eſt, ut $B^4 + 2 C^4 + \frac{2}{3} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$.

91. Cum igitur hæc ratio $B^4 + 2 C^4 + \frac{2}{3} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$ (§ 90) hoc eſt, $9 B^4 + 18 C^4 + 6 R^3 P$ ad $6 R^3 P$, eadem ſit atque illa (§ 88,) $15 B^4 + 14 R^3 P$ ad $6 R^3 \mathcal{P}$; erit $9 B^4 + 18 C^4 + 6 R^3 \mathcal{P} = 15 B^4 + 14 R^3 P$; adeoque $18 C^4 = 6 B^4 + 8 R^3 \mathcal{P}$, ſive $9 C^4 = 3 B^4 + 4 R^3 \mathcal{P}$. Hoc eſt, $C^4 = \frac{1}{3} B^4 + \frac{4}{9} R^3 \mathcal{P}$. Unde cognito vel B^4 vel C^4, reliquum cognoſcetur.

92. Ut autem habeamus B^4, hoc eſt, momentum ſolidi ex converſione Trilinei reſtituti C A F fig. 7. circa A F, reſpectu rectæ C F, (vel circa C F, reſpectu A F, quæ tantundem ſunt:) Primo pro omnibus circulis radiorum ζ Z, ſubſtituamus totidem triangula rectangula ſuper ipſas ζ Z baſes conſtituta, & altitudines (in

ipſis Z punctis) baſibus æquales habentia; adeoque portionem priſmatis plano oblique ſecti complentia, baſin habentis trilineum illud C A F, altitudinem vero in A F nullam, ſed continue creſcentem donec ad punctum C altitudinem obtineat æqualem ipſi F C rectæ; adeoque ad ſingula baſis puncta altitudinem habeat æqualem eorundem ab A F diſtantiæ. Quæ quidem Triangula, tum magnitudine, tum & momento reſpectu C F rectæ, ſunt reſpectivis illis circulis proportionalia.

93. Deinde in hujus priſmaticæ portionis baſi C A F, duci intelligamus curvam B F, curvis B C & B A omnino ſimilem. Cui B F curvæ, intelligatur erecta ſuperficies curva inſiſtere, dirimens portionem illam priſmatis in duo ſegmenta; quorum alterum trilineo B F A, alterum trilineo B F C, inſiſtant. Quorum ſegmentorum momentum, reſpectu C F rectæ, ſic ſeorſim inquirimus.

94. Eſt utique (per § 23. ut ſupra § 76. oſtenſum eſt) Trilineum B b C $= R^2$: adeoque Trilineum B F C (quippe iſtius duplum) $2R^2$. Hujus autem centrum gravitatis in recta B b jacere, manifeſtum eſt; adeoque ipſius ab A F diſtantia eſt $R =$ b F. Quæ quidem diſtantia R in magnitudinem $2R^2$ ducta, dat $2R^3$, momentum dicti trilinei B F C, reſpectu A F rectæ: (Adeoque æquale plane ejuſdem momento reſpectu B b, ut ex § 99 patet.) Sed & (propter portionis altitudines, ut dictum eſt, diſtantiis punctorum quibus inſiſtunt ab A F æquales; adeoque altitudinem ſuper baſis centrum gravitatis, æqualem rectæ b F $= R$;) idem $2R^3$ eſt magnitudo priſmaticæ portionis trilineo B F C inſiſtentis.

95. Eſt autem totius C A F trilinei, momentum reſpectu A F, (adeoque & priſmaticæ portionis toti inſiſtentis magnitudo,) $\frac{3}{8}R^2P$; (nempe $\frac{3}{2}$ momenti ſemicirculi, per § 24:) unde ſi auferatur momentum trilinei B F C, hoc eſt $2R^3$, (per præced.) manebit $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ momentum trilinei B F A reſpectu ejuſdem A F rectæ: (unde, ſi opus eſt, colligetur diſtantia centri gravitatis dicti Trilinei B F A ab A F recta, nempe $\frac{3P - 16R}{4P - 16R} R$ quod provenit ex diviſione momenti $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$; per trilinei magnitudinem $\frac{1}{2}RP - 2R^2$; adeoque ejuſdem centri à B b diſtantia, eſt $\frac{P}{4P - 16R} R$; quæ nempe cum illa altera complet rectam B $\beta = R$.) Quod ipſum $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ (ob cauſam modo dictam) eſt etiam magnitudo portionis priſmaticæ eidem B F A trilineo inſiſtentis.

96. Hujus autem priſmaticæ portionis (trilineo B F A inſiſtentis) centrum gravitatis in recta B β jacere, manifeſtum eſt. Eſt itaque ejuſdem a C F diſtantia, β F $= \frac{1}{4}P$. Quæ quidem diſtantia in portionis magnitudinem $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ ducta, dat $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{1}{2}R^3P$, momentum dictæ portionis (trilineo B F A inſiſtentis) reſpectu C F rectæ.

97. Porro, cum (per § 94) portio priſmatis trilineo B F C inſiſtentis ſit $2R^3$; æquipolleat autem, tum magnitudine tum & momento reſpectu C F rectæ, priſmati ſuper eadem baſe, altitudinem mediam habenti; hoc eſt, æqualem ei quam habet dicta portio ſuper baſis ſuæ centrum gravitatis, hoc eſt, altitudinem R: Centrum gravitatis dictæ portionis tantundem à C F recta diſtabit (ſeu potius ab æquilibrii plano ſuper hanc rectam erecto; quod hic loci nobis perinde eſt; quod & ſimiliter alibi ubi opus eſt intellectum volo,) quantum inde diſtat centrum gravitatis æquipollentis priſmatis; hoc eſt, quantum ab eadem C F diſtat centrum gravitatis Trilinei B F C. Quod quantum ſit, ſic inquirimus.

98. Trilineum, totum C A F, eſt $\frac{1}{2}RP$ (nempe duplum Semicirculi per § 22) unde ſi auferamus trilineum B F C, hoc eſt, $2R^2$ (per § 94) manebit $\frac{1}{2}RP - 2R^2$ æquale trilineo B F A; cujus trilinei centrum gravitatis (in recta B β ſitum) à recta C F diſtat $\frac{1}{4}P$. Quæ diſtantia, in $\frac{1}{2}RP - 2R^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{2}R^2P$, momentum trilinei B F A reſpectu C F rectæ. Fig. 7.

99. Totius autem C A F trilinei reſpectu ejuſdem C F, momentum eſt $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$, (per § 83; cum enim ſolidum ex converſione circa C F, ſit $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$; erit, ſubſtituendo radios pro peripheriis, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$ momentum plani.) Unde ſi auferamus $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{2}R^2P$ (momentum trilinei B F A, per præced.) manebit $\frac{1}{2}R^2P - 2R^3$ momentum trilinei B F C. Quod momentum ſi per trilinei magnitudinem $2R^2$ dividatur, prodibit $\frac{1}{4}P - R$ diſtantia centri gravitatis dicti Trilinei B F C à recta C F. (adeoque R ejuſdem diſtantia à puncto B.)

100. Cum igitur diſtantia centri gravitatis, tum B F C trilinei, tum & (§ 97) portionis

portionis trilineo huic insistentis à CF, sit $\frac{1}{4}P - R$; sitque dictæ portionis magnitudo (per § 94) $2R^3$: Erit istius, respectu CF, momentum $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$.

101. Huic itaque momento, si adjungamus $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{1}{2}R^3P$ (momentum portionis trilineo BFA insistentis, respectu rectæ CF, per § 96,) habetur $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$ momentum totius portionis trilineo CAF insistentis, respectu rectæ CF. Sin porro, pro triangulis § 92 substitutis, restituamus circulos, (dividendo per R, & multiplicando per P,) habebitur $\frac{3}{32}RP^3 - 2R^3P = B^4$, momentum solidi ex conversione trilinei CAF circa AF, respectu rectæ CF. Quod § 92 proponitur inquirendum.

102. Invenimus autem (§ 88) momentum solidi ex conversione semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione semicirculi (circa AF) respectu rectæ CF; esse, ut $15B^4 + 14R^3P$ ad $6R^3P$; sive ut $\frac{5}{3}B^4 + \frac{14}{9}R^3P$ ad $\frac{6}{3}R^3P$: Hoc est, (propter $B^4 = \frac{3}{32}RP^3 - 2R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{10}{3}R^3P + \frac{14}{9}R^3P = \frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$, ad $\frac{2}{3}R^3P$. (Quod § 46, 87, suscepimus ostendendum.) Est autem $\frac{2}{3}R^3P$ momentum annuli ex ea conversione semicirculi: Ergo & $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ est momentum solidi ex dicta conversione semicycloidis (circa AF) respectu ejusdem CF. Quod momentum si per solidi magnitudinem $\frac{5}{8}RP^2$ (per § 24) dividatur, prodibit $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$ distantia centri gravitatis dicti solidi (ex conversione semicycloidis circa AF) à recta CF: (adeoque $\frac{128R^2}{45P}$, ejusdem centri distantia à recta Bb.) *Centrum Gravitatis Solidi circa AF.*

103. Si vero intelligatur idem Semicycloidis planum circa CF converti; momentum solidi inde facti respectu AF rectæ, (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem,) idem plane erit atque momentum jam inventum solidi ex ejusdem plani circa AF conversione, respectu rectæ CF, (ut supra § 64, & 89. dictum est:) nempe $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$. Quod momentum, si per magnitudinem dicti solidi dividatur, hoc est, per $\frac{3}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$ (per § 85.) prodibit $\frac{45P^2 - 512R^2}{54P^2 - 384R^2}R$, distantia centri gravitatis istius solidi à recta AF. (vel $\frac{9P^2 + 128R^2}{54P^2 - 384R^2}R$ ejusdem distantia à BG.) *Centrum Gravitatis Solidi circa CF.*

104. Possunt hæc eadem item inferri ex § 90. Cum enim ratio momenti solidi ex conversione Semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione Semicirculi, circa AF ut axem, respectu CF ut lineæ æquilibrii; vel, circa CF ut axem, respectu AF ut lineæ æquilibrii; ibidem esse ostenditur, ut $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; hoc est, (propter $B^4 = \frac{3}{32}RP^3 - 2R^3P$, per § 101, & $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{8}{9}R^3P$, per § 91; adeoque $2C^4 = \frac{2}{3}B^4 + \frac{8}{9}R^3P = \frac{2}{32}RP^3 - \frac{4}{3}R^3P + \frac{8}{9}R^3P = \frac{1}{16}RP^3 - \frac{4}{9}R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; (omnino ut supra § 102:) habentur inde tum solidorum momenta, tum centrorum gravitatis distantiæ à respectivis æquilibrii lineis, eodem plane modo quo § 102, 103.

105. Sed & simul colligitur tum momentum (respectu rectæ AF) tum centri gravitatis distantia, solidi cujus omnia plana sunt ipsa ZzY rectangula, hoc est solidi cylindrici basin habentis semicirculum CbF, altitudines vero Zz (fig. 7. vel 8.) respective. Cum enim (§ 90.) ponatur C^4 momentum solidi ex circulis radiorum $\sqrt{:}$ Zz×zY: qui sunt itaque ad rectangula ZzY vel Zz×zY, ut circulus ad quadratum radii, hoc est ut $\frac{1}{2}P$ ad R, sive ut P ad $2R$; sitque (per præced.) $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{4}{9}R^3P = \frac{1}{32}RP^3 - \frac{2}{9}R^3P$: Si pro circulis substituantur radiorum quadrata (dividendo per P & multiplicando per $2R$,) habebitur $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$ momentum dicti solidi (ex omnibus ZzY rectangulis) respectu rectæ AF. Est autem solidi hujus magnitudo $\frac{1}{16}RP^2$ (æqualis utique Cylindro quadrantali, cujus basis bGF quadrans, altitudo $FA = \frac{1}{2}P$; vel Semicylindro cujus basis CbF Semicirculus, altitudo $\frac{1}{2}AF = \frac{1}{4}P$; propter duas ubique altitudines, à medio utrinque æque remotas, rectæ FA simul æquales:) Per quam magnitudinem si dividatur momentum, prodibit, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$ distantia centri gravitatis à recta AF: adeoque $\frac{64R^2}{9P^2}R$ ejusdem distantia à bG. Fig. 8.

106. At,

106. At, quantum ad rectam CF, vel planum huic insistens; æquipollet, ut magnitudine, sic & momento, Semicylindro ejusdem basis, & altitudinis dimidiæ. Adeoque momentum habet $\frac{1}{6}R^3P$, & $\frac{8}{3}\frac{R^2}{P}$ distantiam centri gravitatis à CF: Nempe dummodo intelligatur Semicirculo CbF recte insistere.

Quæ autem de *Cycloide* primaria ostensa sunt, eadem omnia aliis *Cycloidum* generibus, sive protractis sive abbreviatis facile applicantur. Id siquidem solum interest, ut pro Zz rectis ubique substituantur aliæ quæ sint ad has in eadem ratione qua Basis *Cycloidis* ad Peripheriam Circuli generantis.

Pars Secunda.

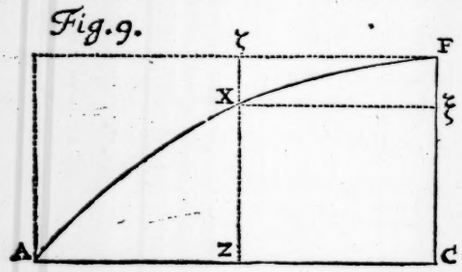
Centrum curvæ CA. Fig. 1. 8. * *Vide ad calcem hujus.*

§ 1. AD centrum gravitatis curvæ semicycloidis AC fig. 1. hoc est AC fig. 8. inveniendum, assumo tanquam à D. Wren * demonstratum, tum curvam CA duplam esse rectæ CF, tum ubique CZ curvam rectæ Cz duplam esse. Adeoque posita recta $Cz = a$, erit correspondens curva $CZ = 2a$. Et propterea, sumptis chordis circuli Cz Arithmetice proportionalibus, erunt item correspondentes curvæ CZ Arithmetice proportionales; & curva CA in punctis Z in æquales partes divisa.

2. Harum vero partium æqualium (quas supponamus numero infinitas, & totidem Z punctis designatas) distantia ab AF recta est ubique $FY = \frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$. Nam, propter similia triangula, ut $FC = \mathcal{D}$, ad $Fz = \sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$: sic eadem $Fz = \sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$: ad FY, quæ igitur est $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$. (Exponendo nempe quantitatem a successive per 1, 2, 3, &c. quarum maxima sit $\mathcal{D}$.)

Centri distantia ab AF. 3. Si igitur curvæ CA fig. 8. æqualis extendatur recta CA fig. 9. quæ intelligatur similiter divisa in punctis Z: atque à punctis Z erigi intelligantur ZX rectæ, respectivis distantiis FY æquales; perque omnia puncta X duci curvam AXF: Exhibebunt tum singulæ rectæ ZX fig. 9. (respectivis ZX fig. 8. æquales) singularum Z partium æqualium, in curva CA fig. 8. momenta respectu AF rectæ; tum omnes omnium. Adeoque omnium Z partium æqualium, hoc est totius curvæ CA fig. 8. momentum in suo situ, respectu AF rectæ, est ad momentum æqualis lineæ in distantia FC maxima suspensæ, (hoc est, ad momentum maximum toties sumptum,) ut trilineum AFC fig. 9. ad sibi circumscriptum parallelogrammum: Hoc est, ut semiparabola (quod mox ostendetur § 6.) ad circumscriptum parallelogrammum; sive ut 2 ad 3. Et consequenter, centrum gravitatis curvæ CA fig. 8. distabit ab AF recta, duabus tertiis rectæ CF, sive $\frac{2}{3}\mathcal{D}$.

Fig. 9.



NB. In citationibus § notat paragraphos hujus partis, & § paragraphos partis præcedentis.

Centrum segmentorum curvæ CA. 4. Et similiter de segmenti cujusvis tum momento, tum centro gravitatis judicandum erit: Habent utique momenta partium curvæ CA fig. 8. respectu AF rectæ, eam inter se rationem, quam respectivæ partes semiparabolæ AFC fig. 9. rectis diametro parallelis abscissæ: quamque habent hæ parabolæ partes ad respectivas partes parallelogrammi circumscripti, eam habent distantiæ centrorum gravitatis earundem partium (ab AF recta) ad totam FC.

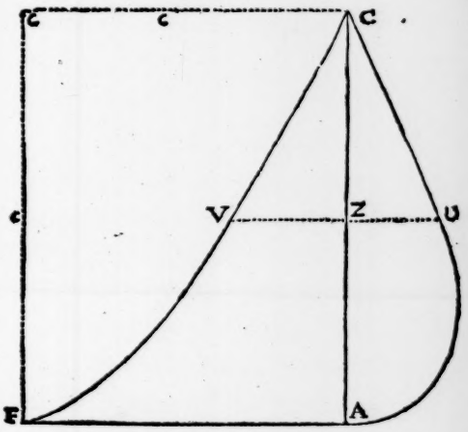
Superficies circa AF descripta. 5. Si vero pro singulis rectis ZX fig. 9. hoc est radiis circulorum punctis Z fig. 8. circa AF rectam conversis descriptorum, substituantur ubique rectæ quæ sint ad has ut circuli peripheria ad ejusdem radium: Hoc est, si semiparabola quæ basin jam habet $AC = 2\mathcal{D}$, & altitudinem $CF = \mathcal{D}$, intelligatur, super eadem

eadem baſe conſtituta, altitudinem habere $4AF=2\mathcal{P}$; eſſet ea ſemiparabola æqualis ſuperficiei converſione curvæ CA fig. 8. circa AF rectam deſcriptæ; (nempe $\frac{8}{3}\mathcal{DP}$, ſive $\frac{32}{3}$ circuli genitoris:) ejuſque partes reſpectivæ reſpectivis partibus hujus æquales.

6. Quod autem FXA fig. 9. ſit Parabola, ſic oſtenditur. Rectæ ZX ſunt ubique ut $\frac{\mathcal{D}^2-a^2}{\mathcal{D}}$ per $\backsim$ 2. Hoc eſt, ut $\mathcal{D}^2-a^2$; adeoque reſiduæ $X\zeta$, hoc eſt ξF diametri, ubique ut a^2; hoc eſt in duplicata ratione ZC, hoc eſt $X\xi$ ordinatim applicatarum. Quod Parabolæ proprium eſt.

7. Porro, ejuſdem curvæ CA fig. 8. diviſæ ut prius in punctis Z, omnium punctorum Z (ſeu partium æqualium his punctis deſignatarum) diſtantiæ à CF, ſunt ZY, hoc eſt $Zz+zY$. *Centri curvæ diſtantia à CF.*

8. Adeoque ſi curvæ CA fig. 8. æqualis extendatur recta CA fig. 10. ſimiliter diviſa; atque per diviſionum puncta Z ducantur rectæ $VZ\upsilon$, ita quidem ut ZV fig. 10. ſint reſpectivis zZ fig. 8. æquales, & $Z\upsilon$ reſpectivis zY: exhibebunt hæ rectæ $VZ\upsilon$ ſingulæ ſingulorum curvæ punctorum Z momenta reſpectu rectæ CF fig. 8. adeoque omnes omnium. Hoc eſt, figura $FVC\upsilon A$ momentum totius AC curvæ (reſpectu rectæ CF,) & illius partes, partes reſpectivas hujus.



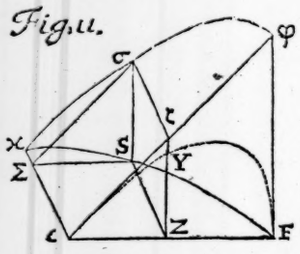
9. Cum vero rectæ CZ fig. 10. hoc eſt CZ curvæ fig. 8. ſint ut Cz chordæ in ſemicirculo æqualiter creſcentes, hoc eſt, ut ſinus recti in quadrante creſcentes æqualiter, puta ut BV in trilineo BCc fig. 7. (ſi nempe intelligatur cB in punctis V æqualiter diviſa:) ipſæque rectæ ZV fig. 10. hoc eſt zZ fig. 8. ſive arcus zC, hoc eſt arcus chordarum in ſemicirculo (vel ſinuum in quadrante) arithmetice proportionalium, ut rectæ VZ trilinei BCc fig. 7. (Nam ſicut recta Zz fig. 7. hoc eſt recta Zz fig. 8. æquatur arcui ZC, ſic recta ZV fig. 7. quæ una cum Zz complet totam $Vz=Bb$, hoc eſt bC arcum quadrantalem, æquatur arcui ad quadrantem reſiduo Zb, cujus ſinus rectus eſt $zb=BV$ fig. 7. adeoque omnes VZ trilineum BCc fig. 7. complentes, æqualibus diſtantiis ſumptæ, ſunt ut arcus ſinuum arithmetice proportionalium in quadrante, ſive chordarum æqualiter creſcentium in ſemicirculo; hoc eſt, ut Zz fig. 8. correſpondentes punctis Z æqualibus intervallis in curva CA ſumptis:) Erunt omnes VZ trilinei CZAF fig. 10. ad FA toties poſitam, hoc eſt trilineum illud ad circumſcriptum parallelogrammum; ut trilineum BCc fig. 7. ad parallelogrammum circumſcriptum ſibi. (Et illius partes partibus hujus reſpective ſumptis proportionales.) Fig. 7.

10. Trilinei autem BCc fig. 7. (aut etiam partis hujus cujuſlibet) menſura, habetur ex calculo § 23. Eſt enim $Bb=\frac{1}{4}\mathcal{P}$, & $bC=R$; ergo parallelogrammum $BbCc=\frac{1}{4}R\mathcal{P}$: trilineum autem $BCb=R^2$ (ut § 76 dictum eſt,) ergo trilineum reliquum $BCc=\frac{1}{4}R\mathcal{P}-R^2=\frac{1}{8}\mathcal{DP}-\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$; (Hoc eſt $\frac{1}{4}AF-\frac{1}{4}CF$ in CF.) Unde & trilinei CFA menſura colligitur; quippe ipſius octupla, (propter $AF=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $AC=2\mathcal{D}=4R$, adeoque parallelogrammum $FC=2R\mathcal{P}$,) nempe $2R\mathcal{P}-8R^2$, vel $\mathcal{DP}-2\mathcal{D}^2$. (Et partium ſimiliter menſura, mutatis mutandis, eodem modo colligitur.) Momentum itaque curvæ CZA fig. 8. reſpectu rectæ CF, quantum ad diſtantias Zz, eſſet ad ejuſdem curvæ momentum in diſtantia FA ſuſpenſæ; ut CZAF fig. 10. ad circumſcriptum parallelogrammum hoc eſt, ut $\mathcal{DP}-2\mathcal{D}^2$ ad $\mathcal{DP}$, ſive ut $\mathcal{P}-2\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}$; hoc eſt, ut $AF-CF$ ad AF.

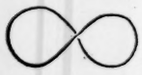
11. Tum vero, quantum ad diſtantias zY fig. 8. (quæ ſimul cum Zz complent integras ZY,) hoc eſt, $Z\upsilon$ (bilinei $AC\upsilon$) fig. 10. Cum rectæ CZ fig. 10. hoc

Fig. 10. est curvæ CZ fig. 8. sint ut chordæ $Cz = a$: erunt respectivæ zY : ($= Z\upsilon$ fig. 10.) $= \frac{a\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2}{D}$: Nam (propter similia triangula) ut $CF = D$, ad $Cz = a$, sic $zF = \sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$: ad $zY = \frac{a\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2}{D}$. Qui itaque est character rectarum $Z\upsilon$ bilinei $AC\upsilon$ fig. 10. posita recta Cz (fig. 8.) $= a$. adeoque curva CZ fig. 8. hoc est, recta CZ fig. 10. $= 2a$.

Fig. 11.



12. Hujus autem Bilinei, hoc est omnium simul $Z\upsilon$, mensura sic colligitur. Omnes $\sqrt{:}D^2 - a^2$: sunt ut ordinatim applicatæ in Circuli vel Ellipseos quadrante. Adeoque si radio $\mathcal{D} = FC$ describatur circuli quadrans $CF\varkappa$ fig. 11. ipsius omnes rectæ ZS, radio $C\varkappa$ parallelæ, sunt $\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$: (ponendo $Cz = a$.) Deinde, si super hoc circuli quadrante erigatur quadrans Cylindri recti, altitudinem habens $F\varphi = CF = \mathcal{D}$, qui oblique secetur plano $\varphi C\varkappa$; & abscissa portio secetur plano super ZS recta erecto : sectio $Z\sigma$ erit parallelogrammum, cujus basis $ZS = \sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$, altitudo $Z\zeta = Cz = a$; adeoque ipsum parallelogrammum $Z\sigma = a\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$. Cumque hæc omnia parallelogramma numero infinita, portionem Cylindri complentia, sint respectivis rectis $Z\upsilon$ fig. 10. proportionalia, (ut quæ ad eandem $\mathcal{D} = CF$ applicata, dant ipsas $Z\upsilon = \frac{a\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$.) Si fiat ubique ut CF fig. 11. ad $Cz = z\zeta$, sic zS ad zY; erunt omnes rectæ zY fig. 11. æquales respectivis rectis $Z\upsilon$ fig. 10. Neque aliter differt Bilineum $AC\upsilon$ fig. 10. à Bilineo FCY fig. 11. quam quod (propter rectam AC duplam rectæ FC) alterum sit alterius duplum. (Et partes illius respectivarum partium hujus duplæ.) Est autem CYF curva, curvæ hujusmodi in se, post decussationem in itinere, recurrentis) pars quarta.



13. Sed & pari ratione Bilinei FCY fig. 11. segmenta CzY, sunt Cylindricæ portionis segmentis $Cz\sigma$ proportionalia. Totumque Bilineum FCY, ad quadratum rectæ CF, eam habet rationem quam exposita portio Cylindrica ad ejusdem rectæ CF cubum. Adeoque ut 1 ad 3. Sunt enim omnia triangula $\Sigma S\sigma$ (triangulo $CF\varphi$ parallela & similia) portionem Cylindri complentia, ad totidem triangulo $CF\varphi$ æqualia, ut omnia quadrata ΣS, ad omnia quadrata CF cubum rectæ CF complentia; nempe ut omnia $\mathcal{D}^2 - a^2$ ad totidem $\mathcal{D}^2$, hoc est ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3. (Vel, quod eodem redit, ut omnes circuli radiorum ΣS ad totidem circulos radii CF; hoc est, ut hemisphærium ad circumscriptum Cylindrum; hoc est, ut 2 ad 3, ut prius:) Adeoque omnia triangula $\Sigma S\sigma$ (quadratorum dimidia) portionem complentia, hoc est ipsa portio cylindrica, ad eundem rectæ CF cubum, ut 1 ad 3. Et consequenter, Bilineum FCY fig. 11. ad eundem CF quadratum, ut 1 ad 3: Et Bilineum $AC\upsilon$ fig. 10. (prioris duplum) ad idem quadratum, ut 2 ad 3. Hoc est, $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2$, sive $\frac{8}{3}R^2$.

14. Et simile de partibus fiet judicium. Cum enim triangula $\Sigma S\sigma$ fig. 11. sint ad invicem ut circuli in hemisphærio; erit portionis segmentum $\Sigma S\sigma\varkappa$, ad totam portionem, ut respectivum hemisphærii segmentum plano abscissum, ad totum hemisphærium; adeoque magnitudinis notæ: Cui portionis segmento $\Sigma S\sigma\varkappa$, si addatur prisma $\Sigma S\sigma\zeta zC$, habetur segmentum $\varkappa S\sigma\zeta zC$; adeoque & ipsius ratio ad $\mathcal{D}^3$ cubum diametri circuli genitoris: hoc est, ratio segmenti CzY, tum ad totum bilineum FCY, tum ad quadratum rectæ CF. (Bilinei autem istius FCY, latitudo maxima, sive maxima altitudo ratione basis FC, est $R = \frac{1}{2}CF$, quæ quidem illic contingit, ubi sumitur $Cz = CF\sqrt{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}\sqrt{\frac{1}{2}}$; hoc est, ubi Cz ad CF est, ut sinus rectus graduum 45, ad Radium: quod tamen ad præsens negotium cognitu non videtur necessarium.) Potest autem idem etiam sic colligi. Cum $z\sigma$ parallelogramma, sint ubique rectarum zS momentis, respectu rectæ $C\varkappa$, proportionalia, (ut patet;) Erunt $\varkappa S\sigma\zeta zC$ segmenta, tum inter se, tum ad totam $\varkappa\varphi FC$ portionem, ut momenta planorum $\varkappa SzC$ respectu rectæ $\varkappa C$, tum inter se, tum ad momentum $\varkappa FC$ quadrantis respectu ejusdem $\varkappa C$, (quam § 67 & seqq.

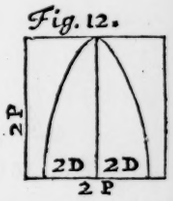
exhibendam

exhibendam docuimus;) eadem igitur & ratio planorum CYz. Et quidem, cum omnium rectarum zS, illa maximum, respectu Cα rectæ, sortiatur momentum quæ grad 45 subtendit; ea similiter quæ huic correspondet erit omnium zY maxima, adeoque bilinei CFY verticem designabit.

15. Cum igitur habeamus (fig. 10.) tum Trilineum CZAF $= 2RP - 8R^2$ per $\sim$ 9, 10; tum Bilineum CA$\upsilon = \frac{8}{3}R^2$, per $\sim$ 13: Eorum aggregatum $2RP - \frac{16}{3}R^2$, æquatur facto ex omnibus particulis curvæ CA fig. 8. in suas respective distantias ZY. Tota vero curva CA $= 2\mathcal{D} = 4R$, in rectam AF $= \frac{1}{2}P$ ducta, est $2RP$. Momentum igitur curvæ CA fig. 8. in suo situ, ad momentum ejusdem ex puncto A suspensæ (respectu CF rectæ) est ut $2RP - \frac{16}{3}R^2$ ad $2RP$, vel ut $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$ ad $\frac{1}{2}P$; hoc est, ut AF $- \frac{2}{3}$CF, ad AF. Adeoque centrum gravitatis curvæ CA fig. 8. à recta CF distat, ea parte rectæ FA quæ sit ad totam ut FA $- \frac{2}{3}$FC ad FA. Hoc est, (ducta Aα rectæ FC parallela,) ab Aα distat, $\frac{2}{3}$FC $= \frac{2}{3}\mathcal{D}$: Tantundem scilicet quantum supra invenimus ($\sim$ 3.) ab AF distare. Adeoque sumptis tum Aδ, tum AΓ, $= \frac{2}{3}$CF, ductisque $\delta\Delta$, $\Gamma\gamma$, (rectis AF, FC, parallelis,) se decussantibus in D, erit D centrum gravitatis CAF fig. 8. Fig. 10.

16. Sin porro, pro rectis omnibus ZV & Zυ fig. 10. substituantur aliæ quæ ad has sint ut peripheria circuli ad ejusdem radium; adeoque pro $2RP - \frac{16}{3}R^2$ (quæ est magnitudo figuræ ex trilineo & bilineo fig. 10. compositæ,) substituatur $2P^2 - \frac{16}{3}RP$; habetur superficies quæ ex conversione curvæ CA fig. 8. circa CF describitur. Æquat itaque duo quadrata basis integræ Cycloidis (hoc est, peripheriæ circuli genitoris) minus $\frac{32}{3}$ genitoris circuli. Adeoque cum, per $\sim$ 5, superficies ejusdem conversione circa AF descripta sit $\frac{32}{3}$ genitoris circuli,) superficies duæ ab eadem curva CA fig. 8. descriptæ, (altera circa AF, altera circa CF,) simul sumptæ, æquant præcise duo quadrata basis integræ Cycloidis sive peripheriæ genitoris circuli. Puta, si, ut in fig. 12. intra semissem quadrati cujus latus intelligatur $= 2P$, describatur semiparabola æque alta, basin habens $2\mathcal{D}$; dirimetur semiquadratum illud in duas partes, quarum altera uni, altera reliquæ, superficierum illarum curvarum æquatur. Sin converti intelligatur, illic tota ACD, semicycloidis AC dupla; hic vero ejusdem item dupla, nempe AC infra basin continuata donec productæ CF occurrat; pro semiparabola & semiquadrato, integra prodibunt parabola & quadratum. *Superficies conversione circa CF descripta.*

Fig. 12.



17. Completo autem parallelogrammo Fα fig. 8. Quæ CA curva, circa Aα conversa, describitur superficies, est æqualis ei quæ ab eadem circa AF conversa describitur; (propter Aδ = AΓ:) Quæ autem ab eadem circa Cα conversa describitur, est dimidia illius quæ describitur conversione circa AF; (propter DΓ duplam rectæ Dγ.) Et universaliter superficies quæ à curva CA circa quamvis rectam (quæ ipsam non secet) conversa describitur, eam rationem habet ad harum quamlibet, vel quamvis aliam sic descriptam, quam inter se habent distantiæ puncti D ab illis rectis. Et quidem (nam & hoc adjungere non erit forsan incommodum) si circa rectam quæ ipsam secet convertatur eadem CA curva; *Differentia* superficierum, quam ea pars curvæ quæ ex uno rectæ secantis latere sita est describit, & quam (vel quas, si binis punctis secet,) describit illius curvæ residuum ex altero secantis latere positum, eam habet rationem ad superficiem circa superius memoratarum rectarum quamvis descriptam, (puta quæ circa AF,) quam habet distantia istius rectæ ad distantiam hujus à centro gravitatis D. Quodque de superficiebus tota curva descriptis dictum est, superficiebus ipsius parte quavis descriptis similiter accommodabitur, invento prius (per jam tradita) istius partis centro gravitatis.

18. Absoluto jam opere de gravitatis centro, tum curvæ semicycloidis CA fig. 8. tum partium ejus, inquirendo; deque superficiebus istius conversione, tum circa AF, tum circa CF, descriptis: de superficierum harum centris gravitatis inquirendum. Incipiemus autem ab ea superficie quæ conversione circa rectam AF describitur. Peripherias autem hanc complentes, adeoque & semiperipherias complentes illius semissem, à singulis curvæ punctis descriptas, proportionales esse diximus ($\sim$ 3.) semiparabolæ rectis ZX fig. 9. diametro parallelis. Earundem autem semiperipheriarum Momenta respectu rectæ AF, cum ex ratione tum magnitudinum *Superficiei semiconversione circa AF factæ, centrum quantum ab AF distat.* Fig. 9.

tudinum tum diſtantiarum centrorum gravitatis dependeant, ſintque hæ ipſæ centrorum diſtantiæ ab AF recta ipſarum peripheriarum radiis, adeoque & magnitudinibus, proportionales; erunt ea momenta in radiorum ratione duplicata; hoc eſt, in duplicata ratione rectarum ZX fig. 9. ſemiparabolæ diametro parallelarum; hoc eſt, in ratione circulorum radiis illis deſcriptorum. Adeoque ea omnia momenta, ad totidem maximo æqualia; hoc eſt, momentum ſuperficiei quæ hac curvæ CA ſemiconverſione deſcribitur, in ſuo ſitu, ad momentum ſuperficiei Cylindricæ ex æqualis rectæ in diſtantia FC ſemiconverſione, eſt ut ſolidum ex converſione ſemiparabolæ circa baſin ſuam, ad cylindrum ex converſione circumſcripti parallelogrammi circa eandem baſin, deſcriptum; Hoc eſt, ut 8 ad 15 (per Prop. 119. Arithm. Infin.) ſuperficierum autem magnitudo ad magnitudinem eſt ut 2 ad 3 (per ∽ 3. Ergo, propter $\frac{2}{3})\frac{8}{15}(\frac{4}{5}$, centrorum gravitatis diſtantia ad diſtantiam ut 4 ad 5. Diſtantia igitur centri gravitatis, dempta curvatura ſemicirculari, eſſet $\frac{4}{5}$FC, $=\frac{4}{5}\mathcal{D}$. Sed, propter illam curvaturam, ſumendum adhuc, ut ſemiperipheria ad diametrum, ſive ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D}$, ſic $\frac{4}{5}\mathcal{D}$ ad quartam, $\frac{8\mathcal{D}^2}{5\mathcal{P}}$, quæ itaque eſt diſtantia centri gravitatis ſuperficiei ex ſemiconverſione curvæ CA circa AF, ab AF; nempe ea pars rectæ FC fig. 8. quæ eſt ad totam, ut 8 FC ad 10 FA. (Et quidem ſimili proceſſu facile eſſet idem indicare in aliis integræ converſionis datis partibus; puta non modo in ſemiconverſione, ſive $\frac{1}{2}$ converſionis integræ, ſed etiam in $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. vel $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$, &c. integræ converſionis: Nempe ſumpta rectæ $\frac{4}{5}$FC ea parte quæ ſit ad ipſam $\frac{4}{5}$FC, ut chorda ad arcum converſionis.)

Fig. 8.

Quantum diſtat à CF. Fig. 9, 10.

19. Ut autem ejuſdem centri diſtantia à recta FC (fig. 8.) habeatur; componendæ ſunt rationes rectarum ZX fig. 9. atque Vυ fig. 10. (quarum quidem illæ notant diſtantias punctorum Z fig. 8. à recta FA, hæ vero eorundem ab FC diſtantias.) Hoc eſt, propter $V\upsilon = ZV + Z\upsilon$, componendæ ſunt rationes illæ ZX, tum cum ZV, tum etiam cum Zυ; quæque emergunt binæ rationes compoſitæ, ſunt conjungendæ; earumque aggregata, ſunt rationes momentorum peripheriarum, vel ſemiperipheriarum, punctis Z fig. 8. circa FA deſcriptarum, reſpectu rectæ FC.

20. Rationes autem rectarum ZX, hoc eſt $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$, cum rationibus Zυ, hoc eſt $\frac{a\surd:\mathcal{D}^2 - a^2:}{\mathcal{D}}$ compoſitæ, ſunt ut $\frac{a\mathcal{D}^2 - a^3}{\mathcal{D}^2} \times \surd:\mathcal{D}^2 - a^2:$ (nempe, ut rectangula ex ductu rectæ ZX fig. 9. in Zυ fig. 10.) Quæ omnia ad $\mathcal{D}^2$ toties ſumptum, hoc eſt (propter AC $= 2\mathcal{D}$) ad $2\mathcal{D}^2$: ſunt ut 1 ad 5; (quod ſeorſum probabitur ∽ 52 & ſeqq.) Adeoque ſolidum ex Bilineo AC υ fig. 10. in altitudines reſpectivas ZX fig. 9. eſt $\frac{2}{5}\mathcal{D}^2$.

21. Rationes vero rectarum; ZX fig. 9. cum rationibus ZV fig. 10. compoſitæ; ſunt rationes rectangulorum rectis ZV ZX contentorum; hoc eſt rectarum ZV in $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$ reſpective ductarum; ſive in $\mathcal{D} - \frac{a^2}{\mathcal{D}}$.

22. Omnes autem ZV in $\mathcal{D}$; hoc eſt, trilineum CZAF in $\mathcal{D}$; hoc eſt (per ∽ 10.) $\mathcal{D}\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^2$ in $\mathcal{D}$; eſt, $\mathcal{D}^2\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^3$. Unde ſi auferamus omnes ZV in $\frac{a^2}{\mathcal{D}}$, hoc eſt $\frac{1}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{6}{9}\mathcal{D}^3$ (ut deinceps oſtendetur ∽ 25. & ſeqq.) manebit $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{14}{9}\mathcal{D}^3$, quod itaque eſt ſolidum ex Trilineo CZAF fig. 10. in altitudines reſpectivas ZX fig. 9. ducto.

23. Huic igitur ſolido, ſi addatur ſolidum ex Bilineo CAυ in eaſdem reſpectivas altitudines ducto, nempe $\frac{2}{5}\mathcal{D}^3$ (per ∽ 20;) aggregatum $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{14}{9}\mathcal{D}^3 + \frac{2}{5}\mathcal{D}^3 = \frac{2}{3}\mathcal{D}^2 P - \frac{52}{45}\mathcal{D}^3$, eſt ſolidum ex Trilineo Cυ AF fig. 10. in altitudines ZX fig. 9. reſpective ducto; ſive ex omnibus Vυ fig. 10. in reſpectivas ZX fig. 9. ſive ex omnibus ZY in ZX fig. 8. reſpective.

24. Quam autem rationem habet hoc ſolidum (ex omnibus ZX fig. 9. in Vυ fig. 10. reſpective,) ad ſolidum ex ſemiparabola FAC (hoc eſt, omnibus, ZX) fig. 9. in AF fig. 8. ubique ducta, hoc eſt, ad $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$: (nam propter AC $= 2\mathcal{D}$, & CF $= \mathcal{D}$, adeoque rectangulum ACF $= 2\mathcal{D}^2$, erit ea ſemiparabola $\frac{4}{3}\mathcal{D}^2$, quippe $\frac{2}{3}$ rectanguli; quæ ſemiparabola, ducta in FA $= \frac{1}{2}\mathcal{P}$, dat $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ magnitudinem

dinem ſolidi, ſive priſmatis parabolici:) Eam habet momentum ſuperficiei, in ſuo ſitu, quæ fit ea ſemiconverſione curvæ CZA fig. 8. circa AF, reſpectu rectæ CF, (hoc eſt, factum ex ſemiperipheriis, ipſis ZX proportionalibus, in diſtantias Vv, hoc eſt ZY, reſpective,) ad momentum ejuſdem ſuperficiei ex puncto A ſuſpenſæ, (hoc eſt, ad factum ex iiſdem ſemiperipheriis in diſtantiam AF ubique.) Et conſequenter, eadem eſt ratio diſtantiæ centri gravitatis ejuſdem ſuperficiei à recta FC, ad diſtantiam FA. Nempe ut $\mathcal{P} - \frac{26}{15}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}$. Fig. 10.

25. Quod autem omnes ZV in $\frac{a^2}{\mathcal{D}}$, ſit $\frac{1}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{4}{5}\mathcal{D}^3$, ſic pedetentim oſtendetur. Omnes ZV fig. 10. in $4a^2$, hoc eſt (propter $CA = 2\mathcal{D}$) in reſpectiva quadrata diſtantiarum CZ; ad eaſdem omnes in quadratum CA; ſunt ut momentum (reſpectu rectæ cC) portionis priſmatis in ſuo ſitu, oblique plano ſecti, ſuper trilineo CZAF erectæ altitudinem habentis in puncto C nullam, at ſuper AF recta æqualem rectæ CA; ad momentum (reſpectu ejuſdem cC) integri priſmatis ſuper eadem baſe, altitudinem habentis rectæ AC æqualem, ex puncto A ſuſpenſi. (Omnes enim ZV ductæ tum in $CZ = 2a$ propter diſtantiam, tum iterum in eandem $CZ = 2a$ propter altitudinem diſtantiæ æqualem, tantundem eſt atque in $4a^2$: & ſimiliter, eædem omnes ductæ tum in altitudinem maximam, tum iterum in maximam diſtantiam, tantundem eſt atque in quadratum AC ductæ.) Hoc eſt, (propter binarum figurarum parallelas rectas proportionales,) ut momentum ejuſmodi portionis priſmatis ſuper trilineo BcC fig 7. in ſuo ſitu, ad momentum ſimilis priſmatis integri ex puncto C ſuſpenſi, reſpectu rectæ Bb. Quam rationem ſic inveſtigamus. Fig. 7.

26. Diſtantia Centri gravitatis Trilinei BbC fig. 7. & conſequenter trilinei BcC, à recta Bb, ſic colligitur. Quadrantis GbC fig. 1. vel 8. centrum gravitatis à recta Gb diſtat $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$, (quantum ſcilicet à centro circuli diſtat centrum gravitatis ſemicirculi;) à recta igitur AF diſtat, $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}} + \frac{1}{2}\mathcal{D}$; quæ diſtantia in ejuſdem quadrantis magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{1}{24}\mathcal{D}^3 + \frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, momentum quadrantis GbC reſpectu rectæ AF; cui ſi addatur momentum trianguli GbF, (factum utique ex magnitudine in diſtantiam centri gravitatis) $\frac{1}{24}\mathcal{D}^3 = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{2}{3}R$; habetur $\frac{1}{12}\mathcal{D}^3 + \frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ momentum ſectoris FbC reſpectu AF rectæ.

27. Eſt autem momentum quadrilinei BβFC fig. 1. ad momentum dicti ſectoris FbC (reſpectu ejuſdem AF rectæ) ut 5 ad 2 (per § 26;) Adeoque momentum quinquilinei BβFbC fig. 1. hoc eſt quadrilinei BβFC fig. 7. ad idem ſectoris momentum, ut 3 ad 2; adeoque $\frac{1}{8}\mathcal{D}^3 + \frac{3}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$.

28. Unde ſi auferatur momentum parallelogrammi BF; nempe $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P} \times \frac{1}{4}\mathcal{D} = \frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, manebit $\frac{1}{8}\mathcal{D}^3 + \frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ momentum trilinei BbC (fig. 1. vel 7.) reſpectu rectæ AF.

29. Hoc autem momentum, per trilinei hujus magnitudinem $R^2 = \frac{1}{4}\mathcal{D}^2$ diviſum, dat $\frac{1}{2}\mathcal{D} + \frac{1}{16}\mathcal{P}$ diſtantiam centri gravitatis dicti trilinei BbC ab AF recta; Adeoque $\frac{1}{16}\mathcal{P}$ ejuſdem diſtantiam à Bb: Et conſequenter $\frac{1}{4}\mathcal{D}^2 \times \frac{1}{16}\mathcal{P} = \frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ momentum dicti trilinei BbC reſpectu rectæ Bb.

30. Quod quidem momentum $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, ſi ex Parallelogrammi BC momento $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P} \times \frac{1}{4}\mathcal{D} = \frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ auferatur; manebit $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ momentum trilinei BcC reſpectu ejuſdem Bb. (Idem utique atque momentum trilinei BbC reſpectu ejuſdem Bb.)

31. Quod denique trilinei BcC momentum, per ejuſdem magnitudinem $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P} - \frac{1}{4}\mathcal{D}^2$ diviſum, dat $\frac{\mathcal{D}\mathcal{P}}{8\mathcal{P} - 16\mathcal{D}}$ diſtantiam centri gravitatis dicti BcC trilinei à recta Bb. Quæ itaque eſt ea pars rectæ $bC = \frac{1}{2}\mathcal{D}$, quæ eſt ad totam $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, ut $2\mathcal{P}$ ad $8\mathcal{P} - 16\mathcal{D}$, ſive $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $2\mathcal{P} - 4\mathcal{D}$; hoc eſt, ut AF ad $4AF - 4FC$. Quod ∽ 26 propoſuimus inquirendum.

32. Habita vero diſtantia centri gravitatis trilinei BcC à Bb; adeoque portionis altitudine ſuper idem gravitatis centrum, (ope diſtantiæ quæ iſti æqualis eſt, propter altitudinem maximam æqualem maximæ diſtantiæ, adeoque & reliquas

reliquis, utpote proportionales;) nempe $\frac{\mathcal{D}\mathcal{P}}{8\mathcal{P}-16\mathcal{D}}$: Si hæc altitudo in baſis magnitudinem $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}-\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$ ducatur; habetur $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ dictæ portionis priſmatis (trilineo BcC inſiſtentis) magnitudo: (æqualis quidem momento ſupra invento.)

33. Ejuſdem vero portionis priſmatis (trilineo BcC inſiſtentis) Momentum, his paſſibus inveſtigamus. Si ſuper ſemicirculum FbC fig. 1. erigatur ſemicylindri portio, qualis FcCYz fig. 5. altitudinem habens in F nullam, in C vero Cc = CF: Semicirculus baſis eſt $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}$; hic in altitudinem ſuper centro gravitatis plani, hoc eſt in $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, ductus, dat $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ magnitudinem expoſitæ portionis Semicylindri. Fig. 5.

34. Hujus vero portionis Semicylindri, centrum gravitatis diſtat à plano in F tangente, recta $Fg=\frac{8}{8}\mathcal{D}$ (ut ſupra §57;) quæ diſtantia in magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momentum expoſitæ portionis Semicylindri reſpectu tangentis in F, hoc eſt FA fig. 1.

35. Ex hac vero Semicylindri portione, auferamus primo eam iſtius partem quæ quadranti FYz fig. 5. inſiſtit, (hoc eſt, quadranti FGb fig. 1. vel 7.) cujus magnitudinem primo, deinde momentum, ſic inveſtigamus.

36. Quadrantis FYz fig. 5. centrum gravitatis, à recta Yz, diſtat $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$; adeoque ab FA diſtabit $\frac{1}{2}\mathcal{D}-\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$; quæ diſtantia (cum ſit altitudini ſuper idem gravitatis centrum æqualis) ducta in baſis magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}\mathcal{P}$, dat portionis huic quadranti inſiſtentis magnitudinem, $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}-\frac{1}{24}\mathcal{D}^3$, vel $\frac{3\mathcal{P}-4\mathcal{D}}{96}\times\mathcal{D}^2$.

37. Si autem intelligatur hæc portio (quadranti FYz fig. 5. inſiſtens) plano Yz$\zeta\upsilon$ abſcindi, & ſic ſuper reliquam partem replicari, ut cum ea compleat Cylindrum quadrantalem: Facta hac replicatione, tanto ultra Y conſtituetur iſtius replicatæ partis centrum gravitatis, quanto prius citra conſtitutum erat: ut patet.

38. Momentum vero hujus Cylindri quadrantalis, ſic habetur; Centrum gravitatis quadrantis YzC fig. 5. diſtat ab AF, $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}+\frac{1}{2}\mathcal{D}$, (quod modo oſtenſum eſt ∽ 26;) quæ itaque eſt diſtantia centri gravitatis quadrantalis Cylindri (ſuper YzC conſtituti) à plano φFA: Quæ quidem diſtantia in quadrantalis Cylindri magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{1}{24}\mathcal{D}^4+\frac{1}{32}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ ejuſdem momentum reſpectu rectæ FA.

39. Hinc vero ſi auferamus momentum portionis ante replicationem factam, $\frac{5}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ (ut ſupra ∽ 34.) manebit $\frac{1}{24}\mathcal{D}^4-\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$, ſive $\frac{16\mathcal{D}-3\mathcal{P}}{384}\mathcal{D}^3$, augmentum momenti ob promotum gravitatis centrum partis replicatæ. Quod quidem momenti augmentum, per $\frac{3\mathcal{P}-4\mathcal{D}}{96}\mathcal{D}^2$ replicatæ partis magnitudinem, diviſum, dat $\frac{16\mathcal{D}-3\mathcal{P}}{12\mathcal{P}-16\mathcal{D}}\mathcal{D}$, menſuram promotionis centri gravitatis: Cujus itaque ſemiſſis $\frac{16\mathcal{D}-3\mathcal{P}}{24\mathcal{P}-32\mathcal{D}}\mathcal{D}$ eſt centri gravitatis partis replicatæ diſtantia à medio: Quæ quidem ſi ex $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ auferatur, quod reſtat $\frac{15\mathcal{P}-32\mathcal{D}}{24\mathcal{P}-32\mathcal{D}}\mathcal{D}$ vel $\frac{15\mathcal{P}-32\mathcal{D}}{3\mathcal{P}-4\mathcal{D}}\times\frac{1}{8}\mathcal{D}$, eſt ejuſdem centri diſtantia à plano φFA. Atque hæc demum diſtantia, in $\frac{3\mathcal{P}-4\mathcal{D}}{96}\mathcal{D}^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{15\mathcal{P}-32\mathcal{D}}{768}\mathcal{D}^3$, ſive $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{24}\mathcal{D}^4$, expoſitæ portionis quadranti FYz inſiſtentis momentum, reſpectu rectæ FA. Quod ∽ 35. proponitur inquirendum.

40. Hoc igitur momentum, ex $\frac{5}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momento totius portionis ſemicylindri, ablatum,

ablatum, relinquit $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{24}\mathcal{D}^4$, portionis reſiduæ z Y υ c C, quadranti z Y C inſiſtentis, momentum.

41. Deinde, poſt hoc ablatum, reſtituendum eſt quantum triangulo quadranti F Y z inſcripto (hoc eſt, triangulo F G b fig. 1.) inſiſtit: Nempe Pyramis, baſin habens $Y\upsilon\zeta z=\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$, altitudinem $FY=\frac{1}{2}\mathcal{D}$, quæ in baſin ducta dat $\frac{1}{8}\mathcal{D}^3$, cujus triens $\frac{1}{24}\mathcal{D}^3$ eſt pyramidis magnitudo; atque hæc in $\frac{3}{8}\mathcal{D}$, diſtantiam ſui centri gravitatis à plano φ F A, ducta, dat $\frac{1}{64}\mathcal{D}^4$ pyramidis momentum reſpectu F A rectæ: Quod quidem momentum, momento reliquæ partis $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{24}\mathcal{D}^4$ additum, dat $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{192}\mathcal{D}^4$ momentum iſtius omnis quod ſectori F b C fig. 1. inſiſtit, reſpectu rectæ A F.

42. Cognito autem momento Portionis ſic ſecti priſmatis Sectori C F b inſiſtentis; cognoſcitur etiam momentum portionis priſmatis Quadrilineo C F β B fig. 1. inſiſtentis, eodem plano ſecti, (reſpectu ejuſdem A F rectæ:) Eſt utique ad illud, ut 7 ad 3 (per §45:) Adeoque illius quod Quinquilineo C b F β D fig. 1. hoc eſt Quadrilineo C F β B fig. 7. (utpote quod ad idem momentum eſt ut 4 ad 3;) nempe $\frac{5}{192}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{144}\mathcal{D}^4$.

43. Unde ſi auferatur momentum iſtius quod Parallelogrammo F B fig. 7. inſiſtit, (hoc eſt, priſmatis baſem habentis triangularem, ſemiſſem utique quadrati F b, adeoque $\frac{1}{8}\mathcal{D}^2$, altitudinem vero $Bb=\frac{1}{4}\mathcal{P}$, cujus itaque magnitudo eſt $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, quæ in $\frac{2}{3}$ F b $=\frac{1}{3}\mathcal{D}$ diſtantiam centri gravitatis à plano rectæ F A inſiſtente ducta, dat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ priſmatis momentum reſpectu F A rectæ;) manebit $\frac{1}{64}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{144}\mathcal{D}^4$ momentum iſtius omnis quod trilineo C B b inſiſtit, reſpectu rectæ A F.

44. Quod autem Trilineo huic jam inſiſtit, (altitudinem jam nactum in puncto b æqualem ipſi F b $=\frac{1}{2}\mathcal{D}$, & deinceps continue creſcentem,) conſtat ex priſmate ſuper illa baſe, altitudinis $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, & æqualis inſuper priſmatis portione oblique ſecti. (Eodem plane modo quo ſuper Y z C quadrante fig. 5. inſiſtit tum z Y υ x C Cylindrus quadrantalis, tum ejuſmodi Cylindri Portio oblique ſecti ζ υ c x.)

45. Hujus vero Priſmatis momentum reſpectu rectæ A F, eſt $\frac{1}{16}\mathcal{D}^4+\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$. (Momentum enim trilinei B b C repertum eſt ∽ 28. eſſe $\frac{1}{8}\mathcal{D}^3+\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, quod in Priſmatis altitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ ductum, dat momentum priſmatis dictum.) Quod quidem ex $\frac{1}{64}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{144}\mathcal{D}^4$ (∽ 43.) ſubductum, relinquit $\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{3}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis priſmatis oblique ſecti trilineo B b C inſiſtentis, reſpectu A F rectæ. (Adeoque centri gravitatis ab A F diſtantia eſt $\frac{1}{2}\mathcal{D}+\frac{8\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$; & momentum reſpectu Bb, $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$.)

46. At vero integri parallelepipedi æque alti parallelogrammo B C fig. 7. inſiſtentis, eodem plano ſecti, portio, nempe $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, in ſui centri gravitatis a plano rectæ F A inſiſtente diſtantiam, nempe F b $+\frac{2}{3}$ b C $=\frac{1}{2}\mathcal{D}+\frac{1}{3}\mathcal{D}=\frac{5}{6}\mathcal{D}$, ducta, dat $\frac{5}{192}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momentum iſtius priſmatis, ſive portionis parallelepipedi, reſpectu iſtius A F. Unde ſi auferamus $\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis trilineo B b C inſiſtentis, ∽ præced. inventum reſtabit $\frac{7}{384}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis trilineo B c C inſiſtentis reſpectu rectæ A F.

47. Quod quidem momentum, per ſolidi magnitudinem $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ (∽ 32. inventam) diviſum, dat $\frac{7}{8}\mathcal{D}-\frac{8\mathcal{D}^2}{9\mathcal{P}}$ centri gravitatis ab A F diſtantiam; adeoque $\frac{2}{3}\mathcal{D}-\frac{8\mathcal{D}^2}{9\mathcal{P}}$ ejuſdem diſtantiam à B b; quæ in magnitudinem $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ expoſitæ portionis momentum trilineo B c C inſiſtentis, reſpectu B b rectæ. (Vel etiam, ex priſmatis parallelogrammo B C inſiſtentis momento reſpectu B b, nempe $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}\times\frac{1}{3}\mathcal{D}=\frac{1}{96}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, ſubducto $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momento portionis inſiſtentis trilineo B b C, reſtat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis B c C trilineo inſiſtentis reſpectu B b, ut prius.) Quod ∽ 33. proponitur inveſtigandum.

48. Integri vero Priſmatis, eidem B c C trilineo inſiſtentis, ex puncto C ſuſpenſi, momentum reſpectu ejuſdem B rectæ, ſic habetur. Priſmatis hujus baſis eſt ipſum trilineum B c C $=\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}-\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$ (per ∽ 10.) quæ in altitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ ducta, dat $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}-\frac{1}{8}\mathcal{D}^3$ priſmatis magnitudinem, quæ in diſtantiam b C $=\frac{1}{2}\mathcal{D}$ ducta, dat $\frac{1}{32}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{16}\mathcal{D}^4$ priſmatis ex puncto C ſuſpenſi momentum reſpectu rectæ B b.

49. Ratio

49. Ratio igitur momenti Portionis prismatis in suo situ, ad momentum prismatis integri ex puncto C suspensi, respectu ejusdem B b rectæ, est (per ∽ 47,48.) ut $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ ad $\frac{1}{32}D^3P - \frac{1}{16}D^4$; hoc est, ut $3P - 4D$ ad $9P - 18D$. Quæ ratio ∽ 25. proponitur investiganda.

50. Hanc autem rationem sic inventam, eandem esse atque rationem omnium Z V fig. 10. in $4a^2$ respective ductorum, ad easdem omnes Z V in quadratum rectæ C A; jam supra ostensum est ∽ 25. At omnes Z V, hoc est trilineum C Z A F, hoc est $DP - 2D^2$ (per ∽ 10.) in $CA = 2D$ ductæ, dant $2D^2P - 4D^3$ prismatis magnitudinem; quæ iterum in $2D$ distantiam ducta, dat $4D^3P - 8D^4$ momentum dicti prismatis integri trilineo C Z A F fig. 10. insistentis, ex puncto A suspensi, respectu rectæ C c.

51. Adeoque (propter rationem $3P - 4D$ ad $9P - 18D$, ∽ 49. inventam) erit $\frac{3P - 4D}{9P - 18D}$ in $4D^3P - 8D^4$, hoc est $\frac{12P - 16D}{9}D^3$, momentum expositæ portionis prismatis trilineo C Z A F insistentis, in suo situ, respectu C c rectæ; hoc est, factum ex omnibus Z V in $4a^2$ respective: Et consequenter (dividendo per $4D$) erit $\frac{3P - 4D}{9}D^2$, hoc est $\frac{1}{3}D^2P - \frac{4}{9}D^3$, factum ex eisdem omnibus Z V in $\frac{a^2}{D}$ respective ductis. Quod ∽ 22, 25. suscepimus ostendendum.

52. Quod autem omnes $\frac{aD^2 - a^3}{D^2}\sqrt{:D^2 - a^2}$; sint ad D^2 toties sumptum, ut 1 ad 5, (quod ∽ 20. probandum suscepimus,) sic ostenditur, ex principiis nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*. Infinita series Primanorum, sive Arithmetice proportionalium, ut a, (vel eadem series in 1 ducta,) est ad convenientem seriem Æqualium, ut 1 ad 2. Eadem Primanorum series in seriem Residuorum $D^2 - a^2$ (hoc est in seriem Æqualium mulctatam serie secundanorum,) nempe $aD^2 - a^3$, est ad seriem Æqualium, ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, sive ut 1 ad 4. Eadem series Primanorum in Residuorum Quadrata, hoc est, in $D^4 - 2a^2D^2 + a^4$, nempe $aD^4 - 2a^3D^2 + a^5$, ad seriem Æqualium, est ut $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}$ ad 1, sive ut 1 ad 6. Eadem primanorum series in Cubos Residuorum, hoc est, in $D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6$, nempe $aD^6 - 3a^3D^4 + 3a^5D^2 - a^7$, ad seriem Æqualium, est ut $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8}$ ad 1, sive ut 1 ad 8. Et sic deinceps, (ut sigillatim probabitur ex prop. 64. Arithm. Infin.) Nempe series Primanorum, respective ducta in seriem, 0. Unit. Resid. Qu: Resid. Cub: Resid. Biquad: Residuorum, &c.

dat rationes $\frac{1}{0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{4} + \frac{6}{6} - \frac{4}{8} + \frac{1}{10}$, &c.

Hoc est $\frac{1}{0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot$ &c.

53. Sin hi loci pro paribus habeantur, & fiat congrua interpolatio pro locis imparibus, (juxta progressionis analogiam,) prodibit ea quæ sequitur rationum series. Nempe series Primanorum a respective ducta in

seriem 0. Recipr: Unita- $\sqrt{}$ Resi- Resi- $\sqrt{}$ q Cub. Quadr. $\sqrt{}$: Sursol. Cub. &c.
$\sqrt{}$ Resid. tum. duorum. duorum. Resid. Resid. Resid. Resid.

dat rationes $\frac{1}{0} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}$ &c.

54. Adeoque series $a\sqrt{:D^2 - a^2}$ (nempe series Primanorum in Radices Quadraticas Residuorum,) erit ad seriem Æqualium, hoc est, ad totidem D^2, ut 1 ad 3; (quod etiam superius demonstravimus alias ∽ 12, 13.) Et series $aD^2 - a^3$ in $\sqrt{:D^2 - a^2}$: sive $a\sqrt{:D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6}$: (nempe series Primanorum in seriem Radicum Quadraticarum Cuborum ex Residuis $D^2 - a^2$,) ad seriem Æqualium, hoc est, ad totidem D^4, est ut 1 ad 5. Adeoque & series $\frac{aD^2 - a^3}{D^2}\times\sqrt{:D^2 - a^2}$: ad totidem D^2, erit item ut 1 ad 5. Quod demonstrandum suscepimus ∽ 20. Adeoque absolvimus omnia quæ ad centrum gravitatis superficiei ex semiconversione curvæ A C (fig. 1. vel 8.) circa A F, designandum requiruntur.

55. Superest,

55. Supereſt, ut centrum gravitatis ſuperficiei, quæ ſemiconverſione ejuſdem CA curvæ circa CF converſæ deſcribitur, inveſtigemus. Quod quidem jam partim peractum eſt. Quum enim (propter binarum quantitatum reciprocationes, ut aliquoties dictum eſt,) idem ſit, reſpectu rectæ AF, momentum ſuperficiei quæ converſione CA curvæ circa CF deſcribitur; atque, reſpectu rectæ CF, momentum ſuperficiei quæ ejuſdem circa AF converſione deſcribitur: Sitque hoc ſuperius inventum ∽ 23; Etiam illud ſimiliter inventum erit. *Superficiei, ſemiconverſione circa CF factæ, centrum; quantum diſtat ab AF.*

56. Invenimus utique (∽ 23) facta ex omnibus ZX in ZY fig. 8. reſpective ductis (curva CA in punctis Z æqualiter diviſa,) eſſe $\frac{2}{5}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{52}{45}\mathcal{D}^3$. Adeoque (pro Radiis reſtituendo ubique Peripherias, hoc eſt, dividendo per $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ & multiplicando per $\mathcal{P}$,) erit $\frac{4}{5}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 - \frac{104}{45}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ momentum circulorum omnium punctis Z deſcriptorum, ſive radiis ZX in diſtantiis ZY ſuſpenſorum, ſive radiis ZY in diſtantiis ZX ſuſpenſorum; hoc eſt, ſuperficiei converſione CA curvæ circa AF deſcriptæ, reſpectu rectæ CF; vel, converſione circa CF, reſpectu rectæ AF. Fig. 8.

57. Hoc itaque ſuperficiei momentum converſione circa CF deſcriptæ, ſi per ejuſdem magnitudinem, hoc eſt, per $2\mathcal{P}^2 - \frac{16}{3}R\mathcal{P}$ (ut ſupra ∽ 16,) vel $2\mathcal{P}^2 - \frac{8}{3}\mathcal{D}\mathcal{P}$, dividatur; habebitur $\frac{30\mathcal{P} - 52\mathcal{D}}{45\mathcal{P} - 60\mathcal{D}}\mathcal{D}$ diſtantia centri gravitatis ſuperficiei converſione (vel ſemiconverſione) curvæ CA circa CF deſcriptæ, ab AF recta.

58. Quantum autem idem gravitatis centrum (ſuperficiei ex ſemiconverſione CA curvæ circa FC deſcriptæ) ab FC diſtat, ſic inquirimus. Semiperipheriarum punctis Z fig. 8. circa FC deſcriptarum, tum magnitudines, tum & earundem centrorum gravitatis ab FC diſtantiæ, ſunt rectis ZY proportionales. Ergo ſingularum momenta reſpectu ejuſdem FC, ſunt ut quadrata rectarum ZY fig. 8. hoc eſt (per ∽ 8) rectarum Vυ fig. 10. Adeoque omnium momenta ſunt ad momenta totidem radio FA deſcriptarum; Hoc eſt, momentum ſuperficiei quæ ſemiconverſione curvæ CA fig. 8. circa FC deſcribitur, ad momentum ſuperficiei ſemicylindricæ recta CA æquali deſcriptæ, diſtantiam à converſionis axe habentis ipſi FA æqualem; ut omnia quadrata Vυ fig. 10. ad totidem quadrata AF; hoc eſt, ut omnia $VZq + 2VZ \times Z\upsilon + Z\upsilon q$, ad totidem AFq. *Quantum diſtat à CF.* Fig. 8, 10.

59. Quam autem habent rationem omnia Zυq ad omnia AFq, ſic colligitur. Eſt recta $Z\upsilon = \frac{a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}}{\mathcal{D}}$ (per ∽ 11,) ergo $Z\upsilon q = \frac{a^2\mathcal{D}^2 - a^4}{\mathcal{D}^2}$. Sed omnia $a^2\mathcal{D}^2$ ad totidem $\mathcal{D}^4$, ſunt ut 1 ad 3; & omnia a^4 ad totidem $\mathcal{D}^4$, ut 1 ad 5: Ergo omnia $a^2\mathcal{D}^2 - a^4$ ad totidem $\mathcal{D}^4$, ut $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ad 1, ſive ut 2 ad 15. Adeoque omnia $\frac{a^2\mathcal{D}^2 - a^4}{\mathcal{D}^2}$ ad totidem $\mathcal{D}^2$, hoc eſt (propter CA = 2D) ad $2\mathcal{D}^3$, ut 2 ad 15. Ideoque $\frac{4}{15}\mathcal{D}^3$ aggregatum omnium Zυq. Fig. 10.

60. Deinde omnia VZq ad totidem AFq, ſunt ut omnes circuli radiorum ZV ad totidem circulos radiorum AF: hoc eſt, ut ſolidum converſione trilinei CZAF circa CA deſcriptum, ad ſolidum deſcriptum ſimili converſione circumſcripti Parallelogrammi; hoc eſt, ut momentum ejuſdem Trilinei ad momentum circumſcripti Parallelogrammi, reſpectu ejuſdem CA rectæ; hoc eſt, ut momentum Trilinei BcC fig. 7. ad momentum BC parallelogrammi ſibi circumſcripti, reſpectu rectæ cB; hoc eſt, ut $\mathcal{P}^2 - 8\mathcal{D}^2$ ad $\mathcal{P}^2$. Nam trilinei CBb magnitudo eſt $\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$; ejuſque centri gravitatis à cB diſtantia, (eadem utique cum diſtantia centri gravitatis trilinei CBF ab eadem cB,) eſt $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, (per § 99;) Adeoque momentum $\frac{1}{4}\mathcal{D}^2 \times \frac{1}{2}\mathcal{D} = \frac{1}{8}\mathcal{D}^3$: Quod quidem momentum ſi ex Parallelogrammi CB momento, $\frac{1}{64}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 = \frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P} \times \frac{1}{8}\mathcal{P}$, auferatur; relinquit $\frac{1}{64}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 - \frac{1}{8}\mathcal{D}^3$, momentum trilinei BcC reſpectu Bc rectæ. Quod itaque ad $\frac{1}{64}\mathcal{D}\mathcal{P}^2$ momentum CB parallelogrammi, eſt ut $\mathcal{P}^2 - 8\mathcal{D}^2$ ad $\mathcal{P}^2$, ſive ut FAq − 2FCq ad FAq.

61. Quod ipſum ſic etiam probamus alias. Si duci intelligatur, in fig. 7. recta CA (quam per B tranſituram certum eſt) Triangulum rectilineum CAF æquale fiet Trilineo CZAF miſtilineo: Quod quidem miſtilineum à rectilineo in hoc tantum differt, quod ſegmentum illud BA curva & recta comprehenſum, à ſitu BA in ſitum BC transfertur. Ex hac autem dicti ſegmenti tranſlatione, quod oritur diſcrimen hoc eſt: Solidum ex converſione trilinei miſti circa FC ortum, eſt Fig. 7.

(per § 83) $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$, sive $\frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}D^2P$; Solidum seu Conus ex simili conversione trianguli rectilinei est $\frac{1}{12}P^3$, (nam circulus radii R est $\frac{1}{2}RP$; ergo circulus radii $\frac{1}{2}P$, utpote in radiorum ratione duplicata, est $\frac{1}{8}\frac{P}{R}P^2$ vel $\frac{P}{4D}P^2$; qui circulus, cum sit coni basis, ductus in $\frac{1}{3}D$ trientem altitudinis, dat $\frac{1}{12}P^3$ magnitudinem coni:) Horum solidorum differentia, nempe excessus coni supra reliquum solidum, est $\frac{1}{2}D^2P - \frac{1}{24}P^3$. Sin utrobique, pro circulorum peripheriis substituamus radios, (facta divisione per P, & multiplicatione per $\frac{1}{2}D$,) habebimus planorum momenta respectu rectæ CF; nempe illic $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, hic vero $\frac{1}{24}DP^2$; adeoque momentorum differentiam $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{48}DP^2$. Hæc vero differentia per segmenti magnitudinem divisa, hoc est per $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$, (est enim trilineum mistum BbC $= \frac{1}{4}D^2$, unde si auferatur triangulum sibi inscriptum, quod est circumscripti parallelogrammi dimidium, adeoque $\frac{1}{16}DP$, manebit $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$ magnitudo segmenti BA vel BC recta & curva comprehensi;) dat $\frac{12D^2 - P^2}{12D - 3P}$ mensuram promotionis centri gravitatis, dicti segmenti translocati, versus FC rectam: cujus itaque semissis $\frac{12D^2 - P^2}{24D - 6P}$ est ejusdem centri distantia à recta cBβ: Quæ quidem distantia, in segmenti magnitudinem $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$ ducta, dat $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}DP^2$ ejusdem momentum respectu cBβ rectæ. Momentum autem trianguli rectilinei BcC respectu ejusdem cB rectæ est $\frac{1}{192}DP^2 = \frac{1}{16}DP \times \frac{1}{12}P$. Unde si auferatur segmenti dicti momentum $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}DP^2$; manebit $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ momentum trilinei mixti BcC respectu rectæ cB. Est autem totius BC Parallelogrammi, respectu ejusdem cB, momentum $\frac{1}{64}DP^2 = \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$. (Unde obiter liquet, residui BCb trilinei momentum esse $\frac{1}{8}D^3$; adeoque, propter ipsius magnitudinem $\frac{1}{4}D^2$, distantiam sui centri gravitatis à cB esse $\frac{1}{2}D$; & consequenter, à bC erit $\frac{1}{4}P - \frac{1}{2}D$, ut supra § 99.) Ratio igitur momenti trilinei mixti BcC, ad momentum circumscripti Parallelogrammi, (respectu ejusdem cB rectæ,) est ut $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$; sive, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2: ut prius.

62. Vel denique, sic etiam eadem ratio investigabitur. Momentum trilinei mixti CZAF fig. 7. respectu rectæ CF est (ut supra) $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$. Momentum autem æqualis parallelogrammi Cβ, respectu ejusdem CF, est $\frac{1}{32}DP^2 = \frac{1}{4}DP \times \frac{1}{8}P$. Horum momentorum differentia $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$ (cum ex sola trilinei Bβ A in situm BcC translatione oriatur) si per $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ (trilinei BcC magnitudinem) dividatur; prodibit $\frac{P^2 - 8D^2}{4P - 8D}$ mensura promotionis centri gravitatis trilinei Bβ A in situm BcC translati. Hujus igitur semissis $\frac{P^2 - 8D^2}{8P - 16D}$ erit ejusdem centri à cB distantia: Quæ in $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ magnitudinem ducta; dat $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ejusdem BcC trilinei momentum respectu cB rectæ. Vel, quod eodem recidit, differentiæ momentorum inventæ $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, semissis $\frac{1}{64}DP^3 - \frac{1}{8}D^3$, est trilinei translocati momentum quæsitum. (Nam Quotientis dimidium, in Divisorem, ductum, restituit Dividui semissem.) Unde eadem quæ prius oritur ratio $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$, sive $P^2 - 8D^2$ ad P^2; quæ ∽60 quærebatur.

63. Hac itaque ratione inventa, sic procedimus. Quadratum AF fig. 10. est $\frac{1}{4}P^2$ quod ductum in CA $= 2D$, dat $\frac{1}{2}DP^2$ aggregatum omnium AFq. Si fiat itaque (propter rationem modo inventam) ut P^2 ad $P^2 - 8D^2$, sic $\frac{1}{2}DP^2$ ad quartum; erit illud $\frac{1}{2}DP^2 - 4D^3$ aggregatum omnium ZVq.

64. Supereſt ut inquiramus, quam ad eadem omnia AFq, rationem habeant, omnia bina rectangula 2VZ × Zv fig. 10. (∽58 memorata;) hoc est, omnes VZ in 2Zv, hoc est (per ∽11) omnes VZ in $\frac{2a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: Hoc est, omnes VZ in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: in $2a$. Quam rationem his passibus investigamus. Fig. 10.

65. Rectæ ZV trilinei CZAF fig. 10. sunt rectis VZ trilinei BVcC fig. 7. propor- Fig. 7.

proportionales: Item rectæ CZ = 2 *a* fig. 10. rectis BV fig. 7. Et $\frac{\sqrt{:\mathcal{D}^2-a^2}}{\mathcal{D}}$: rectis zY quadrantem CbG complentibus proportionales. Omnes igitur VZ in $\frac{\sqrt{:\mathcal{D}^2-a^2}}{\mathcal{D}}$: sunt ut omnia rectangula VZ × zY fig. 7. Quæ iterum in 2 *a* ductæ, sunt ut horum rectangulorum momenta respectu rectæ Bb fig. 7. Quantum autem sit horum omnium momentum sic colligimus.

66. Intelligatur primo super planum trilinei CZAF fig. 7. erigi semicirculum CbF ad angulos rectos; ita quidem ut CF diameter semicirculi, congruat CF lateri trilinei. Deinde super idem planum, moveri intelligatur idem semicirculus invariato angulo, à CF ad Cβ, & sic deinceps usque ad A; hoc motu describens Semicylindrum: Quem Semicylindrum si secet planum rectæ AÇ perpendiculariter insistens, abscinditur Semicylindri Portio (super CAF triangulo jacens) ex infinitis Parallelogrammis conflata, quorum bases intelligantur ordinatim-applicatæ in basis Semicylindricæ semicirculo, altitudines arithmetice-proportionales triangulum CAF complentes. Sin eundem semicylindrum secet superficies curvata perpendiculariter insistens curvæ CZA, abscindetur Semicylindri Fragmentum (sic enim, libet, distinctionis causa, vocare) super CZAF trilineo misto jacens, ex Parallelogrammis item infinitis conflatum, quorum bases intelligantur eædem zY ordinatim-applicatæ in semicirculo, altitudines vero Zz trilineum CZAF complentes.

67. Hæc autem duo solida, nempe Portio semicylindri, plano abscissa, & semicylindri Fragmentum, abscissum superficie curvata, sunt quoad magnitudinem inter se æqualia. (Propter, tum binas quasvis rectas zY in base, utrinque à medio æqualiter remotas, invicem æquales; tum binas ubique his basium rectis congruentes altitudines, sive in trilineo misto, sive in triangulo rectilineo, simul æquales rectæ AF.) Utrumvis siquidem Semicylindro ejusdem basis, semialto, æquale.

68. Sunt autem eadem duo solida, quoad momentum respectu AF rectæ, inæqualia: Propter translatum id totum quod in altero insistit bilineo BA, ad situm BC in reliquo.

69. Est autem Portionis, triangulo rectilineo incumbentis, momentum respectu AF rectæ, $\frac{3}{256}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2 = \frac{1}{32}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 \times \frac{3}{8}\mathcal{D}$. (Est enim semicirculus FbC = $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}$, & semialtitudo $\frac{1}{2}$AF = $\frac{1}{4}\mathcal{P}$, adeoque portionis magnitudo $\frac{1}{32}\mathcal{D}\mathcal{P}^2$; quæ in $\frac{3}{8}\mathcal{D}$ distantiam centri gravitatis ab AF (per § 57) ducta, dat $\frac{3}{256}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2$ portionis momentum.) Fragmenti vero, trilineo misto insistentis, momentum respectu ejusdem AF rectæ, est (per § 105) $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{4}{9}R^4 = \frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2 - \frac{1}{36}\mathcal{D}^4$. Unde si auferatur Portionis momentum $\frac{3}{256}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2$, habetur $\frac{1}{256}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2 - \frac{1}{36}\mathcal{D}^4$ momentorum differentia.

70. Et consequenter (cum hæc momentorum differentia non aliunde proveniat quam ex segmenti bilineo BA insistentis in situm BC translatione,) si illa momentorum differentia intelligatur per magnitudinem translocatæ partis divisa, unde habeatur mensura promotionis centri gravitatis quantum ad AF rectam; hujusque semissis, distantia utique ejusdem centri à Bb, in eandem magnitudinem iterum multiplicata; prodibit Dividui semissis, nempe $\frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2 - \frac{1}{72}\mathcal{D}^4$, momentum istius translocatæ partis, bilineo BC insistentis, respectu rectæ Bb.

71. Deinde, super triangulo CBb rectilineo, incumbit cylindri quadrantalis portio, cujus basis CbG quadrans circuli, altitudo Bb = $\frac{1}{4}\mathcal{P}$; momentum vero ejusdem respectu rectæ Bb. est $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2$. Quod eodem modo colligitur quo supra (☞ 35 & seqq. colligitur momentum ejusmodi portionis FYυζz fig. 5. Cum enim illic ☞ 39 habetur $\frac{1}{24}\mathcal{D}^4 - \frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momenti augmentum (ob dictæ portionis ibidem translationem) respectu rectæ FA, (si nempe intelligatur YFA planum horizonti parallelum) vel rectæ Fφ (si scilicet planum YFφ horizonti parallelum intelligatur:) Adeoque ejusdem semissis $\frac{1}{48}\mathcal{D}^4 - \frac{1}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$, portionis dictæ momentum respectu rectæ Yz vel Yυ (prout hæc vel illa intelligatur horizonti parallela,) posita quidem (quod illic supponitur) segmenti altitudine Yυ = $\frac{1}{2}\mathcal{D}$: Unde, si posita fuisset Yυ = $\frac{1}{4}\mathcal{P}$ (prout jam in casu simili supponimus super æqualem basem portionis altitudinem Bb = $\frac{1}{4}\mathcal{P}$) fuisset ejusdem momentum respectu rectæ Yz vel Yυ, $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2$: Quod igitur est momentum por-

tionis Cylindri quadrantalis, triangulo CBb incumbentis, respectu rectæ Bb fig. 7.

72. Totius autem Cylindri quadrantalis, parallelogrammo BC incumbentis, momentum respectu ejusdem Bb rectæ, est $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} = \frac{1}{64}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 \times \frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$. Unde si auferatur tum momentum solidi bilineo BC insistentis, $\frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2 - \frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ (ꝺ 70;) tum $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2$ (ꝺ 71) momentum portionis semicylindri triangulo CBb incumbentis; hoc est, $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum solidi totius trilineo misto CBb incumbentis; manebit $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum (respectu ejusdem Bb rectæ) solidi insistentis trilineo misto BcC fig. 7. nempe solidi ex omnibus VZ×zY fig. 7. Quod ꝺ 65 proponitur inquirendum.

Fig. 7, 10. 73. Hoc habito; propter tum AF fig. 10. duplam rectæ cC fig. 7. adeoque & ZV fig. 10. duplas rectarum VZ fig. 7. tum $\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$ (propter $\mathcal{D}$ duplam rectæ GC fig. 7.) duplas rectarum zY fig. 7. adeoque singula $\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$: in ZV fig. 10. quadrupla singulorum Vz×zY fig. 7. Et (propter altitudinem CA fig. 10. quadruplam altitudinis cB fig. 7.) omnia omnium sedecupla, (est enim 4×4=16:) Et denique (propter eandem AC=4cB) distantiam centri gravitatis à cC fig. 10. quadruplam distantiæ à Bb fig. 7. erit (propter 16×4=64) momentum ad momentum ut 64 ad 1. Adeoque omnes *VZ fig.* 10. *in* $\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2$: *in* $2a, = \frac{8}{9}\mathcal{D}^4$; (nempe ad momentum omnium VZ×zY×BV fig. 7. hoc est $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ per præced. ut 64 ad 1.) Et propterea, facta applicatione ad $\mathcal{D}$, omnes VZ (fig. 10.) in $\frac{2a\sqrt{:}\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$: hoc est, omnia 2VZ×Zυ bina rectangula (ꝺ 58 memorata) $\frac{8}{9}\mathcal{D}^3$. Quod ꝺ 64 proponitur inquirendum.

74. Cum igitur sint omnia Zυq (per ꝺ 59.) $\frac{4}{15}\mathcal{D}^3$, & omnia ZVq (per ꝺ 63.) $\frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 - 4\mathcal{D}^3$, & denique omnia 2VZ×Zυ (per ꝺ 73.) $\frac{8}{9}\mathcal{D}^3$. Erunt omnia VZq + 2VZ×Zυ + Zυq fig. 10. $\frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 - \frac{128}{45}\mathcal{D}^3$. Omnia vero AFq sunt $\frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 = \frac{1}{4}\mathcal{P}^2 \times 2\mathcal{D}$. Eorum igitur ad hæc ratio constat; nempe ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}^2 - \frac{128}{45}\mathcal{D}^2$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}^2$, sive ut $45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2$ ad $45\mathcal{P}^2$. Quam quidem eandem esse quam habet momentum superficiei ex semiconversione curvæ CA fig. 8. circa CF, ad momentum curvæ semicylindricæ ejusdem basis, altitudinis vero $2\mathcal{D} = CA$ respectu rectæ CF sive plani per axem; jam ꝺ 58. ostensum est. Est autem istius magnitudo (per ꝺ 16.) $\mathcal{P}^2 - \frac{8}{3}\mathcal{R}\mathcal{P}$ sive $\mathcal{P}^2 - \frac{4}{3}\mathcal{D}\mathcal{P}$; hujus autem $\mathcal{P}^2$ (quod nempe fit ex altitudine $2\mathcal{D}$, in $\frac{\mathcal{P}^2}{2\mathcal{D}}$ semiperipheriam radio $AF = \frac{1}{2}\mathcal{P}$ descriptam:) adeoque illius ad hanc ratio, ut $\mathcal{P} - \frac{4}{3}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}$, sive ut $3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}$ ad $3\mathcal{P}$. Ideoque propter $\frac{3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}}{3\mathcal{P}}$) $\frac{45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2}{45\mathcal{P}^2}$ ($\frac{45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2}{45\mathcal{P}^2 - 60\mathcal{D}\mathcal{P}}$, distantiarum centrorum gravitatis ratio est, ut $45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2$ ad $45\mathcal{P}^2 - 60\mathcal{D}\mathcal{P}$. Est autem centri gravitatis expositæ curvæ semicylindricæ à plano per axem distantia $\mathcal{D}$, (nempe radii $AF = \frac{1}{2}\mathcal{P}$ ea pars quæ est ad totam, ut chorda ad arcum, hoc est ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$;) Et propterea $\frac{45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2}{45\mathcal{P}^2 - 60\mathcal{D}\mathcal{P}}\mathcal{D}$ distantia centri gravitatis superficiei ex semiconversione curvæ CA circa CF ab eodem plano sive à CF recta. Quod erat ultimo inquirendum.

APPENDIX.

Cum ex Wrennii nostri Demonstratis de Cycloidibus (quæ sub initium Julii anni 1658 amicis quibusdam ostendit) Semicycloidis curvam Axis duplam esse ꝺ 1. assumpserim: Istius demonstrationem prout eam ab eodem D. *Christophero Wren*, Socio Collegii *Omnium Animarum* dicti, Oxoniæ, & in Collegio *Gresbamensi*, Londini, Astronomiæ Professore, acceperim, visum est hic subjunctam exhibere.

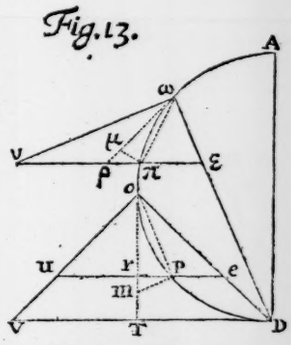
De

De recta Tangente Cycloidem primariam.

Lemma.

SI ſit Circulus AoD, Diameter AD, tangens VD, & oV ſubtenſæ cuivis Do ad rectos angulos. Dico Tangentem eſſe Arcu opD majorem. Ducatur Tangens oT. Quoniam anguli ToD, TDo ſunt æquales, ergo anguli ToV, TVo ſunt æquales. Ergo VTD æqualis eſt OT, TD ſimul ſumptis. Sed ipſæ oT, TD ſuperant arcum opD. Ergo VD major eſt Arcu opD.

Fig. 13.



II. Iiſdem poſitis ſi ducatur urpe (vel $\upsilon\rho\pi\varepsilon$) tangenti VD parallela: dico ſegmentum externum up, eſſe arcu po, (vel $\upsilon\pi$ arcu $\pi\omega$) majus: ſegmentum vero internum pe eſſe arcu po (vel $\pi\varepsilon$ arcu $\pi\omega$) minus. Ducatur ſubtenſa po (vel $p\omega$) & pm (vel $\pi\mu$) ſubtenſæ ad rectos angulos. Angulus igitur opu vel acutus eſt, vel obtuſus ut $\omega\pi\upsilon$.

Sit primo obtuſus. Quoniam anguli VDω, $\varepsilon\omega$D ſunt æquales, & $\upsilon\varepsilon$ parallela ipſi VD, ergo Iſoſceles eſt $\rho\omega\varepsilon$, ergo $\upsilon\rho$, $\rho\omega$ ſunt etiam æquales, & quoniam $\omega\pi\varepsilon$ eſt obtuſus ergo $\omega\mu$ minor eſt $\upsilon\rho$, & adhuc minor ipſa $\upsilon\pi$; ſed cum $\omega\mu$ ſit tangens, & $\pi\mu$ ſubtenſæ ad rectos angulos, ergo demonſtratum eſt $\omega\mu$, majorem eſſe arcu $\omega\pi$, ergo $\upsilon\pi$ major eſt arcu $\omega\pi$.

Sit ſecundo angulus upo acutus, ergo in triangulo omp, angulus omp eſt æqualis recto minus angulo mop; & in triangulo rpm, angulus rpm, eſt æqualis recto minus angulo upo: ſed angulus upo eſt major angulo ueo, vel angulo moD: & ang. mop eſt minor angulo moD, ergo complementum anguli upo ſcilicet rpm, eſt minus complemento anguli mop, ſcilicet angulo omp; ergo in triangulo rpm latus rm, eſt minus latere rp. Sed ur, ro æquales eſſe jam demonſtrantur, ergo up major eſt ipſa om, & om major arcu op: ergo up eſt major arcu op.

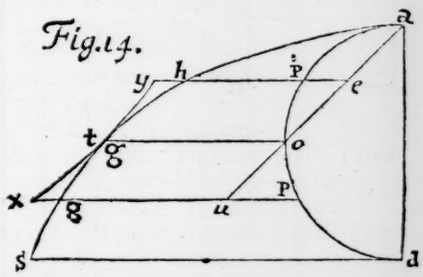
Dico poſtremo ſegmentum internum pe eſſe minus arcu op. Quoniam enim anguli roe, reo ſunt æquales, ergo minor eſt angulus poe angulo peo, ergo in triangulo poe latus pe minus eſt latere po; recta autem po minor eſt arcu po; ergo pe minor eſt arcu po. Similiter demonſtratur de $\pi\varepsilon$.

Problema.

Ad datum punctum t in Cycloide sta d Tangentem ducere.

Ducatur to baſi parallela, & per punctum o Genitoris ducatur ſubtenſa aou, cui parallela ducatur xty, dico rectam xy tangere in puncto t. Nam ſi non tangat, ergo ſecat in t, ergo cadit intra curvam aut verſus baſem, aut verſus verticem.

Fig. 14.



Cadat primo ſi fieri poſſit verſus Baſem & ſit punctum aliquod x intra curvam: & ducatur baſi parallela xup, & producta ſecet curvam in g, & producatur ſubtenſa ad u. Quoniam ergo alibi demonſtratur è primis Cycloidis proprietatibus eſſe quod Parallelæ baſi inter Cycloidem & Genitorem terminatæ, ſint arcubus Genitoris ad verticem abſciſſis æquales: ergo gp eſt æqualis arcui pop'a, & to arcui op'a, ergo to plus arcu op æqualis eſt ipſi gp: ſed xu æqualis eſt

ipſi t o, & ſegmentum externum u p eſt majus arcu o p; ergo x u p major eſt ipſis t o, o p ſimul ſumptis: ergo p x major eſt ipſa p g: ergo cadit extra punctum g curvæ, ergo idem punctum eſt intra & extra curvam, quod eſt abſurdum: ergo non eſt intra. Cadat jam intra curvam verſus verticem; & ſit punctum aliquod y rectæ t y intra curvam. Ducatur baſi parallela y p'e, & producta ſecet Cycloidem in h. Quoniam ergo y e eſt æqualis ipſi t o, & h p' plus arcu p'o æqualis ipſi t o, & p'e ſegmentum internum eſt minus arcu p'o; ergo h p'e minor eſt ipſis h p', p'o ſimul ſumptis, ergo minor eſt ipſa t o, ergo e y major eſt ipſa e h. Ergo punctum y eſt extra & intra curvam, quod eſt abſurdum: ergo non eſt intra. Similiter demonſtratur nullum punctum rectæ x y eſſe intra curvam, ergo non ſecat curvam in puncto t; ergo ducta eſt t y tangens Cycloidem in dato puncto t; quod erat faciendum.

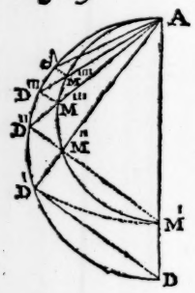
Εὐθυσμὸς *Curvæ lineæ Cycloidis primariæ ſecundum methodum Antiquorum demonſtratus.*

Definitio.

Magnitudines in infinitum decreſcentes ſunt quarum non datur minima.

Problema.

Fig. 15.



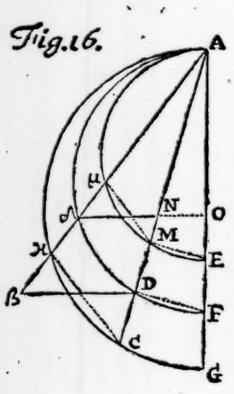
In dato Semicirculo A D'D ſubtenſas quotcunque A D in data ratione continua diſponere. Sit Ratio A M' ad A D. Ducatur circulus A M''M'; tangens in A; & fiat ubique A D (ſubtenſa majoris circuli) æqualis ipſi A M (antecedenti ſubtenſæ minoris circuli.) Dico ipſas A D eſſe in continua ratione ipſius A D ad A M'. Junctis M''M, & DD, vel M'''M'', & D''D', & ſic ubivis; quoniam MM, DD ſunt parallelæ, ob æquales in ſimilibus ſegmentis angulos: ergo patet propoſitum.

Scholium.

Iiſdem poſitis dico hanc ſubtenſarum rationem in infinitum continuari poſſe. Nam ſi non poſſit, ergo datur minima ſubtenſa, quo minor duci non poteſt: ſit ea verbi gratia A D''', ſecans minorem circulum in M'''; & ducatur ut prius A δ æqualis ipſi A M'''': ergo A δ eſt minor minima, quod eſt abſurdum; ergo non datur minima, ergo ratio ſubtenſarum poteſt in infinitum continuari.

Lemma.

Fig. 16.



Sint tres circuli, tangentes ſe invicem in puncto A, quorum diametri A E, A F, A G ſunt in continua proportione. Circulos autem ſecet recta AMDC; item recta A μ δ κ, ita ut A δ aptetur in medio circulo æqualis ipſi A M minimi Circuli. Per puncta denique δ & D medii circuli, ducatur tam δ N O, diametro perpendicularis, quam D β ipſi δ N parallela. Dico ipſas N M, μ δ eſſe æquales: item M D, δ κ: item D C, κ β. Jungantur κ C; item μ M: item M E. Quoniam A μ M E eſt quadrilaterum circulo inſcriptum; ergo angulus externus δ μ M æqualis eſt oppoſito interno A E M; ſed anguli A N O, A E M ob ſimilitudinem triangulorum ſunt æquales: ergo anguli δ μ M, δ N M ſunt æquales: æqualia ſunt ergo Triangula A δ N, A μ M; & quoniam β D parallela

rallela eſt ipſi δN, & κC ipſi μM, æqualia ſunt etiam Triangula AβD, ACκ: æquales ſunt igitur AN & Aμ; AM & Aδ; AD & Aκ; AC & Aβ: quare demptis continuo æqualibus, æquales erunt NM & μδ; MD & δκ; DC & κβ.

Problema.

Data media trium proportionalium, & differentia extremarum, dare extremas.

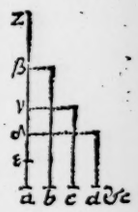
Sit media data AD, eique ad rectos angulos ponatur DZ æqualis differentiæ extremarum, & dividatur bifariam in S, centro autem S & intervallo SD deſcribatur circulus Dμκ, & per S ducta Aμ Sκ; ponatur AM æqualis Aμ, & AC æqualis Aκ. Quoniam AD tangit circulum, ergo quadratum AD æquale eſt rectangulo μAκ; ergo AM, AD, AC, ſunt in continua proportione, & MC (differentia extremarum) æqualis eſt ipſi DZ. Fig. 17.

Lemma.

Si fuerint magnitudines in infinitum decreſcentes Summa Differentiarum æquatur maximo Termino.

Sint magnitudines aZ, b, c, d, &c. in infinitum: dico omnes earum differentias æquari ipſi aZ. Si negetur; ſint majores & fiant aβ, aγ, aδ, &c. æquales ipſis b, c, d, &c; erunt ergo Zβ, βγ, γδ, &c. partes ipſius aZ; non ſunt ergo majores Toto. Sint jam minores, quare æquales ſint ipſi Zδ, reliquo autem aδ æqualis ponatur d, ipſa etiam d ponatur aε minor; ergo addita eſt alia differentia δε, quare Zε eſt æqualis ſummæ omnium differentiarum, ergo Zδ æqualis eſt ipſi Zε, major minori, quod eſt abſurdum. Ergo Za (cum ſit neque major neque minor) æqualis eſt ſummæ omnium in infinitum differentiarum.

Fig. 19.



Lemma.

Binarum magnitudinum differentia, æqualis eſt differentiæ inter ſummam & duplum utriuſvis. Patet addendo utrique magnitudini minimam, vel utrique maximam.

Definitio.

Polygonum Serratum eſt figura conſtans alternatim ex lateribus ſibi invicem parallelis, & lateribus obliquis. Sola autem latera non parallela vocentur ſimpliciter Latera.

Polygonum Serratum circulo Circundari dicitur, quando unuſquiſque angulus internus circulum attingit. Atque idem circulo inſeri dicitur, quando unuſquiſque angulus externus circulum attingit, & angulum internum polygoni circundati ad verticem habet. Fig. 17.

Problema.

Polygonum Serratum ſemicirculo dato inſerere, cujus ſumma laterum ſit duplo diametri minor; atque aliud circundare cujus ſumma laterum ſit duplo diametri major; ita tamen ut utriuſque ſummæ differentia ſit datæ cuicunque magnitudini æqualis.

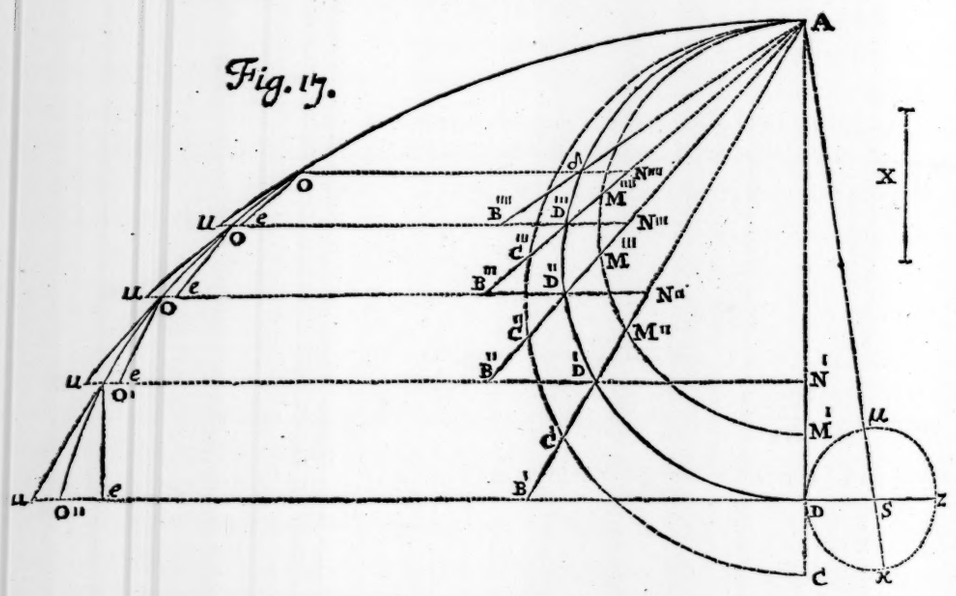
Sit ſemicirculus datus ADD, cujus diameter ſit AD; magnitudo data X. Data igitur media proportionalium AD, fiant AM′, AD, AC continue proportionales, ita ut differentia extremarum M′C, æqualis ſit ipſi X. Diſponantur autem ſubtenſæ AD ubique in data ratione AD ad AM′, & continuetur ratio in infinitum. Productis deinde ſubtenſis, per unumquodque D ducantur parallelæ NDB, ad proximam utrinque ſubtenſam. Patet ex iis quæ dicta ſunt, Polygonum ſemicirculo inſertum eſſe. Atque aliud circundatum. Dico autem inſuper latera Inſerti ſimul ſumpta (ſcilicet omnes in infinitum DN) deficere à duplo diametri defectu DM′; Latera vero circundati (ſcilicet omnes in infinitum BD) excedere duplum diametri, exceſſu DC: differentiam denique laterum utriuſque æqualem eſſe datæ magnitudini X.

Diametris AM′ & AC, ducantur circuli tangentes etiam in A, & ſecantes ſubtenſas

tenſas in M & C ubique. Quoniam ergo ſubtenſæ A D diſponuntur in data ratione A D ad A M′ ; ergo A M′ (antecedentis ſubtenſa) æqualis eſt (conſequenti) A D′ ; ergo M′ N′ (antecedentis) æqualis eſt ipſi D′ M″ (conſequentis) & ſic ubique : ergo differentia ipſarum D M′, M′ N′ (ejuſdem ſubtenſæ) æqualis eſt differentiæ ipſarum D M′, D M″ (antecedentis & conſequentis :) Ipſæ vero D M cum ſint magnitudines in infinitum decreſcentes differentiarum ſummam æqualem habent maximæ D M; ergo ſumma omnium D M minus M N (ejuſdem ſubtenſæ,) æquatur maximæ D M. Sed quoniam D M′ minus M′ N′, æqualis eſt duplo D M′ minus D N, & ſic ubique ; & quoniam ſumma omnium D M, cum ſint differentiæ ſubtenſarum in infinitum decreſcentium, æquatur maximæ A D (ſcilicet diametro:) Ergo duplum ſummæ ipſarum D M (hoc eſt duplum diametri) minus ſumma Laterum D N, æqualis eſt ipſi D M′. Ergo omnium polygoni Inſerti Latera deficiunt à duplo diametri defectu D M′.

Rurſus quoniam A M′, A D, A C ſunt in continua proportione ; ergo C′ D′ (antecedentis ſubtenſæ) æqualis eſt ipſi B″ C″ (conſequentis) & ſic ubique. Ergo (eodem modo quo ſupra) demonſtratur, quod duplum ſummæ ipſarum B C (hoc eſt duplum ſubtenſæ A B) minus ſumma laterum B D, æqualis ſit maximæ B′ C′ ; ergo omnia Polygoni circundati latera deficiunt à duplo ſubtenſæ A B′, defectu B′ C′. Sed A B′ æqualis eſt ipſi A C, & B′ C′ ipſi C D. Ergo omnia Polygoni circundati latera ſuperant duplum Diametri exceſſu D C.

Fig. 17.



Addatur demum defectus, & exceſſus quibus, hinc inde polygona differunt à duplo diametri ; ergo C M′ eſt utriſque differentia ; & æqualis quidem ponitur ipſi X. Ergo ſemicirculo A D D polygonum ſerratum inſertum eſt, & ſimile eſt circundatum, hoc majus, illud minus duplo diametri, utriuſque autem differentia æqualis eſt datæ magnitudini X. Quod erat faciendum.

Scholium.

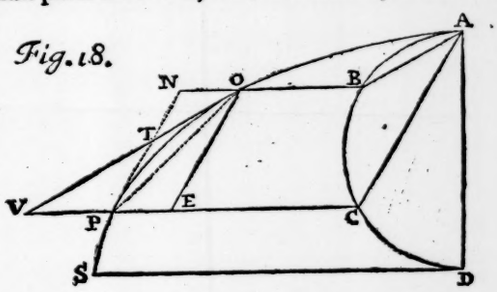
Dato circuli ſegmento quovis A ♪ D′, eodem prorſus modo polygonum ſerratum inſeritur & circundatur ; & demonſtratur latera inſerti deficere à duplo baſis ſegmenti A D′, defectu D′ M″ ; Latera vero circundati excedere duplum ejuſdem, exceſſu D′ C′ ; utriuſque vero differentiam eſſe C′ M″ ; quæ cum minor ſit quam C M′, minor eſt quam X.

Lemma.

Lemma.

Si à puncto quovis O in Cycloide primaria S P O A D, ducatur Tangens O V versus Basin, item basi parallelæ N O B, & V P C secantes Genitorem in B, C, qui-

Fig. 18.



bus A jungatur, & ducatur O E parallela ipsi A C. Dico tangentem O V majorem, ipsam vero O E minorem esse portione Curvæ inter parallelas interceptæ O P.

Ducatur P T N ipsi O E parallela, item subtensa portionis P O. Quoniam angulus P E O est obtusus (cum sit æqualis ipsi P C A,) ergo E O minor est recta P O, ergo minor etiam curva P O.

Rursus quoniam P N parallela est ipsi A C, ergo tangit Cycloidem in puncto P, & quoniam angulus V P T est obtusus, ergo T P minor est ipsa T V, ergo O T V major est ipsis O T, T P, simul sumptis, ergo major est portione O P.

Definitio.

Polygonum serratum Cycloidi circumscribi dicitur quando unusquisque angulus internus Cycloidem contingit, atque idem inseri dicitur quando unusquisque externus attingit.

Theorema.

Curva linea Cycloidis primariæ est quadrupla diametri Genitoris.

Sit Curva semicycloidis o o A, cujus Basis sit o D, Diameter A D tam Cycloidis quam Genitoris A δ D' D. Dico curvam o o A esse duplam ipsius A D. Si negetur sit Curva vel major vel minor duplo A D. Et sit sive excessus, sive defectus X. Fig. 17.

Genitori polygonum serratum inseratur, atque aliud circundetur, ita ut differentia summæ laterum utriusque sit æqualis ipsi X. Et producantur parallela Polygonorum latera N D B ut secent curvam in o o. Et ductis tangentibus o u, o u circumscribatur Cycloidi polygonum serratum infinitum. Et ab iisdem punctis o ductis o e, o e, ita ut quæque parallela sit ei subtensæ A D quæ in eandem e D parallelam incidit, inseratur Cycloidi polygonum serratum infinitum. Quoniam igitur ipsæ o u tangunt Cycloidem, ergo parallelæ sunt & æquales ipsis D B singulæ singulis; & quoniam ipsæ o e parallelæ sunt, & æquales ipsis N D, ergo latera polygoni Cycloidi circumscripti æqualia sunt lateribus polygoni quod Circulo circundatur, & latera polygoni cycloidi inserti, ejus quod circulo inseritur. Quare latera polygoni circumscripti simul omnia excedunt duplum diametri excessu D C, scilicet minore quam X, & curva quidem adhuc minor est: & latera polygoni Cycloidi inserti deficiunt à duplo diametri defectu D M', scilicet minore quam X, & curva quidem adhuc major est. Atque idem demonstratur dato quovis defectu vel excessu X. Ergo Curva semicycloidis non est major neque minor duplo diametri. Ergo curva Cycloidis primariæ est quadrupla Diametri Genitoris. Quod erat demonstrandum.

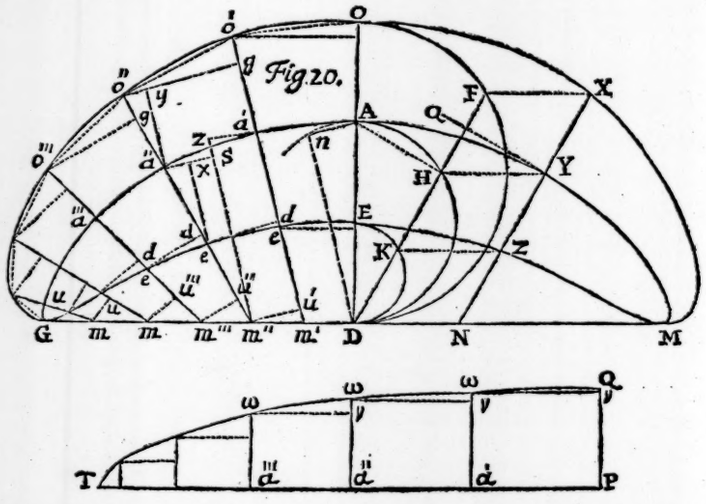
Corollarium.

Eodem prorsus modo demonstratur, portionem quamcunque curvæ, à vertice abscissam, ut o' o A, duplam esse subtensæ A D', scilicet quæ à sectione Basis portionis, & genitoris ducitur.

De Dimenſione Cycloidum Contractarum & Protractarum.

Proprietates quædam Cycloidum.

SUper eandem Baſem G M conſtituantur tres Cycloides genere differentes, ſcilicet G a A M Primaria, cujus genitor eſt A H D: G o O M Cyclois quædam Contracta, cujus genitor eſt O F D: & G e E M, Cyclois quædam Protracta, cujus genitor eſt E K D.



Primo, quoniam Cyclois cujuſvis generis fit ex motu æquabili in peripheria genitoris, dum interim genitor motu æquabili transfertur, ſuper datam baſem, donec punctum generans circulum abſolverit, à puncto contactus incipiens & ad idem rediens: Ergo utrique Motus, tam circularis quam rectus, erunt ubique in eadem ratione. Quare in omni Cycloide, ſi ducatur Baſi parallela à Genitore ad curvam, ut F X, vel H Y, vel K Z; erit ut motus in arcu O F, ad motum in ſemicirculo O F D, ita motus rectus F X, ad ſemiſſem totius motus recti, ſcilicet ſemibaſem D M. Similiter ut arcus A H ad ſemicirculum ſuum A H D, ita H Y ad ſemibaſin. Idem dicitur de arcu E K & recta K Z.

Quare poſitis in directum punctis D K H F, quoniam arcus O F, A H, E K ſunt in eadem ratione ad ſemicirculos ſuos, erunt rectæ F X, H Y, K Z, in eadem ratione ad communem baſem D M; ſunt ergo æquales, & puncta Cycloidum X Y Z in directum poſita ſunt; rectæ igitur X Y Z N, F H K D, ſunt æquales, & ſimiliter ſectæ & poſitæ: ſed F D & O D ſimiliter ſectæ ſunt: ergo *rectæ* X Y Z N, O A E D *ſimiliter ſectæ ſunt a Curvis Cycloidum.*

Secundo, quoniam angulus O D F eſt ad rectum, ut arcus O F ad ſemicirculum ſuum, ſeu ut F X vel D N ad D M; ergo, *ut* M N *ad* D M, *ita angulus* M N X *ad Rectum.*

Tertio, jungantur H A, eique parallela ducatur Y Q. Quoniam demonſtratum eſt Y Q tangere Cycloidem primariam in Y: ergo N Y *cadit normaliter in Curvam primariæ.*

Theorema.

Curva Cycloidis primariæ eſt quadrupla Diametri: & portioni cuivis aſſignatur recta æqualis.

SIt ſemibaſis G D diviſa in partes æquales m m indefinite minimas; & à punctis m incidant ubiq; in primariam normaliter rectæ m a, & in proxime majorem m a rectæ m u: ducantur D n (ſubtenſa genitoris) & m'' z, parallelæ ipſi m' a'; item A n, a' z, a'' s parallelæ: quare a' z tangit Cycloidem in a, & parallela & æqualis eſt ipſi m'' u'. Quoniam igitur ipſæ m a (quum ſint æquales & parallelæ ſubtenſis genitoris) ſunt ſinus

angulorum

angulorum ſuorum a m G ad Radium A D; & in Triangulis rectangulis m u m, latera m u ſinus eorundem angulorum ad Radium m m; ergo eſt ut A D ad m″ m′, ita m′ a′ ad m′ u′, vel a′ z. Et quoniam anguli a m G æqualiter ſeſe excedunt, ergo in Triangulis ſimilibus A D n, a″ m″ s, eſt ut A D ad A n ita m″ a″ ad a″ s, & (quum A n ſit indefinite minima, & propterea æqualis arcui A n, ſive ipſi m″ m′) eſt ut A D ad m″ m′, ita m″ a″ ad a″ s; erat autem ut A D ad m″ m′, ita m′ a′ ad a′ z; quare eſt ut m′ a′ ad m″ a″, ita a′ z ad a″ s, ſed differentia inter a′ m′ & a″ m″ eſt ad a′ m′ data quavis ratione minor, ergo a′ z, a″ s ſunt æquales, & ſimul ſumptæ portioni curvæ a″ a′ æquales. Eſt ergo portio a″ a′ duplum ipſius m″ u′: atque idem ubique demonſtratur. Omnes igitur a a ſunt duplæ omnium m u. Et ſi abſcindatur à vertice portio quælibet A a″, ea dupla eſt omnium m u quæ ſunt inter D & m″: Sed omnes m u (quum ipſi m u ſint ſinus complementi, quorum ſinus recti ſunt u m) ſunt æquales omnibus u m: omnes autem u m (quum ſint differentiæ ipſarum m a) ſunt æquales maximæ m a, hoc eſt ipſi A D. *Ergo ſemicurva* A a g *dupla eſt diametri* A D. Et quoniam omnes u m inter G & m″, ſunt æquales maximo ſinui ſcilicet m″ a″; ergo omnes m u inter G & m″ ſunt æquales ſinui complementi ipſius m″ a″. Quare Portio quælibet ut A Y (cujus normalis N Y eſt ſinus rectus anguli Y N M ad radium A D) dupla eſt ſinus complementi A H.

Curvis Cycloidum Protractarum & Contractarum aſſignantur ſemiellipſes æquales.

IN Cycloide contracta G o O m, demittantur ubique o g perpendiculares in proxime majorem o m, cui parallela ducatur a″ y & junctis o o inſcribatur polygonum. Quoniam eſt ut A D ad A O, ita m′ a″ ad a″ o″, & in Triangulis ſimilibus m″ a″ s, a″ o″ y, eſt ut m″ a″ ad a″ o″, ita a″ s ad o″ y; ergo eſt ut A D ad A O, ita a″ s ad o″ y, & converſe ut 2 A D, ad 2 A D + A O, ita 2 a″ s ad 2 a″ s + o″ y, ſed 2 a″ s eſt curvæ portio a″ a′, & 2 a″ s + o″ y eſt o″ g′: eſt ergo ut 2 A D ad 2 A D + A O, ita portio a′ a′ ad o″ g′. Quare omnes o g ſimul ſumptæ ſunt æquales duplo A D + A O, & unaquæque o g eſt in eadem ratione ad portionem ſuam a a; & omnis a o, ad ſuam m a primariæ, hoc eſt, ſunt a o ut ſinus recti angulorum ſuorum G m o ad Radium A O. Quare ſi ponatur recta P T æqualis duplo A D plus A O, eique ad rectos angulos P Q æqualis ipſi A O, & fiant P α′, P α″, P α‴, ſinus complementi æqualium angulorum ad Radium P T, & ducantur tam α ω, eorundem ſinus recti ad Radium P Q, quam γ ω ipſi P T ubique parallelæ & jungantur ω ω; patet ex iis quæ dicta ſunt ipſas γ ω æquales eſſe ipſis g o ſingulæ ſingulis, & ipſas α ω ipſis a o; quare ipſæ etiam γ ω æquales erunt ipſis g o, & Triangula rectangula ω ω γ triangulis rectangulis o o g. Ex vulgaribus autem Ellipſeos principiis patet Figuram T ω Q P eſſe polygonum quadranti Ellipſeos inſcriptum; ergo Polygonum Laterum indefinite minimorum quadranti Ellipſeos inſcriptum, æquale eſt Polygono Semicycloidi contractæ inſcriptum: Ergo *Cycloidis contractæ curva* G o O M, *æqualis eſt ſemiellipſi cujus Axis tranſverſus eſt duplum* A D *plus* A O, *& Axis minor* A O.

Eodem modo ducta e″ x parallela ipſis m″ s, demonſtratur ut 2 A D ad 2 A D — A E, ita eſſe 2 a″ s ad 2 a″ s — a″ x (ſive ad e″ d;) quare procedendo ut ſupra demonſtratur curvam Cycloidis Protractæ æqualem eſſe ſemiellipſi cujus Axis tranſverſus eſt duplum A D minus A E, & Axis minor A E.

Scholium.

PAtet Figuram G o X M Y a, Curvis Primariæ & Contractæ terminatam, eſſe meram ſemiellipſin in arcum flexam, ita ut Axis tranſverſus applicetur Cycloidi Primariæ à parte convexa: & Figuram G a Y M Z e, Curvis Primariæ & Protractæ terminatam, eſſe ſemiellipſin, cujus Axis tranſverſus applicatur Primariæ à parte Concava; hujus autem axis proportionaliter protrahitur, manente Curvæ Ellipticæ dimenſione licet recurvetur, Illius autem proportionaliter contrahitur manente Curva, licet magis curvetur. Patet etiam ipſas o a, & a e eſſe meras Ellipſeon ordinatas. Quare non eſt per accidens, Ut Clariſſimo Detonvilio placuit, quod Curva Primariæ ſit rectæ æqualis, ex eo quod Curvæ Reliquarum ſint Ellipſibus æquales; ſed è contra Curvæ Reliquarum Cycloidum ſunt Ellipſibus æquales *Epiſt. ad Hugen.* Pag. 7.

per accidens, ex eo quod earum Axes applicentur ejuſmodi Curvæ, quæ ex natura ſua ſit Euthyſmi patiens; quod de nulla Curva, hactenus nota (ne quidem aſſumpta Circuli Quadratura) prius demonſtratum fuit, quam ego hæc de Cycloide Primaria amicis communicaveram; niſi quod Illuſtris Juvenis Gulielmus Nelius, Curvam quandam ita conſtruendam ut ſit Euthyſmi capax, ſumma cum laude invenerit.

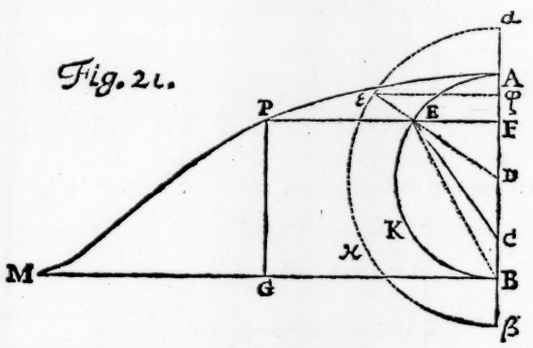
De problemate Kepleriano per Cycloidem ſolvendo.

ASſeruit Keplerus, ex cauſis phyſicis, planetas ita ferri circa ſolem in Orbita Elliptica, ut velocitas planetæ ſit ubique diſtantiæ ejuſdem à Sole reciproce proportionalis; unde ſequentem Hypotheſin ingenioſe commentus eſt. Secat ſcilicet aream Ellipſeos Planetariæ lineis à ſole ductis in infinita Triangula Mixtilinea æqualia; unde fit ut Curva Ellipſeos dividatur in portiones inæquales, minores quidem circa Aphelium, majores circa Perihelium: per has autem portiones ponit Planetam æqualibus temporibus ferri. Quare ex Medio motu Anomaliam coæquatam ut indagaret, ſecanda eſt ſemiellipſis per Focum in data ratione; vel (quod perinde eſſe ab eodem demonſtratur) ſecundus eſt Semicirculus per quodvis punctum Diametri in data ratione. Mirum eſt quantum in hoc problemate ſudaverit Keplerus, Orbitas ſuas ————*volvens nitendo neque proficit hilum.* Tandem anhelus, Geometrarum opem implorat; interim veritus ne propter arcuum & ſinuum ἐπιπροσθήσεις inveniatur Problema inexplicabile. Quod nihilominus ope Cycloidis protractæ nos olim ſic exhibuimus.

Problema.

Semicirculum per datum punctum Diametri in data ratione ſecare.

SIT Semicirculus AKB, cujus Centrum D. Punctum datum C. Ratio data R ad S. Fiant DC, DB, Dβ continue proportionales; & centro D deſcribatur αxβ,



cui æqualis ponatur recta BM; data autem baſi BM, & Genitore AKB, deſcribatur ſemicylois Protracta MAB; fiat deinde BG ad BM ut R ad S, & ducatur GP ad angulos rectos ſecans Cycloidem in P, item PF Baſi parallela ſecans Genitorem in E. Jungantur denique EC. Dico mixtilineum AEC eſſe ad ſemicirculum ut R ad S. Ducatur radius DEε; & demittatur εφ; & jungantur EB.

Quoniam ſegmenta αεφ, AEF ſunt ſimilia, ergo ut arcus αε ad εφ, ita arcus AE ad EF; & quoniam arcus AE ductus in ſemiradium æqualis eſt ſectori AED, & ſemiſſis baſis BD ſive ſemiradius ductus in altitudinem EF æqualis eſt Triangulo DEB: ergo ut AE ad EF, ita ſector AED ad Triangulum DEB; & ut αε ad εφ ita AED, ad DEB: ſed ut εφ ad EF, ita Triangulum DEB ad Triangulum DEC (quia ſunt ut Baſes DB, DC:) erit igitur ex æquo ut αε ad EF, ita ſector AED, ad Triangulum DEC, & converſe ſimul & inverſe erit, ut αε plus EF, ad αε, ita AED plus DEC, ad AED; ſed αε eſt ad ſemiperipheriam αxβ, ut ſector AED ad ſemicirculum AKB; erit igitur ex æquo ut αε plus EF ad ſemiperipheriam, ita AED plus DEC ad ſemicirculum: ſed ex iis quæ

demonſtrata

demonſtrata ſunt de Cycloide, quoniam EP eſt ad Baſin BM, ut angulus ABE ad rectum, ſive arcus αε ad ſemiperipheriam αχβ quæ quidem æqualis eſt ipſi BM; ergo αε plus EF æqualis eſt ipſi FP: eſt ergo ut FP (vel BG) ad BM (ſive ut R ad S,) ita Mixtilineum AEC ad ſemicirculum AKB. Quare ſemicirculus AKB per punctum datum C ita ſecatur à linea CE, ut pars ſit ad totum in data ratione R ad S. Quod erat faciendum.

Scholia.

Quod ſi punctum C ſit in ipſa extremitate Diametri, puncta C, B, β, coincident, & Baſis BM æqualis eſt peripheriæ Genitoris; Quare Cyclois eſt Primaria, & ductis GP, PF eodem modo perficitur Problema, & facilius demonſtratur.

Quod ſi punctum C ſit extra circulum producta Diametro, Cyclois erit contracta, & Mixtilineum AEC, non ſolum aſſignatur ſemicirculo minor in data ratione, ſed poteſt etiam major eſſe vel æqualis.

Demonſtratur à Keplero ex data ſectione ſemicirculi à puncto Diametri, poſſe ſemiellipſin quoque à puncto Axis tranſverſi in data ratione ſecari; ſed idem etiam perficitur à puncto cujuſvis Axis.

Hinc Patet ex contemplatione Cycloidum ad eundem modum innumera alia problemata perfici poſſe de ſegmentis, Triangulis mixtilineis, & Lunulis, ſive componantur ex portionibus circularibus, ſive ellipticis. Quod indicaſſe ſufficiat.

Veruntamen, cum Cyclois ſit Linea Mechanica non Geometrica; non vere ſolvuntur problemata, ſed Mechanice perficiuntur, non enim magnitudine datur Linea GP; unde interſectio P non datur Geometrice. Fatendum eſt enim nullas Interſectiones Geometrice dari præterquam Rectarum, & Interſectionem Rectæ & Curvæ (ut quando Recta ſecat Circulum aut ſectionem Conicam) non dari quatenus talis eſt, ſed quatenus eſt communis interſectio binarum Rectarum in ipſa Curva, ita ut (ex natura Curvæ) uniformem quandam ad invicem habeant ubique Relationem, quæ æquatione aliqua poſſit exprimi. In Cycloide vero Relatio inter PG & PF, ſive inter Arcum majoris circuli Sinumque minoris ſimul ſumptos, & ſinum Verſum, perpetuo varia eſt & difformis. Poſito autem punctum P dari, non deeſt contemplationi veritas & pulchritudo Geometrica.

Quicquid perficitur hoc modo per rectam ſecantem Cycloidem, habetur etiam ſi circulus ſecet Evolutæ curvam. Evolutam autem appellamus ſuperficiem Ungulæ Cylindricæ. Sunt aliæ etiam Curvæ quæ tantundem præſtant, quarum etiam interſectiones Geometrice non dantur.

Non inutilis eſt contemplatio Cycloidum quæ generantur ex circulo ſuper Baſem circularem revoluto, hujus generis vocentur Epicycloides, tales enim curvas Planetæ in Epicyclis vecti deſcribunt. Quaſdam habent proprietates Cycloidum proprietatibus non abſimiles, quaſdam diverſas & magis perplexas, præcipue Epicycloides Planetariæ, in quibus motus non ſint æquales. Verum hæc omnia proſequi non eſt præſentis Inſtituti.

FINIS.

Nobiliſſimo Doctiſſimoque Viro,

D. CHRISTIANO HUGENIO,

Conſt. F.

JOHANNES WALLIS

S.

DUM ea quæ cum his accipies, Vir Nobiliſſime, diutinas preli moras exſpectabant, literas Tuas 9° Junii datas, poſt menſem circiter accipiebam. Quæ partim promiſſa mea, de hiſce tibi communicandis pridem facta, memorant; partim libros aliquot à Dettonvilio ſive Paſcalio editos, quos Illuſtriſſimus Carcavius diſtribuendos miſerat, huc deferendos curant; quos ego ſtatim atque accepi, cum officioſa Carcavii ſalutatione, ut imperatum erat, diſtribuebam.

Dettonvilii tractatus.

Promiſſi mei fidem quod attinet, habes eam his ſcriptis liberatam. Dettonvillii vero Tractatum, (de quo & ſententiam meam ſive Tuo ſive & Carcavii nomine petis,) tum arripiebam avidus, tum eodem poſteroque die evolvebam; & acuminis plenum invenio. Eumque itinere eo minus impedito aut inoffenſo pede pervolabam, quia nec à noſtris plane diſſentientem reperi, nec multum abſimili methodo incedentem: quod poſtquam ſua cum noſtris contuleris, cito deprehendes.

Cum autem Vir Clariſſimus jamdudum de hoc negotio multa meditatus fuerit, (quod Gallos jam à viginti vel etiam quadraginta annis occupavit;) illaque ipſe propoſuerit problemata, (num ſibi tum temporis penitus perſpecta nec ne, mihi nondum conſtat; at magnam ſaltem eorum partem ſibi jam perſpectam eſſe, non dubitandum, credo:) omniumque undecunque ex eo tempore de hoc negotio ſcripta, atque hac occaſione ad D. Carcavium (ut deſiderabatur) tranſmiſſa, evolvendi nactus opportunitatem, indeque quod ad rem ſuam faciat tranſumendi, vel ad ſua ſaltem ſenſa perficienda anſas non leves arripiendi: non diffiteor, accuratiora longe ab ipſo forſan exſpectanda; quam à me, qui ſolus & rudis huc acceſſi. Præter enim ea quæ apud Toricellium exſtant, quæque apud Schotenium in ſuis ad Carteſium annotationibus, (neſcio an & quæ apud Tacquetum,) non memini me, ante expoſita hæc problemata vel legiſſe de Cycloide quicquam, vel meditatum eſſe. At interim non piget, ea quæ & nobis in hoc negotio obvenerunt palam facere, nec (ſpero) iſtarum rerum peritis diſplicebit.

Verum orandus erit vir Doctiſſimus, ne plagii nos inſimulare velit, (quod de Toricellio inſinuatum video; quam juſte, neſcio, ſaltem parum candide poſtquam per tot annos fuerit demortuus:) ſi forte eadem & ſibi & nobis non raro occurrerunt, (præſertim cum ipſe mea prius inſpexerit quam ego ſua:) neque etiam ut inventis noſtris derogatum ire velit, ſi forte horum nonnulla vel ipſe vel Robervallius (quem pro conjuncta perſona habeo,) prius invenerit. Dummodo enim ipſi ſua apud ſe premunt inventa, nec publici juris faciunt, iniquum plane eſſet ni & alios patiantur ea quæ ipſi celant itidem invenire, atque interim inveniendi (ſiqua ſit) gloriam reportare. Si enim nobis, verbi gratia, (inter alia) proponatur inveſtigandum (& quidem ſub præmio) tanquam res ardua & difficultatis plena & quæ mercedem mereatur; *Quanta ſit ſolidi ex Cycloidis circa baſem converſione magnitudo*: Non nobis id obeſſe debuit aut famæ noſtræ, ſi Robervallius aliquando (ante aliquot forſan annos,) clam nobis, id etiam invenerit; neque ſi tum ego, tum & alii, id ipſum proprio marte inveniamus (nec interim alius alium incuſamus plagii,) minus propterea inveniſſe cenſendi ſumus, quam ipſe Robervallius: (eadem enim in eodem aperto naturæ campo à variis inveniri nihil prohibet.) Quam quidem inveniendi laudem ſi præripuiſſe vellent; oportuit id nobis ut jam inventum exhibuiſſe, non ut nunc inveſtigandum proponere. Quod & de reliquis utrinque inventis pariter dictum, eſto.

Et

Et quidem maluiſſem, vel hoc nomine, ut abſtinuiſſet Author Hiſtoriolæ *de la Roulette*, ſaltem eis quæ in *Torricellium* dicta ſunt; (in Torricellium, inquam; nam de *Lalouera* minus ſum ſolicitus, ut qui ſuperſtes adhuc eſt in ſui Apologiam;) quam ut meritiſſimum virum, jam per multos annos demortuum, ſuggillaret. Torricellium utique ex ſcriptis novimus tum virum doctum eſſe & Mathematicum, tum de Mathematicis optime meritum; credo, & ingenuum. Nec video quid apud illum admiſſum ſit, quod Clariſſimo Viro, vel Robervallio etiam, cujus partes agit, bilem moveret. Edidit Torricellius, anno 1644, inter alia, demonſtrationes ſuas de Cycloidis area circuli genitoris tripla: quod quidem cur ipſi non liceret, non video. Demonſtrationes illas, ſuas eſſe, non negant; nec cauſantur illum Robervallii quicquam pro ſuo venditaſſe. Non dixit quidem, (neſciebat enim, vel ipſis id fatentibus,) ſed nec negavit, Robervallium hoc etiam demonſtraſſe. Quod jam tum vel publice notum erat, vel non; Si ſic, Robervallio id injurium eſſe non poteſt, ſi poſt illum alius idem ſolvat problema, magis quam Archimedi quod poſt illum idem Torricellius demonſtraverit Quadraturam Parabolæ; Si minus, ſaltem Torricellio ſuccenſendum non erit quod ipſe neſciverit quid vel in ſcriniis ſuis apud ſe premeret Robervallius, vel etiam amicis ſuis communicaret. Nos ſaltem Torricellio plus debemus, qui demonſtrationes ſuas jam palam factas vulgavit, quam, qui ſuas adhuc ſupprimit, Robervallio. Et quidem iniquum plane judicamus, ut, ſi ſuas nolit Robervallius typis mandare, non igitur liceat Torricellio ſuas. At Galilæo, inquiunt, id aſcribit Torricellius quod Merſenno debetur, &, quod Robervallio, ſibi. At bona verba, quæſo: Siquidem ego neutrum horum video. Erat utique ſuarum ſolutionum Author Robervallius, & Torricellius ſuarum non minus. Sin ſua intereſſe putaverit Robervallius ut ſciat orbis priores ſuas eſſe, ut ut id neſciverit Torricellius; liberum id illi fuit, hoc indicaſſe, nec erat ad hoc neceſſe ut Torricellium, hujus neſcium, ſuggillet, aut iniquis ſuſpicionibus oneret. Et quidem tantum abeſt ut, in derogationem Robervallii, ſe problematis hujus ſolutionem inveniſſe *primum* affirmaverit, ut ne quidem ſe *inveniſſe* dicat: Sed ſolummodo propoſitionis veritatem profeſſus, ſuis eam demonſtrationibus confirmat. Quod quid ni impune poſſit, non video. At fieri poſſit, ut inter Galilæi ſchediaſmata, Beaugrandi ſcriptum viderit, quo demonſtrationem Robervallii, celato nomine, ad Galilæum miſerat; unde anſam ſuis arripuiſſe poſſit. Nempe hoc ſuſpicantur: Num autem pro comperto habeant, ignoro; nec niſi hoc faſſus fuerit ipſe, quod non affirmant, unde id ſibi conſtare poſſit non docent. Sed, ut ut ſit; non ſurreptas inde demonſtrationes cauſantur ipſum pro ſuis venditaſſe, nec negant ſuas eſſe quas exhibet. Quodnam igitur ſit, cujus inſimulent criminis, plane non intelligo: nec, præter ſiniſtras ſuſpiciones, quicquam quo id conſtet afferunt. Imo vero, inquiunt, (quod palmarium eſt apud eos argumentum,) literas ipſius manu ſcriptas habent, quas ut κειμήλιον quoddam in hunc diem conſervant, (quaſi quidem res ipſa tanti eſſet,) quibus Robervallio primas concedit in hujus Problematis ſolutione. Nempe Vir ingenuus, cum tandem intellexerit, quod dum librum ederet neſciebat, Robervallium etiam (clam ipſo) hoc idem demonſtraſſe, utut typis illud non vulgaverit, (quod necdum, credo, fecit,) non ægre faſſus illud erat. Verum hoc ſibi tum innotuiſſe cum librum ederet, nec illum confeſſum dicunt, nec affirmant ipſi; imo contrarium docent. Quid itaque culpent neſcio, niſi nefas eſſe velint, ut quiſquam vel inveniat alius, vel in publicum emittat, quod ſibi forte clam cognitum, apud ſe premit Robervallius, vel ſuis ſolis notum malit. Merſennum vero quod ſpectet, cui derogatum inſinuant quod Galilæo tribuitur: vel nullo quidem, vel perexiguo, mihi viſum eſt fundamento niti. Eſto enim quod volunt ipſi, Merſennum ſaltem anno 1615 hanc conſideraſſe curvam, *la Roulette* ſibi dictam; atque de hac tum temporis Geometras interrogaſſe: ſi tamen & verum ſit, quod prodit Torricellius (quod quidni ſit, non video, nec dicunt illi,) hanc ipſam lineam *à Galilæo jam ſupra 45 annum*, (adeoque anno ſaltem 1599, prodiit enim liber ille anno 1644,) *Cycloidem vocatam*: Ecquid, quæſo, Merſenno derogatum itur, dum hoc dicitur? Nec quidem aliud de Galilæo dictum, quod huc ſpectet, apud illum quicquam reperio: de Merſenno, nihil. Et quamquam nolim ſibi ſuum reponere, *ce fut un ſujet de rire en France*; at nos certe, qui minus forte ſumus quam Galli ſui ad riſum proclives, miramur ſaltem (dum Torricellii verba cum hac hiſtoriola comparamus,) quid illud tanti ſit, quod

quod tantis hiſce queſtibus ſubſit fundamentum. (Quaſi quidem Nelius noſter Heuratium veſtrum ejuſdem inſimularet criminis, qui id ipſum ſe primum proferre putat, quod jam ultra duos annos apud noſtros paſſim innotuit, ſe tamen inſcio, & à pluribus demonſtratum.) Sed nimius forte videar in alieno negotio. Ignoſcent interim Clariſſimi Viri (quos ego veneror, & Merſennum ſuum) ſi parcius iſta dicta malim, quibus in doctiſſimi Viri, & bene olim meriti, famam, nulla neceſſitate involatur. Optaſſem potius, ut, ſi quid apud ſe tanti habent, quod ſibi ab aliis præreptum nollent, quo tum id ſibi ſecurius aſſerant, tum in uſus publicos magis conducat, divulgent ipſi; ut non ſit opus ea ſibi tandem ex poſtliminio vendicandi. Saltem, ſi, dum hoc ipſi negligunt, id alii aliunde diſcant, vel tum ſibi fieri injuriam non cauſentur, vel ſibi à ſe factam intelligant. Sed his miſſis ad Dettonvilium noſtrum redeo.

Quam autem ſua pleraque, aliis licet verbis, in meis etiam extent, erat quidem mihi aliquando in animo, collatis locis, digito indicare, atque in eum finem jam ante accuratius perlegiſſe, (vix enim aliter, quam, quod aiunt, tanquam canis ad Nilum, intra biduum illud quod diximus, ſumma quæque delibando perlegimus;) quod cum per otium hactenus non licuerit, id tibi tamen ubi utrumque perlegeris facile patebit. Quæ tamen non eo animo dicta velim intelligas, quaſi Clariſſimi Viri meritis derogare velim; vel ſiniſtræ quicquam ſuſpicionis alere; ſed ſaltem ut reipſa conſtet, quam in rebus hujuſmodi mirum non ſit, varios, eoſque longe diſſitos, nec ab invicem edoctos, dum eaſdem verſant res Geometricas, in eaſdem item ſpeculationes incidere; adeoque non temere alius alium inſimulare plagii, (in hoc præſertim, ingeniorum feraci ſeculo,) vel etiam aliis, quod ipſe prior invenerit, vanus inſultare debeat. Nam *Inveniſſe*, quidem Acuminis eſt; at, *primum inveniſſe*, Fortunæ: neque enim minore vel ſubtilitate vel acumine poſterior idem non raro invenit, quod alius (ſe neſcio) invenerat primus.

Cur autem exiſtimem Cl. Viro, hæc omnia ſua problemata non ſibi tunc perſpecta eſſe, cum ea propoſuerit; nec antequam aliorum hac de re ſcripta, ad D. Carcavium miſſa, inſpexerit, quæ perpoliendis & perficiendis inventis ſuis adjumento eſſe poſſint: multa ſunt quæ ſuadent. Suſcepit utique vir Cl. jam ab initio cum ſua primum expoſuit Problemata, non quidem ſe illa poſſe omnia abſolvere; ſed ſaltem, niſi quis alius interea ſolverit, *ſe, ea quæ invenerit ipſe, non aliis inviſurum, unde majora jam inventis nanciſcantur*: Quæ quam caute dicta ſunt, vides. Fallor etiam, vel ipſius ſolutiones (quantum ex levi inſpectione colligo) dependent ex cognitione longitudinis Cycloidalis lineæ, ejuſque in data ratione diviſione, (neque enim, citra hæc, illius figura 13. ad præſentes caſus omnes accommodabitur;) quarum cum inventionem Wrennio noſtro attribuat, non ante inſpectas Wrennii literas cognoviſſe cenſendus erit. Et quamvis hoc inventum Wrennii extenuatum ire ſatagat, Galloſque ſuos iſtius, cum innotuit, demonſtrationem ſuppeditare poſſe: non tamen affirmare ſuſtinet, vel id ſibi prius innotuiſſe, vel Gallorum ſuorum quempiam, ne privatim quidem, cuiquam innuiſſe perſpectam ſibi eſſe iſtius lineæ vel longitudinem vel in data ratione diviſionem. (At interim candorem forte deſideremus, cum video exterorum inventa quæ apud D. Carcavium clam reponenda videbantur, cum Gallis ſuis etiam ante indictum diem ſtatim communicata; quo, ſi non alias, ſaltem ex his inſpectis valeant quæſita ſolvere.) Addo inſuper, Poſteriora quæſita, quæ tandem ipſa proponit Hiſtoriola, quæ ex iſtius curvæ in data ratione diviſione dependent, indicio ſunt illius longitudinem, & partium ſuarum, ignoratam prius eſſe. Neque alia apparet ratio, cur non eadem una cum prioribus proponerentur. Sin mea me hac in re fefellit conjectura, eaque ſibi omnia pridem perſpecta dixerit, Paſcalius dicam? an Dettonvillius; non contendo: nec invidebo ſibi, ſed gratulor inventa ſua.

De ſingulis autem ſententiam ſigillatim ferre, ob cauſam jam memoratam, nondum valeo. Non video tamen quin, quæ aliquatenus perpendi, ſana ſint, & rite demonſtrata. Atque ea ſpeciatim (de quibus interrogas) de lineæ Parabolicæ & Spiralis æqualitate. Quamvis enim iſtius demonſtrationem nondum perlegerim; cum tamen propoſitio illa vera ſit; eamque ſic eſſe, ut alias, ſic ex demonſtratione per inſcriptiones & circumſcriptiones figurarum, ipſe antehac perſpexerim: non pronus ſum ut ſuſpicer Cl. Virum demonſtrando lapſum eſſe. Quod eo liberius pronuncio, qui Robervallium antehac conqueſtum intelligo, me *propoſitionem illam falſam eſſe temere affirmaſſe*: quam quidem ego neque temere nec omnino repudia-

repudiaveram, ſed demonſtrationem tantummodo ut ab Hobbio prolatam; ut inſufficientem improbabam: Propoſitionem ipſam, ubi illam examinaveram, veram deprehendi.

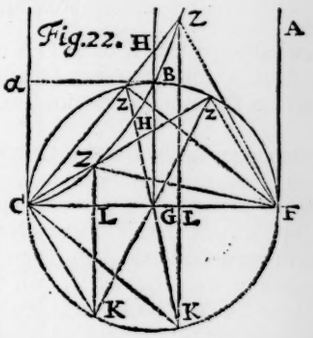
Calculum, quem ille totum omittit, fundamenta tradidiſſe contentus, nos integrum exhibuimus, uſque ad caſum illum quem ipſe ex omnibus ſelegerat, nempe de centro gravitatis ſemiſolidi ſemiconverſione ſemicycloidis circa baſin deſcripti, (& quidem ſolidi integri ejuſdem converſione circa axem facti.) Putaveram etiam ad reliquos item caſus (prius quam rem operæ abſolverint) calculum perduxiſſe; eum ſaltem qui ex § 65, 66, collatis ſupplendus eſt. Sed cum interea temporis prodierit Dettonvilii tractatus, nihil deinceps addendum cenſui; ne ipſius vitula araſſe videar: Adeoque prout Menſe Martio conſcriptus erat, atque ad Honoratiſſ. Vicecom. *Brounker* ſtatim tranſmiſſus, eodem plane ſtatu in publicum jam emiſſum tractatum habes. Potuiſſem quidem prolixius multo, & magis ad pompam, hoc totum opus perduxiſſe, quod & tironibus forſan & rebus hiſce minus exercitatis fuiſſet gratius, ſi per Definitionum, Lemmatum, Problematum, Theorematum, Scholiorum ſolennitates incedere, & longo apparatu lineares ubique demonſtrationes adornare vellem: Sed tibi, credo, non minus placebit concinna brevitas, & in paucis multa; qui, vel digito ad fontes intento monitus, demonſtrationis vim ſuccincte traditam non minus aſſequeris, quam ſi tanta eſſet ſolennitate in longum protracta. Sicubi vero in multiplici calculo (quod omnino eſt poſſibile) numerum pro numero poſitum deprehendes, id indicare non gravaberis & condonare. Atque hæc ſunt quæ tum de Illius tum de Noſtro tractatu monuiſſe viſum erat.

Sed, priuſquam Cycloidem penitus dimittam; non ingratum tibi fore credo ſi magnam illius cum Ciſſoide convenientiam oſtendam.

Propoſuiſti non ita pridem, de Ciſſoide propoſitionem perelegantem; Nempe in expoſita linea Ciſſoide, CZZ, cujus hæc natura eſt, ut rectam Zz ad C tendentem, Ciſſoide & ſemicirculi Czz peripheria interceptam, bifariam ſecet GH recta diametro FC perpendiculariter inſiſtens in centro G: *Spatium* FCZAF *longitudine infinitum*, CZZ *ciſſoidi &* FA *circulum tangenti interjectum, ſemicirculi* FzC, *triplum eſſe*, aſſeris. Petis autem, Num, ut *Hyperbolas Infinitas* (de quibus cum D. Fermatio paulo ante diſſerueram) ſic & ſpatium hoc *Ciſſoidale* ex noſtra *Infinitorum Arithmetica* ſuppeditare poſſem. *De Ciſſoide.*

Id itaque ſtatim quî fieri poſſit, ſequenti demonſtratione indicabam; quam non pigebit hic repetere.

Si ducantur tum zGK diameter, tum rectæ KC, & KZ (diametro CF in L occurrens:) oſtendit Pappus l. 3. p. 5. propter tum Zz biſectam in H, tum zK in G, rectam KZ rectæ GH parallelam eſſe: Adeoque tum zCK angulum in ſemicirculo, tum angulos ad L, rectos eſſe: Et conſequenter rectas LF, LK, LC, LZ, continue proportionales. Quod quidem non minus valet de puncto Z quovis in Ciſſoidis continuatione extra ſemicirculum, quam (qui Pappi caſus eſt) ubi intra ſemicirculum contingit.



Ponamus jam rectam FC diametrum in æquales partes numero infinitas infinitis punctis L dividi. Erunt itaque omnes CL, ut 1, 2, 3, *&c.* arithmetice proportionales, quæ ſucceſſive dicantur, *a*; quarum maxima CF dicatur $\mathcal{D}$. Eritque LK, (quippe media proportionalis inter CL & LF, hoc eſt, inter a & $\mathcal{D}-a$,) $\sqrt{:a\mathcal{D}-a^2}$. Cumque ſit ut LK ad LC, ſic LC ad LZ; erit $LZ=\frac{a^2}{\sqrt{:a\mathcal{D}-a^2}}$; hoc eſt $\frac{a^2}{\sqrt{a}\times\sqrt{:\mathcal{D}-a}}$ ſive $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{:\mathcal{D}-a}}$, ſive $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{:\mathcal{D}-a}}$ vel $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$. Hoc eſt, omnia quadrata LZ, ſunt ſeries Tertianorum, per ſeriem Primanorum inverſe poſitorum, reſpective diviſa: ipſæque LZ rectæ, in horum quadratorum ratione ſubduplicata.

Quod autem omnes $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$ hoc eſt, omnes LZ ſpatium FCZAF complentes, ad omnes $\sqrt{}:a\mathcal{D}-a^2$: vel $\sqrt{a}\times\sqrt{}:\mathcal{D}-a$: hoc eſt, ad omnes LK complentes ſemicirculum, ſint in ratione tripla; ex principiis *Arithmeticæ Infinitorum* ſic colligimus.

Si ſeries ſubſecundanorum ſive $\sqrt{a}$, in ſeriem primanorum a inverſam (hoc eſt, in $\mathcal{D}-a$) reſpective ducatur, fiet ſeries $\mathcal{D}\sqrt{a}-a\sqrt{a}$, ſive $\mathcal{D}\sqrt{a}-\sqrt{a^3}$; quæ eſt ad ſeriem Æqualium ſive totidem $\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}$ vel $\sqrt{\mathcal{D}^3}$, ut $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$ ad 1, ſive ut 4 ad 15. (per prop. 64 & 73 *Arithm. Infin.*) Eodem modo ſi reſpective ducatur eadem ſeries $\sqrt{a}$, in ſeriem a^2 inverſam, hoc eſt in ſeriem $\mathbf{Q}:\mathcal{D}-a$: vel $\mathcal{D}^2-2a\mathcal{D}+a^2$, fiet ſeries $\mathcal{D}^2\sqrt{a}-2\mathcal{D}a\sqrt{a}+a^2\sqrt{a}$, vel $\mathcal{D}^2\sqrt{a}-2\mathcal{D}\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}$, quæ eſt ad ſeriem Æqualium, ſive totidem $\mathcal{D}^2\sqrt{\mathcal{D}}$ vel $\sqrt{\mathcal{D}^5}$, ut $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}$ ad 1, ſive ut 16 ad 105. Et ſimiliter, ſi eadem ſeries $\sqrt{a}$ reſpective ducatur in alias ſeries inverſas, prodibunt hæ rationes ſubjectæ. Nempe ſi ſeries $\sqrt{a}$ ducatur inverſe in

ſeries	1.	a.	a^2.	a^3.	a^4.	&c. prodibunt
rationes	$\frac{2}{3}$.	$\frac{4}{15}$.	$\frac{16}{105}$.	$\frac{96}{945}$.	$\frac{768}{10395}$.	&c.
hoc eſt	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2\times2}{3\times5}$.	$\frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}$.	$\frac{2\times2\times4\times6}{3\times5\times7\times9}$.	$\frac{2\times2\times4\times6\times8}{3\times5\times7\times9\times11}$.	&c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & ſuppleantur interjecti loci impares; ponendo, in loco tertio, (inter 1 & a,) pro ſerie $\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ inverſe ducta, rationem 1 ad $2\square$ (per prop. 167. *Arith. Infin.*) Sicut ratio loci quarti multiplicat rationem ſecundi per $\frac{2}{5}$, & hanc ratio ſexti per $\frac{4}{7}$, &c. manifeſtum eſt (ex conſecutione ſeriei) rationem quinti multiplicare rationem tertii per $\frac{3}{8}$; & ſimiliter in reliquis. Nempe ſeries $\sqrt{a}$ ducta inverſe in

ſeries	$\frac{1}{\sqrt{a}}$.	1.	$\sqrt{a}$.	a.	$\sqrt{a^3}$.	a^2.	$\sqrt{a^5}$. &c.	dabit
rationes	$\frac{1}{4}$) $\frac{1}{2\square}$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{1}{2\square}$.	$\frac{2\times2}{3\times5}$.	$\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}$.	$\frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}$.	$\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}$.	&c.

Unde, in præſens negotium hoc ſaltem ſeligendum eſt, ſeries $\sqrt{a}$ & $\sqrt{a^3}$ invicem inverſe ductas, ad ſeriem æqualium, ſive ad $\mathcal{D}^2=\sqrt{\mathcal{D}^4}$ toties ſumptum, ut $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}$ ad 1; ſive ut 1 ad $4\square$.

Deinde, ut ſeriem $\sqrt{a}$ jam perpendimus, perpendamus ſimiliter ſeriem $\sqrt{a^3}$. Ea nempe ducta in ſeriem a inverſam, hoc eſt, in $\mathcal{D}-a$ dat ſeriem $\mathcal{D}\sqrt{a^3}-a\sqrt{a^3}$, vel $\mathcal{D}\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ cui convenit ratio $\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$ ad 1, ſive 4 ad 35. Et ſimiliter in reliquis. Nempe ſeries $\sqrt{a^3}$ inverſe ducta in

ſeries	1.	a.	a^2	a^3	a^4	&c.	dabit
rationes	$\frac{2}{5}$.	$\frac{4}{35}$.	$\frac{16}{315}$.	$\frac{96}{3465}$.	$\frac{768}{45045}$.	&c.	
hoc eſt	$\frac{2}{5}$.	$\frac{2\times2}{5\times7}$.	$\frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}$.	$\frac{2\times2\times4\times6}{5\times7\times9\times11}$.	$\frac{2\times2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$.	&c.	

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & ſuppleantur loci impares, ponendo (per inquiſitionem modo factam) loco tertio (inter 1 & a) rationem $\frac{1}{4\square}$: Ut ratio loci quarti multiplicat rationem ſecundi per $\frac{2}{7}$; & illam ratio ſexti per $\frac{4}{9}$; ſic rationem loci tertii multiplicabit ratio loci quinti per $\frac{3}{8}$, ratio tertii rationem primi per $\frac{1}{6}$; & de reliquis ſimiliter. Nempe ſeries $\sqrt{a^3}$ inverſe ducta in

ſeries	$\frac{1}{\sqrt{a}}$.	1.	$\sqrt{a}$.	a.	$\sqrt{a^3}$.	a^2.	$\sqrt{a^5}$. &c.	dat	
rationes	$\frac{1}{6}$) $\frac{1}{4\square}$.	$\frac{2}{5}$.	$\frac{1}{4\square}$.	$\frac{2\times2}{5\times7}$.	$\frac{1}{4\square}\times\frac{3}{8}$.	$\frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}$.	$\frac{1}{4\square}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{10}$.	&c.	

Cum

Cum igitur ſeries $\sqrt{a^3}$ in ſeriem $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverſe ducta; hoc eſt ſeries $\sqrt{a^3}$ per ſeriem $\sqrt{a}$ inverſe diviſa, hoc eſt diviſa per $\sqrt{:\mathcal{D}-a}$, ſit ad ſeriem æqualium, ſive $\mathcal{D}$ toties ſumptum, ut $\frac{1}{6}) \frac{1}{4\square}$ ad 1, hoc eſt, ut 6 ad $4\square$, vel 3 ad $2\square$; Erunt omnes $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$, hoc eſt omnes LZ, hoc eſt FCZAF ſpatium, ad $\mathcal{D}$ toties ſumptum, hoc eſt ad $\mathcal{D}^2$, ut 3 ad $2\square$. Sed (per prop. 167. Arith. Infin.) omnes $\sqrt{:a\mathcal{D}-a^2}$: hoc eſt LK, hoc eſt CzF ſemicirculus, eſt ad $\mathcal{D}^2$, ut 1 ad $2\square$. Ergo Spatium illud eſt Triplum Semicirculi. Quod erat oſtendendum.

Sed & ex abundanti oſtendebam, Dicti ſpatii lineam centri gravitatis rectæ FA parallelam ab eadem diſtare ſexta parte diametri: Item, ſolidum factum ex converſione dicti ſpatii circa FA ut axem, æqualem eſſe ſolido ex converſione FzC ſemicirculi circa eandem FA tangentem, hoc eſt, ſemicylindro cujus baſis ſit idem ſemicirculus, & altitudo æqualis totius circuli peripheriæ: Item, ſolidum ex ejuſdem converſione circa rectam Cα ſolidi prioris quintuplum: Solidum vero ejuſdem converſione circa CF, magnitudine infinitum: Centrum denique gravitatis nuſquam eſſe. Nempe hoc modo.

Poſita linea æquilibrii Cα, erunt momenta rectarum LZ, ſeries compoſita ex ſerie magnitudinum LZ, hoc eſt $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$ & diſtantiarum CL hoc eſt a; adeoque ſeries momentorum $\&\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$, vel $\sqrt{\frac{a^5}{\mathcal{D}-a}}$. Cujus ratio ad ſeriem æqualium, hoc eſt ad momentum quadrati diametri ex puncto F ſuſpenſi, ſic colligitur. Series $\sqrt{a^5}$ inverſe ducta in

ſeries	1.	a.	a^2.	a^3.	a^4.	&c.	dabit
rationes	$\frac{2}{7}$.	$\frac{2\times2}{7\times9}$.	$\frac{2\times2\times4}{7\times9\times11}$.	$\frac{2\times2\times4\times6}{7\times9\times11\times13}$.	$\frac{2\times2\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$.	&c.	

Adeoque cum ſeries $\sqrt{a}$ in ſeriem $\sqrt{a^5}$ inverſe ducta, rationem exhibeat (ſupra inventam) $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}$ ad 1. hoc eſt 5 ad $32\square$; ſupplebimus interjecta loca vi analogiæ, ad hanc formam. Nempe ſeries $\sqrt{a^5}$ inverſe ducta in

ſeries	$\frac{1}{\sqrt{a}}$.	1.	$\sqrt{a}$.	a.	$\sqrt{a^3}$.	a^2.	$\sqrt{a^5}$.	&c.	dabit
rationes	$\frac{1}{8}) \frac{5}{32\square}$.	$\frac{2}{7}$.	$\frac{5}{32\square}$.	$\frac{2\times2}{7\times9}$.	$\frac{5}{32\square}\times\frac{3}{10}$.	$\frac{2\times2\times4}{7\times9\times11}$.	$\frac{5}{32\square}\times\frac{3}{10}\times\frac{5}{12}$.	&c.	

Momenta itaque omnium LZ, (hoc eſt ſpatii FCZAF) in ſuo ſitu, ad momentum totidem CF, ſive $\mathcal{D}$, hoc eſt $\mathcal{D}^2$, in diſtantia maxima, hoc eſt ex puncto F ſuſpenſi, ut $\frac{1}{8}) \frac{5}{32\square}$ ad 1; ſive ut 5 ad $4\square$: Adeoque (propter magnitudinem ſemicirculi ad diametri quadratum, ut 1 ad $2\square$) ad momentum ſemicirculi ibidem ſuſpenſi, ut 5 ad 2; vel ſuſpenſi ex G centro, hoc eſt, in ſuo ſitu, ut 5 ad 1. Spatium igitur FCZAF in ſuo ſitu, æquiponderat quintuplo ſemicirculi in ſitu ſuo, ſive in diſtantia CG ſuſpenſo; adeoque ſemicirculo in diſtantiæ CG quintupla. Et conſequenter (propter diſtantias magnitudinibus reciproce proportionales) cum ſpatium ſit ſemicirculi triplum, erit diſtantia diſtantiæ ſubtripla, hoc eſt $\frac{1}{3}$CG, vel $\frac{1}{3}$CF, nempe à recta Cα: Adeoque $\frac{1}{3}$CG vel $\frac{1}{6}$CF à recta FA. Tantundem itaque diſtat iſtius ſpatii linea centri gravitatis, (&, ſiquod eſt, ipſum gravitatis centrum) à rectis illis Cα, FA. Quod erat oſtendendum. Fig. 22.

Idem eodem modo colligitur, ſumpta ab initio, æquilibrii linea FA. Nempe cum ſeries magnitudinum LZ ſit $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$, & diſtantiarum $\mathcal{D}-a$; eſt ex utriſ-

que compoſita ſeries momentorum $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$ in $\mathcal{D}-a$: hoc eſt $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:}\mathcal{D}-a$: hoc eſt ſeries $\sqrt{a^3}$ in ſeriem $\sqrt{a}$ inverſe ducta; cui convenit (ut ſupra) ratio 1 ad 4□. Momentum itaque dicti ſpatii in ſuo ſitu (reſpectu FA rectæ) eſt ad momentum quadrati FC in diſtantia FC ſuſpenſi, ut 1 ad 4□; adeoque ad momentum ſemicirculi ſic ſuſpenſi, ut 1 ad 2: Hoc eſt, æquiponderat ſemicirculo ſuſpenſo in diſtantia $\frac{1}{2}$ FC, hoc eſt ex puncto G centro, hoc eſt in ſuo ſitu. Cum igitur ſpatium illud Ciſſoidale in ſuo ſitu æquiponderat Semicirculo in ſuo, (reſpectu rectæ FA;) ſitque ſpatium illud Semicirculi triplum: Erit diſtantia diſtantiæ ſubtripla; hoc eſt $\frac{1}{3}$ FG, vel $\frac{1}{8}$ FC, nempe à recta FA; Adeoque $\frac{7}{8}$ FG, vel $\frac{7}{8}$ FC, à recta Cα. ut prius.

Atque hinc ſtatim colligimus; Solidum ex converſione dicti ſpatii Ciſſoidalis, ad ſolidum ex converſione ſemicirculi, circa eandem rectam Cα, eſſe ut 5 ad 1, (nempe ut planorum momenta reſpectu ejuſdem Cα rectæ:) Circa rectam autem FA (propter æqualia planorum momenta reſpectu hujus rectæ) æqualia eſſe ſolida.

Si quis autem quærat, de ſolidorum hujuſmodi ſemiconverſione factorum, centri gravitatis linea, ſive ejuſdem ab FA vel Cα diſtantia: Id eodem plane modo inveſtigabitur. Quippe cum ſemicylindricæ ſuperficies rectarum LZ ſemiconverſione factarum, ſint rectarum illarum momentis proportionales, hoc eſt (reſpectu rectæ Cα) ut $\sqrt{\frac{a^5}{\mathcal{D}-a}}$; ſuorumque centrorum ab eadem recta, in ratione radiorum CL, hoc eſt a: erunt omnia momenta ſuperficierum illarum ſemicylindricarum, ſeries $a\sqrt{\frac{a^5}{\mathcal{D}-a}}$, vel $\sqrt{\frac{a^7}{\mathcal{D}-a}}$. Cujus ſeriei ratio ad ſeriem æqualium, ſic colligitur. Series $\sqrt{a^7}$ inverſe ducta in

ſeries 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes $\frac{2}{9}\cdot\frac{2\times2}{9\times11}\cdot\frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}\cdot\frac{2\times2\times4\times6}{9\times11\times13\times15}\cdot\frac{2\times2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}$. &c.

Adeoque cum ſeries $\sqrt{a}$ in ſeriem $\sqrt{a^7}$ inverſe ducta (ut ex inquiſitione primum facta colligitur) ſit ut $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{10}$ ad 1. hoc eſt ut 7 ad 64□; ſupplebimus interjecta loca ad hanc formam. Nempe ſeries $\sqrt{a^7}$ inverſe ducta in

ſeries $\frac{1}{\sqrt{a}}$. 1. $\sqrt{a}$. a. $\sqrt{a^3}$. a^2. $\sqrt{a^5}$. &c. dabit

rationes $\frac{1}{10})\ \frac{7}{64\square}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{64\square}\cdot\frac{2\times2}{9\times11}\cdot\frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}\cdot\frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}\cdot\frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}\times\frac{5}{14}$. &c.

Momentum igitur ſuperficierum omnium ex rectarum LZ circa Cα ſemiconverſione factarum, in ſuo ſitu; hoc eſt, ſolidi ex ſemiconverſione ſpatii Ciſſoidalis circa Cα momentum in ſuo ſitu, reſpectu Cα rectæ; eſt, ad totidem Æqualia, nempe momenta totidem ſuperficierum, rectis CF æqualibus in diſtantiis CF ſemiconverſis factarum, in diſtantia maxima ſuſpenſarum, ut $\frac{1}{10})\ \frac{7}{64\square}$ ad 1, ſive ut 35 ad 32□. Eſt autem magnitudo ad magnitudinem, ut 5 ad 4□, (momentis utique planorum proportionales:) Ergo diſtantia ad diſtantiam ut 7 ad 8: Nempe $\frac{1}{8}$ iſtius diſtantiæ quam habet centrum gravitatis ſemicirculi radio CF deſcripti ab ipſo C: quæ quidem non eſt tota CF recta, ſed (propter curvaturam ſemicircularem) illa ejus pars quæ eſt ad totam ut Diameter ad Semiperipheriam.

Similiter, facta converſione circa FA, ſemicylindricæ ſuperficies rectis LZ deſcriptæ ſunt $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:}\mathcal{D}-a$: (quippe momentis rectarum proportionales;) diſtantiæ vero centrorum ſuperficierum illarum ſunt ut radii converſionis, ſive diſtantiæ $\mathcal{D}-a$; Ergo ſuperficierum illarum momenta ſunt ut $\sqrt{a^3}$, in $\mathcal{D}-a$, in $\sqrt{:}\mathcal{D}-a$. ſive ut $\mathcal{D}\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{:}\mathcal{D}-a$. Eſt autem (per ſupra demonſtrata) ſeries $\mathcal{D}\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:}\mathcal{D}-a$: ſive ſeries $\mathcal{D}\sqrt{a^3}$ in ſeriem $\sqrt{a}$ inverſe, ad ſeriem æqualium ut 1 ad 4□: Et $\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{a}$ inverſe, ut 5 ad 32□: Ergo $\mathcal{D}\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ in

in $\sqrt{a}$ inverſe; ut $\frac{1}{4\square} - \frac{5}{32\square}$ ad 1; hoc eſt, ut 3 ad $32\square$. At ſeries magnitudinum ad æqualium ſeriem, inventa eſt ut 1 ad $4\square$. Ergo propter $\frac{1}{4\square}) \frac{3}{32\square} (\frac{3}{8}$, diſtantia ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Diſtantia itaque lineæ centri gravitatis hujus ſemiſolidi circa FA, ab ipſa FA, $\frac{3}{8}$ iſtius rectæ quæ eſt ad FC ut diameter ad ſemiperipheriam circuli.

Denique, Si ſpatium illud Ciſſoidale FCZAF converti intelligamus circa rectam CF: Circuli radiorum LZ (quippe in radiorum ratione duplicata) erunt ſeries $\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}$; quæ ad ſeriem æqualium, nempe totidem circulos radiorum $\mathcal{D}$ vel CF, rationem habent infinitam; adeoque eſt infinitæ magnitudinis. Quod ſic colligitur. Series a^3 inverſe ducta in

ſeries, 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1\times1}{4\times5} \cdot \frac{1\times1\times2}{4\times5\times6} \cdot \frac{1\times1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} \cdot \frac{1\times1\times2\times3\times4}{4\times5\times6\times7\times8}$. &c.

Cum igitur rationes continuentur (ut patet) multiplicando proxime præcedentes per $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}$, &c. harum prima multiplicare debet præcedentem per $\frac{0}{4}$, quæ igitur eſſet $\frac{0}{4}) \frac{1}{4} (\frac{4}{0}$. Adeoque ſeries eadem a^3 inverſe ducta in ſeriem $\frac{1}{a}$, (hoc eſt, ſeries $\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}$) rationem haberet ad ſeriem æqualium 4 ad 0: quæ eſt infinita. Ipſumque ſolidum propterea eſſet magnitudinis infinitæ. Quod item oſtendendum erat.

Sed & propterea, momentum plani Ciſſoidalis FCZAF reſpectu FC rectæ, eſſet ad momentum quadrati FC, vel $\mathcal{D}^2$, ut 4 ad 0, (propter planorum momenta ſolidis converſione factis proportionalia,) hoc eſt infinitum. Et conſequenter, cum ſpatium ſit magnitudinis finitæ, diſtantia centri gravitatis eſſet infinita: quod igitur nuſquam eſt. Quod ultimo ſuſcepimus oſtendendum.

Sin de ſolidorum hujuſmodi ſemiconverſione circa FC centro gravitatis inquiratur. Cum ſemicirculorum radiis LZ deſcriptorum momenta reſpectu ejuſdem FC rectæ, ſint in radiorum ratione triplicata: erunt igitur ut Series $\frac{a^3}{\mathcal{D}-a} \sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$, ſive ut ſeries $\sqrt{\frac{a^{27}}{\mathcal{D}^3 - 3a\mathcal{D}^2 + 3a^2\mathcal{D} - a^3}}$: hoc eſt ut ſeries $\sqrt{a^{27}}$ in ſeriem $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ inverſe ducta. Series autem $\sqrt{a^{27}}$ inverſe ducta in

ſeries 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes $\frac{2}{29} \cdot \frac{2\times2}{29\times31} \cdot \frac{2\times2\times4}{29\times31\times33} \cdot \frac{2\times2\times4\times6}{29\times31\times33\times35} \cdot \frac{2\times2\times4\times6\times8}{29\times31\times33\times35\times37}$. &c.

Cum igitur, (ut ex prima inquiſitione continuata patebit,) ſeries $\sqrt{a^{27}}$ & $\sqrt{a}$ inverſe multiplicatæ rationem exhibeant $\frac{1}{2\square} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{12} \times \frac{11}{14} \times \frac{13}{16} \times \frac{15}{18} \times \frac{17}{20} \times \frac{19}{22} \times \frac{21}{24} \times \frac{23}{26} \times \frac{25}{28} \times \frac{27}{30}$, quæ (ſupplendo loca intermedia) interponenda erit inter 1 & a; eadem ratio per $\frac{1}{30}$ diviſa convenit ſeriei $\sqrt{a^{27}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverſe ductæ, atque hæc iterum per $\frac{-1}{28}$ diviſa conveniret ſeriei momentorum expoſitæ, nempe ſeriei $\sqrt{a^{27}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ inverſe ductæ, ſive per $\sqrt{a^3}$ inverſe diviſa. Ex qua denique ratione ſi eximatur item ratio magnitudinum $\frac{4}{0}$ modo reperta, prodibit

$\frac{4}{0} \times \frac{-1}{28} \times \frac{1}{30}) \frac{1}{2\square} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8}$ &c. *usque ad* $\times \frac{27}{30}$ *ut supra*; vel $\frac{0}{4} \times \frac{28}{-1} \times \frac{30}{1} \times \frac{1}{2\square}$ &c. quæ etiam adhuc (propter -1 quantitatem negativam) erit ratio infinita; nempe ut 0 ad numerum negativum; (quæ non minus est ratio infinita quam ut numerus positivus ad 0:) Adeoque centrum gravitatis nusquam.

Vides itaque quomodo ex *Infinitorum Arithmetica* Expositam propositionem (cum lucro) absolvimus. Atque hæc fere sunt quæ directa methodo hac de re jam (anno superiori 1658) ad te scripseram.

Hæc autem hic repetendi ansam dedit, quod secutis literis & ipse mones; Nempe non modo totum illud spatium FCZAF, totius FCz semicirculi triplum esse; sed & particulatim segmentum FCZF (Cissoidali CZ & rectis FC ZF comprehensum) respectivi segmenti circularis FzF, ubique triplum esse. Nos autem jam supra demonstravimus § 22, similis segmenti circularis FzF fig. 1. vel 8, triplum esse segmentum Cycloidale ζZA. Id ipsum itaque præstat in spatio Cissoidali FZ, atque in Cycloidali ζZ; utraque siquidem segmentum abscindit segmenti circularis Fz correspondentis triplum. Mirum igitur vides, sed qui non displicebit, figurarum tam dissimilium consensum. Atque de Cissoide quidem hactenus.

Conchoides. Est autem & magna, inter Conchoidem & Cycloidem, convenientia. Resumpta enim, quæ est *Epist.* 39. *Commercii Epistolici*, figura; Manifestum est, rectam MD, Sinum esse anguli MCD, ad radium CA; & rectam MO, hoc est (propter parallelas) CH, ejusdem anguli Tangentem, ad radium PC. Ut igitur Ordinatim-applicata in *Cycloide*, est *Sinus & Arcus, ejusdem anguli, Aggregatum*, (ejusdem circuli, in Primaria; sed, in Secundariis, diversorum:) Sic, in *Conchoide*, Ordinatim-applicata est *Aggregatum Sinus & Tangentis*, ejusdem anguli; (& quidem ejusdem circuli in Primaria, *viz.* ubi PC = CA; sed diversorum in aliis:) Quod nos, quod sciam, primi detegimus.



Fig. 38.

Conchoidis Solidum. Hinc autem porro colligimus, utut Conchoidis Planum OACH, infinite continuatum, infinitæ sit magnitudinis, esse tamen Solidum hujus conversione circa axem CH genitum, magnitudinis finitæ. Quod utique sic converso quadrante ARC describitur, hemisphærium esse liquet. Quod autem reliquo RAO infinito describitur, æquatur Cylindro, cujus basis ARC quadrans, altitudo æqualis peripheriæ radio CP descriptæ. Quod sic probamus. Quoniam est ut CD ad DM, sic PC ad CH hoc est MO; erit ubique MD×PC = CD×MO; Hoc est, factum ex DM in PC vel peripheriam hoc radio descriptam, æquale facto ex MO in CD seu peripheriam hoc radio descriptam: Ergo & omnia omnibus æqualia; hoc est, dictus Cylindrus, dicto solido conversione facto. Quod nos, credo, primi demonstramus.

Centrum gravitatis. Plani vero centrum gravitatis, nusquam est: utpote cujus distantia à CA intelligenda erit infinita, & à CH infinite exigua: Sed neque Solidi aut Semisolidi. Distat utique Semisolidi Centrum gravitatis, à CH, distantia finita, & facile assignabili; sed, à CA, distantia infinita. Hæc autem, & hisce gemina, fusius prosequi, non est hujus loci. Tempus est ut ad ea redeam quæ novissima tua suggerit Epistola.

Curvarum Εὔθυνσις. Heuratii vestri, quod memoras, nuperum inventum, (sub initium præsentis anni, vel præcedentis finem, quod ex tuis literis conjicio, excogitatum,) quo curvam rectæ æqualem invenit; confirmat id quod superius insinuavimus; Nempe, plurium non raro, in iisdem rebus inveniendis συμφώνησιν: Et simul, ut de curvarum (Εὐθύνσει dicam? an) Εὐθυσμῷ, pauca differam, ansam subministrat.

Tradideram ego jampridem, in Scholio prop. 38. *Arith. Infinitorum*, methodum curvas cum rectis comparandi; Nempe, *continuas subtensas inscribendo quarum quadrata, quadratis differentiarum ordinatim-applicatarum, quadratis invicem æqualibus auctis, æquentur*: Et speciatim in Parabola (propter ordinatim-applicatas in Parabolæ complemento, ut numeros quadraticos, adeoque illarum differentias ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionales,) subtensas illas esse ut $\sqrt{:A^2+1}$. $\sqrt{:A^2+9}$. $\sqrt{:A^2+25}$. hoc est, ut *quadratorum æqualium, quadratis arith-*

arithmetice-proportionalium auctorum, radices quadraticas : (Quas eſſe ut ordinatim-applicatas ad conjugatum axem hyperbolæ, prius demonſtraveram prop. 35, & 41, *Con. Sect.*) In Paraboloidibus autem Cubicalibus, Biquadraticalibus, *&c.* ut *radices quadraticas quadratorum æqualium auctorum quadratis differentiarum Cuborum, Biquadratorum, &c.* Quarum quidem ſubtenſarum omnium aggregatum cum perpetuo minus ſit ipſa curva, ſed ad eam ita propius ſemper accedat ut differentia, data quavis minore, tandem deficiat : Et Tangentium pariter ope haberi ſimili modo poſſit rectarum ſumma quæ differentia, data quavis minore, eandem curvam excedat : Poſſe hinc terminos veris quantumvis proximos inveniri intra quos curvæ longitudo vera caderet : (Adeoque in infinitum procedendo, ipſam curvam exhibitum iri :) docuimus.

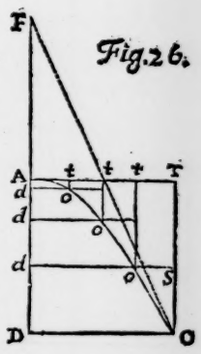


Fig. 26.

Et quidem, quum ſcholium illud ibidem inſerebam, currente prelo, (unde in Propoſitionum cenſum non erat redactum,) animum habebam ſpeculationem illam, cum per otium liceret, reſumendi & perficiendi. (Animadvertebam enim jam tum, rectas ad curvas eſſe, ut Figuras congruas ad figurarum quaſi Truncos : ſed, ut quas figuras ad quos truncos, prout cujuſque curvæ natura poſtulet ; ut &, quænam ex figuris illis cum truncis reſpondentibus notam rationem ſubeant ; conſiderandum adhuc reſtabat.) Sed (ut clavus, quod aiunt, clavum pellit,) aliis ſe ſubinde interponentibus ſpeculationibus, priorem illam reſumere negligebam, donec prævertens Nelius noſter me excitavit.

Selegit autem D. *Gulielmus Nelius*, Equitis *Pauli* filius, Curvam eam quæ ordinatim-applicatarum differentias habeat ordinatim-applicatis in parabola proportionales ; quarum itaque quadrata quadratis æqualibus aucta, erunt item Arithmetice-proportionalia, eorumque radices ut ordinatim-applicatæ in parabolæ trunco ; & propterea, ut parabolæ truncus ad parabolam, ſic curva illa ad rectam. Nelium ſecutus *Wrennius* item, & poſt illum Illuſt. *Brounckerus* id ipſum demonſtrarunt, & tandem ego ; neſcio an & alii. Quo primum tempore invenit Nelius, non certus ſcio : vulgavit autem ſub Julii vel ſaltem Auguſti menſem Anni 1657, primus (credo) omnium qui ulli curvæ æqualem rectam aſſignavit.

Vertente Anno, menſe Julio 1658, Curvam Cycloidis, axis ſui quadruplam, demonſtravit Cl. V. Chr. *Wren* ; Quod poſt illum ab aliis item demonſtratum eſt. Tandem, quod prius Nelius noſter, *Heuratius* item veſter (neſcius, puto, id noſtris paſſim prius innotuiſſe) invenit denuo, quod *Schotenius* veſter ſcriptis ſuis hoc anno editis inſeruit.

Nelii demonſtratio, quam (ut dictum eſt) ante duos annos vulgavit, hæc erat. [A *Wrennio*, quod poſt audivi, aliquantulum immutata & reformata.]

Curva Paraboloidis Semicubicalis.

Sit AbCD *parabola recta* ; *cujus axis* AD *dividatur in æquales partes minimas* ee ; *atque ad puncta* e *ordinatim-applicentur* ef *rectæ, parabolis* Aeb *proportionales. Et fiat* DSI *rectangulum, ad parabolam* ADC, *ut* AD *ad* DC. *Denique ſit* eh *ubique æqualis potentia utriſque* es, eb.

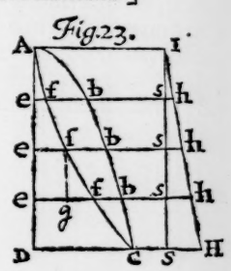


Fig. 23.

Dico primo, eandem eſſe inter ſe proportionem figuræ ADHI, *rectanguli* DI, *& parabolæ* ADC, *quæ eſt linearum* AfC *curvæ, & rectarum* AD, DC.

2°. *Rectas* eh *eſſe ordinatim-applicatas in Parabola.*

Sunt enim rectæ ef, *per conſtructionem, parabolis* Aeb *proportionales* ; *& propterea rectarum differentiæ, commode repræſentantur per rectangula* eeb. *Rectangula* ees *ſunt æqualia* : (*eorumque omnium ſumma, ad ſummam omnium* eeb, *ut* AD *ad* DC ;) *repræſentant itaque rectas* ee. *Rectæ* ff *ſunt æquales potentia tum rectis* ee *tum rectarum* ef *differentiis. Et rectangula* eeh *ſunt ubique in eadem proportione ad quantitatum illarum repræſentativas. Conſtat itaque propoſitionis pars prior.*

Quadrata rectarum eb *ſunt Arithmetice-proportionalia. Quadrata rectarum* ee *ſunt*

ee *ſunt æqualia. Ergo & quadrata* eh *ſunt Arithmetice-proportionalia*; *ipſæque* EH *rectæ quadratorum Arithmetice-proportionalium latera*: *adeoque ſunt ut ſeries ordinatim-applicatarum in parabola.*

Et conſequenter; Exhiberi poterit linea recta æqualis curvæ AFC.

Hanc D. Nelii demonſtrationem ubi conſpexerat Illuſtriſſ. *Brounkerus*; ſuam ille ſtatim, quæ ſequitur, non abſimilem concinnavit, & impertivit mihi, quam jam ultra duos annos apud me habui. Et parum abfuit quin eam *Commercio Epiſtolico* a me non ita pridem edito inſeruerim; (eodem ſiquidem tempore accepi primo, quo inter nos & D D. Fermatium, Frenicliumque, alternabantur illæ literæ.) Sed, cum ipſius Nelii (qui primus invenit) demonſtrationem nondum videram; non commodum videbatur, ipſius intermiſſa, aliorum demonſtrationes edere; ſed vel ſibi permittendum ut ſuam ipſe edat Nelius, vel aliam ſaltem exſpectandam opportunitatem. Hæc autem erat.

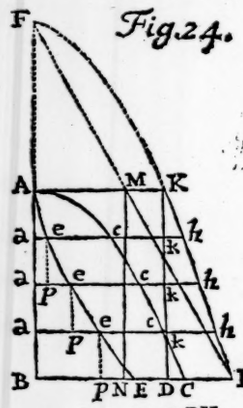


Fig. 24.

Sit ABC *parabola recta*; *cujus diameter* AB=*a*, *baſis* BC=*b*, *ſitque* BE=*c*; *& fiat ubique, ut parabola* ABC *ad parabolam* Aac, *ſic* BE *ad* ae; (*num autem coincidant necne puncta* C, E, *perinde eſt.*) *Dico rectam* AB *ad* AeE *curvam, eſſe ut* $27ac^2$, *ad* $4a^2+9c^2$, *in* $\sqrt{:}\,4a^2+9c^2$. *minus* $8a^3$.

Cum enim ſint ubique ut Aac, Aac, *parabolæ*; *ſic* ae, ae, *rectæ*: *erunt etiam* pe, pe, *rectarum differentiæ*; *ut* acca, acca, *differentiæ parabolarum*; *hoc eſt*, (*ſumptis* aa *infinite exiguis*,) *ut* ac, ac, *rectæ*; *ſive ut* aac, aac, *rectangula.*

Fiat autem, ut AB *ad* BE, (*ſive ut* a *ad* c;) *ſic* BK *rectangulum æque altum, ad* ABC *parabolam.*

Cum igitur ſit $\frac{\square BK}{AK}=AB$, *erit* $\frac{Par.\,ABC}{AK}=BE$, *&* $\frac{Par.\,Aac}{AK}=ae$, *&* $\frac{\square aac}{AK}=pe$.

Ducantur ah *rectæ, quæ utriſque* ak, ac, *æque poſſint*; (*quæ propterea parabolæ ſegmentum complent*:) *Eritque* $\frac{\square aah}{AK}=ee$.

Ut igitur omnes ak, *hoc eſt rectangulum* BK; *ad omnes* ah, *hoc eſt parabolæ ſegmentum* AKHB: *ſic omnes* aa, *hoc eſt* AB *recta, ad omnes* ee, *hoc eſt* AeE *curvam.*

Eſt autem BK *rectangulum, ad ſegmentum parabolæ* AKHB, *ut* $27ac^2$, *ad* $4a^2+9c^2$, *in* $\sqrt{:}\,4a^2+9c^2$: *minus* $8a^3$. *Quod ſic oſtenditur.*

Parabola ABC *eſt* $\frac{2}{3}$ *ab. Ideoque* BK *rectangulum eſt* $\frac{2a^2b}{3c}$: *&* $AK=BD=\frac{2ab}{3c}$. *Ergo* $BH\,(=\sqrt{:}\,BCq+AKq:)=\sqrt{:}\,b^2+\frac{4a^2b^2}{9c^2}:=\frac{b}{3c}\sqrt{:}\,9c^2+4a^2$.

Fiat autem, ut BHq, *ad* AKq; (*hoc eſt, ut* $b^2+\frac{4a^2b^2}{9c^2}$, *ad* $\frac{4a^2b^2}{9c^2}$; *ſive, ut* $9c^2+4a^2$, *ad* $4a^2$;) *ſic* $BH=\frac{b}{3c}\sqrt{:}\,9c^2+4a^2$, *ad* AM; *quæ eſt igitur* $\frac{4a^2b}{27c^3+12a^2c}\sqrt{:}\,9b^2+4a^2$. *Et propterea* $NH\,(=BH-AM)=\frac{3bc}{9c^2+4a^2}\sqrt{:}\,9b^2+4a^2$. *Et quoniam, ut* NH *ad* AM: (*hoc eſt, ut* $9c^2$ *ad* $4a^2$;) *ſic* NM *ſive* $BA=a$, *ad* AF: *erit* $AF=\frac{4a^3}{9c^2}$: *Et* $FB=\frac{9c^2a+4a^3}{9c^2}$. *Adeoque parabola* $FAK=\frac{16a^4b}{81c^3}$: *Et parabola* $FBH=\frac{18abc^2+8a^3b}{81c^3}\sqrt{:}\,9c^2+4a^2$. *Ideoque*

parabolæ

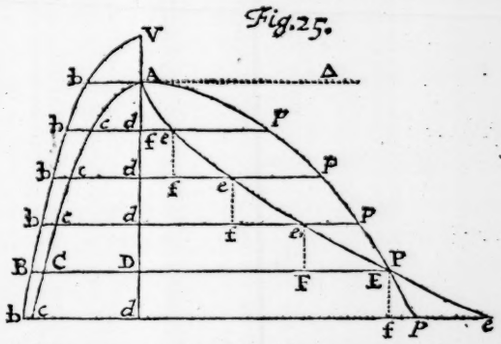
parabolæ ſegmentum AKHB $= \frac{18abc^2+8a^3b, \text{ in } \sqrt{:}\,9c^2+4a^2. \text{ minus } 16a^4b}{81c^3}$.

Eſt autem rectangulum BK $= \frac{2a^2b}{3c}$. *Ergo Rectangulum* BK, *ad parabolæ ſegmentum* AKHB; *adeoque* (*ut ſupra probatum eſt*) AB *recta, ad curvam* AeE; *ut* 27 ac^2, *ad* $9c^2+4a^2$, *in* $\sqrt{:}\,9c^2+4a^2$. *minus* $8a^3$. *Quod erat demonſtrandum.*

Meam denique hanc habe.

Eſto ADP parabola recta; cujus latus rectum dicatur L. Adeoque, ſumptis diametris Ad, Ad, &c. arithmetice proportionalibus, quæ ſigillatim dicantur d; ipſaque AD, $\mathcal{D}$: Erunt ordinatim-applicatæ $dp = \sqrt{dL}$; ipſaque $DP = \sqrt{\mathcal{D}L}$:

Fig.25.



Et parabolæ abſciſſæ $Adp = \frac{2}{3}d\sqrt{dL}$; adeoque ad invicem, ut $d\sqrt{d}$, vel $\sqrt{d^3}$: Et ddp rectangula (quæ, ſumptis dd particulis infinite exiguis, quæ dicantur A, parabolarum differentiis æquipollent) $A\sqrt{dL}$; quæ itaque ſunt ad invicem, ut $\sqrt{d}$, (ſive ut ipſæ dp ordinatim-applicatæ;) atque ad parabolas ſuas, ut A ad $\frac{2}{3}d$.

Ducatur denique curva AeE (parabolæ in P occurrens,) ea lege ut ſingulæ de rectæ, ſint Adp parabolis proportionales; adeoque ut $d\sqrt{d}$, ſive $\sqrt{d^3}$. Quam igitur curvam, ex Paraboloeidum genere eſſe conſtat; quam *Semicubicalem* appellemus: utpote cujus Ordinatim-applicatæ Diametrorum, ſi ponatur AD diameter; vel, Diametri Ordinatim-applicatarum, ſi ponatur diameter A Δ; ſunt in ratione *ſubduplicata-triplicatæ.*

Cum igitur ſint de ad invicem, ut $d\sqrt{d}$; ſitque $DE = DP = \sqrt{\mathcal{D}L}$: Erunt $de = \frac{d}{\mathcal{D}}\sqrt{dL}$. Nempe, ut $\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}$ ad $d\sqrt{d}$; ſic $\sqrt{\mathcal{D}L}$ ad $\frac{d}{\mathcal{D}}\sqrt{dL}$.

Cumque ſint de, parabolis Adp proportionales; erunt & differentiæ differentiis proportionales: Adeoque differentiæ fe, tum inter ſe, tum ad integras de; eaſdem habebunt rationes, quas parabolarum differentiæ, tum inter ſe, tum ad ſuas parabolas: Nempe illic, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{d}$; hic, ut A ad $\frac{2}{3}d$. Adeoque $FE = \frac{3}{2}\frac{A}{\mathcal{D}}\sqrt{\mathcal{D}L}$; (nempe ut $\frac{2}{3}\mathcal{D}$, ad A, ſic $DE = \sqrt{\mathcal{D}L}$, ad $\frac{3}{2}\frac{A}{\mathcal{D}}\sqrt{\mathcal{D}L} = FE$.) & $fe = \frac{3}{2}\frac{A}{\mathcal{D}}\sqrt{dL} = \sqrt{\frac{9A^2}{4\mathcal{D}^2}dL}$. Quibus igitur ſi ponantur æquales dc erit ADC parabola, cujus latus rectum $\frac{9A^2L}{4\mathcal{D}^2}$: quod nempe in diametros d ductum, quadratis ordinatim-applicatarum dc æquabitur.

Earundem vero fe quadrata $\frac{9dLA^2}{4\mathcal{D}^2}$, quadratis dd hoc eſt A^2 addita, exhibent rectarum ee quadrata $A^2 + \frac{9dLA^2}{4\mathcal{D}^2}$. Quorum quidem quadratorum augmenta ſupra A^2 cum ſint ipſis d proportionalia; ſi rectis ee ponantur æquales db, erit AbBD truncus parabolæ, cujus latus rectum eſt idem $\frac{9A^2L}{4\mathcal{D}^2}$, ordinatim-ap-

plicata minima $Ab = A$; adeoque altitudo abscissa $AV = \frac{4D^2}{9L}$. (Nempe $\frac{9A^2L}{4D^2}) A^2 (\frac{4D^2}{9L}$.) Quam quidem altitudinis designationem cum A quantitas neutiquam ingrediatur; eadem plane futura est, quantulacunque ponatur A=dd diametri particula.

Denique, propter tum $fe = de$, tum $ee = db$; erit, ut ADC parabola ad ADBb truncum; hoc est (propter idem utrobique latus rectum) ut $\sqrt{}$ dA *cub.* ad $\sqrt{}$ dV *cub.* — $\sqrt{}$ AV *cub*: (ut latus quadraticum cubi dA, ad latus quadraticum cubi dV minus latere quadratico cubi AV :) sic omnes fe, hoc est de recta; ad omnes ee, hoc est curvam Aee. Quod erat investigandum.

Exempli gratia. Si ponatur $AD = 4$, & $DE = \frac{16}{5}$; erit $AV = 1$, & $AeE = \frac{10\sqrt{5} - 2}{3}$.

Quodque de hac Paraboloeidis curva demonstratum est, id aliis non paucis curvarum generibus, quatenus res feret, mutatis mutandis accommodabitur.

Vides itaque quod Heuratius vester, id ipsum nostri demonstrarunt; & quidem priores. Eadem enim est linea quam Nelius noster, vesterque Heuratius considerarunt, (quod tibi, ubi animadverteris, ignotum esse non potest.) Id maxime interest, quod per Tangentes vester, nostri per Inscriptas demonstrarunt. Fundamentum utriusque methodi, nos in dicto Scholio prop. 38. Arith. Infin. tradideramus.

Quamquam autem non minore forsan jure licuisset, rectarum hanc curvis æqualium inventionem ex postliminio mihimet ascribere; quam quo alios video eorum avide sibi ascribentes inventionem quorum ipsi fundamenta se jecisse putaverint; præsertim si familiarium aliquibus hæc fundamenta patefecerint, ut ut scripto edito nondum divulgaverint; saltem si suspicio aliqua esse possit hæc sua fundamenta inventoribus illis perspecta fuisse, aut illos inde ansam nactos: Nolim tamen, quum in ipsa praxi me præverti video, hanc suam Nelio nostro εὐτυχίαν invidere; nequidem si constet (quod jam intelligo) ex nostris traditis se ansam accepisse: Neque enim alio fine nostra edimus, quam ut aliis usui esse possint. Quantillum autem inde abfuerim, ex dictis vides.

Superficies Conoeidis. Fig. 25.

Hoc interim addamus: Eadem opera haberi etiam convexam Conoeidis superficiem, conversione curvæ AeE circa axem suum A△ descriptam. Cum enim rectæ dc, db, ipsis fe rectarum differentiis, & ee subtensis, hoc est, (processu in infinitum continuato,) curvæ particulis, proportionales; atque in iisdem ab A△ distantiis: Erit ut solidum ex AcD parabola, ad solidum ex AbD trunco, circa bA△ conversa factum: sic superficies ex omnibus fe in suis distantiis (quæ est ut series $a\sqrt{a}$) sive $\frac{2}{5}$ (tres quintæ) superficiei Cylindricæ quæ describitur recta DE, (hoc est, omnibus fe in maxima distantia, quæ itaque est ut series $\sqrt{a}$;) ad superficiem convexam quæ ab AeE curva sic conversa describitur. Est autem solidorum eorum ratio (ex nostræ Arithmeticæ Infinitorum principiis) nota: (cognitis enim tum magnitudinibus, tum momentis, adeoque & centris gravitatis, parabolarum ADC, VAb, VDB, adeoque & trunci AbBD, solidorum conversione factorum magnitudo pariter innotescet:) Ergo & harum superficierum.

De ipsius trilinei Aed magnitudine, aut centro gravitatis, aut solidis istius conversione factis, nihil adjicio: nota utique sunt ea omnia; & ex principiis in nostra Infinitorum Arithmetica & alibi traditis facile deducuntur.

Curva Parabolæ. Fig. 26.

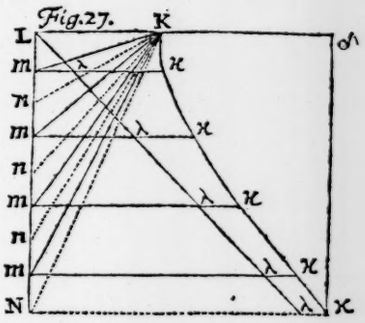
Sed ad Parabolam reverto; quam (ut dictum est) in memorato Scholio prop. 38. Arith. Infin. speciatim consideravimus. Resumpta igitur quæ ibidem est figura; ostendimus, propter dd vel os (rectarum ot in parabolæ complemento ordinatim applicatarum differentias) ut 1, 3, 5, *&c.* subtensas oo esse ut $\sqrt{:}A^2+1$: $\sqrt{:}A^2+9$. $\sqrt{:}A^2+25$. *&c.* hoc est, ut ordinatim applicatas ad Hyperbolæ conjugatum axem: ipsas autem os vel dd, ut ordinatim applicatas in Triangulo esse, notius est quam ut dictu opus sit.

Sin quæratur adhuc, quænam cuique parabolæ conveniant Triangulum & Hyperbola: quamquam ea nullius difficultatis res sit: paucis tamen expediam. Intelligantur KL, Lm, ad angulos rectos constitutæ; omnesque Lm, Lm, *&c.* ut 1, 3, 5, 7, *&c.* differentiis dd vel os æquales, vel saltem proportionales; ut &

KL

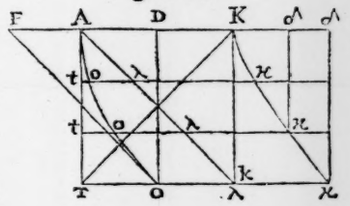
KL ipſi tt vel *A*: Erunt omnes Km, ſubtenſis oo ſimiliter æquales vel proportionales; illis nempe ſingulæ quæ cum ordinatim applicatis do angulos faciunt reſpectivis mKL angulis æquales; hoc eſt, ſumptis tt infinite exiguis, curvæ particulis quarum vel ſubtenſæ vel tangentes angulos faciunt iiſdem mKL vel nKL æquales. Si fiat igitur NKL triangulum rectangulum, ſimile triangulo FOD (fig. 26.) quod ſemiparabolæ circumſcribitur: Erit ut omnes Km, ad omnes Lm; ſic omnes oo ſubtenſæ, hoc eſt AO curva, ad omnes os vel dd differentias, hoc eſt AD diametrum. Hoc eſt, (ſumptis parallelis m$\varkappa$ = mK, & mλ = mL,) ut omnes m$\varkappa$ (hyperbola K$\varkappa$, ejuſque conjugato axe LN interceptæ) complentes LN$\varkappa$K quadrilineum, ad omnes mλ complentes LλN triangulum; ſive, ut quadrilineum illud, ad hoc triangulum; ſic expoſitæ parabolæ curva AO, ad AD diametrum. Et conſequenter, Data Paraboliçæ lineæ longitudine, dabitur Quadratura Hyperbolæ; & vice verſa. Quod & tu aliunde obſervaſti.

Fig.27.



Vel ſic etiam, (ut uno ſchemate totum complectar,) ſi fiat ut FD, ad DO, & OF; ſic DO vel TA, ad AK; & T$\varkappa$ = KT: & deſcribatur K$\varkappa$ Hyperbola, verticem habens K, centrum A: &, ſumpta Tλ = TA, fiat ATλ triangulum: Erit ut ATλ triangulum, ad AT$\varkappa$K quadrilineum; ſic axis AD, ad AO curvam Parabolæ. Addo, Et partes partibus reſpective ſumptis proportionales eſſe: ut ex demonſtratis patet. (Habet autem hæc Hyperbola latus rectum lateri tranſverſo æquale, & utrumvis lateri recto Parabolæ æquale, duplum autem rectæ AK: Eſtque A, Hyperbolæ centrum; K, vertex; AT, axis conjugatus; Aλ, Aſymptota; Kδ, axis interceptus; & $\delta\varkappa$ = AT ordinatim applicata baſis.) Atque hactenus de Parabolæ curva.

Fig.28.



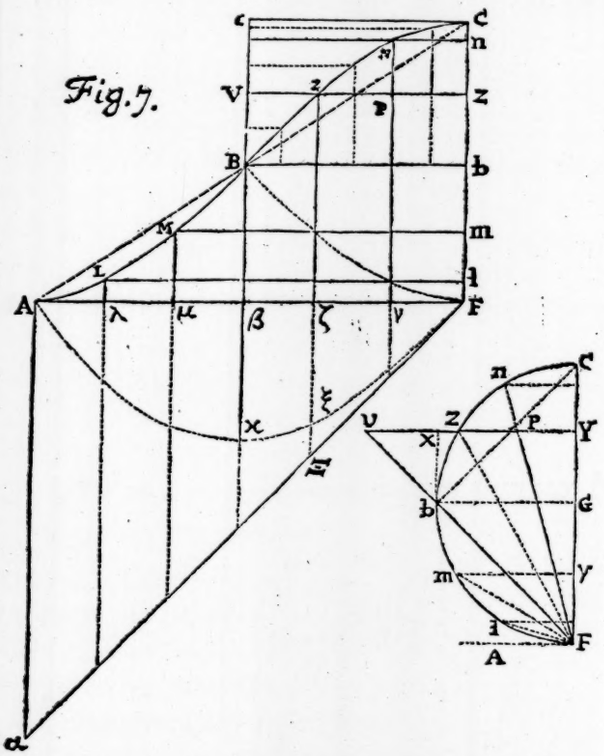
Sed & eadem opera, de Conoidis Parabolici ſuperficie judicandum erit. Cum enim ſingulæ rectarum to differentiæ, ad reſpectivas curvæ particulas, ſint ut tλ ad t$\varkappa$, ſintque in iiſdem ab axe diſtantiis: Erit ut ſolidum ex converſione ATλ trianguli, ad ſolidum ex converſione AT$\varkappa$K quadrilinei, circa AK rectam; ſic ſuperficies ex omnium curvarum to differentiis ſic converſis, ad conoidis ſuperficiem ex converſis curvæ particulis. Quæ autem ex differentiarum illarum, arithmetice proportionalium, in diſtantiis item arithmetice proportionalibus, converſione deſcribitur; ad ſuperficiem earundem arithmetice proportionalium, in diſtantia maxima, converſione deſcriptam, (ſeries Secundanorum ad ſeriem Primanorum;) hoc eſt, ad curvam Cylindri circumſcripti; eſt ut 2 ad 3. Ergo, ut ſolidum ex ATλ trianguli converſione, ad ſolidum ex converſione AT$\varkappa$K quadrilinei, circa AK, deſcriptum; ſic $\frac{2}{3}$ ſuperficiei curvæ Cylindri circumſcripti, ad curvam conoeidis Parabolici ſuperficiem. Eſt autem quod fit ex illa trianguli converſione, $\frac{2}{3}$ Cylindri altitudinis Tλ: Quod autem ex quadrilineo ſic converſo efficitur, eſt Cylindrus (ejuſdem baſis) altitudinis T$\varkappa$, dempto Conoide Hyperbolico. Eſt autem Conoides illud Hyperbolicum (per prop. 163, 164. Arith. Infin.) ad circumſcriptum Cylindrum, ut $\frac{1}{3}T + \frac{1}{3}D$ ad $T + D$, (ſemiſſis lateris tranſverſi una cum triente diametri interceptæ, ad ejuſdem lateris tranſverſi & diametri aggregatum:) Hoc eſt, ut $AK + \frac{1}{3}K\delta$ ad $AK + T\varkappa$ ſeu $2AK + K\delta$: Adeoque cylindrus ſic hyperbolice excavatus, ad eundem plenum; ut $\frac{1}{3}T + \frac{2}{3}D$ ad $T + D$, ſive ut $AK + \frac{2}{3}K\delta$ ad $AK + T\varkappa$. Ergo (propter æquales omnium baſes,) Ut $\frac{2}{3}T\lambda$; ad $T\varkappa$ minus $\frac{AK + \frac{1}{2}K\delta}{AK + T\varkappa}K\delta$; vel ad $AK + \frac{AK + \frac{2}{3}K\delta}{AK + T\varkappa}K\delta$: ſic $\frac{2}{3}$ ſuperficiei curvæ Cylindri circumſcripti, ad curvam Conoeidis parabolici ſuperficiem: Et

Conoidis Parabolici ſuperficies.

(multiplicatis antecedentibus in $\frac{3}{2}$, ut $T\lambda$, ad eandem $AK + \frac{AK + \frac{3}{2}K\delta}{AK + T\varkappa} K\delta$; sic cylindri circumscripti superficies curva, ad curvam Conoeidis parabolici superficiem. Quæ num inventis tuis consentiant, vide sis.

Quam vero eadem parabolæ curva circa AT conversa superficiem describit, (propter tum differentiarum rectarum to, tum particularum curvæ, ab AT distantiam to, in earundem ab AK distantiæ ratione duplicata,) erit ea superficies curva, ad circulum semidiametri AD; non quidem ut ipsa solida modo dicta, (ex conversione quadrilinei $AK\varkappa T$, & trilinei $A\lambda T$, circa AK,) sed ut semisolidorum horum momenta respectu AK rectæ; vel ut omnes $t\varkappa$ ad omnes $t\lambda$, in respectivarum suarum ab AK distantiarum quadrata. Quæ quidem ratio, non magis explicabilis est, quam ipsa Quadrilinei ad Trilineum ratio.

Ellipsis expansa. Verum (ut ad alia etiam, extra Paraboloeidum genera, transeamus:) Perpendamus curvam ABC fig. 7. quam *Ellipsin expansam* dicimus. Quadrata particularum hujus, vel earundem subtensarum, sunt ut quadrata differentiarum sinuum versorum (incipiendo ab A vel C,) sive differentiarum sinuum rectorum (utrinque à B procedendo,) quadratis æqualibus aucta. (Quod ex ipso Schematis inspectu patet.) Quam igitur rationem habent eorundem quadratorum sic auctorum latera quadratica, vel ad quadratorum æqualium latera, vel ad omnes illas sinuum differentias, eam habet ABC curva, vel ad AF vel ad FC. (Quod & de partibus respectivis intelligendum est.) Quæ tamen ratio non magis explicabilis est, quam perimetri Ellipseos, ad peripheriam Circuli, vel hujus diametrum. Quæ enim erant in fig. 2. FzC, $F\zeta\Gamma$, Circuli & Ellipseos semiperimetri in superficie Cylindrica; eædem sunt in eadem expansa, fig. 7. AF recta, & ABC curva. Ut igitur AF recta, ad ABC curvam; sic semiperimeter Circuli, ad semiperimetrum Ellipseos, cujus minor axis æqualis sit diametro circuli; major, ejusdem duplum possit. Uti &, in fig. 10. FA, & FC, sunt ut quadrans perimetri circularis, ad quadrantem Ellipseos, cujus major Axis minoris posset quintuplum. Et in aliis similiter, variata curvaturæ mensura, pro varia conjugatorum axium ratione.

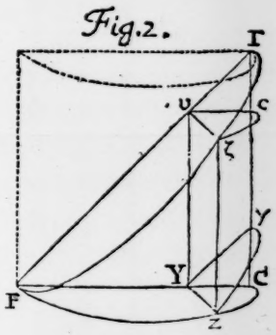


Estque

Eſtque hæc, ni fallor, ea curva quam *Cycloidis Comitem vel Sociam* (*la Compagne de la Roulette*) appellat Author Hiſtoriolæ, utut aliter apud ipſum atque me generata. Quam enim ille dimidiam *ductu circini in ſuperficie Cylindri recti*, deſcriptam dicit; nos ſimplicius *ſectione Cylindri plano facta*, totam deſcribimus. Neſciviſſe ſiquidem videtur, curvam ABC fig. 7. non aliam eſſe quam Ellipſin FζΓ fig. 2. in planum expanſam. Si autem centro C, diſtantia CF, in ſuperficie cylindri fig. 2. circini ductu deſcribatur linea, non erit illa FζΓ Ellipſis, (communi plani & Cylindri ſectione facta,) ſed alia curva, communi Sphæræ & Cylindri ſectione facta, quæ in planum expanſa omnino ſimilis erit curvæ BC fig. 7. prioris ſemiſſi. Si enim intelligatur, (in fig. 2.) FζΓ circini ductu deſcripta, adeoque Cζ recta, ubique ipſi CF æqualis, unde demiſſa ζz in ſuperficie cylindri occurrat baſi in z: Quia tum Cz & zF ſubtenſæ, tum Cz & zζ, æque poſſint ipſi Cζ rectæ, hoc eſt CF; erit zF ſubtenſa æqualis ipſi zζ; Adeoque omnes zζ (diviſa FzC in partes æquales in punctis quotlibet z) erunt ut chordæ arcuum in ſemicirculo arithmetice proportionalium, hoc eſt, ut ſinus recti in quadrante, hoc eſt, ut rectæ trilineum BbC fig. 7. complentes, ipſi Bb ordinatim applicatæ.

Cycloidis ſocia.

Fig. 2.



Adeoque ſi intelligatur ſemicylindro FzCΓ fig. 2. ſimilis alius cujus baſis diameter ſit ſemiſſi hujus FC æqualis; Curva ut FζΓ circini ductu deſcripta in ſuperficie minoris; & ſemiſſis FζΓ ſemiellipſeos in ſuperficie majoris, ſi in planum utraque expandatur, congruent.

Porro ſi intelligatur, non jam FA ut in fig. 7. hoc eſt FzC fig. 2. ſed FC ut in fig. 30. ſive CΓ, vel CF recta, vel etiam FΓ, fig. 29. dividi æqualiter; *Curvæ Ellipſeos.*

Fig. 29.

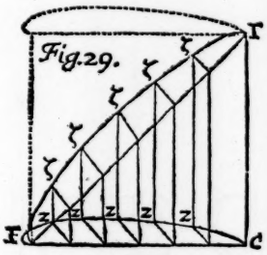
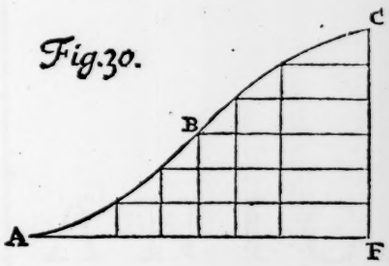


Fig. 30.



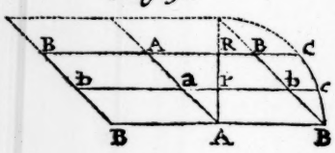
adeoque FA fig. 30. hoc eſt FzC fig. 29. dividi pro ratione arcuum ordinatim applicatis ſive ſinubus rectis æqualiter diſtantibus reſpondentium: Erunt (in partibus infinite exiguis) quadrata particularum ABC curvæ, huic diviſioni reſpondentium; ut quadrata differentiarnm horum arcuum, quadratis æqualibus aucta. (Quorum omnium radices, ad omnes illas vel differentias, vel diametri particulas æquales, ſunt, ut ABC curva ad rectam AF, vel ad FC: quibus quidem aggregatis proportionales ſuperficies planas, facile eſt concipere; ſed non ita facile ratione nota explicare, magis quam rationem curvæ Ellipſeos, ad Circuli vel peripheriam, vel diametrum.) Sunt autem illæ arcuum differentiæ (propter arcuum infinite exiguorum & chordarum quaſi-coincidentiam, adeoque & centrorum gravitatis, utpote quæ arcui & chordæ interjecta eſſe debent,) ut $\frac{RA}{s}$, hoc eſt factum ex R radio & diametri aliquota parte exigua A, per ſinum rectum s diviſum: (Quod ex Archimedis & aliorum demonſtratis, qui ſuperficierum, Sphæricæ & circumſcriptæ Cylindricæ, ſegmenta, parallelis planis abſciſſa, æqualia eſſe oſtenderunt, facile colligitur: nempe $RA = sc$, factum ex Radio in A, æquale eſſe facto ex s ejuſdem diſtantia à diametro, in c correſpondentem curvæ particulam:) Adeoque illarum quadrata $\frac{R^2A^2}{s^2}$; quæ quadratis æqualibus A^2 (prop-

ter FC = Cr) aucta, exhibent $\frac{R^2A^2}{s^2} + A^2$, quadrata particularum curvæ ABC; eorumque omnium radices, curvam ipſam: Hoc eſt, (propter $s = \sqrt{:R^2 - a^2}$: ſumptis a utrinque à medio, ut 1, 2, 3, &c. ſucceſſive,) $\frac{R^2A^2}{R^2-a^2} + A^2 = \frac{2R^2A^2 - a^2A^2}{R^2-a^2}$ ipſa quadrata; eorumque radices $A\sqrt{:}\frac{2R^2-a^2}{R^2-a^2}$. Ipſæ autem arcuum circularium differentiæ $\frac{RA}{s} = A\sqrt{\frac{R^2}{R^2-a^2}}$. Adeoque ut illæ omnes, ad omnes has; ſic Ellipſeos expoſitæ perimeter, FζΓ, vel ABC, ad peripheriam circuli FzC, vel AF. (Quod & aliis Ellipſium ſpeciebus facile accommodabitur, ut mox docebitur.)

Sphæroeidis oblongi ſuperficies.

Deinde, Si intelligantur tum Ellipſeos illæ, tum hæ perimetri Circularis particulæ, in iiſdem reſpective à ſuis axibus diſtantiis converti; unde fiat illic, Sphæroeidis oblongi; hic, Sphæræ ſuperficies: Erit ſuperficies illa ad hanc; ut omnes $A\sqrt{:}2R^2 - a^2$: ad totidem AR; ſive, ut omnes $\sqrt{:}2R^2 - a^2$: ad totidem R: Hoc eſt, (ſi intelligatur in parallelogrammo (fig. 31.) AB = $R\sqrt{2}$, & AR = R, adeoque ar = a, reliquaque ut in ſchemate conſtructa,) ut RCBA quadrantis circuli ſegmentum, ad quadratum AR minoris ſemidiametri. Sunt enim omnia brb rectangula, hoc eſt $R\sqrt{2} + a$ in $R\sqrt{2} - a$, hoc eſt, $2R^2 - a^2$; ut rectarum rc quadrata: adeoque omnes rc rectæ, ut $\sqrt{:}2R^2 - a^2$. Quod etiam ex prop. 124. Arith. Infin. fuſius patebit.

Fig. 31.



Eodem modo, ad alias Ellipſium ſpecies res accommodabitur. Si hoc ſaltem advertatur; In præſenti caſu, propter FC = Cr fig. 2. vel 29. aliquotas partes tum rectæ FC tum rectæ Cr, eodem ſymbolo A delignari. Sin recta Cr (quæ poteſt exceſſum quadrati axis longioris ſupra brevioris quadratum) vel longior eſſet vel brevior quam FC (circuli diameter, vel Ellipſeos axis minor,) puta ut H ad R; poſita A aliquota parte diametri circularis (ut prius,) erit $\frac{H}{R}A$ eadem pars rectæ Cr: Adeoque pro $\frac{R^2A^2}{R^2-a^2} + A^2$, ſumendum erit $\frac{R^2A^2}{R^2-a^2} + \frac{H^2}{R^2}A^2$. Adeoque Sphæroeidis illa ſuperficies, ad ſuperficiem Sphæræ, erit ut omnes $\sqrt{:}R^2 + H^2 - \frac{a^2H^2}{R^2}$: ad totidem R. Ideoque ponendum erit, fig. 31. AB = $\sqrt{:}R^2 + H^2$: & AR = H (ſemiſſi rectæ Cr fig. 29.) quare & ar = $\frac{aH}{R}$. Eritque, ut prius, Ut ABCR quadrantis circularis ſegmentum, ad totidem R, hoc eſt ad $H \times R$: ſic ſuperficies illa Sphæroeidica ad Sphæricam. (Et partes partibus reſpective proportionales.) Eſt autem, ut patet, AB, Ellipſeos ſemiaxis major; RC, ſemiaxis minor; AR, diſtantia foci à centro, ſive recta quæ poteſt differentiam quadratorum ſemiaxium.

Dico igitur, *Si in circuli quadrante cujus radius* AB *ellipſeos ſemiaxis major, ordinatim applicetur* RC *ſemiaxi minori æqualis, & compleatur* ARC *rectangulum: Erit ut* RCBA *quadrilineum, ad* ARC *rectangulum; ſic Sphæroeidis oblongi ſuperficies, ad ſuperficiem inſcriptæ Sphæræ.*

Sphæroeidis lati ſuperficies.

Intelligatur jam Cylindus FrCz fig. 29, obliquus eſſe, cujus baſis FζΓ circulus; & FzC Ellipſis, axi recta, cujus minor axis FC. Cum igitur, diviſa Fr circuli diametro in partes æquales numero infinitas, quorum quælibet dicatur A, & particulæ peripheriæ (ut prius oſtenſum eſt) $\frac{RA}{s}$ vel $\frac{RA}{\sqrt{:}R^2-a^2}$, & harum particularum quadrata $\frac{R^2A^2}{R^2-a^2}$; unde ſi auferantur quadrata æqualium particularum

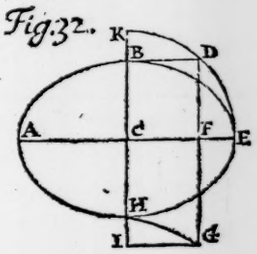
rectæ

rectæ Cr, puta $\frac{H^2}{R^2}A^2$ (ſumpto ſcilicet, ut Cr ad Fr, ſic H ad R;) erunt $\frac{R^2a^2}{R^2-A^2}-\frac{H^2}{R^2}A^2$ quadrata particularum Ellipſeos FzC; eorumque radices $\sqrt{:}\frac{R^2A^2}{R^2-a^2}-\frac{H^2}{R^2}A^2$: ipſæ particulæ. Quæ quidem utræque particulæ (tum Peripheriæ, tum Ellipſeos,) ſi in ſuas eaſdem à ſuis axibus reſpectivas diſtantias $s=\sqrt{:}R^2-a^2$: ducantur: Facta (ſuperficiebus harum converſione circa ſuos axes proportionalia) ſunt, illic RA; hic, $A\sqrt{:}R^2-H^2+\frac{a^2H^2}{R^2}$:. Adeoque Sphæroeidis lati ſuperficies (converſione Ellipſeos circa minorem axem deſcripti) ad ſuperficiem Sphæræ circumſcriptæ, ut omnes $\sqrt{:}R^2-H^2+\frac{a^2H^2}{R^2}$-; ad totidem R. Hoc eſt, ut quadrilineum A T ϰ K fig. 28. hyperbolæ ſuoque axi conjugato interjectum (cujus ſemilatus tranſverſum AK $=\sqrt{:}R^2-H^2$: & ATH, T ϰ $=R$;) ad A T ϰ rectangulum. Fig. 28.

Hoc eſt, *Si, ab Hyperbola cujus ſemilatus tum rectum tum tranſverſum* AK, *Ellipſeos ſemiaxi minori æquetur*; *ad conjugatum axem ordinatim applicetur* ϰ T *ſemiaxi Ellipſeos majori æqualis*; *& compleatur* A T ϰ *rectangulum*; *Erit, ut* A T ϰ K *quadrilineum, ad* A T ϰ *rectangulum*; *ſic ſuperficies Sphæroeidis lati, ad circumſcriptæ Sphæræ ſuperficiem.*

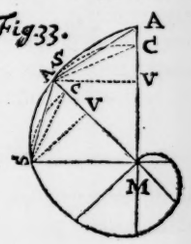
Vel ſic, elegantius paulo, utrumque ſimul efferamus. *Sint ellipſeos axes conjugati,* ACE *major,* BCH *minor, &* BD (*parallela* CE) *circumſcripti circuli quadranti* EK *occurrens in* D: *& compleatur* CBDF *rectangulum. Sumatur, in* DF *continuata,* FG *æqualis* CE. *Denique centro* C *vertice* H, *ſcribatur* HG *hyperbola*; *& compleatur* CFGI *rectangulum. Intelligatur autem tum axe* AE *ſphæroeides oblongum, tum axe* BH *ſphæroeides latum, ellipſeos converſione deſcribi. Erit, ut* CFDK *quadrilineum, ad inſcriptum rectangulum* CFDB; *ſic Sphæroeidis oblongi ſuperficies, ad ſuperficiem inſcriptæ Sphæræ: Atque, ut* CFGH *quadrilineum, ad rectangulum circumſcriptum* CFGI; *ſic ſuperficies ſphæroeidis lati, ad circumſcriptæ ſphæræ, ſuperficiem.* Addo etiam, *& partes partibus reſpective ſumptis proportionales eſſe,* (nam & de partibus etiam procedit demonſtratio:) Hoc eſt, ſi in eadem ratione, ordinatim applicatis ſecta intelligatur recta CF, qua ſphæroideos & comparatæ Sphæræ Axes ſecantur plano. Data vero ratione quam habet Sphæroeideos ſuperficies ad Sphæræ ſuperficiem, vel etiam iſtius partes ad partes hujus; rationem item ad circuli planum dari nemo neſcit. Sed de his hactenus.

Fig. 32.



Accedo ad Spiralem, quam & memorato loco (Schol. prop. 38. Arith. Infin.) conſideravimus. Intelligatur, intra Spiralem lineam inſcribi, figura ex ſimilibus ſectoribus conflata. Horum arcus, propter æqualia radiorum augmenta (ut CA $=A$) arithmetice proportionales eſſe oſtendimus: Adeoque & arcuum horum (quippe ſimilium) tum chordas (SC $=c$,) tum ſinus rectos (SV $=s$) & verſos (VC $=v$) arithmetice item proportionales eſſe: Et propterea Subtenſarum Spiralis quadrata, SAq $=$ SVq $+$ VAq $=s^2+v^2+2vA+A^2=c^2+2vA+A^2$, ut quadrata Æqualia, tum quadratis arithmetice proportionalium, tum planis arithmetice proportionalibus, aucta: (Quod ibidem fuſius oſtenſum eſt.) Hoc eſt, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbola, quadratis æqualibus aucta. Adeoque, dummodo determinatus eſt numerus Sectorum, unde & angulus ad centrum determinatæ magnitudinis, manifeſtum eſt has ſpiralis ſubtenſas ſubtenſis in parabola ſupra memoratis (quarum utique quadrata, quadratis æqualium arithmetice-proportionalium ſive ordinatim-applicatarum in triangulo auctis, æqualia ſupra diximus,) minime convenire. Quoniam vero, in minoribus *Lineæ Spiralis longitudo.*

Fig. 33.



Linearum Spiralis & Paraboli-cæ æqualitas.

bus angulis ratio ſinus verſi ad rectum minor eſt, eaque ſemper prout minuuntur anguli diminuitur, adeo ut eo tandem perveniatur ut data qualibet minor ſit; unde in angulis infinite exiguis, propter rationem ſinus verſi ad rectum infinite exiguam, evaneſcere intelligendus eſt V C ſinus verſus (coincidentibus quaſi tum arcu tum chorda tum ſinu recto ; quod quidem intelligendum erit, ubi S A ſubtenſæ pro Spiralis particulis reputantur ;) adeoque quantitas v, & propterea $2vA$, pro nulla reputanda : Erit, hoc caſu, $c^2+2vA+A^2$ tantundem atque c^2+A^2; Adeoque particulæ Spiralis, non minus quam Parabolæ, erunt, ut quadratorum æqualium, quadratis Arithmetice-proportionalium auctorum, latera, ſive ut rectæ t x fig. 28. Unde linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitatem manifeſtam eſſe conſtat.

Quæ quidem inventio, num Hobbio, an Robervallio, debeatur, (uterque enim vendicat,) non determino ; an inter utrumque dividenda. Certum eſt, Merſennum Robervallio tribuere: contendit autem Hobbius ſe primum invenisſe, prætendit utique (quam ſuam prætenſionem cum *Elenchum* meum ſcripſi non audiveram) ſe Robervallio rem totam pridie communicaſſe, eum autem, hac anſa data, poſtridie demonſtrationem ſuam adornaſſe. Quicquid ſit, cum res facti ſit, nolo ego me arbitrum interponere. Propoſitionem autem, cujuſcunque demum ſit, veram eſſe, comprobat hæc noſtra demonſtratio.

Hanc autem demonſtrationem noſtram, figurarum inſcriptione & circumſcriptione ad morem veterum, fuſius tradi poſſe, non opus eſt ut ego te moneam ; qui probe noris quam facile hujuſmodi demonſtrationes contractæ, ad operoſas illas veterum reduci poſſint, modo quis id tanti eſſe putaverit. Atque hactenus de Spirali Archimedea.

Spiralis alia. Fig. 33.

Intelligamus jam alius generis Spiralem deſcribi ; in qua, verbi gratia, radiorum incrementa C A non ſint æqualia, ſed eadem ratione continue creſcant qua creſcunt arcus S C, vel M S radii. Id autem fiet ſi intelligamus, vel, manente circumductæ rectæ M A motu æquabili, punctum lineans moveri ab M ad A motu æqualiter accelerato ; vel, manente puncti lineantis ab M ad A motu æquabili, rectam M A circumduci motu æquabiliter retardato, nempe ut quo longius a medio receſſerit punctum lineans, eo tardius circumferatur recta ; (unde conſequetur puncti lineantis, in ipſa curva deſcripta, motus æquabilis, vel æque velox.)

Re ſic conſtructa, manifeſtum eſt, tum omnia ſimilium ſectorum triangula S V C inter ſe eſſe ſimilia, tum omnia S V A, vel S C A, triangula rectilinea vel miſtilinea, tum omnia S M A, item inter ſe ſimilia. Unde & angulus ad A, quem vel S A curva, vel ejuſdem ſubtenſa S A, vel etiam tangens, cum M A faciat, tum quivis eſſe poteſt (pro varia motuum inter ſe ratione) tum ubique idem erit.

Erunt autem omnes S A rectæ, hoc eſt (in partibus exiguis) omnes S A curvæ ad omnes A V, hoc eſt (in partibus exiguis) ad omnes A C, hoc eſt ad A M rectam, ut A S ad A V ; ſive ut Hypotenuſa ad Baſin Trianguli rectanguli, angulum habentis ad baſin, angulo A æqualem ; illi nempe, quem curvæ Tangens cum Radiis conſtituit.

Conſtruetur autem hujuſmodi Spiralis; ſi ſumptis, (ut in fig. 34,) rectis M A, M 1, M 2, M 3, &c. continue proportionalibus, radiis hiſce deſcribantur totidem ſectores ſimiles, eiſque circumſcribatur A 1 2 3, &c. curva.

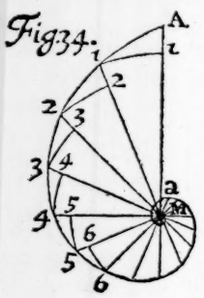


Fig. 34.

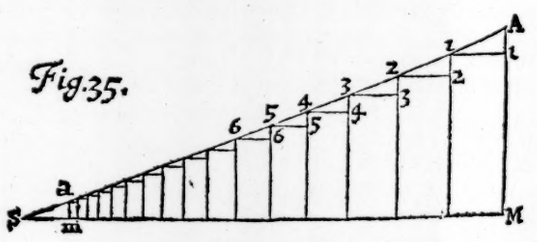


Fig. 35.

Si fiat autem, ut fig. 35, ſuper æquali M A baſi, triangulum rectangulum M A S, angulum A æqualem habens: Erunt curvæ A 1, 1 2, 2 3, &c. in ſpirali, rectis A 1,

A 1, 1 2, 2 3, &c. in trianguli hypotenusa, singulæ singulis respective æquales, & omnes omnibus: Adeoque A 1 2 3 &c. curva, rectæ A S æqualis. Spatia vero trilinea Spirali adjacentia A M 1, 1 M 2, 2 M 3, &c. trapeziorum in triangulo subdupla. Totumque triangulum, totius spatii Spiralis duplum; si nempe intelligantur convolutiones interiores toties repeti quoties novis circulationibus iterato describuntur.

Nam revera; uti Spiralis Archimedea, non aliud est quam Parabola convoluta; aut etiam Circulus vel Circuli Sector, convolutum Parallelogrammum, (quod prop. 16. Arith. Infin. ostendimus:) Sic spiralis hæc, fig. 34, non aliud est quam ipsum M A S triangulum (fig. 35.) convolutum; contracta nempe in punctum recta S M, adeoque parallelogrammis (sive inscriptis sive circumscriptis numero infinitis) in totidem triangula redactis.

Notandum autem hic est; Tum propter radiorum M A, M 1, M 2, &c. (vel rectarum in triangulo his respondentium) continue proportionalium processum in infinitum, decrescendo; tum etiam propter eundem ubique Tangentis angulum cum recta circumducta factum, (unde, circuendo, ad punctum M medium, nunquam perveniri poterit;) Manifestum est, Spiralem hanc introrsum (non minus quam extrorsum) esse interminabilem. Neque enim ab A per 1 2 3 &c. quotcunque demum circulationibus peractis, ad medium unquam pervenietur, magis quam, sumptis A 1, 1 2, 2 3, &c. proportionalibus, exhauriretur unquam A S recta. Ut autem hæ omnes in infinitum continuatæ, sic A 1 2 3 &c. continuata introrsum in infinitum, æquabit rectam A S. Habes itaque *curvam interminabilem terminatæ rectæ æqualem.*

Sed & fatendum erit, Tangentem Spiralis hujus, non magis duci posse Geometrice, quam Spiralis Archimedeæ, (ut quæ ex quadratura circuli dependeat, ut & Spiralium omnium Tangentes;) adeoque nec angulum A geometrice assignari. Linea tamen interminabilis terminatæ rectæ æqualis, non minus sine hoc assignabitur: Si nempe, sumatur triangulum, non rectangulum, ut A S V fig. 33. sed triangulo A S C simile; ut enim A C ad A S, sic A M ad omnes A S rectas arcubus A S numero infinitis inscriptas.

Hanc ipsam curvam, alia occasione, contemplatus item est Wrennius noster. Nec tantum curvæ longitudinem, partiumque ipsius, & magnitudinem adjacentis plani: sed &, ipsius ope, Limacum & Conchiliorum domunculos metitur. Existimat utique, magna verisimilitudine, domunculos hosce non alios esse quam Pyramides convolutas; quarum Axis sit, istiusmodi Spiralis; non quidem in plano jacens, sed sensim in convolutione (circa erectum axem) assurgens: pro variis autem curvæ, sive ad rectam circumductam, sive ad subjacens planum, angulis; variæ Conchiliorum formæ enascantur. Atque, hac hypothesi, mensurata Pyramide, metitur etiam ea conchiliorum spatia. Et quidem de hac Spirali hactenus.

Putaram hic aliam Spiralis speciem tradidisse; eam nempe quæ ex convoluta Paraboloeide Semicubicali ortum duceret. Cujus itaque curva quum Paraboloeidis illius curvæ æquetur, quam æqualem esse rectæ jam ostendimus; etiam Curva Spiralis inde oriundæ, æqualis rectæ ostenderetur. Sufficiet autem universim dixisse, Spirales omne genus, ex hujusmodi planis (sive triangula sint, sive trapezia, vel parallelogramma, sive parabolæ, aut paraboloeides, aut etiam hyperbolæ, aliæve vel rectilineæ vel mistilineæ figuræ,) sic convolutis oriundas, curvas habere curvatis planorum sic convolutorum lateribus, ut A S, æquales; & quidem, oppositio latere, ut S M, in punctum contracto, spatium spirali adjacens, figuræ nondum convolutæ semissem. *Spirales aliæ.* Fig. 35.

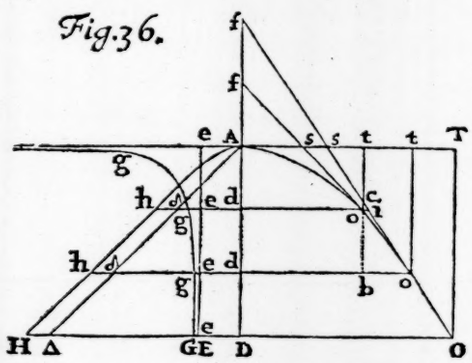
Atque hactenus specimina tradidimus methodi nostræ, subtensarum ope, rectificandi curvas.

Quoniam vero, Tangentium ope (in memorato Scholio *prop.* 38. *Arith. Infin.*) id etiam fieri posse insinuavimus: libet & hujus item aliquot specimina exhibere.

Atque à Parabola initium desumam, id ipsum Tangentium ope demonstraturus, quod supra per Inscriptas ostendimus. Intelligatur itaque in fig. 36. A T, parabolam rectam in vertice tangens, in punctis t quotlibet æqualiter divisa; adeoque A t, sive d o, arithmetice proportionales, quæ dicantur p; earumque communis excessus b o = t t dicatur A: Erit autem o t = d A = $\frac{p^2}{L}$; adeoque (propter t s = $\frac{1}{2}p$) *Curva Paraboræ.* Fig. 36.

tangens $os = \sqrt{:\frac{1}{4}p^2 + \frac{p^4}{L^2}} := \frac{p}{2L}\sqrt{:L^2+4p^2}$. Occurrat autem quælibet ot,

Fig. 36.



proximæ tangenti os, in c. Eritque ut $st = \frac{1}{2}p$, ad so; sic $bo = tt = A$, ad $oc = \frac{A}{L}\sqrt{:L^2+4p^2}$. Sive AL, ad $A\sqrt{:L^2+4p^2}$: vel L, ad $\sqrt{:L^2+4p^2}$: aut $\frac{1}{2}L$ ad $\sqrt{:\frac{1}{4}L^2+p^2}$. Adeoque ut omnes $\sqrt{:\frac{1}{4}L^2+p^2}$: ad totidem $\frac{1}{2}L$; sic omnes oc tangentes, hoc est, (in partibus exiguis) oo curvæ, hoc est AO curva, ad omnes tt, hoc est rectam AT vel DO. Hoc est, si fig. 28. ponatur $AK = \frac{1}{2}L$ semilatus tum rectum tum transversum hyperbolæ $K\varkappa$; & AT ut in parabola: Erit, ut TAKk rectangulum, ad $TAK\varkappa$ quadrilineum: sic AT tangens, vel basis DO, ad AO curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales. Quod quidem supra inventis convenit, ubi axem AD ad AO curvam esse ostendimus, ut $TA\lambda$ triangulum, ad idem $TAK\varkappa$ quadrilineum. Nam ut Triangulum $TA\lambda = \frac{1}{2}dL$, ad rectangulum $TAK = \frac{1}{2}L\sqrt{dL}$; hoc est, ut d ad $\sqrt{dL}$: sic AD ad AT.

Fig. 28.

Conoeidis Paraboloidis superficies.

Sed & hinc simili modo atque supra, inveniemus superficiem convexam conoeidis parabolici. Nempe (ob easdem particularum tt & $\varkappa\varkappa$ distantias ab AK,) Erit ut Cylindrus ex conversione TK parallelogrammi, ad Cylindrum ex simili conversione parallelogrammi $T\delta$ minus conoeide hyperbolico ex conversione $K\delta\varkappa$ hyperbolæ, (circa eandem $A\delta$ rectam;) sic circulus radio AT descriptus, ad conoeidis superficiem conversione AO curvæ descriptam. Quod & supra traditis etiam convenit. Nam eadem est ratio circuli radio AT descripti, ad duas tertias superficiei cylindricæ recta TO descriptæ, quæ est solidi ex conversione TAK rectanguli, ad solidum ex conversione trianguli $TA\lambda$, circa eandem AK. Quare & eadem superficies Conoeidis utrovis modo proveniet.

Curva Paraboloæ.

Fig. 36.

Sed intelligamus jam (non AT, sed) AD in punctis d æqualiter divisam: adeoque $dA = d$ arithmetice proportionales, & $dd = A$ æquales, & $do = \sqrt{dL}$, & (propter df duplam rectæ dA) tangentes $of = \sqrt{:4d^2+dL}$. Item (continuatis do donec proximæ quæque tangenti of occurrat in i) ut $df = 2d$, ad fo: sic $dd = A$, ad $oi = \frac{A\sqrt{:4d^2+dL}}{2d} := \frac{A\sqrt{:d^2+\frac{1}{4}dL}}{d}$. Adeoque si ad eundem AD axem construatur tum $AD\Delta$ triangulum isosceles rectangulum, tum ADH hyperbola (cujus tum latus rectum tum transversum sit $\frac{1}{4}L$,) atque ADE rectangulum cujuscunque latitudinis, (adeoque singulas ed singulis A vel æquales vel saltem proportionales;) Et fiat, ubique, ut $d\delta = d$, ad $de = A$, sic $dh = \sqrt{:d^2+\frac{1}{4}dL}$: ad dg: erit ut ADE rectangulum, ad ADGg quadrilineum (interminabile quidem, sed magnitudine finitum;) sic axis AD, ad AO curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales.

Conoeidis superficies.

Porro, si ducantur omnes tum dd, tum io, in suas easdem à vertice respectivas distantias d: reperiuntur momenta (respectu AT rectæ) rectarum dd ad momenta rectarum oi, hoc est (in partibus exiguis) curvarum oo; ut dA ad $A\sqrt{:d^2+\frac{1}{4}dL}$: sive ut d ad $\sqrt{:d^2+\frac{1}{4}dL}$: Hoc est ut $d\delta$ ad dh. Omnium igitur ob, hoc est dd, hoc est AD rectæ, momenta, ad momenta omnium oi, hoc est oo, hoc est AO curvæ,

(respectu

(reſpectu ejuſdem AT;) eſt, ut triangulum AD△, ad ADH hyperbolam: Et conſequenter (utpote momentis proportionalium) eadem eſt ratio Circuli radio AD deſcripti, ad curvam Conoeidis ſuperficiem (convexo-concavam) curvæ AO circa AT converſione deſcriptam.

Denique, Quoniam ob (rectarum to differentiæ) & oo, in iis reputandæ ſunt ab AD diſtantiis; adeoque & ſuperficies earundem reſpective circa AT converſione deſcriptæ, in iiſdem item diſtantiis nempe do $= \sqrt{dL}$; ſintque ſuperficies illæ, ad has, (quod modo oſtenſum eſt,) ut $d\delta = d$, ad $dh = \sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL}$: Ductis utriſque in eandem $\sqrt{dL}$ diſtantiam; reperitur ſuperficierum omnium rectis illis ob, ad ſuperficierum omnium curvis oo, ſic deſcriptarum momenta, ut omnes $dx\sqrt{dL}$, ad omnes $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL : x\sqrt{dL}}$; hoc eſt ut, $\sqrt{d^3L}$, ad $\sqrt{:d^3L + \frac{1}{4}d^2L^2}$: hoc eſt ut $d\sqrt{dL}$, ad $d\sqrt{:dL + \frac{1}{4}L^2}$: Hoc eſt, ut momentum parabolæ qualis ADC fig. 25. ad momentum trunci, qualis ADBb, reſpectu ejuſdem Ab rectæ: (Si nempe intelligatur AV altitudo abſciſſa fig. 25. æquare $\frac{1}{4}L$ quadrantem recti lateris parabolæ expoſitæ fig. 36. Et axis AD utrobique æqualis: & latus rectum L.) Manifeſtum utique eſt, omnes $\sqrt{dL}$ eſſe ut ordinatim-applicatas in parabola, & omnes $\sqrt{:dL + \frac{1}{4}L^2}$ ut ordinatim-applicatas in parabolæ trunco: quæ utræque in d ductæ exhibent rationes momentorum: Quæ quidem ratio, (propter cognitas tum magnitudines, tum centra gravitatis, parabolæ & trunci,) cognita eſt. Habetur autem momentum planorum rectis ob, circa AT converſis deſcriptorum; eſt utique (propter plana ipſa æqualibus rectis ob in diſtantiis ab AT arithmetice proportionalibus converſis deſcripta, arithmetice proportionalia; eorumque diſtantias ab AD in illarum ratione ſubduplicata; adeoque ipſorum momenta ut ſeries $a\sqrt{a}$: eorundem vero planorum in diſtantiis maximæ æqualibus, hoc eſt circuli radio TO deſcripti, momentum, ut ſeries a:) ad momentum circuli radio TO deſcripti reſpectu AD rectæ: ut ſeries $a\sqrt{a}$, ad ſeriem a: adeoque ut $\frac{2}{3}$, ad $\frac{1}{2}$: ſive ut 4, ad 5. Et propterea, data ſuperficiei magnitudine, dabitur ejuſdem centrum gravitatis. *Centrum gravitatis.*

Cum autem (ut vides) in demonſtrationibus aſſumpſerim, nunc oc, nunc oi, tangentium particulas, in diviſionibus exiguis ipſi oo curvæ particulis coincidere: ne hæſites tamen num hoc temere fecerim; id tuto factum intelligas, modo animadvertas rectas oi, oc, angulo contactus ſubtenſas, pro diminutione oc, oi, tangentium, ita minui, ut illæ ad has rationem tandem ſubeant data quavis minorem, (ſecus enim, angulus rectilineus aſſignari poſſet angulo contactus minor,) ideoque evaneſcentibus oi, oc, tangenti & curvæ interjectis, coincident, tum oc, tum oi, tangentis particulæ, particulis curvæ oo.

In *Paraboloeide ſemicubicali*, quam ſupra memoravimus, ſimiliter atque in Parabola, per Tangentes item id ipſum expediri poſſe, quod per ſubtenſas ſuperius abſolvimus, paucis oſtendam. *Paraboloeides ſemicubicalis.*

Intelligatur itaque AO fig. 36. (non jam Parabola, ſed) Paraboloeides ſemicubicalis: cujus nempe ordinatim-applicatæ do = At, ſint in diametrorum dA ratione *ſubtriplicatæ duplicata*: (adeoque dA diametri in ipſarum At ratione *ſubduplicatæ triplicata*:) Et propterea df ad dA, ut 3 ad 2; & ts ad tA, ut 2 ad 3. Sumptis itaque At, At, arithmetice-proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis exceſſus A = tt, diameter vero dA $= d = \sqrt{\frac{p^3}{L}}$: Erit tangens os $= \sqrt{:\frac{4}{9}p^2 + \frac{p^3}{L}} = p\sqrt{:\frac{4}{9} + \frac{p}{L}}$. Item ut ts $= \frac{2}{3}p$, ad os: ſic bo = tt $= A$, ad oc $= \frac{3}{2}A\sqrt{:\frac{4}{9} + \frac{p}{L}} = A\sqrt{\frac{L + \frac{2}{4}p}{L}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes $A\sqrt{\frac{L + \frac{2}{4}p}{L}}$; hoc eſt, ut omnes $\sqrt{L}$, ad omnes $\sqrt{:L + \frac{2}{4}p}$. hoc eſt, ut omnes L, ad omnes $\sqrt{:L^2 + \frac{2}{4}pL}$: ſic AT recta, ad curvam AO. Hoc eſt, ut parallelogrammum cujus latitudo L, altitudo P = AT: ad truncum parabolæ æquealtum, cujus latus rectum $\frac{2}{4}L$, ordinatim-applicata minima L, adeoque altitudo abſciſſa $\frac{4}{9}L$. Quæ quidem cum ſupra traditis convenire, qui examinaverit, deprehendet. (Notandum interim L quo hic deſignatur latus rectum paraboloeidis Semicubicalis, illic deſignari latus rectum Parabolæ, unde Paraboloeides illa originem ducit.) Atque hinc etiam Conoeidis ſuperficies ſimili modo colligitur, atque illic; ut non ſit opus repetere. Fig. 36.

Paraboloeidum aliarum Curvæ.

Idem similiter in aliis non paucis Paraboloeidum generibus obtinebitur. Verbi gratia. Sunto ordinatim-applicatæ d o = A t, in diametrorum ratione *subquintuplicatæ quadruplicata*. Et propterea d f ad d A, ut 5 ad 4: & t s ad t A, ut 4 ad 5. Sumptis A t, A t, arithmetice proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis excessus $A = tt$, diameter $dA = d = \sqrt[4]{\frac{p^5}{L}} = p\sqrt[4]{\frac{p}{L}}$. Erit tangens $os = \sqrt{:\frac{16}{25}p^2 + p^2\sqrt{\frac{p}{L}}} := p\sqrt{:\frac{16}{25} + \sqrt{\frac{p}{L}}}$: Item, ut $ts = \frac{4}{5}p$, ad os: sic $bo = tt = A$, ad $oc = A\sqrt{:1 + \frac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes $A\sqrt{:1 + \frac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}$: hoc est, ut totidem L, ad totidem $\sqrt{:L^2 + \frac{25}{16}L\sqrt{pL}}$: sic A T recta, ad curvam A O. Nempe, ut Parallelogrammum, ad figuræ truncum, cujus ordinatim-applicatæ sint $\sqrt{:L^2 + \frac{25}{16}L\sqrt{pL}}$. Similiter: Si essent ordinatim-applicatæ in diametrorum ratione *subseptuplicatæ sextuplicata*, aut *subnoncuplicatæ octuplicata*, &c. in infinitum: Quas omnes pariter εὐθώσεως capaces recte asserit Heuratius. (Hæ autem omnes, à Paraboloeide Biquadraticali, Bicubicali, Triquadraticali, cæterisque quarum potestates à numero pari denominantur, eodem plane modo derivantur, quo supra, ab ipsa Parabola, Semicubicalis: Si enim intelligatur A p P fig. 25. Paraboloeides Biquadraticalis, vel Bicubicalis, &c. adeoque d p, ut $\sqrt[4]{dL^3}$, $\sqrt[6]{dL^5}$, &c; erit d e, ut $d\sqrt[4]{dL^3}$, $d\sqrt[6]{dL^5}$, &c. hoc est, ut $\sqrt[4]{\frac{d^5}{L}}$, $\sqrt[6]{\frac{d^7}{L}}$ &c.

Εὐθώσεως autem eas capaces, (ne gratis dictum videatur) paucis ostendemus. Ponamus autem (quia generatim agendum est) n numerum potestatum quemvis, & $m = n+1$, $i = n-1$, & $s = \frac{1}{2}n$. & $u = 2i$. Esto autem curva rectificanda A O (fig. 28. vel 36.) parabola vel paraboloeides quævis quæ ita constituatur ut d o vel A t sit $p = \sqrt[m]{d^n L}$, adeoque A d vel t o, $d = \sqrt[n]{\frac{p^m}{L}} = \frac{p}{L}\sqrt[n]{pLi}$: Ponamus item (quo fractiones vitentur) ut n ad m, sic K ad L. Invenietur, eodem processu quo nuper, fig. 36. (propter d A ad d f, sive t s ad t A, ut n ad m; quod universaliter demonstravimus ad prop. 23. 46. 49. *Con. Sect.*) t t, ad o o vel o c, ut K ad $\sqrt{:K^2 + \sqrt{pLi}}$: Adeoque, si ponatur fig. 28. $AK = K$, & $t\varkappa = \sqrt{:K^2 + \sqrt{pLi}}$: Erit ut T A K rectangulum ad T A K ϰ quadrilineum; sic recta A T, ad A O curvam. Atque hoc quidem universaliter, sive sit n numerus par, sive impar, sive etiam fractus.

Quoties autem n est numerus par; trilineum K ϰ δ, (adeoque T A K ϰ quadrilineum,) quadrari potest, (adeoque & A O rectificari) sic ostendimus.

Ponamus K δ quotlibet æqualiter crescentes, quæ figillatim dicantur a (quarum maxima sit Δ:) quibus respondeant totidem δ ϰ trilineum K ϰ δ complentes. Est autem $a (= t\varkappa = AK) = \sqrt{:K^2 + \sqrt{pLi}} - K$; adeoque $a + K = \sqrt{:K^2 + \sqrt{pLi}}$: Et $a^2 + 2aK + K^2 = K^2 + \sqrt{pLi}$; & $a^2 + 2aK = \sqrt{pLi}$; Cujus æquationis utraque pars multiplicata secundum exigentiam potestatis s, dat $S : a^2 + 2aK := pLi$: adeoque $\frac{S : a^2 + 2aK}{Li} = p = A\,t = \delta\varkappa$, quæ omnes complent K ϰ δ trilineum: quod itaque (quantacunque sit potestas S numero integro designanda) quadrari poterit. Ergo &c.

Exempli gratia. Si $S = 2$ (quadratum designans) adeoque $n = 4$, $i = 3$, & $K = \frac{4}{5}L$: erit $\frac{S : a^2 + 2aK :}{Li} = \frac{a^4 + 4a^3K + 4a^2K^2}{L^3}$: Adeoque Trilineum ad circumscriptum Parallelogrammum; ut $\frac{1\Delta^4}{5L^3} + \frac{4\Delta^3K}{4L^3} + \frac{4\Delta^2K^2}{3L^3}$, ad $AT = \sqrt{5}\,\mathcal{D}L^4$; sive, ut $\frac{1}{5}\Delta^4 + \Delta^3K + \frac{4}{3}\Delta^2K^2$, ad $L^3\sqrt{5}\,\mathcal{D}L^4$.

Si $S = 3$, adeoque $n = 6$, & $i = 5$, & $K = \frac{6}{7}L$: Erit $S : a^2 + 2aK := a^6 + 6a^5K + 12a^4K^2 + 8a^3K^3$: Adeoque Trilineum ad circumscriptum Parallelogrammum ut $\frac{1}{7}\Delta^6 + \Delta^5K + \frac{12}{5}\mathcal{D}^4K^2 + 2\Delta^3K^3$, ad $L^5\sqrt{7}\,\mathcal{D}L^6$. Et in reliquis similiter.

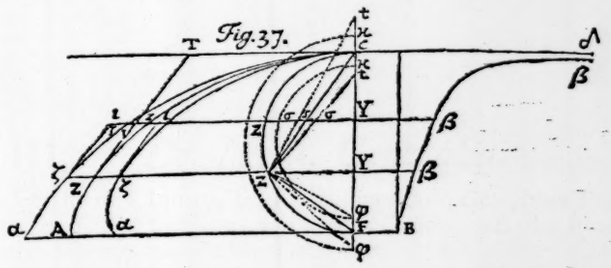
Sin $n = 2$, adeoque tum S, tum i, $= 1$, potestatem primam designans, multiplicatione

plicatione opus non erit; (cum ipsa quantitas exposita, ejusque potestas prima tantundem sunt:) sunt itaque omnes p (trilineum complentes,) omnibus a^2+2aK sigillatim proportionales, hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbola; sive, ut ipsæ rectæ (diametro parallelæ) in complemento trunci parabolici, (quod nempe cum ipso trunco complet circumscriptum parallelogrammum,) quæ quidem rectæ, quadratis ordinatim-applicatarum in hyberbola sunt proportionales.

Quoties vero n est numerus impar; adeoque s numero integro non assignabilis: Pro $\frac{S:a^2+2aK}{Li}:=p$, sistendum erit in $\frac{N:a^2+2aK}{Lu}=p^2$. Quo casu, licet K $\kappa\delta$ quadraturæ capax non sit, adeoque nec A O ἰνδιώστως: Est tamen Conoeides, istius conversione circa K δ, magnitudinis notæ; adeoque & complanari poterit superficies curva conoeidis quæ recta A O circa A D describitur. Sed non & exinde, propterea exhibetur etiam semisuperficiei Conoeidicæ momentum respectu Axis. Quoties vero n est numerus par; poterunt ea omnia exhiberi. Atque de his hactenus.

Denique, ut totum hoc de paraboloeidibus negotium simul & semel absolvam. Sit n numerus quilibet, $m=n+x$, $i=n-x$, sitque $z=2x$, & $u=2i$: designet autem ipsius n ad m respectus, quota potestas diametri quotæ ordinatim applicatæ potestati proportionalis sit. Habebitur $\frac{N:a^2+2aK}{Lu}:=p^2$. Adeoque aggregatum omnium pz exhiberi poterit; ut & omnium potestatum ipsius p, quæ denominantur à numeri z multiplici. Si vero insuper n & z numeri, communem aliquem divisorem admittant, puta f; sitque f) $N(S$, & $f)z(e$. Exhibebitur etiam omnium p^e aggregatum, ut & potestatum ipsius p quæ à numeri e multiplo denominantur. Atque hinc dijudicandum erit, quatenus vel ipsa A O curva, vel conoeidis superficies ab hac descripta, aut hujus semisuperficiei momentum respectu axis, aliave hujusmodi, exhiberi possint vel non possint. Atque de Paraboloeidibus hactenus.

Tandem, Coronidis loco, ipsam Cycloidis curvam ad examen revocabimus. *Curva Cycloidis.* Notum est Cycloidis tangentes Z T, subtensis Circuli Genitoris z C, parallelas



esse, & æquales; Adeoque & earum particulas Z I, ipsis z s. Quæ quidem tangentium particulæ (in partibus exiguis) ipsis Z Z Cycloidis particulis (ob rationes supra insinuatas) coincidere censendæ sunt. Divisa autem C F in partes æquales quotlibet in punctis Y, quæ dicantur $A=$ Y Y; unde fiant C Y arithmetice-proportionales, quæ dicantur d, totaque C F $=D$: Erunt ubique z C $=\sqrt{dD}$. Item, ut C Y $=d$, ad z C $=\sqrt{dD}$; sic Y Y vel A, ad z s $=$ Z I $=\frac{A\sqrt{dD}}{d}=A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Adeoque, omnes A, ad omnes $A\sqrt{\frac{D}{d}}$ vel $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$; hoc est, C F recta, ad curvam C Z A; ut series Æqualium, ad seriem Reciprocam subsecundanorum. Hoc est (per prop. 87. & seqq. Arith. Infin.) ut C F B rectangulum, ad congruam figuram interminabilem C F B $\beta\delta$ C: (& partes partibus respective proportionales.) Hoc est (per prop. 102. Arith. Infin.) ut 2 ad 1. Et propterea C Z A semicycloidis curva, diametri genitoris circuli C F, dupla.

(Habentur autem ipsæ Y β, si intelligantur tum semiparabola (cujus vertex C, axis C F, & basis axi æqualis, adeoque & lateri recto,) tum huic circumscriptum

quadratum; & fiat, ut rectæ in parabola, ad rectas in quadrato; (hoc eſt, ut $\sqrt{d\mathcal{D}}$, ad $\mathcal{D}$,) ſic FB, vel A, ad quartam; erit ea $Y\beta = \frac{A\mathcal{D}}{\sqrt{d\mathcal{D}}} = A\sqrt{\frac{\mathcal{D}}{d}}$. Vel etiam, ſi intelligatur eadem parabola inverſe poſita, (verticem habens F, axem, baſin, & latus rectum, $= \mathcal{D}$,) & ſumatur ut ordinatim-applicata in ſemicirculo, ad ordinatim-applicatam in parabola; hoc eſt ut $\sqrt{:d\mathcal{D}-d^2}$: ad $\sqrt{:\mathcal{D}-d}$, in $\frac{1}{2}\mathcal{D}$: $= \sqrt{:\mathcal{D}^2-d\mathcal{D}}$: ſic FB, vel A, ad $Y\beta$ vel $A\sqrt{\frac{\mathcal{D}^2-d\mathcal{D}}{d\mathcal{D}-a^2}} = A\sqrt{\frac{\mathcal{D}}{d}}$. Utrovis modo eadem prodibit $Y\beta$ recta.

Porro; Ductis tum ipſis A, tum $\frac{A\sqrt{\mathcal{D}}}{\sqrt{d}}$ in $d = CY$, (diſtantiam à vertice,) habetur ratio momentorum reſpectu rectæ CT tangentis in vertice; nempe ut omnes dA, ad totidem $A\sqrt{d\mathcal{D}}$; ſeries primanorum, ad ſeriem ſubſecundanorum; hoc eſt (per prop. 64. Arith. Infin.) ut $\frac{1}{2}$, ad $\frac{2}{3}$; vel 3 ad 4. Quæ eadem eſt & ratio Circuli radio CF deſcripti, ad ſuperficiem curva CZA circa CT deſcriptam.

Deinde; propter linearum rectæ & curvæ magnitudines, ut 1 ad 2; & momenta ut 3 ad 4; Erit, propter $\frac{1}{2})\frac{3}{4}(\frac{3}{2}$, diſtantia centrorum gravitatis à CT, ut 3 ad 2; adeoque curvæ centrum gravitatis diſtat $\frac{3}{3}$ radii, hoc eſt $\frac{1}{3}$ diametri, à CT; adeoque $\frac{4}{3}$ radii, vel $\frac{2}{3}$ diametri ab FA.

Et conſequenter; (propter centrorum diſtantias ut 3 ad 4, & magnitudines linearum ut 1 ad 2;) circulus radio FC deſcriptus, ad ſuperficiem curva CZA circa AF deſcriptam, ut 3 ad 8.

Quod ipſum ſimiliter colligitur, ductis tum A, tum $A\sqrt{\frac{\mathcal{D}}{d}}$; in $\mathcal{D}-d$ diſtantiam ab FA. Erunt utique momenta, ut $A\mathcal{D}-dA$, ad $\frac{A\sqrt{\mathcal{D}}}{\sqrt{d}}$ in $\mathcal{D}-d$, vel $\frac{A\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}-Ad\sqrt{\mathcal{D}}}{\sqrt{d}}$ vel $\frac{A\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}}{\sqrt{d}} - A\sqrt{d\mathcal{D}}$: Adeoque, ut $1-\frac{1}{2}$, ad $2-\frac{2}{3}$; Hoc eſt, ut 3 ad 8.

Similiter de centris gravitatum ſemiſuperficierum tum circa CT, tum circa FA, conſtabit. Ductis nempe ſuperficiebus, tum rectis YY, tum curvis ZZ, deſcriptis, in diſtantias ſuas, ſive à CT, ſive ab AF; habetur ratio momenti ſemiſuperficiei curvæ, ad momentum ſemicirculi. Reliquaque facilius quam ut iis opus ſit inſiſtere.

Nempe, ductis tum dA, tum $A\sqrt{d\mathcal{D}}$, in d; reperitur momentum (reſpectu rectæ CT) Semicirculi, ad momentum ſemiſuperficiei curvæ circa eandem CT; ut ſeries d^2A, ad ſeriem $Ad\sqrt{d\mathcal{D}}$; hoc eſt, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{2}{5}$, ſive ut 5 ad 6.

Item, ductis tum $A\mathcal{D}-dA$, tum $\frac{A\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}}{\sqrt{d}} - A\sqrt{d\mathcal{D}}$, in $\mathcal{D}-d$. habetur ratio momenti (reſpectu rectæ AF) ſemicirculi, ad momentum ſemiſuperficiei curvæ, circa eandem AF; ut ſeries $A\mathcal{D}^2 - 2dA\mathcal{D} + d^2A$, ad ſeriem $\frac{A\mathcal{D}^2\sqrt{\mathcal{D}}}{\sqrt{d}} - 2A\mathcal{D}\sqrt{d\mathcal{D}} + Ad\sqrt{d\mathcal{D}}$. Hoc eſt, ut $1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$, ad $2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}$. Hoc eſt, ut 5 ad 16.

Habitis autem, tum magnitudinum, tum momentorum rationibus, & unius centro gravitatis; diſtantia centri gravitatis alterius non latebit.

Sed de partibus ſimiliter inſtituetur judicium. Diviſo utique quadrilineo interminabili in ratione data (quod per *Arith. Infin.* facile fiet,) dividitur & CZA curva in eadem ratione. Nempe, ſumpta CY ad CF, in ratione p^2: ad P^2. erit tum CY $\beta\delta$ ad CFB $\beta\delta$, tum CZ ad CZA, in ratione p ad P. (Et conſequenter, ſumptis CY, CY, &c. quotlibet, in duplicata ratione Arithmetice proportionalium; erunt correſpondentes CZ, CZ, &c. arithmetice proportionales, ipſaque CZA, in æquales partes in punctis Z diviſa.) Diſtat autem à TC δ recta verticis,

ticis, ſive CY β δ figuræ, ſive CZ curvæ, centrum gravitatis, $\frac{1}{3}$ (parte tertia) rectæ CY: (per regulam generalem quam *Epiſtolæ* 16 *Commercii Epiſtolici* ſubjecimus.) Unde reliqua facile inveſtigantur.

Vides itaque quam facile fluant horum Problematum ſolutiones.

Si vero ad Cycloeides Protractas aut Contractas libeat procedere; etiam ſic res non infeliciter ſuccedet. Eſto enim, eodem CzF circulo genitore, ſemicyclois, ſive contracta, ſive protracta, αζC; cujus baſis αF æquet ſemiperipheriam φκ, (majorem in protracta, minorem in contracta;) ducantur Fz, φz, rectæ; eiſque ad rectos angulos zC, zt. His autem parallelas eſſe ZI, ζι, Cycloidum tangentes; ex Torricellio, Schotenio, aliiſque notum eſt. Adeoque (protracta proxima Yz per puncta s, σ, I, ι,) erunt ZI, ζι, ipſis zs, zσ, æquales. *Cycloeides ſecundariæ.*

Diviſa jam, ut prius, CF in partes quotlibet æquales in punctis Y; poſitiſque $CF=\mathcal{D}$, $FY=\mathcal{D}-d=a$; erit $Yz=\surd:a\mathcal{D}-a^2$: quæ dicatur s: & propter FY, ad Yz, ut Yz ad YC, erit $YC=\frac{s^2}{a}$; adeoque $zC=\surd:\frac{s^4}{a^2}+s^2:=\surd\frac{s^4+s^2a^2}{a^2}=\frac{s}{a}\surd:s^2+a^2$. Item, ut YC, ad zC; ſic $YY=A$, ad $zs=\frac{A\surd:s^2+a^2}{s}$.

Ponamus deinde, $\varphi Y=\alpha$. Adeoque, propter φzt angulum rectum, ut $\varphi Y=\alpha$, ad $Yz=s$; ſic Yz, ad $Yt=\frac{s^2}{\alpha}$: & $zt=\surd:\frac{s^4}{\alpha^2}+s^2:=\frac{s}{\alpha}\surd:s^2+\alpha^2$. Item, ut Yt ad zt, ſic YY = A, ad $z\sigma=\frac{A\surd:s^2+\alpha^2}{s}$.

Et conſequenter, ut $\surd:s^2+a^2:$ ad $\surd:s^2+\alpha^2$ (hoc eſt, ut Fz ad φz;) ſingulæ zs vel ZI, ad ſingulas zσ vel ζι. Et, ſi ſic fiat ubique, Yβ ad aliam; erit, ut CFB rectangulum ad figuram ſic conſtructam, ſic CF ad curvam ſemicycloidis ſecundariæ, (ſive protractæ ſive contractæ;) & partes partibus reſpective proportionales.

Fatendum interim eſt, figuram, ſic conſtructam, non magis quadraturæ capacem eſſe, quam eſt ellipſis curva capax τῶν ἀδυνάτων.

Sin libeat paulo adhuc explicatius rem efferre; ponamus $F\varphi=B$, adeoque $\alpha=a\pm B$, & $\alpha^2=a^2\pm 2aB+B^2$; Ideoque (propter $s=\surd:a\mathcal{D}-a^2:$) erit $s^2+\alpha^2=a\mathcal{D}\pm 2aB+B^2$; & $\frac{A\surd:s^2+\alpha^2}{s}=\surd\frac{a\mathcal{D}\pm 2aB+B^2}{a\mathcal{D}-a^2}$. Sunt autem omnes $a\mathcal{D}\pm 2aB+B^2$ quadrata ordinatim applicatarum in parabolæ trunco cujus altitudo $\mathcal{D}=FC$: latus rectum parabolæ, $\mathcal{D}\pm 2B=\varphi\kappa$; ordinatim applicata infima & minima, B; adeoque altitudo abſciſſa $\frac{B^2}{\mathcal{D}\pm 2B}$. Si igitur fiat ubique, ut $Yz=\surd:a\mathcal{D}-a^2:$ ordinatim-applicata in ſemicirculo, ad $\surd:a\mathcal{D}\pm 2aB+B^2:$ ordinatim-applicatam in hoc trunco parabolæ; ſic A vel FB, ad quartam, quæ itaque eſt $A\surd\frac{a\mathcal{D}\pm 2aB+B^2}{a\mathcal{D}-a^2}$: Quæ ex hiſce quartis conflatur figura, eſt ea quam diximus ad CFB parallelogrammum ſic eſſe, ut eſt curva ſemicycloidis protractæ contractæve ad CF circuli genitoris diametrum; & partes partibus reſpective proportionales.

Hoc igitur intereſt inter curvam Cycloidis primariæ, & ſecundariæ; quod faciendum eſt, Ut ordinatim-applicatæ in ſemicirculo; ad ordinatim-applicatas, illic in parabola; hic, in parabolæ trunco: ſic data recta; ad quartas.

Si vero libeat curvæ cycloidis ſecundariæ particulas comparare, non ad axis CF partes æquales, ſed ad æquales partes curvæ cycloidis primariæ: dividenda erit CZA curva in partes quotlibet æquales in punctis Z; adeoque CF inæqualiter in punctis Y; puta (ſumptis p arithmetice-proportionalibus, quarum maxima $\mathcal{P}=\mathcal{D}$,) $CY=\frac{p^2}{\mathcal{D}}$; Et YY, ut 1, 3, 5, &c. arithmetice proportionales, quæ omnes æquent ipſam CF, dicantur autem y. Poſitis igitur ubique $\mathcal{D}-\frac{p^2}{\mathcal{D}}$, pro $a=\mathcal{D}$

$a = \mathcal{D} - d = \mathrm{F}\,\mathrm{Y}$; & y, pro A; (& congrua reductione facta:) Pro $A\sqrt{\frac{a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2}{a\mathcal{D} - a^2}}$, prodibit $\frac{y}{p}B\sqrt{:\frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{D}^2 - p^2}} + \frac{\mathcal{D}^2 \pm 2B\mathcal{D}}{B^2}$: (ejusdem plane formæ cum $\mathrm{A}\sqrt{:\frac{R^2}{R^2 - a^2}} + \frac{H^2}{R^2}$: qua quadrantis Ellipseos particulas, earumve subtensas, æqualibus semiaxis longioris partibus respondentes, designandas supra docuimus:) Unde liquet, curvæ semicycloidis secundariæ particulas, primariæ partibus æqualibus respondentes, esse ut particulas curvæ quadrantis Ellipseos respondentes longiori semiaxis partibus æqualibus; Ellipseos, inquam, cujus semiaxis minor, est $\mathcal{D} = \mathrm{C}\,\mathrm{F}$; & $\mathcal{D}\sqrt{\frac{\mathcal{D}^2 \pm 2B\mathcal{D}^2}{B^2}}$ distantia foci à centro; (cujus quadratum quadrato semiaxis minoris additum, dat quadratum semiaxis majoris;) adeoque $\frac{\mathcal{D} \pm B}{B}\mathcal{D}$ semiaxis major; (nempe, si fiat, ut $\mathrm{F}\varphi = B$, ad $\varphi\,\mathrm{C} = \mathcal{D} \pm B$; sic $\mathrm{F}\,\mathrm{C} = \mathcal{D}$, ad quartam; erit hæc quarta, semiaxis major:) Quod ex supra traditis patet.

Hujus autem quadrantis Ellipseos particulis, quibus particulas semicycloidis secundariæ diximus proportionales, non tamen æquales dicimus, (adeoque nec totam toti;) sunt utique ad illas, ut $\frac{y}{p}B$, ad A (partem aliquotam ipsius $\mathcal{D} = \mathrm{F}\,\mathrm{C}$:) ut ex jam traditis patet: Hoc est, ut $\frac{2A}{\mathcal{D}}B$ ad A; (est enim y ad p, ut $2A$ ad $\mathcal{D}$, quod mox ostendetur:) sive ut $2B$ ad $\mathcal{D}$. Adeoque si fiat quadrans ellipseos cujus conjugati axes, ad axes conjugatos ellipseos modo dictæ, sint ut $2B$ ad $\mathcal{D}$: (hoc est cujus semiaxis minor sit $2B = 2\mathrm{F}\varphi$; major $2\mathcal{D} \pm 2B = \mathrm{F}\,\mathrm{C} + \varphi\kappa$:) Erit quadrans ille, curvæ semicycloidis secundariæ, æqualis; & partes partibus respective. Quæ Wrennii nostri traditis comparata, invenio convenire.

Quod autem y ad p, sit ut $2A$ ad $\mathcal{D}$; sic, si opus est, probabitur. Omnes p (tot numero quot in $\mathcal{D}$ supponuntur partes æquales A) sunt series arithmetice proportionalium quarum maxima $\mathcal{D}$; cujus semissis (propter terminum minimum infinite exiguum) ductus in numerum terminorum $\frac{\mathcal{D}}{A}$, exhibet $\frac{\mathcal{D}^2}{2A}$, omnium summam. Sunt autem omnes y arithmetice proportionales, & quidem totidem numero, quarum item terminus primus est infinite exiguus; omnium vero summa est ipsa $\mathcal{D}$. Adeoque (cum utraque sit progressio arithmetica, ab infinite exiguis inchoata) erunt tum omnes y ad omnes p, tum ad singulas singulæ, ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{\mathcal{D}}{2A}$, hoc est, ut $2A$ ad $\mathcal{D}$. Quod dictum erat.

Atque hæc sunt, Vir Nobilissime, methodi nostræ, curvas & rectas comparandi, (adeoque tum Lineas *Rectificandi*, tum *Complanandi* Superficies *Curvas*,) aliquot specimina; cujus (ut vides) examini, tum tuorum quædam, tum & aliorum nupera inventa subjeci. Putaram alia quædam addidisse; sed ne in volumen exeat Epistola, prospiciendum est.

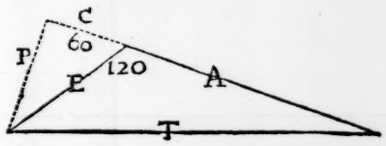
Methodum, quam memoras, *de Maximis & minimis*, ejusque ad Tangentes utilitatem; vide an non & apud nos, utut nominis ignaros, istius passim existent specimina; tum *Con. Sect. prop.* 23. 27. 28. 30. 36. 39. 46. 49. *&c.* tum de *Angulo contactus* aliquoties; sic *Operis Arithmetici* pag. 121. 122. tum alibi sæpe. Quod autem tu de hac re commentus es, si placeat proferre, non dubito quin Mathematicis gratum sit futurum, ut tua solent esse omnia.

Item *Elementa Conica seorsum a Cono*, nos etiam tradidimus, uti nosti, in meo *De Conicis Sectionibus* tractatu, parte saltem posteriori. Sed non eo minus gratum erit, *D. de Witt*, quod memoras prodituram opus.

Horologium tuum ingeniosissimum; & felicissimum *De Saturni facie* Systema, (de quibus antehac ad te scripsimus;) intacta jam prætereo.

Quod habes de Theoremate meo de Pyramidis seu Coni frusto, quod expositum

tum est Commercii Epistolici Ep. 23. nempe *proprietatem Trianguli amblygonii grad.* 120. *brevius posse demonstrari*; omnino verum est, neque id ignorabam. Sed illam ex variis quæ præ manibus erant demonstrationem selegi, quæ à trisectione anguli dependet (tanquam elegantem utut non brevissimam) depromptam ex tractatu quem ante decem annos, de Angulorum Sectione, exercitationis gratia conscripseram; ubi consimiles aliorum triangulorum tum Amblygoniorum tum Oxygoniorum proprietates simili plane methodo demonstro. Sin breviorem malis, hanc habeas.



Sit C continuatio lateris utriusvis, puta A, usque ad perpendiculum P. Erit (propter externum angulum grad. 60.) $C = \frac{1}{2}E$. Adeoque $Pq = Eq - \frac{1}{4}Eq = \frac{3}{4}Eq$. Et $Q:A+C:: Aq + AE + \frac{1}{4}Eq$. Ergo $Tq = Aq + AE + Eq$. Quod erat demonstrandum.

Superest, ut tædio, quo te hactenus detinui, tandem liberem. Valeas interim, oro, nobisque faveas, & amare pergas.

FINIS

MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

PARS PRIMA.

IN QUA,

De Motu Generalia.
De Gravium Deſcenſu, & Motuum Declivitate.
De Libra.

Anno 1669. typis edita.

HONORATISSIMO DOMINO

D. *GULIELMO BROUNCKER,*

EQUITI AURATO;

Baroni BROUNCKER de *Newcaſtle*, Vicecomiti BROUNCKER de *Lions*; Sereniſſimæ REGIÆ Majeſtatis, pro Re NAUTICA Commiſſario; Sereniſſimæ REGINÆ Cancellario: *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Præſidi Digniſſimo.

EN habes tandem (Honoratiſſime Domine,) eorum partem, quæ, Tuis Regiæque Societatis (cui Tu jam à pluribus annis ſummo cum honore Præſides) mandatis obſequens, anno ab hinc ſecundo, prelo commiſeram. Speraram equidem Opus integrum breviore tempore abſolvendum fore: Sed, partim ob eam, quam cauſantur Typothetæ, rei difficultatem, & inſolentiorem typos ponendi modum; partim ob meam Oxonio agentis) perpetuam fere à prelo abſentiam; partim quod aliis ſubinde occurrentibus negotiis impediti Typothetæ non huic potuerint ſemper intenti eſſe; factum eſt, ut in longius protractum ſit negotium quam ſperaverim. Hinc eſt, quod, quem totum una vice proditurum Tractatum deſtinaveram, jam particulatim prodeat. Cujus jam habes Partem Primam, *quæ totius Fundamenta continet; &, ſpeciatim, De* Libra *doctrinam. Quam propediem ſequetur* Secunda, (*quæ De* Centro Gravitatis *erit; ejuſque* Calculo, *in figuris quam plurimis curvilineis, atque ex his oriundis ſolidis, & ſuperficiebus curvis, ſatis intricato:*) *Utpote cujus partem maximam jam abſolverunt operæ. Et, poſt illam,* Tertia; *quamprimum per Preli difficultates licebit. Hoc autem, quicquid eſt, Tuo potiſſimum nomini dicandum duxi; non tantum ob eam quam Tibi debemus obſervantiam, (quæ tamen maxima eſt,) eamque quam à pluribus annis expertus ſum tuam in me propenſam*

Amicitiam: Sed & ob eam, quam cum ſumma Nobilitate conjunctam habes, ſummam hujuſmodi rerum Intelligentiam. Quanquam enim graviſſimis negotiis alias occupatus; tum quæ Rem Nauticam *ſpectant, quibus Sereniſſimo* Regi *inſervis; tum quæ Sereniſſimam* Reginam, *cujus tu curas negotia; tum quæ, cui Tu Præſides,* Societatem Regiam*: Ea tamen in rebus Mathematicis perſpicacia, ſummoque ingenii acumine fretus es, quaſi tu huic tantum negotio intentus eſſes, & nulli ſecundus. Verum quidem eſt, tum ea quæ hic habes, tum eorum quæ mox inſecutura ſunt partem maximam, ante plures annos ſcripta fuiſſe, (quod norunt ſaltem ii in quorum privatos uſus exſcripta fuerunt exemplaria; & quibus jam urgentibus prodeunt:) Sed eo audacius in lucem jam emitto: quod Tibi antehac perluſtrata non diſplicuerint, & Te jubente prodeant. Tu porro perge, quod facis, rem literariam & ornare & promovere: Nec averſeris interim,*

Tui Obſervantiſſimum

Novemb. 10. 1669.

Joh. Wallis.

MECHANICA:
SIVE,
De MOTU
Tractatus Geometricus.

CAP. I.

De Motu Generalia.

DEFINITIONES.

I. Mechanicen, *appello, Geometriam de Motu.*

Mechanicæ artes, per contemptum dici ſolent illiberales illæ Cerdonum artes, & his ſimilium, quas rude vulgus exercet: ad quas Labore magis quam Ingenio videtur opus. Et diſtingui ſolent, non a Geometria tantum, ſed ab aliis etiam *Ingenuis*, (quæ mente magis quam manu exerceri ſolent; atque acumen animi vel poſtulant vel faciunt;) *Liberalibus* dictis; ut quæ *Liberos* deceant; ut, *Servos*, Serviles illæ & illiberales.

In re Geometrica; *Mechanice* quid factum, non Geometrice, dici ſolet; quando rudi χειρεργίᾳ, vel materialis inſtrumenti applicatione, aliiſve mediis non abſimilibus, aliquid metimur: non, ἀποδεικτικῶς. Puta; Si quis, admoto Filo, ad Diametrum primo, deinde ad Perimetrum Circuli, quam hæc ad illam rationem habeat, inveſtigatum iret; eamque, experimento facto, tripla paulo majorem inveniret, vel triplam ſeſquiſeptimam proxime: *Mechanice* factum diceretur. Secus autem; quum *Archimedes*, modo Geometrico, & Demonſtrationibus ab ipſa Circuli natura petitis, eandem in libro περὶ τ κύκλ μετρήσεως inquiſivit.

Nos neutro dictorum ſenſu *Mechanicen* dicimus. Sed eam Geometriæ partem intelligimus, quæ *Motum* tractat: atque Geometricis rationibus, & ἀποδεικτικῶς, inquirit, Qua vi quiſque motus peragatur.

Nomen ἀπὸ τ Μηχανῆς ſortitur: quia *Machinis* conſtruendis maxime inſerviat. An autem *Mechanica*, *Mechanicæ*, dicatur, (numero ſingulari,) an (pluraliter) *Mechanica*, *Mechanicorum*; perinde eſt. Id eſt, τὰ περὶ τῶν Μηχανῶν, an Ἡ περὶ τῶν Μηχανῶν, (ſcil. τέχνη, vel ἐπιςήμη, vel διδασκαλία.) Nam ad eandem formam dicuntur, *Grammatica*, *Logica*, *Phyſica*, &c. ut intelligatur, vel ἡ γραμματικὴ, λογικὴ, φυσικὴ· vel τὰ γραμματικὰ, λογικὰ, φυσικά. Hoc eſt, Ἡ περὶ τῶν γραμμάτων, περὶ τ λόγ, περὶ τ φύσεως, (τέχνη, ἐπιςήμη, διδασκαλία,) aut τὰ περὶ τῶν, &c. Qua de re videatur, ſi libet, *H. Stephanus*, *De abuſu Græcæ Linguæ*.

Sed & (ab ἵςημι, *pendo*, *pondero*,) etiam *Statica*, dici ſolet, vel Mechanice tota, vel ea ſaltem pars quæ de *Ponderibus* agit; quæ, quanta ſint, ad *Libram* (ςαθμὸν) ſolent examinari.

II. *Per* Motum *intelligimus, Motum localem.*

Quanquam enim de pluribus Motuum generibus agant Logici, aliique; puta Generatione, Augmentatione, Alteratione, &c. (quæ omnes an ad Motum Localem reduci poſſint, non libet hic diſquirere:) Nos *Motum* hic in famoſiori ſignificatu intelligimus de Motu Locali; quæ φορὰ, *Latio*, dici ſolet.

Circa Motum autem, multa conſideranda veniunt: ut Vis, Tempus, Reſiſtentia, Longitudo, Momentum, Impedimentum, Celeritas, Gravitas, Pondus, &c.

III. Momen-

III. Momentum, *appello, id quod motui efficiendo conducit.*

IV. Impedimentum, *id quod motui obstat, vel eum impedit.*

MOmentum, eadem ratione à verbo *Moveo* descendit, atque *Impedimentum* ab *Impedio*: Eadem scilicet Analogia, qua & alia Verbalia, in *men* & *mentum* finita, à suis verbis. Nam, ut à *Luceo*, *Lumen*: à *Fluo, flui*; *Flumen*: à *Nuo, Numen*: à *Lego, legumen*: à *Fulgeo, fulsi*; *Fulmen*: à *Fulcio, fulcivi, fulcitum, Fulcimen*, & *fulcimentum*: à *Doceo, docui*; *Documentum*: à *Moneo, monui, Monumentum*: & à *Monitum, Monimentum*: à *Juvo, juvi, jutum*; *Jumentum*: ab *Adjuvo, adjuvi, adjutum*; *Adjumentum*: à *Juvatum, Juvamen*; à *Stando, Stamen*: à *Sterno, Stravi, Stratum*; *Stramen, Stramentum*: à *Flo, flavi, flatum*; *Flamen*: à *Fari, fatum*; *Famen*: à *Frango, fregi, fractum*; *Fragmen* & *Fragmentum*: à *Rego, rexi, rectum*; *Regimen*: ab *Ago, egi, actum*; *Agmen*: ab *Arceo, arcui, arctum*; *Armentum*: à *Rado, rasi, rasum*; *Ramentum*: à *Cædo, cecidi, cæsum*; *Cæmentum*: à *Torqueo, torsi, tortum*; *Tormen, Tormentum*: à *Nosco, novi, notum*; *Nomen*, & *Nobile*: Sic, à *Moveo, movi, motum*; *Momen, Momentum*, & *Mobile*. Sed & *Moles, molior, molimen*: nisi quis hæc à μοχλεύω, deducta malit.

Ad *Momentum* refero, *Vim motricem*, & *Tempus*. Quæ, quo majora sunt, eo magis efficitur motus.

Ad *Impedimentum*, refero, *Resistentiam*, & *Distantiam*. Quæ, quo majora sunt, eo magis motus *Impeditur*.

V. Vim motricem, *vel etiam* Vim *simpliciter*, *appello Potentiam efficiendi motum.*

VI. *Per* Tempus, *intelligo, Temporis spatium id, in quo motus transigitur.*

VII. Resistentiam, *sive* Vim resistendi, *Potentiam Motui contrariam; sive quæ motui resistit.*

VIII. *Per* Distantiam *sive* Longitudinem motus, *intelligo, Longitudinis spatium illud quod motu transigitur.*

IX. Celeritas, *est affectio motus ex comparatione Longitudinis & Temporis resultans: Utpote quæ, Quo tempore quanta Longitudo transigitur, determinat.*

X. Æqualis Celeritas, *est, quæ Æqualem Longitudinem, Æquali tempore, transigit.*

XI. Major Celeritas, *est, quæ Majorem Longitudinem Æquali Tempore transigit: vel, in Minori Tempore, Longitudinem Æqualem. Et quidem,* in ea ratione Major, *qua, vel illa Longitudo, Major est; vel Tempus, Minus.* Minor; *quæ contra.*

XII. Gravitas, *est vis motrix, deorsum; sive, ad Centrum Terræ.*

QUodnam sit, in consideratione Physica, Gravitatis principium; non hic inquirimus. Neque etiam, An Qualitas dici debeat, aut, Corporis Affectio; aut, quo alio nomine censeri par sit. Sive enim ab innata qualitate in ipso gravi corpore; sive à communi circumstantium vergentia ad centrum; sive ab electrica vel magnetica Terræ facultate, quæ gravia ad se alliciat; & effluviis suis, tanquam catenulis, attrahat; sive alias undecunque proveniat; (de quo non est ut hic moveamus litem:) sufficit, ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam sensu deprehendimus, Vim deorsum movendi, tum ipsum Corpus grave, tum quæ obstant minus efficacia impedimenta.

Et quidem, quanquam de Naturali Gravitate (prout concipi solet) seu ipsa corporis affectione, qua, sua sponte (ut solet dici) deorsum tendit, directe intelgatur. Tamen, quoniam nihil incommodi inde proventurum videtur in sequente propositionum serie, etiamsi de externa vi continua deorsum premente recta ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram solicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. Quæ enim de Gravitate affirmantur, de quacunque

Vi

Vi continua, recta ad Terræ Centrum movente, perinde vera ſunt; ſive ſit ea vis innata, ſive adventitia.

Quæ autem de Gravitate dicta ſunt, reſpectu Centri Terræ; perinde de quavis alia motrice Vi continua poterunt intelligi, reſpectu ſui quo tendit termini. Adeoque ſi vox ea, particulari ſignificatui hactenus accommodata, quatenus Terræ Centrum reſpicit, latiori ſenſu intelligatur, de quavis vi motrice continua, recta ad ſuum terminum movente: non minus vera erunt quæ traduntur; ſed & forſan magis accurate dicta; dum generalia generaliter efferuntur. Sed quoniam de Gravitate ſolent ea ſpeciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici univerſaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accommodavi, ut interim moneam, generaliter eſſe vera, quæ ſpeciatim efferuntur. Ut mox dicetur fuſius.

XIII. *Per* Pondus *intelligo gravitatis menſuram.*

Pendo ſeu *Pendeo*, & *Pondus*, parem habent inter ſe cognationem atque apud nos *Weigh* & *Weight*; (quæ à Latinorum *Veho* videntur deſcendiſſe: ſicut etiam *Wayn* & *Wagon*, quæ Latinis *Vehes* & *Vehiculum* dicuntur.)

An vero *Pondus* à *Pendo*, an hoc ab illo dicatur, non magni intereſt; an quod ego malim, utrumque.

Eſt utique Verborum *Pendo* & *Pendeo* duplex ſignificatus. Prior eſt *To Hang*: A quo ſignificatu *Pondus* dictum puto; (ſicut à *Tego*, *Toga*; à πέμπω, *Pompa*; à ῥέμβομαι, *Rhombus*, &c.) idemque ſignificare quod Græcis ὄλκη, & proprie de *Gravi pendente* dictum: Adeoque, ab *Onere* diſtingui, quod Græcis ὄγκος, (unde & *Onus* deſcendiſſe videtur;) ut *Pondus*, ſit quod *Appendet*; *Onus*, quod *Incumbit*, Grave: βάρος, utrumque. Sed &, ab ἄγω, Ἀχθος etiam adhuc latius videtur; *quod quocunque Adigit*, vel impellit; cum illa tria Gravium nomina (ὄλκη, ὄγκος, βάρος,) non niſi *deorſum tendentia* deſignent: utut laxiori ſenſu promiſcue non raro uſurpentur omnia.

Poſterior Verborum ſignificatus, qui eſt *To Weigh*, à Pondere ortum traxiſſe videtur: ut quod ſit, *Appenſa ad libram Pondera examinare*.

A priori ſignificatu, dicimus, *Appendo*, *Suſpendo*, *Dependeo*, *Pendulus*, &c. A poſteriori, *Perpendo*, *Expendo*, *Impendo*, *Rependo*, *Penſum*, *Penſio*, &c. (ex more veterum, qui *Pendere* ſolebant Nummos, quos nos *Numeramus*.) Sed & *Perpendo*, *Expendo*, &c. ſenſu Metaphorico, ad Animum transferuntur; à poſteriori ſignificatu; quando ut ad Libram Pondera, ſic Res Animo penſitamus: ſicut à priori, dicitur, *Animi pendere*, *ſuſpenſus animus*, *ſpe pendulus*, &c.

Differunt autem *Pendo*, & *Pendeo*, non aliter quam Tranſitivum ab Intranſitivo. Quod in ejuſmodi formæ Verbis, uſu venit. Ut *Pando*, *Pateo*; *Mando*, *Maneo*; *Tendo*, *Teneo*; (*carceri Mando*, *in carcere Maneo*; *morem Obtendo*, *mos Obtinet*; *Tenet ſententia*, *ad me Attinet*, *Pertinet*, &c.) *Vendo*, *Veneo*; *Venundo*, *Venum eo*; *Circundo*, *Circumeo*; reliquaque fere à *Do* & *Eo* compoſita; ut *Subdo*, *Subeo*; *Prodo*, *Prodeo*; *Reddo*, *Redeo*; *Trado*, *Tranſeo*; *Edo*, *Exeo*; *Condo*, *Coeo*; *Abdo*, *Abeo*; *Addo*, *Adeo*; *Indo*, *Ineo*; *Obdo*, *Obeo*; *Perdo*, *Pereo*; & ſiqua ſunt ſimilia.

Ego autem, neglecto ſi quod eſt inter *Pondus* & *Onus* diſcrimine, (quo *Libram*, illud; hoc, *Vectem*, magis ſpectet;) per *Pondus* jam intelligo, illam, in utrovis, Gravitatis menſuram, quam ad Libram ſolemus examinare.

Pondus ſic intellectum, aut Gravitas etiam; prout vel in Movente, vel in Mobili, conſideratur; ita vel ad Movendi, vel ad Reſiſtendi vim pertinebit: Adeoque nunc ad Momentum, nunc ad Impedimentum referetur.

Et quidem, cum ex omnibus Virium generibus, non aliud ſit quod accuratius ad examen revocari ſolet, quam Pondus; ſolemus, ad hujus normam, reliquas tum Vires tum Reſiſtentias æſtimare; eaſque tantas reputare, quanto Ponderi æquipollent.

Et quamquam tum Pondus, tum Vis etiam, ex æquo reſpiciant, vel vim Movendi, vel vim Reſiſtendi: cum tamen, ut plurimum, quod motum itur Pondus ſit, ſeu Grave; Vis autem, quæ efficiendo motui adhibetur, ſit non raro Vis Humana, aut Animalium, aut Ventus etiam, aut vis Elaſtica, aliæve plures, non minus quam Grave Pondus: Ponderis nomine, plerumque, vim Reſiſtentiæ, in ſequentibus deſignabimus; &, Virium nomine, vim Motricem. Ubi ſecus erit intelligendum; dictorum ſeries ſatis indicabit.

III. Momentum, *appello, id quod motui efficiendo conducit.*

IV. Impedimentum, *id quod motui obſtat, vel eum impedit.*

Momentum, eadem ratione à verbo *Moveo* deſcendit, atque *Impedimentum* ab *Impedio*: Eadem ſcilicet Analogia, qua & alia Verbalia, in *men* & *mentum* finita, à ſuis verbis. Nam, ut à *Luceo*, *Lumen*: à *Fluo*, *flui*; *Flumen*: à *Nuo*, *Numen*: à *Lego*, *legumen*: à *Fulgeo*, *fulſi*; *Fulmen*: à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum*, *Fulcimen*, & *fulcimentum*: à *Doceo*, *docui*; *Documentum*: à *Moneo*, *monui*, *Monumentum*: & à *Monitum*, *Monimentum*: à *Juvo*, *juvi*, *jutum*; *Jumentum*: ab *Adjuvo*, *adjuvi*, *adjutum*; *Adjumentum*: à *Juvatum*, *Juvamen*; à *Stando*, *Stamen*: à *Sterno*, *Stravi*, *Stratum*; *Stramen*, *Stramentum*: à *Flo*, *flavi*, *flatum*; *Flamen*: à *Fari*, *fatum*; *Famen*: à *Frango*, *fregi*, *fractum*; *Fragmen* & *Fragmentum*: à *Rego*, *rexi*, *rectum*; *Regimen*: ab *Ago*, *egi*, *actum*; *Agmen*: ab *Arceo*, *arcui*, *arctum*; *Armentum*: à *Rado*, *raſi*, *raſum*; *Ramentum*: à *Cædo*, *cecidi*, *cæſum*; *Cæmentum*: à *Torqueo*, *torſi*, *tortum*; *Tormen*, *Tormentum*: à *Noſco*, *novi*, *notum*; *Nomen*, & *Nobile*: Sic, à *Moveo*, *movi*, *motum*; *Momen*, *Momentum*, & *Mobile*. Sed & *Moles*, *molior*, *molimen*: niſi quis hæc à μοχλεύω, deducta malit.

Ad *Momentum* refero, *Vim motricem*, & *Tempus*. Quæ, quo majora ſunt, eo magis efficitur motus.

Ad *Impedimentum*, refero, *Reſiſtentiam*, & *Diſtantiam*. Quæ, quo majora ſunt, eo magis motus *Impeditur*.

V. Vim motricem, *vel etiam* Vim *ſimpliciter*, *appello Potentiam efficiendi motum.*

VI. *Per* Tempus, *intelligo, Temporis ſpatium id, in quo motus tranſigitur.*

VII. Reſiſtentiam, *ſive* Vim reſiſtendi, *Potentiam Motui contrariam; ſive quæ motui reſiſtit.*

VIII. *Per* Diſtantiam *ſive* Longitudinem motus, *intelligo, Longitudinis ſpatium illud quod motu tranſigitur.*

IX. Celeritas, *eſt affectio motus ex comparatione Longitudinis & Temporis reſultans: Utpote quæ, Quo tempore quanta Longitudo tranſigitur, determinat.*

X. Æqualis Celeritas, *eſt, quæ Æqualem Longitudinem, Æquali tempore, tranſigit.*

XI. Major Celeritas, *eſt, quæ Majorem Longitudinem Æquali Tempore tranſigit: vel, in Minori Tempore, Longitudinem Æqualem. Et quidem,* in ea ratione Major, *qua, vel illa Longitudo, Major eſt; vel Tempus, Minus.* Minor; *quæ contra.*

XII. Gravitas, *eſt vis motrix, deorſum; ſive, ad Centrum Terræ.*

QUodnam ſit, in conſideratione Phyſica, Gravitatis principium; non hic inquirimus. Neque etiam, An Qualitas dici debeat, aut, Corporis Affectio; aut, quo alio nomine cenſeri par ſit. Sive enim ab innata qualitate in ipſo gravi corpore; ſive à communi circumſtantium vergentia ad centrum; ſive ab electrica vel magnetica Terræ facultate, quæ gravia ad ſe alliciat; & effluviis ſuis, tanquam catenulis, attrahat; ſive alias undecunque proveniat; (de quo non eſt ut hic moveamus litem:) ſufficit, ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam ſenſu deprehendimus, Vim deorſum movendi, tum ipſum Corpus grave, tum quæ obſtant minus efficacia impedimenta.

Et quidem, quanquam de Naturali Gravitate (prout concipi ſolet) ſeu ipſa corporis affectione, qua, ſua ſponte (ut ſolet dici) deorſum tendit, directe intelgatur. Tamen, quoniam nihil incommodi inde proventurum videtur in ſequente propoſitionum ſerie, etiamſi de externa vi continua deorſum premente recta ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram ſolicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. Quæ enim de Gravitate affirmantur, de quacunque

Vi

Vi continua, recta ad Terræ Centrum movente, perinde vera ſunt; ſive ſit ea vis innata, ſive adventitia.

Quæ autem de Gravitate dicta ſunt, reſpectu Centri Terræ; perinde de quavis alia motrice Vi continua poterunt intelligi, reſpectu ſui quo tendit termini. Adeoque ſi vox ea, particulari ſignificatui hactenus accommodata, quatenus Terræ Centrum reſpicit, latiori ſenſu intelligatur, de quavis vi motrice continua, recta ad ſuum terminum movente: non minus vera erunt quæ traduntur; ſed & forſan magis accurate dicta; dum generalia generaliter efferuntur. Sed quoniam de Gravitate ſolent ea ſpeciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici univerſaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accommodavi, ut interim moneam, generaliter eſſe vera, quæ ſpeciatim efferuntur. Ut mox dicetur fuſius.

XIII. *Per* Pondus *intelligo gravitatis menſuram.*

Pendo ſeu *Pendeo*, & *Pondus*, parem habent inter ſe cognationem atque apud nos *Weigh* & *Weight*; (quæ à Latinorum *Veho* videntur deſcendiſſe: ſicut etiam *Wayn* & *Wagon*, quæ Latinis *Vehes* & *Vehiculum* dicuntur.)

An vero *Pondus* à *Pendo*, an hoc ab illo dicatur, non magni intereſt; an quod ego malim, utrumque.

Eſt utique Verborum *Pendo* & *Pendeo* duplex ſignificatus. Prior eſt *To Hang*: A quo ſignificatu *Pondus* dictum puto; (ſicut à *Tego*, *Toga*; à πέμπω, *Pompa*; à ῥέμβομαι, *Rhombus*, &c.) idemque ſignificare quod Græcis ὄλκη, & proprie de *Gravi pendente* dictum: Adeoque, ab *Onere* diſtingui, quod Græcis ὄγκος, (unde & *Onus* deſcendiſſe videtur;) ut *Pondus*, ſit quod *Appendet*; *Onus*, quod *Incumbit*, Grave: βάρος, utrumque. Sed &, ab ἄγω, Ἄχθος etiam adhuc latius videtur; *quod quocunque Adigit*, vel impellit; cum illa tria Gravium nomina (ὄλκη, ὄγκος, βάρος,) non niſi *deorſum tendentia* deſignent: utut laxiori ſenſu promiſcue non raro uſurpentur omnia.

Poſterior Verborum ſignificatus, qui eſt *To Weigh*, à Pondere ortum traxiſſe videtur: ut quod ſit, *Appenſa ad libram Pondera examinare*.

A priori ſignificatu, dicimus, *Appendo*, *Suſpendo*, *Dependeo*, *Pendulus*, &c. A poſteriori, *Perpendo*, *Expendo*, *Impendo*, *Rependo*, *Penſum*, *Penſio*, &c. (ex more veterum, qui *Pendere* ſolebant Nummos, quos nos *Numeramus*.) Sed & *Perpendo*, *Expendo*, &c. ſenſu Metaphorico, ad Animum transferuntur; à poſteriori ſignificatu; quando ut ad Libram Pondera, ſic Res Animo penſitamus: ſicut à priori, dicitur, *Animi pendere*, *ſuſpenſus animus*, *ſpe pendulus*, &c.

Differunt autem *Pendo*, & *Pendeo*, non aliter quam Tranſitivum ab Intranſitivo. Quod in ejuſmodi formæ Verbis, uſu venit. Ut *Pando*, *Pateo*; *Mando*, *Maneo*; *Tendo*, *Teneo*; (*carceri Mando*, *in carcere Maneo*; *morem Obtendo*, *mos Obtinet*; *Tenet ſententia*, *ad me Attinet*, *Pertinet*, &c.) *Vendo*, *Veneo*; *Venundo*, *Venum eo*; *Circundo*, *Circumeo*; reliquaque fere à *Do* & *Eo* compoſita; ut *Subdo*, *Subeo*; *Prodo*, *Prodeo*; *Reddo*, *Redeo*; *Trado*, *Tranſeo*; *Edo*, *Exeo*; *Condo*, *Coeo*; *Abdo*, *Abeo*; *Addo*, *Adeo*; *Indo*, *Ineo*; *Obdo*, *Obeo*; *Perdo*, *Pereo*; & ſiqua ſunt ſimilia.

Ego autem, neglecto ſi quod eſt inter *Pondus* & *Onus* diſcrimine, (quo *Libram*, illud; hoc, *Vectem*, magis ſpectet;) per *Pondus* jam intelligo, illam, in utrovis, Gravitatis menſuram, quam ad Libram ſolemus examinare.

Pondus ſic intellectum, aut Gravitas etiam; prout vel in Movente, vel in Mobili, conſideratur; ita vel ad Movendi, vel ad Reſiſtendi vim pertinebit: Adeoque nunc ad Momentum, nunc ad Impedimentum referetur.

Et quidem, cum ex omnibus Virium generibus, non aliud ſit quod accuratius ad examen revocari ſolet, quam Pondus; ſolemus, ad hujus normam, reliquas tum Vires tum Reſiſtentias æſtimare; eaſque tantas reputare, quanto Ponderi æquipollent.

Et quamquam tum Pondus, tum Vis etiam, ex æquo reſpiciant, vel vim Movendi, vel vim Reſiſtendi: cum tamen, ut plurimum, quod motum itur Pondus ſit, ſeu Grave; Vis autem, quæ efficiendo motui adhibetur, ſit non raro Vis Humana, aut Animalium, aut Ventus etiam, aut vis Elaſtica, aliæve plures, non minus quam Grave Pondus: Ponderis nomine, plerumque, vim Reſiſtentiæ, in ſequentibus deſignabimus; &, Virium nomine, vim Motricem. Ubi ſecus erit intelligendum; dictorum ſeries ſatis indicabit.

XIV. Directionem Mobilis, *aut etiam* Motus, *appello, rectam qua tendit Mobile.* (*Motuſque menſuram ſecundum hanc æſtimatam*, Motus Longitudinem *appello.*) *Sin curva feratur Mobile,* (*cujus Directio in ſingulis punctis immutetur*;) *ea eſt, pro ſingulis punctis, motus Directio, quæ curvam in illis punctis Recta contingit.*

XV. Directionem Virium, *ſeu* Moventis, *appello, Rectam qua tendit vis Motrix. Motuſque menſuram ſecundum hanc æſtimatam, appello* Motus Altitudinem.

ESTque hæc Virium directio in Deſcenſu Gravium, Recta deorſum ad Centrum Terræ, quo Gravia ſponte ſua tendunt. Quales quidem Rectæ, quamquam in Centro coeant omnes, pro Parallelis tamen haberi ſolent: Tum quod ſenſuum judicio tales ſint (non enim valent ſenſus diſtinguere inter vere parallelas, & quæ tantillum à paralleliſmo declinant;) Tum etiam quia ſi intelligatur, verbi gratia, Libræ Jugum adhuc longius à Terra removeri, ad infinitam diſtantiam; erit ea declinatio quavis aſſignabili minor.

XVI. Declivitatem, *ſeu* Gradum Declivitatis, *appello, Reſpectum illum, qui ex motus Altitudine & Longitudine comparatis,* (*ob variam Directionis Motus ad Directionem Moventis poſitionem,*) *emergit. Atque* Acclivitatem *ſimiliter; quæ à Declivitate non aliter differt quam quod altera Deſcenſum, Aſcenſum altera reſpiciat.*

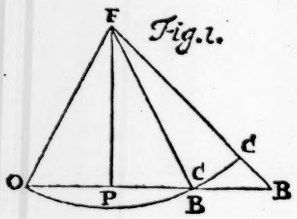


Fig. 1.

Puta, FO, declivis; OF, acclivis recta.

XVII. Æqualem Declivitatem, *appello, quæ, æquali peracta Longitudine, æqualem Altitudinem peragit. Atque* Acclivitatem, *ſimiliter.*

XVIII. Majorem Declivitatem, *vel* Acclivitatem, *dico, quæ, æquali peracta Longitudine, majorem Altitudinem peragit; vel, minori Longitudine, Altitudinem æqualem. Et quidem,* ea ratione majorem, *qua vel Altitudo illa major eſt, vel Longitudo, minor.* Minorem; *quæ contra.*

VERbi gratia. Sit FP, directio moventis, (puta, recta ad Horizontem perpendicularis;) FO, FB, vel FC, directio motus, (puta, obliqua quælibet, per quam deſcendat Grave.) Si FO, FC, longitudine æquales, ſint Æque-altæ: *Æqualiter declives*; dico: ſin vero, Longitudine æqualium altera, ut FO, ſit Altior; eandem & *Magis declivem* dico. Similiter; ſi Æque-altæ FO, FB, (quarum altitudo ſit ipſi FP, æqualis,) ſint & Longitudine æquales; *Æqualiter declives* dico: Sin altera, ut FO, ſit brevior; eandem & *Magis declivem* dico. Et utrobique, *eadem ratione magis declivem,* qua vel FO eſt Altior quam FC, vel Brevior quam FB.

XIX. Obliquitatem *vero, hujuſve menſuram, appello, Angulum quem facit cum Perpendiculo,* (*vel Directione Moventis,*) *Directio Motus, ſeu Linea qua fertur Mobile.*

Puta, OFP.

XX. Inclinationem *vero ad* Horizontem, *appello, obliquitatis complementum, ſive quem facit Angulum ad Horizontem, aut ad rectam Directioni moventis perpendicularem.*

Ut FOP.

Decli-

Declivitatem autem ab *Obliquitate*, & *Inclinatione*, (quamquam ex una reliquæ dependeant,) diſtinguere neceſſe duxi; quoniam *Obliquitas* & *Inclinatio* Angulis menſurari ſolent; Ea vero *Declivitatis* ratio mihi tractanda videbatur, quæ rectarum inter ſe rationes reſpiciat. Quippe, quæ inde dependent, non quidem vel Obliquitatis vel Inclinationis Angulo, ſed Altitudini rectarum longitudine æqualium proportionalia, vel in reciproca ratione Rectarum Altitudine æqualium, in ſequentibus deprehendentur.

Porro; Cum ea quæ de Gravitate diſſerte dicta ſunt in ſequentibus, non ita Gravitati ſint peculiaria, quin ut plurimum alii cuivis continuæ vi motrici accommodanda veniant; adeoque & univerſaliter tradi debere videantur, (ut modo dictum eſt:) Cur illud nominatim de Gravitate protulerim, cauſa eſt, quod, cum Gravium motus frequentius conſiderationi hominum exponi ſoleat, adeoque vocabula huic accommoda, menti familiarius ſe offerant, citius animo percipienda duxerim quæ de hoc motu (qui ex multis unus eſt, ſed præ cæteris magis notabilis,) traderentur, atque ad hujus deinde normam intelligerentur reliqui.

Ea vero fient generalia (nec minus interim demonſtrata) interpoſita laxiori hac Gravitatis (cum connexis) definitione.

XXI. *Per* Gravitatem, *laxius acceptam, intellige, Vim quamvis continuam in quamcunque plagam motricem*: *Per* Terræ Centrum, *intellige, Terminum quo tendit vis illa motrix*: *Per* Perpendiculum, *vel* Rectam ad Terræ Centrum, *vel etiam* Rectam Horizonti perpendicularem, *intellige, Lineam Directionis Vis motricis*: *Per* Deſcenſum & Aſcenſum; *Appropinquationem & Elongationem à Termino Vis Motricis*: *Per* Rectam Horizontalem, *vel* Horizontale Planum; *Rectam, ſeu Planum, lineæ directionis moventis ad angulos rectos*: *Per Deſcenſum, vel Aſcenſum* Obliquum; *Lationem ſecundum Lineam quæ Lineam Directionis moventis oblique ſecat, ad moventis Terminum Accedendo, vel inde Recedendo. Cæteraque ſimiliter accommodanda ſunt.*

XXII. Machinas, *appello, Inſtrumenta motibus examinandis, vel etiam facilitandis, forinſecus adhibita.*

QUalia ſunt *Libra, Vectis, Trochlea, Cochlea, Axis in Peritrochio, Cuneus*, & ſimilia. Quorum Definitiones ſuis locis ſequentur.

Priuſquam autem ad Machinas illas ſeparatim conſiderandas accedamus, quas Mechanicorum ſcriptores tractare ſolent: Præmittenda erunt communia quædam, quæ omnes ex æquo ſpectant. Quæ ſint Principiorum loco, & à quibus reliqua dependent, quæ de ſingulis poſtea tradenda erunt.

Idque eo magis mihi faciendum incumbere videatur: Quia qui antehac tractandum hoc ſuſcepere negotium, videntur citra Principia conſtitiſſe: nec ab imis eruta fundamentis, etiam ea quæ ſana ſunt, tradidiſſe: Sed poſtulaſſe potius, quæ, utut vera ſint, Demonſtratione tamen aliqua videntur indigere: Unde, tum, in iis quæ conſequuntur, minus acquieſcat animus ὀπτικὸς ἕξεως avidus, tum & ea minus valeat, in nova materia, ampliare.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Quæ ad æqualia eandem habent rationem, ſunt inter ſe æqualia. Et contra.

Fig. 2. $A = E.\ 2A = 2E.\ 3A = 3E.\ rA = rE.$

PUta; Si A, E, ſint inter ſe æqualia; erunt & inter ſe æqualia 2 A, 2 E; item 3 A, 3 E; Et, univerſaliter, r A, r E; cujuſcunque rationis Index ſit r. Per 7, 9, 11. *Prop.* 5. El. *Euclidis.*

PROP. II.

Ubi ratio ex duabus pluribuſve componitur; Datis componentibus, datur compoſita. Nempe, Multiplicatis invicem exponentibus componentium, ut habeatur Exponens Compoſitæ.

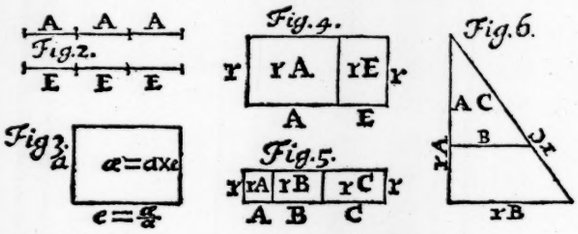


Fig. 3. $a \times e = ae = æ.$ $\qquad 2 \times 3 = 6.$

$\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$ $\qquad \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$

SUnto, datarum Rationum componentium, dati Indices ſeu Exponentes (rationum πλικότητας appellat *Euclides*; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; malim *Quotientes*; id enim vult quod ex termini Antecedentis per conſequentem diviſione emergit,) a, e. Datur, inquam, Ratio ex his compoſita; Ea nempe cujus Exponens eſt $æ = a \times e$. (per 5. *Def.* 6. Elem.) Quod erat demonſtrandum. Similiter oſtendetur ſi plures eſſent rationes componentes, puta l ad r, m ad s, n ad t; quæ ex his componitur, eſt ratio lmn ad rst. Propter $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$.

SCHOLIUM.

QUo hæc rectius intelligantur, notandum erit (quod non pauci perperam accipiunt,) Rationes, puta Dupli, Tripli, &c. Indices ſeu Exponentes habere 2, 3, &c. Unde Denominationem ſumunt: Nempe Quotientes terminorum Antecedentium per ſuos Conſequentes diviſorum. Adeoque Rationis 4 ad 2, Exponens eſt 2; quia 2) 4 (2: quam itaque *Dupli* rationem dicimus. Rationis 6 ad 2, Exponens eſt 3; quia 2) 6 (3: quæ propterea dicitur *Tripli* ratio. Et univerſim, Rationis l ad r, Exponens eſt $\frac{l}{r}$: nempe Quotiens Antecedentis l per Conſequentem r diviſi.

Hos Indices ſive Exponentes, appellat *Euclides*, *Rationum* πλικότητας; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; expoſuiſſent tutius *Quotientes*. Quippe illud vult *Euclides*, quod ex Antecedentis per conſequentem diviſione emergit. Dixit autem πλικότητας potius quam ποσότητας, ut illos etiam Quotientes comprehenderet quæ

quæ non essent numeri Integri, sed Fracti, aut Surdi, &c. Nam *Quotientis* sive ποσότητος vocem, stricte sumptam, non de aliis Quotientibus usurpabant quam qui essent numeri integri; qui ostenderent *Quotuplus*, ποσαπλάσιον, esset Antecedens Consequentis: At πηλικότης de Quotiente quolibet, utcunque Fracto, vel Irrationali, dicebatur; qui non modo *Quotuplus*, (puta, *Duplus*, *Triplus*, *Quadruplus*, &c.) Sed & πηλικοπλάσιον *Quantuplus* esset Antecedens Consequentis, ostenderet: puta *Duplus cum semisse*, *Triplus cum quadrante*, *Quadruplus cum besse*, &c.

Definit autem *Euclides*, 5 *Def.* 6. *El. Rationem ex Rationibus compositam*, dici, *quando illius Exponens* (πηλικότης) *ex harum Exponentibus invicem multiplicatis conficitur.* Adeoque, *ex Rationibus Dupli & Tripli, componi, Rationem Sextupli*; (quia scilicet $2 \times 3 = 6$:) nihil aliud est quam quod vulgo dicimus, *Duplum Tripli, esse Sextuplum.* Item, *Ex Dupli & Sesquialterius rationibus, componi rationem Tripli* (quia $2 \times \frac{3}{2} = 3$,) idem est atque, *Duplum Sesquialterius, Triplum esse.* Quoniam vero hoc in omnibus rationum compositionibus non ita commode, ad posteriorem hanc formam, proferri possit; priorem itaque adhibere solent. Puta; *Rationem 9 ad 4, ex rationibus 3 ad 4 & 3 ad 1, componi*; potius dicunt, quam *Duplum Sesquiquartum* ($\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.) *esse, Subsesquitertii Triplum*; quia scilicet $\frac{9}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{1}$. Id ipsum tamen utrobique significatur. Quod quidem qui probe advertunt, tum *Euclidis* definitionem rectius intelligent, tum & de perplexa in componendis rationibus difficultate minus fortasse conquerentur. Saltem quid nos in hac & sequentibus propositionibus intellectum volumus, satis assequentur; qui Rationes solemus per earum Indices vel Exponentes designare. Puta, 2 A, Duplum quantitatis A; 3 A, Triplum A; $\frac{3}{2}$ A, Sesquialterum; $2 \times \frac{3}{2}$ A, Duplum Sesquialterius; $\frac{l}{r}$ A, quod est ad A, in ratione l ad r; $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s}$ A, quod est ad A, in ratione quæ ex l ad r, & m ad s, componitur. Et in reliquis similiter.

PROP. III.

Ubi Ratio ex duabus componitur; Data Composita, & Componentium una; datur altera. Nempe, Diviso exponente Compositæ, per Datæ componentis Exponentem, ut habeatur Exponens reliquæ. Similiter; si ex quotlibet componitur; Data composita, & vel una, vel quotlibet componentium, vel ex his composita; datur composita ex reliquis.

$a)æ(e.$ $\qquad$ $2)6(3$

$\frac{l}{r})\frac{lmn}{rst}(\frac{mn}{st}$ $\qquad$ $\frac{lm}{rs})\frac{lmn}{rst}(\frac{n}{t}$ Fig. 3.

SIt Rationis Compositæ Exponens datus $æ$; datusque unius ex componentibus Exponens a: Datur, inquam, reliquæ Exponens e. Cum enim (per præced.) Sit $a \times e = æ$: si dividatur $æ$ per a; prodibit e, Exponens reliquæ componentis.

Similiter; Si compositæ ex pluribus Exponens $\frac{lmn}{rst}$ detur, uniusque ex componentibus $\frac{l}{r}$; illo per hunc diviso, prodit exponens compositæ ex reliquis $\frac{mn}{st}$. Datisque tum Exponente compositæ $\frac{lmn}{rst}$, tum aliquot componentium, aut ex his compositæ, $\frac{l}{r}$ & $\frac{m}{s}$ vel $\frac{lm}{rs}$; datur exponens reliquæ, vel ex reliquis (si plures sint) compositæ, $\frac{n}{t}$.

SCHOLIUM.

MOnendum interim est; Intelligendam esse hanc Propositionem (& quæ hinc dependent) de ejusmodi Ratione Componente data, cujus Exponens est vere quantitas, & finita: Non 0, vel Infinitum.

Quippe, si quæ supponitur componentium altera data, sit nullius quantitatis (puta, ut 0 ad 1;) quæcunque sit Componens reliqua, Composita etiam nullius erit quantitatis: Adeoque, ex composita, & illa componente, quæ fuerat Componens reliqua non constabit. Est enim tam $0 \times 1 = 0$, quam $0 \times 2 = 0$, aut $0 \times 3 = 0$, &c. *Nullies Unum*, perinde *nullum* est, atque *Nullies Duo*, vel *Nullies Tria*, &c.

Similiter; Si sit Componentium altera, ratio *Infiniti*, (cujus index sit ∞.) Est enim tam $\infty \times 1 = \infty$, quam $\infty \times 2$, vel $\infty \times 3$, *&c. Infinities Unum*, pariter sunt *Infinita*, atque *infinities Duo*, vel *infinities Tria*, &c. Non constabit itaque, ex his datis, quænam sit illa Ratio, quæ intelligitur, cum *Infinita* composita, etiam *Infinitam* exhibere.

PROP. IV.

Si Ratio quævis cum Æqualitatis ratione componatur; eadem manet quæ prius ratio. Et contra; Quæ cum alia ratione composita, illam non immutat; est Æqualitatis ratio.

$2 \times 1 = 2.$ $\quad 3 \times 1 = 3.$ $\quad r \times 1 = r.$

Fig. 4. $\frac{A}{E} \times \frac{1}{1} = \frac{A}{E}.$ $\quad \frac{A}{E} \times \frac{r}{r} = \frac{rA}{rE} = \frac{A}{E}.$

PUta; Quæ ex Æqualis & Dupli rationibus componitur, est Dupli ratio: Quæ ex Æqualis & Tripli, est Tripli ratio, &c. Sive; Quod est Duplo Æquale, Duplum est: Quod Triplo, Triplum, &c.

Sequitur ex 2 hujus. Exponens utique Rationis Æqualium est 1; (Nam Æquale quodvis per suum Æquale divisum, Quotientem exhibet 1:) Qui quemvis alium exponentem multiplicans, eundem restituit; (quippe $r \times 1 = r$.) Adeoque constat Propositum.

Conversa similiter patet. Quippe si $\frac{A}{E} \times r = \frac{A}{E}$; erit $r = 1$.

PROP. V.

Quantitates quælibet, in eadem ratione vel auctæ vel diminutæ; in eadem qua prius ad invicem ratione constituuntur.

Fig. 5, 6. A. B. C :: 2 A. 2 B. 2 C :: $\frac{1}{2}$ A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C :: r A. r B. r C.

SEquitur ex præcedente. Est utique $\frac{rA}{rB} = \frac{A}{B} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{B}$. Item $\frac{rA}{rC} = \frac{A}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{C}$. Et $\frac{rB}{rC} = \frac{B}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{B}{C}$. Adeoque r A. r B. r C. in eadem ad invicem ratione atque A. B. C.

Idem demonstrabitur ex 16 Element. 5. Cum enim sit, ex hypothesi, ut r A ad A, sic r B ad B; erit (permutando) r A, ad r B, ut A ad B. Et de reliquis similiter.

PROP. VI.

Quæ ex Reciprocis Rationibus componitur Ratio, est ratio Æqualitatis. Et contra; Æqualitatis Ratio, ex Reciprocis componitur.

Fig. 7, 8. $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$ $\quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6}.$ $\quad \frac{A}{E} \times \frac{E}{A} = \frac{AE}{AE} = 1.$

Puta;

PUta; Dupli Dimidium, Triplum Trientis, Quadrantis Quadruplum; Sesquialterius Subsesquialterum, *&c.* tantundem valent atque Æquale. Fig. 7, 8.

Sequitur ex 2 hujus. Quippe si ratio A ad E, cum ejusdem reciproca E ad A, componatur: prodibit ratio A E ad E A, quæ æqualitatis est.

SCHOLIUM.

HÆc quæ præcedunt Lemmata, ex Rationum doctrina desumpta, huc tanstulimus, ob frequentem eorum in sequentibus usum.

Demonstrationes vero ita comparatæ sunt (tum hic tum in sequentibus passim,) ut & Praxin Arithmeticæ quam *Speciosam* vocant, directe respiciant; & ad appositas figuras lineares (si cui id gratius videbitur) accommodentur.

Exempli gratia. Ad propositionem primam; perinde est sive A & E habeantur pro Symbolis sive speciebus Arithmeticis; sive pro linearum adscriptarum, his notis designatarum, indiciis. Utrovis enim modo procedit demonstratio, sive de Lineis, sive de Literis.

Sic ad Prop. 2 & 3 perinde succedit demonstratio, sive sint *a*, *e*, Symbola Arithmeticæ specioſæ, adeoque *æ* quod ex harum invicem multiplicatione oritur: sive designet *a* Altitudinem, *e* Basin, Parallelogrammi *æ*. Quippe, Parallelogramma in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus composita constitui, notum est. Adeoque, ut Parallelogrammorum similium Lateribus homologis repræsentari solent rationes Componentes; ita Parallelogrammis ipsis, eorumve Areis, rationes Compositæ.

Sic ad Prop. 4. Perinde est, sive intelligamus quantitates A, E, per eandem *r* multiplicatas, ipsas *r* A, *r* E (multiplicatione factas) in eadem ratione exhibere cum ipsis A, E; sive Parallelogramma *r* A, *r* E, (propter æquales Altitudines *r*,) esse ad invicem ut eorum Bases A, E.

Et similiter ad Prop. 5. Sive dicamus quantitates A, B, C, per eandem *r* multiplicatas, producere *r* A, *r* B, *r* C, ipsis A, B, C, proportionales; Sive parallelogramma *r* A, *r* B, *r* C, (propter æqualem altitudinem) Basibus proportionalia; Sive etiam, in similibus triangulis latera A, B, C, & *r* A, *r* B, *r* C, in eadem ad invicem esse ratione: perinde est.

Item in Prop. 6. Perinde est sive intelligamus A × E = E × A = Æ: sive æqualia dicamus Parallelogramma quorum Altitudines sunt ut A ad E, Bases vero his reciprocæ, nempe ut E ad A.

Id saltem interest; Quod demonstrationes, si tanquam Arithmeticæ habeantur; Universaliores sunt, & de quocunque Quantitatum genere pariter concludunt: Si vero ad Lineas vel Parallelogramma speciatim respiciant; de his solum directe concludunt, (idque ex vi Propositionum particularium de his in Elementis demonstratarum: quales sunt, *Parallelogrammorum rationes componi ex rationibus Laterum Homologorum circa æquales angulos*; *Parallelogramma æquialta, esse ut Bases*; *Parallelogramma quorum Bases & Altitudines sunt reciproce proportionales, esse Æqualia*, &c.) de aliis vero, non nisi accommodando ad alias quantitates (puta, Vires, Pondera, Velocitates, Declivitates, *&c.*) easdem analogias quas in Lineis vel Parallelogrammis, *&c.* demonstratæ fuerant.

Ego interim, utut Demonstrationes hujusmodi, prout Arithmeticæ specioſæ praxin directe respiciunt, (adeoque universaliores existunt,) potiores existimem; adeoque adscriptas figuras, non nisi unum aliquem ex multis casum, qui sub Universali propositione continetur, (cui reliqui tamen, in aliis quantitatibus sunt conformes,) exhibere: Si tamen malint alii (quibus Demonstrationes Lineares magis arrident) ut rationes omnes, in quibuscunque quantitatibus (quamquam Lineis sint Heterogeneæ) Lineis utcunque exhibeantur; atque hinc ad ipsas de quibus agitur quantitates transferantur, His etiam satisfieri vellem. Idque eo magis, ut quam inter se conjunctæ sint hæ binæ demonstrandi methodi, perspiciatur; & quam facili negotio, demonstrationes Rationum Lineares, Lineis exutæ, simplicius simul & universalius exhiberi possint.

PROP.

PROP. VII.

Effectus ſunt, cauſis ſuis adæquatis, proportionales.

C.E::2C.2E::3C.3E::*r*C.*r*E.

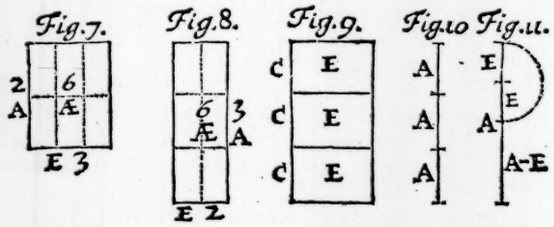


Fig. 9. NAm, ſi Cauſa ut C, efficit ut E; etiam altera C, cæteris paribus, alterum E efficiet; tertia tertium, *&c.* Adeoque 2 C, 2 E; 3 C, 3 E; & quotlibet C, totidem E. Hoc eſt Dupla C, duplum E; tripla triplum; & ſimiliter in quavis alia *Multiplicium* ratione.

Sin dicatur; Propter circumſtantias evenire poſſe, ut C altera, priori parem non producat effectum: Jam non erit hæc aut illa C, ut C, adæquata Cauſa; ſed potius, hæc vel illa C, his aut illis circumſtantiis adjuta vel impedita; Quod eſt contra Hypotheſin.

Atque idem oſtendetur, de quavis ratione *Submultiplicium.* Verbi gratia: Si 2 C efficiat ut 2 E; etiam C efficiet ut E. Si enim C efficiat vel plus vel minus quam E; etiam 2 C ſimiliter efficeret plus vel minus quam 2 E, (per primam partem hujus demonſtrationis:) Quod eſt contra hypotheſin. Similiter oſtendetur, de quavis alia ſubmultiplicium ratione; Puta, Si 3 C efficiat ut 3 E; etiam C efficiet ut E, *&c.*

Idem de quavis *Commenſurabilium* ratione, ſic oſtenditur. Eſto, verbi gratia, expoſita Cauſarum ratio 2 ad 3, ſive *n* ad *m*: erit eadem & Effectuum ratio. Nam ſi cauſa ut 2 C, efficiat ut 2 E; etiam Cauſa ut C, efficiet ut E; (per ſecundam partem hujus;) adeoque (per partem primam) 3 C, ut 3 E. Quod erat propoſitum. Et ſimiliter de quavis commenſurabilium ratione oſtendetur, aſſumpta in demonſtrationem communi menſura. Puta; Si cauſa ut *n* C efficiat ut *n* E; etiam C efficiet ut E; adeoque *m* C, ut *m* E.

Quodque de Commenſurabilibus oſtenditur; Cum nulla cauſa concipi poſſit, cur non de *Incommenſurabilibus* ſimiliter verum ſit; (poſſitque etiam, de his, ſi opus ſit, Demonſtratione Apagogica evinci;) de omnibus pariter verum erit, Effectus Cauſis ſuis adæquatis proportionales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

UNniverſalem hanc Propoſitionem præmittendam etiam duxi; quoniam viam aperit, qua, ex pure Mathematica ſpeculatione, ad Phyſicam tranſeatur; ſeu potius hanc & illam connectit.

PROP. VIII.

Contrariorum, quatenus contraria ſunt, Aggregatum; æquipollet Exceſſui præpollentis: Congruentium vero; eorundem Summæ.

Fig. 10.

+A	+3A	−3A	+ A	− A	+3A	−3A
−A	−2A	+2A	+ A	− A	+2A	−2A
+0	+1A	− A	+2A	−2A	+5A	−5A

SUnto Contrariorum Signa + & −. Adeoque; Si illud *Surſum* deſignet; deſignabit hoc *Deorſum*: Si illud, *Addendum*; hoc, *Auferendum*, deſignabit:

Et

Et de aliis contrariis ſimiliter. Sintque contrariorum quantitates A, 2 A, 3 A, &c. Erit $+A-A=0$. $+3A-2A=+A$. $-3A+2A=-A$, &c. (Ut ex Additionum legibus conſtat.) Hoc eſt, Aggregatum æquivalet Exceſſui præpollentis. Quod erat propoſitum.

At $+A+A=+2A$. $-A-A=-2A$. $+3A+2A=+5A$. $-3A-2A=-5A$. (ut ex Additionum legibus ſimiliter conſtat.) Quod item erat propoſitum.

Exempli gratia. A ſurſum, & A deorſum; ſe mutuo deſtruunt: 3 A ſurſum, & 2 A deorſum; tantundem valent atque 1 A ſurſum: 3 A deorſum & 2 A ſurſum; æquivalent atque 1 A deorſum: Adeoque, Qui (verbi gratia) unum paſſum aſcendit, & tantundem deſcendit; nihilo eſt vel altior vel humilior: Qui aſcendit 3 paſſus, & 2 paſſus deſcendit; eſt uno paſſu altior: Qui 3 paſſus deſcendit iterumque aſcendit 2 paſſus, eſt uno paſſu humilior.

Item; Qui unum Addit, & tantundem Aufert; nihilo vel Auget vel Minuit: Qui addit 3, & Aufert 2; uno Auget: Qui 3 Tollit, & 2 Reſtituit; uno Minuit. Et de Contrariis aliis ſimiliter judicandum.

Contra vero: Qui 3 paſſus aſcendit, & inſuper 2 alios; eſt 5 paſſibus altior: Qui 3 paſſus deſcendit, & deinde 2 alios; eſt 5 paſſibus humilior.

Item: Qui 3 Addit, & inſuper 2; quinario auget: Qui tum 3, tum 2 Tollit; quinario minuit. Et de reliquis ſimiliter.

PROP. IX.

Æquipollens ſi vel Augeatur, vel Contrarium Minuatur; fit Præpollens: Si Minuatur, vel Contrarium Augeatur; fit minus-pollens.

$A+E>A$. $A-E<A$. Fig. 11.

QUia Totum eſt ſui Parte majus. Puta: Totum $A+E$, præpollet ipſius parti A. Et Totum A, ipſius parti $A-E$.

SCHOLIUM.

SUntque hæ Propoſitiones Novem, totidem Lemmata; quæ non magis ſpectant præſentem Motuum Doctrinam, quam quamvis aliam; Sed frequentiſſimi uſus erunt in ſequentibus; quare in veſtibulo demonſtrandas duxi.

PROP. X.

Ubi conjuncta ſunt Momentum & Impedimentum: Si Momentum præpollet, pro Momento ſimul habenda ſunt; pro Impedimento vero, ſi præpollet Impedimentum; Et utrobique Tanto, quantus eſt præpollentis Exceſſus; Sin æquipollent, pro Neutro.

Sin plura ſint conjuncta vel Momenta, vel Impedimenta: Tanta ſimul habenda ſunt, quanta eſt eorundem ſumma.

CUm enim Contraria ſint Momentum & Impedimentum; hoc eſt, Cauſa ut ſit, &, Cauſa ne ſit: Conſtat propoſitum, per 8 hujus.

PROP. XI.

Si Momentum Impedimento præpollet: Motum efficit. Adeoque; Si nullus fuerit, Inchoatur: Si jam fuerit, Augetur.

Si præpollet Impedimentum: Impedit. Adeoque Motum, ſiquis jam ſit, vel Tollit, vel ſaltem Minuit.

Et quidem in ea ratione plus minuſve Efficit aut Impedit, qua major eſt vel minor Exceſſus præpollentis.

Si Æquipollent: Neque Ponitur motus, neque Tollitur. Adeoque quæ prius erat vel Quies vel Motus, perſeverat.

SEquitur ex præcedente. Nam prout utriuſque Aggregatum pro vel Momento, vel Impedimento, vel Neutro habendum eſt; ita vel motum Efficit, vel Impedit, (& quidem in ea ratione,) vel Neutrum, per 7 hujus.

SCHOLIUM.

POſtremam hujus Propoſitionis partem; Nempe, Inceptum Motum, (niſi obſtaculum ponatur,) ſuapte ſponte (ſine continuo motore,) non minus quam jam exiſtentem Quietem (niſi accedat Motor) perſeverare; *Galilæus*, *Carteſius*, *Gaſſendus*, aliique, videntur Poſtulare; atque hinc non levis momenti multa inferunt: Qui autem Demonſtret, non memini me vidiſſe quempiam. Eratque hoc nobis, in ſequentibus, aſſerendum, ubi de Motuum Acceleratione dicetur: tam propere tamen, in ipſo ſtatim veſtibulo, aſſerendo abſtinuiſſem, niſi conſequentiæ neceſſitate viderem me coactum jam ſtatim affirmare; non parvi poſtea momenti futurum.

PROP. XII.

Vis vi contraria, ſi æquipollet, ſuſtinebit: Si minus pollet; ne hoc quidem: Si præpollet, (neque aliud adſit impedimentum;) movebit. Et contra: Si movet; præpollet: Si non movet; tum vel minus pollet, vel ſaltem æquipollet, vel aliud quid impedit.

$$+A-A=0. \quad +2A-3A=-A. \quad +3A-2A=+A.$$
$$+S-D=0. \quad +S-D=- . \quad +S-D=+ .$$

SIt, verbi gratia, S, vis ſurſum; D, deorſum. Si invicem æquipollent; nullis æquivalent, (per 8 hujus;) Adeoque motum non efficiunt; (per 7 hujus.) Si S præpollet; fit motus ſurſum: Si D; deorſum. Æquivalent utique Exceſſui præpollentis: per 8 hujus; Eritque motus conſonus; per 7 hujus. Et ſimiliter de quibuſvis aliis Viribus contrariis oſtendetur.

Dico tamen, *Niſi aliud adſit Impedimentum.* Quoniam fieri poteſt, ut vel Medii denſitas, vel durities, vel Obex aliquis obſtet, quo minus à præpollente moveatur vis inferior; utut Obex ille, vim in contrarium Motricem non habeat, ſed ſimpliciter Impediat. Ut, quum grave pavimento incumbit: quod vim habeat Impediendi ne deſcendat; non autem Motivam ſurſum; quia nec ipſum ſurſum nititur.

SCHOLIUM.

PRocedit hæc tum Propoſitio, tum Demonſtratio potiſſimum de Mobili jam in Quiete conſtituto. Si vero jam ſit in Motu; Hoc ipſum, eſſe in motu, accenſendum erit cauſis ejuſdem motus continuativis, vel impeditivis contrarii. Quippe Sublatio motus, tam cauſam efficientem poſtulat, quam motus Poſitio; uti ex Prop. præced. conſtat. Unde eſt, quod Motus Penduli, verbi gratia, à gravitate inchoatus, non quidem à gravitate ſola continuatur, ſed ab ipſo impetu ſeu motu jam exiſtente continuatur, etiam ultra perpendiculum, adeoque aſcendendo; non obſtante ipſius gravitatis in contrarium niſu, aliiſque forſan non contemnendis obſtaculis, quod & in aliis motibus ab impetu inchoato continuatis paſſim obtinet. Quodque ad hanc Propoſitionem monemus; etiam in ſequentibus, prout res tulerit, intelligendum erit.

Hoc autem fundamento nititur, de contra-ponderantibus, ſeu contra-moventibus judicium: Adeoque vel Quietis, ob æquilibrium ſeu contra-moventium æquipollentiam; vel Motus, ob præponderantiam, ſeu præpollentiam.

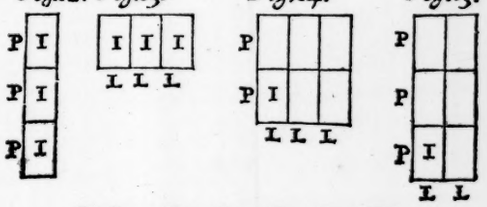
PROP.

PROP. XIII.

Quæ ex Mobilium Pondere reſultant motus Impedimenta, (cæteris paribus,) ſunt Ponderibus proportionalia.

Quodque de Pondere dicitur, de quavis alia contraria Vi, ſimiliter intelligendum, quæ ponderis inſtar erit. Et ſimiliter in ſequentibus.

Fig.12. *Fig.13.* *Fig.14.* *Fig.15.*



P. I :: 2P. 2I :: 3P. 3I :: *n*P. *n*I.

Fig.12.

NAm ſi pondus ut P, impedit ut I; etiam alterum P, cæteris paribus, ut alterum I impediet; tertium, ut tertium; &c. Adeoque 2P, ut 2I; 3P, ut 3I; & quotlibet P, ut totidem I. Quare & tantundem Ponderis, tantundem impedit; duplum, duplo; triplum, triplo, &c. Et in reliquis ſimiliter proportionibus: per 7 hujus.

SCHOLIUM.

DIco autem, *Cæteribus paribus*; Quoniam idem Pondus, pro vario ſitu, aliiſve circumſtantiis, poteſt varie impedire. Ubi autem cætera ſunt paria; tota quæ oritur diverſitas, à ſola Ponderis diverſitate, ut ab adæquata causa, profluit. Cæteraque, cum Æqualium rationem ſubeunt, proportionem non immutant. Per 4 hujus.

Quodque hic dictum eſt, etiam in aliis propoſitionibus pariter intelligendum erit, licet non diſerte dicatur. Quod ſemel monuiſſe ſufficiat.

PROP. XIV.

Quæ ex Longitudine tranſigenda, reſultant motus Impedimenta; ſunt Longitudinibus proportionalia.

Quodque de Longitudinibus, dicitur; de Medii denſitate, tenacitate, aut ſimili quovis Impedimento, pariter dicendum erit. Et ſimiliter in ſequentibus.

L. I :: 2L. 2I :: 3L. 3I :: *m*L. *m*I.

Fig. 13.

PUta; Æqualis Longitudo tranſigenda, æqualiter Impedit; dupla, duplo; tripla, triplo, *&c.* Nam ſi Longitudo ut L, impedit ut I; Etiam altera L, ut alterum I impediet; & tertia, ut tertium, *&c.* Adeoque; Dupla, duplo; Tripla, triplo; & in reliquis ſimiliter proportionibus. Per 7 hujus.

PROP. XV.

Quæ ex Pondere ſimul, & Longitudine tranſigenda, reſultant motus Impedimenta; ſunt in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compoſita.

P.	2P.	2P.	*n*P.
L.	2L.	3L.	*m*L.
PL.	I :: 4PL.	4I :: 6PL.	6I :: *mn*PL. *mn*I.

Fig. 14.

Puta;

PUta; Duplum Pondus, per Duplam Longitudinem ferendum, eſt Impedimentum Quadruplum; per Triplam, Sextuplum: Triplum Pondus, per Longitudinem Triplam, eſt Impedimentum Noncuplum; per Quadruplam, Duodecuplum, *&c.* Nam, ſi Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impedit ut I; etiam alterum P, per eandem Longitudinem ferendum, impediet ut I alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque; Duplum, duplo; Triplum, triplo, *&c.* per eandem Longitudinem ferendum. per 13 hujus. Cum itaque Pondus ut 2 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 2 I: Pondus idem per Longitudinem 2 L ferendum, impediet ut 4 I; per 3 L, ut 6 I, *&c.* per præced. Item; Cum Pondus 3 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 3 I: idem per 3 L ferendum, impediet ut 9 I; per 4 L, ut 12 I, *&c.* per præced. Et, univerſaliter, Si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut I: Pondus *n* P, per eandem L ferendum, impediet ut *n* I (per 13 hujus;) Adeoque, per *m* L, ut *mn* I; (per præced.) Hoc eſt, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compoſita, (per 2 hujus.) Quod erat propoſitum.

PROP. XVI.

Si, in duobus motibus, Pondera & Longitudines, vel utraque ſint Æqualia, vel ſint Reciproce proportionalia; Quæ hinc reſultant Impedimenta, ſunt Æqualia. Et contra: Si quæ inde reſultant impedimenta ſunt æqualia; Pondera & Longitudines ſunt vel utraque Æqualia, vel ſaltem Reciproce proportionalia.

Fig. 14, 15.

P.	2P.	2 P.	3 P.	*n* P.	*m*P.
2 L.	L.	3 L	2 L.	*m* L	*n*L.
2 PL. I :: 2 PL. I.		6PL. I :: 6 PL. I.		*mn*PL. I :: *mn*PL. I.	

PUta: Æquale Pondus, per Æqualem Longitudinem ferendum, Æqualiter Impedit. Item, Pondus Duplum per Æqualem Longitudinem, & Æquale Pondus per Longitudinem Duplam ferendum, Æqualiter impediunt. Sic, Pondus Triplum per Longitudinem Æqualem, &, Æquale Pondus per Longitudinem Triplam. Item, Pondus Duplum per Longitudinem Triplam, &, Triplum Pondus per Longitudinem Duplam, &c.

Sunt enim Impedimenta, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compoſita; (per præced.) Adeoque, (cum hæ ſunt reciprocæ,) æqualia ſunt: (per 6 hujus.) Unde & converſa patet.

SCHOLIUM.

POſſet quidem ea clauſula, *Vel utraque æqualia*, tuto omitti, utpote quæ in ſequenti, *Reciproce proportionalia*, continetur. Nam, ut Dimidio Duplum, ſic &, Æquale Æquali, reciprocum eſt. Mallem tamen, perſpicuitatis gratia, tum in hac Propoſitione, tum in ſequentibus aliquoties, illud etiam diſerte inſerere. Quod quidem non tantum ex 6 hujus, ſed & 4 hujus, perinde patet.

Ex his autem quatuor Propoſitionibus proxime præcedentibus, æſtimatur *Motuum* perficiendorum *Magnitudo*. Ea ſcilicet quæ ex mobilium Pondere, & motus Longitudine, ſimul conſideratis emergit.

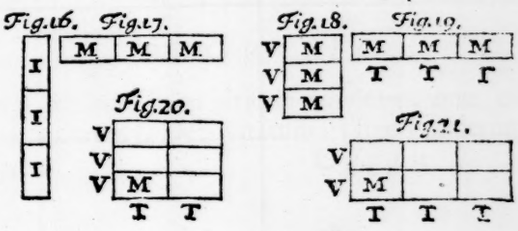
PROP. XVII.

Quæ reſpectivis Impedimentis æquipollent Momenta, ſunt Impedimentis proportionalia.

(Adeoque Ponderibus, ſi reliqua ſint paria; vel Longitudinibus, ſi reliqua ſint paria; vel quæ ex Pondere & Longitudine reſultant Impedimentis, ſi reliqua ſint paria.)

Eaque Momenta, ſi augeantur; vel minuantur Impedimenta; movebunt.

M.



M.I::2M.2I::3M.3I::*r*M.*r*I.

PUta; Æquale Momentum, Æquali Impedimento æquipollet; Duplum, Duplo; Triplum, Triplo, *&c.* Nam ſi Momentum ut M, æquipollet Impedimento ut I; etiam alterum M, alteri I æquipollebit; & Tertium, Tertio, *&c.* Adeoque, Duplum, Duplo, Triplum, Triplo, *&c.* per 7 hujus. Fig. 16, 17.

Adeoque; vel Ponderibus, vel Longitudinibus, vel quæ ex utriſque ſimul reſultant Impedimentis, (cæteris paribus,) ſunt proportionalia. Nam his proportionalia ſunt, quæ ex his reſultant Impedimenta. per 13, 14, 15. hujus.

Sin augeatur Momentum Æquipollens, vel Impedimentum minuatur; Momentum præpollebit; adeoque, movebit. per 9, 10. hujus.

SCHOLIUM.

ATque hinc dependet de Æquilibrio, ſeu contra-nitentium Æquipollentia, judicium; &, quæ hinc ſequitur, Quiete: quique ex Præpollentia procedit, Motu.

PROP. XVIII.

Virium momenta, cæteris paribus, ſunt Virium gradibus proportionalia.

V.M::2V.2M::3V.3.M::*n*V.*n*M.

PUta; Vis æqualis, tantundem movendo pollet; Dupla, duplo; Tripla, triplo, *&c.* Nam, ſi vis ut V, moveat ut M: etiam vis ut 2 V, movebit ut 2 M; 3 V, ut 3 M; *n* V, ut *n* M, *&c.* per 7 hujus. Fig. 18.

PROP. XIX.

Virium, gradu æqualium, Momenta; ſunt cæteris paribus, Temporibus proportionalia.

T.M::2T.2M::3T.3M::;*m*T.*m*M. Fig. 19.

NAm, ſi vis expoſita, Tempore T, moveat ut M: etiam altero T, tantundem efficiet; tertio, tantundem, *&c.* Adeoque, in 2 T, ut 2 M; in 3 T, ut 3 M; in *m* T, ut *m* M, *&c.* Hoc eſt, Duplo tempore, duplum efficiet; Triplo, triplum, *&c.* per 7 hujus.

PROP. XX.

Quæ ex Virium gradu, ſimul & applicationum Tempore reſultant Momenta; ſunt in ratione ex Virium & Temporum rationibus compoſita.

$$\begin{array}{cccccc} V. & 2V. & 2V. & nV. & & \\ T. & 2T. & 3T. & mT. & & \\ \hline VT. & M :: 4VT. & 4M :: 6VT. & 6M :: mnVT. & mnM. & \end{array}$$ Fig. 20, 21.

PUta; Vis Dupla, duplo Tempore, Quadruplum poteſt; triplo, Sextuplum: Tripla, triplo tempore, poteſt Noncuplum; quadruplo, Duodecuplum, *&c.*

Nam, si Vis ut V, Tempore T, moveat ut M: Vis ut 2 V, eodem Tempore, movebit ut 2 M; & 3 V, ut 3 M, *&c.* per 18 hujus. Cum itaque Vis ut 2 V, Tempore T, moveat ut 2 M; Vis eadem, Tempore 2 T, movebit ut 4 M; & tempore 3 T, ut 6 M, *&c.* Per 19 hujus. Item, Cum Vis ut 3 V, Tempore T, moveat ut 3 M; Vis eadem, Tempore 3 T, movebit ut 9 M; Tempore 4 T, ut 12 M, *&c.* Et universaliter, Si Vis V, tempore T, moveat ut M; Vis *n* V, eodem Tempore T, movebit ut *n* M, (per 18 hujus:) Adeoque, Tempore *m* T, ut *mn* M, (per 19 hujus.) Hoc est, in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XXI.

Si Vires & Tempora, sint vel utraque Æqualia, vel sint Reciproce proportionalia; quæ hinc resultant Momenta sunt Æqualia. Et contra: Si Momenta illa sint Æqualia; Vires & Tempora, sunt, vel utraque æqualia, vel saltem Reciproce proportionalia.

Fig. 20, 21.

$$\frac{V.}{2T.} \quad \frac{2V.}{T.} \quad \frac{2V.}{3T.} \quad \frac{3V.}{2T.} \quad \frac{nV.}{mT.} \quad \frac{mV.}{nT.}$$

$$2VT.\ M::\ 2VT.\ M.\quad 6VT.\ M::\ 6VT.\ M.\quad mnVT.\ M::\ mnVT.\ M.$$

PUta; Vis æqualis, æquali Tempore, tantundem efficit. Item, Vis dupla æquali tempore, &, Vis æqualis duplo Tempore, tantundem efficiunt. Sic, Vis dupla triplo Tempore, &, Vis tripla duplo Tempore, *&c.* Sunt enim Momenta in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita; (per præced.) Adeoque (cum hæ sint Reciprocæ) Æqualia sunt. (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

EX his quatuor Propositionibus proxime præcedentibus, æstimantur, quæ ex Viribus & Temporibus simul consideratis emergunt, *Momentorum Magnitudines.*

PROP. XXII.

In quibusvis Motibus invicem comparatis; Momenta sunt Impedimentis proportionalia.

$$VT=M.\ PL=I::2VT=2M.\ 2PL=2I::nVT=nM.\ nPL=nL.$$
$$M=VT.\ \mu=\upsilon\tau::I=PL.\ \iota=\pi\lambda.$$

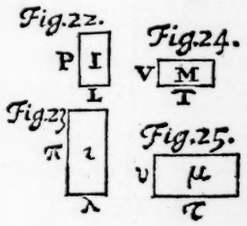


Fig. 22, 23, 24, 25. PUta; si Vis V, Tempore T; sive, quod ex his resultat, Momentum M; movet Pondus P, per Longitudinem L; sive tollit, quod ex his resultat, Impedimentum I: Duplum Momentum, tollet Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum, *&c.* Nam, si Momentum M, tollit Impedimentum I; etiam alterum M, alterum I tollet; tertium, tertium, *&c.* Adeoque Duplum Momentum, tollet, Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus. Quod erat propositum.

Sive, (ut in *Aurea Regula composita* dici solet,) Ut, Factum ex Pondere & Longi-

Longitudine, in unoMotu; ad, Factum ex Pondere & Longitudine, in alio Motu: ſic, Factum ex Vi & Tempore, in priori motu; ad, Factum ex Vi & Tempore, in poſteriori motu; cæteris paribus.

SCHOLIUM.

EX hac Propoſitione potiſſimum dependet Motuum inter ſe comparatio, quoad Vires, Tempora, Pondera, & Longitudines.

PROP. XXIII.

In Comparatis Motibus; Si Lationum Tempora ſint æqualia; Celeritatum gradus ſunt tranſactis Longitudinibus proportionales.

$$L.\lambda :: C.\kappa.$$
$$L.C :: 2L.2C :: nL.nC.$$

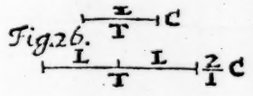
Fig.26. 

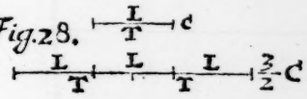
Fig.28. 

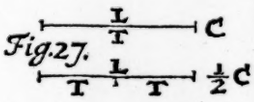
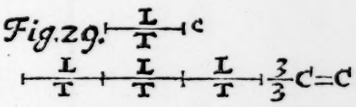
Fig.27. 

Fig.29. 

HOc eſt: Ut Longitudo prima ad ſecundam, eodem tempore tranſactam; ſic Celeritas prima ad ſecundam. Fig. 26.

Puta; Dupla Celeritate, (eodem Tempore,) Dupla Longitudo tranſigitur; Dimidia Celeritate, Subdupla Longitudo. Et ſimiliter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXIV.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines ſint æquales; Celeritatum gradus ſunt Temporibus reciproce proportionales.

$$\tau.T :: C.\kappa.$$
$$\frac{L}{T}.C :: \frac{L}{2T}.\frac{1}{2}C :: \frac{L}{nT}.\frac{1}{n}C.$$

HOc eſt; Ut Tempus ſecundum, ad tempus primum; ſic (reciproce) Celeritas prima ad ſecundam. Fig. 27.

Puta; Dimidio Tempore, dupla Celeritate, tranſigitur æqualis Longitudo: Duplo Tempore, dimidia Celeritate. Et ſimiliter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXV.

Comparatorum Motuum Celeritates, ſunt in ratione ex directa Longitudinum & reciproca Temporum rationibus compoſita.

$$\frac{L.\ \lambda}{\tau.\ T} \quad \frac{T.}{L.}\times\frac{2T}{3L} \quad \frac{mT.}{L.}\times\frac{T}{nL}$$
$$\overline{L\tau.\ \lambda T} :: C.\kappa. \quad \overline{2TL}.C :: \overline{3TL}.\tfrac{3}{2}C. \quad \overline{TL}. \quad \overline{mnTL} :: C.mnC.$$

Fig. 28.

$$\frac{L}{T}.C :: \frac{3L}{2T}.\frac{3}{2}C :: \frac{nL}{mT}.\frac{n}{m}C.$$

Puta;

Fig. 28. PUta: Longitudo dupla, dimidio Tempore tranſigitur, Celeritate Quadrupla: Tripla Longitudo dimidio Tempore, Celeritate Sextupla: Tripla Longitudo duplo Tempore, Celeritate Seſquialtera, &c.

Nam, ſi Longitudo L, Tempore T, abſolvatur Celeritate ut C: Longitudo 2 L, eodem Tempore T, abſolvetur Celeritate ut 2 C; (per 23 hujus:) Adeoque dimidio Tempore ſeu $\frac{1}{2}$ T, duplo adhuc celerius, ſive Celeritate ut 4 C. (per præced.) Similiter, Longitudo 3 L tempore T, celeritate ut 3 C; (per 23 hujus:) Adeoque Tempore $\frac{1}{2}$ T, Celeritate ut 6 C; & Tempore 2 T, Celeritate $\frac{3}{2}$ C: per præced. Et, univerſaliter; Si Longitudo L, tempore T, tranſigatur Celeritate C: Longitudo n L eodem tempore tranſigetur Celeritate n C, (per 23 hujus:) adeoque Tempore m T, celeritate $\frac{n}{m}$ C; (per præced.) Hoc eſt, in ratione quæ ex directa Longitudinum & reciproca Temporum rationibus componitur. Quod erat propoſitum.

PROP. XXVI.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines, ſint Temporibus proportionales: Celeritates ſunt æquales. Et contra.

Fig. 29. $$L.T::2L.2T::3L.3T::nL.nT.$$

SEquitur ex præcedente. Quoniam, hoc caſu, Reciproca Temporum (quæ eadem eſt cum reciproca Longitudinum) cum directa Longitudinum, compoſita; æqualitatis ratio eſt. per 6 hujus.

Vel ex definitionibus Celeritatum. Cum enim Æqualis Celeritas, æquali Tempore, æqualem Longitudinem abſolvit (per Def. 10.) Etiam Duplo tempore, duplam Longitudinem; Triplo, triplam, &c. abſolvet. Et contra. per 7 hujus.

PROP. XXVII.

In comparatis motibus, Virium gradus (cæteris paribus) ſunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur.

$$VT.\upsilon\tau::PL.\pi\lambda.$$

$$V.\upsilon::\frac{PL}{T}.\frac{\pi\lambda}{\tau}::PL\tau.\pi\lambda T::PC.\pi\varkappa.$$

$$\frac{T}{\tau})\ \frac{VT}{\upsilon\tau}=\frac{PL}{\pi\lambda}\left(\frac{V}{\upsilon}=\frac{PL\tau}{\pi\lambda T}=\frac{PC}{\pi\varkappa}.\right.$$

CUm enim (per 22 hujus) Momentorum ratio, quæ ex Virium & Temporum rationibus componitur; eadem ſit cum ea, quæ ex Ponderum & Longitudinum rationibus componitur, ratione Impedimentorum: Si eximatur utrinque ratio Temporum, vel (quod eodem recidit) illius Reciproca accedat; Relinquetur Virium ratio, ea quæ componitur ex rationibus Ponderum, & Longitudinum, & reciproca Temporum; Hoc eſt, (per 25 hujus) ea quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur. Quod erat propoſitum.

SCHOLIUM.

EX hac Propoſitione dependet Problematum aliquot, in Mechanicis maxime celebrium, generalis ſolutio. Nempe,

PROP.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, data Vi movere.

$$\frac{P.}{C.} \quad \frac{nP.}{\frac{1}{n}C.} \qquad \frac{P.}{C.} \quad \frac{2P.}{\frac{1}{2}C.}$$
$$\overline{PC.}\,V :: \overline{PC.}\,V. \qquad \overline{PC.}\,V :: \overline{PC.}\,V.$$

SIt expoſita Vis V, quæ movere potis ſit Pondus P, celeritate C: & requiratur, ut eadem vel æquali Vi, moveatur Pondus nP.

Dico; Si, cæteris paribus, res ita comparetur (interpoſita Machina) ut, qua ratione Pondus nP majus ſit minuſve quam Pondus P; eadem, contra, minor fiat majorve Celeritas, puta $\frac{1}{n}$C: eadem Vis V, expoſitum Pondus nP, movebit celeritate $\frac{1}{n}$C.

Cum enim rationes nP ad P, & $\frac{1}{n}$C ad C, ſint reciprocæ; quæ ex his componitur eſt Æqualitas; (per 6 hujus:) Adeoque (per præced.) æqualis Vis requiritur ad movendum Pondus P celeritate C, atque Pondus nP celeritate $\frac{1}{n}$C. Quod erat propoſitum.

SCHOLIUM.

HUic igitur potiſſimum negotio ſe applicet Mechanicus, ut iſtiuſmodi machinas excogitet, eaſque in uſum redigat, quibus Vi & Ponderi interpoſitis, motuum celeritatem ita moderetur, ut Ponderum Magnitudinem Tarditate motus compenſet; ſeu, Temporis Longitudine, Defectum Virium.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, data Celeritate movere.

$$\frac{P.}{C.} \quad \frac{P.}{nC.}$$
$$\overline{PC.}\,V :: \overline{nPC.} \quad nV.$$

SIt expoſitum Pondus P, quod, celeritate C, movere potis ſit Vis V: & requiratur, ut Celeritate nC, moveatur.

Dico: Si, cæteris paribus, qua ratione augenda ſit aut minuenda celeritas, eadem ſimiliter augeatur vel minuatur Vis adhibita: expoſitum Pondus data celeritate movebitur.

Cum enim (propter idem utrobique Pondus) eadem ſit Celeritatum ratio, cum illa quæ ex hac & Ponderum rationibus componitur, (per 4 hujus;) eadem erit & Virium requiſitarum ratio; (per 27 hujus.) Quod erat oſtendendum.

SCHOLIUM.

NOtandum interim: Cum non ita in promptu ſit, Vires pro arbitrio augere, atque Celeritatem motus minuere; non ita facile erit præſens Problema, atque illud quod proxime antecedit, magnis Ponderibus actu applicare.

PROP. XXX.

Data Vi, data Celeritate, motum efficere.

$$\begin{array}{cc} P. & \frac{1}{n}P. \\ C. & nC. \\ \hline PC. V :: & PC. \quad V. \end{array}$$

SIt expoſita Vis V, quæ Pondus P, celeritate C movere potis ſit: requiratur autem, ut Celeritate nC fiat motus.

Dico: Si, cæteris paribus, qua ratione augenda ſit aut minuenda Celeritas; eadem, vice verſa, minuatur vel augeatur Pondus: Eadem Vi, data celeritate, movebitur. Puta, Pondus $\frac{1}{n}$P, eadem Vi, celeritate nC movebitur.

Cum enim Ponderum $\frac{1}{n}$P ad P, & Celeritatum nC ad C, rationes ſint reciprocæ: Quæ ex his componitur ratio, Æqualitatis eſt; (per 6 hujus;) Adeoque & Virium requiſitarum. per 27 hujus,

SCHOLIUM.

NOtandum denique; Ita calculum his Propoſitionibus inſtitui, ac ſi in Medio Vacuo peragendus ſit motus: Quare nec Reſiſtentiæ in medio, vel Magnitudinis aut Figuræ rei Mobilis, habita eſt conſideratio: Sed conditione hac, *Cæteris paribus*, tum hæ tum aliæ circumſtantiæ ſic excludi intelliguntur, ut vel nullæ ſint, vel ita ſaltem comparatæ ut non immutent aut turbent rationes. Adeoque, ubi adſunt, opus erit (quo calculi Mathematici ἀκρίβεια conſervetur, vel ab ea quam minimum recedatur,) ut earum vel accurata conſideratio etiam habeatur, & calculo æſtimetur; vel ſaltem, ut eo modo comparentur quo minimum turbentur reliquæ rationes.

CAP. II.

De Gravium Deſcenſu, & Motuum Declivitate.

PROP. I.

Gravia, cæteris paribus, gravitant in ratione Ponderum. Et, univerſaliter, Vires Motrices quælibet, agunt pro Virium ratione.

P. G :: 2P. 2G :: 3P. 3G :: rP. rG.

PUta; Si Pondus ut P, Gravitat ut G: Etiam alterum P, ut alterum G gravitabit: tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque 2P, ut 2G; 3P, ut 3G; & quotlibet P, ut totidem G, *&c.*

Eſt enim Gravitas, Vis Motrix; ejuſque menſura, Pondus: (per 12, 13. Def. Cap. 1.) Movet igitur Gravitas, pro Ponderum ratione; per 18. Cap. 1. Et ſimiliter in Motibus aliis oſtendetur.

PROP.

PROP. II.

Grave, quatenus non impeditur, Deſcendit; ſeu propius ad Terræ Centrum appropinquat.

Et, univerſaliter, Vis quævis Motrix, ſecundum Directionem ſuam, quatenus non impeditur, procedit.

NAm (per Def. Gravitatis) Gravitas eſt Vis deorſum movens, ſeu verſus Terræ Centrum. Hac igitur, quatenus non impeditur, feretur Grave, gravitate ſua. per 11 cap. 1.

Et ſimiliter in aliis motibus oſtendetur.

PROP. III.

Grave tantundem Deſcendit, quanto ſit Terræ Centro propius: Tantum Aſcendit, quanto remotius.

Et, univerſaliter, Cujuſvis Vis Motricis Progreſſus tantus eſt, quantum ſecundum Directionem ſuam movetur; Regreſſus, contra.

CD = CB. CA — CD = CA — CB. CD — CE = CB — CE.

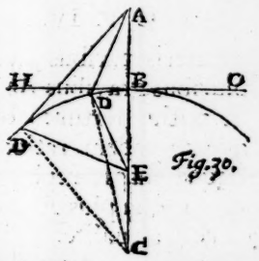


Fig. 30.

SIt C, Terræ Centrum: unde ducantur æquales rectæ CB, CD. Continuetur CB ad A; & jungatur AD. Item, ſumpto ubivis in CB, puncto E; jungatur ED. Dico; Grave ab A, puncto altiore, ad B vel D motum; tantundem Deſcendiſſe, quanto B vel D, minus quam A, diſtat à Centro C: Motum vero ab E, puncto quovis humiliore, ad B vel D; tantum Aſcendiſſe, quanto B vel D, magis quam E, à Centro diſtat.

Eſt enim (per Def. Gravitatis) Deſcenſus gravium, (ſeu Motus ſecundum Directionem ſuam,) Motus verſus Centrum Terræ. Tanto igitur Deſcendiſſe dicetur Grave, quanto ad Terræ Centrum propius acceſſerit. Puta, quanto Brevior eſt CB vel CD, quam CA. Adeoque tanto Aſcendiſſe, quanto fuerit contrario motu latum; hoc eſt, quanto à terræ Centro remotius abceſſerit; puta, quanto Longior eſt CB, vel CD, quam CE. Quod erat propoſitum.

Adeoque: Quamquam AD vel ED recta, Longior ſit quam AB vel EB; non tamen Altior ſeu major Deſcenſus eſt vel Aſcenſus, Gravis per illam, quam per hanc lati.

Quodque de Gravitate oſtenſum eſt, ſimiliter de alia Vi Motrice intelligendum erit. Quod enim eſt, reſpectu Gravitatis, Deſcenſio: idem eſt, reſpectu cujuſvis Vis Motricis, Latio ſecundum Directionem ſuam: Et contra. per Def. 21. Cap. 1.

SCHOLIUM.

NOtandum interim; pro peripheria BD, indifferenter ut plurimum ſumi Rectam Horizontalem BH; quæ, propter immenſam Centri diſtantiam, & planorum quibus maxime verſamur parvitatem, cum illa quaſi coincidens haberi ſolet. Si quando tamen vel immenſa plana tractanda veniant, vel accuratius philoſophandum ſit; ſecernenda erunt.

Necui interim mirum videatur ; quod de Gravi, tanquam in uno Punćto, verba faciamus ; cum interim Grave non ſit niſi Corpus ſolidum : Monendum erit, conſiderare nos hic loci, *Grave* ut abſtractum a *Magno*, (abſtractione, ut loquuntur, Mathematica.) Conſideramus utique, non quam Grande Corpus, nedum qua Figura ſit, ſed quanta Ponderis Vis hoc in punćto applicatur : Perinde habentes, mole magna ſit, an parva, aut etiam nulla ſed Punćtulo vis illa inſit ; Item, planum ſit, an rotundum ; plenum, an excavatum ; quod ita ponderat. Quamquam enim, in *Hydroſtaticis*, aut alias etiam ubi de Medii reſiſtentia agatur, aut alibi aliis de cauſis ; magni interſit, qua mole quave figura, ſit Grave ponderans : ea tamen omnia hic ſecludimus, (eadem libertate qua, poſt *Archimedem*, alii, de Planorum, Linearum, aut etiam Punćti gravitate philoſophantur ; quod & nos inferius facturi ſumus.) Atque hoc ipſum ne à veritate Phyſica nimis abhorrere videatur ; oſtendetur, in ſequentibus, (ubi de Centro Gravitatis agetur,) Gravis quantumvis magni vim totam ita diſtribui ut perinde omnino ponderando valeat atque ſi in unico illius punćto eſſet. Verum ea conſideratione poſthabita, quæ hujus loci non eſt ; (quippe quum nondum definivimus Centrum gravitatis, nedum eſſe demonſtravimus, aut quanta vis huic inſit ; adeoque, utut in Scholio, ubi laxius agimus, illius mentionem faciamus ; in Demonſtrationibus tamen non ea libertate utimur ;) ſufficit hic loci monuiſſe, nos id ſaltem hic inquirere, quid futurum ſit, ſi hoc aut illo punćto tanta vis Ponderis (aut etiam quæ ponderis inſtar erit,) adhibeatur, undecunque demum fuerit. Quod & ſubinde ſæpius, in ſequentibus, intelligendum erit.

PROP. IV.

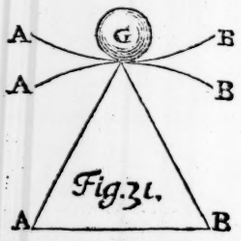


Fig. 31.

Eà, cæteris paribus, propendet Grave, vel ex pluribus gravibus Aggregatum ; (Hoc eſt, ea ea potius fertur :) qua plus Deſcenditur : idque in eadem ratione qua plus Deſcenditur. Eaque magis repugnat, & in eadem ratione magis, qua plus Aſcenditur. Et contra.

Qua vero æqualiter vel Deſcenditur vel Aſcenditur ; æqualiter vel Propendet vel Repugnat. Et contra.

Cæteriſque motibus idem ſimiliter accommodabitur. Ea potius feretur Mobile, (& in ea ratione potius,) qua magis ſecundum virium Directionem proceditur.

CUm enim tendat Grave (per def. Gravitatis) ſimpliciter *Deorſum* ; adeoque, quam poteſt maxime ; (Naturaliter ſiquidem agentia, non agunt ex delectu, ſed cæco impetu pro ſumma virium :) Ea potius feretur, cæteris paribus, qua magis erit Deorſum, ſeu minus Surſum ; puta per G A fig. 31. ſi hac declivius ſit quam G B. (adeoque contrario motui magis repugnat :) Hoc eſt, qua plus Deſcenditur, quaque Aſcenditur minus, (& contra ; Qua minus Deſcenditur, quaque Aſcenditur magis, ægrius feretur.) Et quidem (per 7 cap. 1.) in eadem ratione. Quod erat propoſitum.

Qua vero æqualiter vel Deſcenditur vel Aſcenditur : (puta, ut Grave G indifferentur ad A vel B :) Æqualiter vel Propendet vel Repugnat. A Gravitate ſiquidem (per def. Gravitatis) non niſi Deſcenſus ergo, vel omnino fertur, vel hac magis quam illac fertur.

Fig. 31. Contra vero ; Qua, cæteris paribus, æqualiter vel Propendet vel Repugnat ; æqualiter vel Deſcenditur vel Aſcenditur. (Nam ſiqua vel magis Deſcenderet, vel minus Aſcenderet ; ea magis propenderet, minuſve repugnaret ; per jam Demonſtrata.) Quod itidem erat propoſitum.

Et eadem ratione oſtendetur converſa primæ partis ; Nempe, qua plus propendet Grave, ea magis Deſcenditur ; & qua plus repugnat, ea magis Aſcenditur, *&c.* Cæteris paribus.

Et ſimiliter in aliis motibus oſtendetur.

PROP.

PROP. V.

Gravium Deſcenſus, invicem comparati, in ea ratione pollent, quæ ex Ponderum ratione & ratione Altitudinum Deſcenſuum componitur. Atque Aſcenſus ſimiliter.

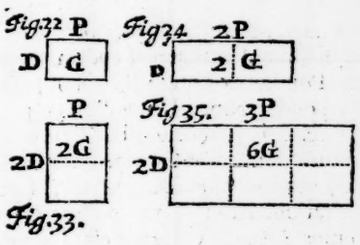
Adeoque; Si Pondera ſint æqualia; in ratione Altitudinum: Si Altitudines ſint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera & Altitudines, vel utraque ſint æqualia, vel ſint Reciproce proportionalia; Æquipollent.

Et, univerſaliter, Virium Motricium quarumcunque Progreſſus Regreſſuſve, pollent in ratione, quæ, ex ratione Virium, & Progreſſuum Regreſſuumve ſecundum lineam Directionis Virium æſtimatorum, componitur.

$$\frac{P.}{D.}\quad\frac{nP.}{D.}\qquad\frac{P.}{D.}\quad\frac{P.}{mD.}$$
$$\overline{PD.}\ G::\ \overline{nPD.}\ nG.\qquad \overline{PD.}\ G::\ \overline{mPD.}\ mG.$$

$$\frac{P.}{D.}\quad\frac{nP.}{mD.}\qquad\frac{P.}{nD.}\quad\frac{nP.}{D.}$$
$$\overline{PD.}\ G::\ \overline{mnPD.}\ mnG.\qquad \overline{nPD.}\ G::\ \overline{nP\,D.}\ G.$$

$$\frac{P.}{D.}\quad\frac{nP.}{D.}\qquad\frac{P.}{mD.}\quad\frac{nP.}{mD.}\qquad\frac{nP.}{\frac{1}{n}D.}$$
$$\overline{PD.}\ G::\ \overline{nPD.}\ nG::\ \overline{mPD.}\ mG::\ \overline{mnPD.}\ mnG::\ \overline{PD.}\ G.$$



PUta; Si Grave ut P, per D deſcendens, valet ut G; etiam alterum P (cæteris paribus) tantundem deſcendens, valebit ut G alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque *n*P, ut *n*G; in ratione Ponderum. per 7 cap. 1. Fig. 32, 33, 34, 35.

Item; Si Ponderis ut P, deſcenſus per D, valet ut G: ejuſdem Ponderis (cæteris paribus) per D alterum deſcenſus, tantundem valebit; adeoque ut alterum G: per tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque per *m* D, ut *m* G; in ratione Altitudinum. per 7 cap. 1.

Si itaque Pondus P, per D deſcendens, valet ut G: etiam *n*P, per D deſcendens, valebit ut *n*G; Adeoque, per *m* D deſcendens, ut *mn*G; (ut oſtenſum eſt:) Hoc eſt; in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compoſita, (per 2 cap. 1.) Quod erat probandum.

Quæ quidem rationes ſi ſint Reciprocæ; quæ ex his componitur, Æqualitas eſt. per 4, 6, cap. 1.

Similiter de Aſcenſu judicandum.

Et, in alia quavis Vi Motrice, ſimiliter oſtendetur.

SCHOLIUM.

POſſet quidem hæc, & ſubſequentium Propoſitionum aliquot, in plures diſtrahi, & ſimiliter demonſtrari, atque in capite præcedente factum eſt, in Prop. 13, 14, 15, 16. item, 17, 18, 19, 20. item, 22, 23, 24, 25. Quum autem illud ſemel

iterumque, perſpicuitatis gratia, factum fuerit; malebam tum hic tum in ſequentibus ſuccinctius agere, ne videar vel nauſeam creare, vel propoſitionum numerum præter neceſſitatem in immenſum augere velle. Ob quam rationem etiam Corollaria Propoſitioni principali toties ſubnectere viſum eſt.

Ex hac autem Propoſitione (quæ Deſcenſuum Aſcenſuumque *Magnitudinem*, ex Gravium Pondere ſimul & Motuum Altitudine, æſtimat,) potiſſimum dependet, de Machinarum quarumvis Potentia, judicium.

PROP. VI.

Conjunctis invicem Deſcenſu & Aſcenſu; Si præpollet Deſcenſus, pro Deſcenſu ſimpliciter habendi ſunt: Pro Aſcenſu vero, ſi Aſcenſus præpollet: (Et quidem utrobique tanto, quanta eſt Præpollentia:) Sin æquipollent, pro Neutro.

Si vero vel plures Aſcenſus conjuncti ſint, vel plures Deſcenſus: tantundem ſimul pollent atque eorundem ſumma.

Idemque motis ab alia Vi Motrice, mutatis mutandis, accommodabitur.

Patet ex Prop. 8. cap. 1.

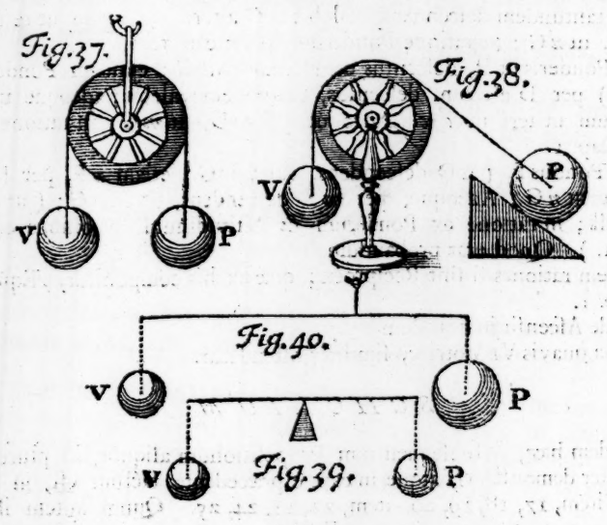
PROP. VII.

Comparata Gravia, cæteris paribus, ea ratione Ponderant (Deſcenſum moliendo, averſando Aſcenſum,) qua pollent eorum ſi moveantur Deſcenſus Aſcenſuſve; ſive, quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur.

Idemque aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

PUta; Tantundem ponderant Unum Pondo per Duo Spatia, atque Duo Pondo per unum Spatium, ſurſum deorſumve (eodem tempore) ferenda. (Quippe utrobique Duplum Unius Pondo per Unum Spatium.) Adeoque Duo Pondo per Duo ſpacia, quadruplum ponderabunt; Unius Pondo per Unum Spatium eodem tempore ferendi. Et in reliquis proportionibus ſimiliter.

Cum enim ea ratione plus ponderant Gravia, cæteris paribus, qua ſunt majoris Ponderis, (per 1 hujus;) quaque plus Deſcenditur, (per 4 hujus;) Ea ratione ponderabunt (utriuſque ratione habita) qua pollent eorum (ſecundum utramque conſiderationem) Deſcenſus Aſcenſuſve: Hoc eſt, (per 5 hujus,) ea quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur. Quod erat demonſtrandum.



Exempli

Exempli gratia: Si duo Gravia (ſeu Vires Motrices) V, P, ſint, vel Pondere æqualia, & (pro ſitu quo ponuntur) æqualiter (dum moventur) aut Deſcenſura aut Aſcenſura; vel, quod Gravius eſt, in eadem ratione (eodem tempore) minus ſit Deſcenſurum; Æquiponderabunt: (propter Deſcenſus Aſcenſuſve æquipollentes, per 5 hujus.) Sin alterius præpolleat, quæ ex Pondere & Altitudine oritur, Deſcenſus magnitudo: præponderabit illud; atque in eadem ratione cum illa præpollentia. Puta; Deſcenſus Ponderis 2 P per Altitudinem 3 D, cum Deſcenſu Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D comparatus, Æquipollebit; (propter $2\times3=3\times2$;) adeoque quæ ſic movenda ſunt, Æquiponderabunt. At, Deſcenſus Ponderis 2 P per Altitudinem 4 D, Deſcenſui Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D, præpollebit, (propter $2\times4>3\times2$;) Adeoque, quod ſic movendum erit, præponderabit. Et in aliis ſimiliter. Fig. 37, 38, 39, 40.

PROP. VIII.

Si (cæteris paribus) ad duos (pluresve) motus æqualiter propendeat Grave, (vel ex pluribus conjunctis Gravibus Aggregatum,) neque ad alium ullum magis propendeat: Nullo feretur.

Sin ad unum aliquem, præ cæteris, maxime propendeat: illo (niſi alias impeditum) feretur.

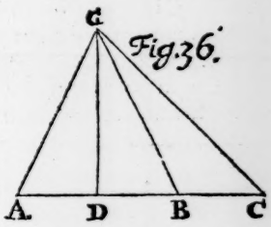


Fig. 36.

Idem intellige, mutatis mutandis, de quacunque Vi Motrice.

PUta; Si ad A, B, æqualiter propendeat Grave G: neutra feretur. Nam (per 12 Cap. 1.) propenſiones contrariæ (ſiquidem utrinque ſimul ferri non poſſit) cum ſint Æquales, ſe mutuo perimunt. (Et ſimiliter ſi ad plures adhuc motus æqualiter propenderet.) Sed nec alio feretur motu (ſiquis ſit) cui minus propendeat; puta ad C. Nam (per eandem) huic præpolleret utravis duarum ad A, B, Propenſio; & grave præriperet. Adeoque, ſi ad nullum magis propendeat, nullo feretur. Quod erat primo probandum.

Sin ad unum aliquem motum, puta ad D, quam ad cæterorum ullum, magis propendeat: ſingulis hæc præpollebit; Adeoque (niſi alias impeditum) hac feretur Grave: (per eandem 12 Cap. 1.) Quod itidem probandum erat.

SCHOLIUM.

AT interim, nequis metuat, imperfectam eſſe hanc Demonſtrationem, eo quod, utut conatus ſeu Propenſio ad D uni cuivis ex reliquis præpolleat, non inde tamen ſequatur, quod præpolleret itaque & ſimul omnibus, cum tamen omnes huic adverſentur: Monendum hic erit; non cum ſimul omnibus reliquorum comparandum eſſe conatum hunc ad D, ſed cum ſingulis ſigillatim; eo quod non ſimul omnibus illis ferri poſſit, ſed nec pluribus ſimul, ſed uno ſaltem ex omnibus: Adeoque, conatus ad D, ſi ſigillatim ſingulis præpolleat, omnibus præripiet grave.

Secus autem omnino eſt, ubi plures conſentientes conatus, uni alicui adverſantur. Puta, ſi plura Minora gravia, uni alicui (ſingulis quidem, ſed non omnibus) Majori, in oppoſita Libræ lance, contra-ponderarent. Quamquam enim Majus illud in una lance, reliquorum ſingulis in altera, præpolleat; Minora tamen hæc ſimul ſumpta, Libram in ſuas partes trahent; Quia, cum ſimul omnes illi conatus minores in eundem motum conſpirant, pro Conjunctis habendi ſunt conatibus, non Diſparatis. Contra quam hic obtinet.

Quodque hic monemus, alibi (ſiqui ſimiles occurrunt caſus) intelligendum erit.

PROP.

PROP. IX.

Gravis in ſuperficie Sphærica, Terræ concentrica, utcunque moti, nullus eſt vel Deſcenſus vel Aſcenſus.

Idem dicendum eſt, de Plano Horizontali; dummodo, propter Parvitatem plani & immenſam à Centro diſtantiam, quaſi cum illa Sphærica ſuperficie coincidens habeatur.

Idem intellige, mutatis mutandis, in alia Vi motrice.

Fig. 30. $CB=CD.$ $CB-CD=0.$

PUta; Si à B ad D, in ſuperficie Sphærica, Terræ concentrica, moveatur grave: (vel etiam in Horizontali Plano, quouſque hoc cum illa coincidens habeatur;) Nihilo fit vel Propius vel Remotius à Centro Terræ; (propter æquales CB, CD, Sphæræ radios:)

Adeoque (per 3 hujus) non vel Deſcendit quicquam vel Aſcendit ſic latum Grave. Quod erat propoſitum.

Idem in motis ab alia Vi Motrice, mutatis mutandis, ſimiliter oſtendetur. Nempe, nihil vel profeciſſe, vel contra, Vim illam; dummodo ſecundum Vis Motricis Directionem nihil vel proceſſerit vel receſſerit, utcunque alias moveatur.

PROP. X.

Gravis per rectam Horizonti perpendicularem Deſcendentis, Deſcenſus tantus eſt quanta eſt ea recta per quam fertur. Et ſimiliter Aſcendentis Aſcenſus.

Adeoque Oblique vel Deſcendentis vel Aſcendentis, tantus quanta eſt perpendicularis æque alta.

Idem intellige, mutatis mutandis, de alia Vi motrice.

$ABC-BC=AB=ABC-DC.$

Fig. 30. $DC-EC=BEC-EC=BE.$

PUta: Si in ABE recta, quæ ad Horizontalem rectam HB perpendicularis ſit, (adeoque ad C centrum Terræ recta tendit, per 19 Elemen. 3.) feratur Mobile, ab A vel E, ad B: Manifeſtum eſt, tanto vel propius vel remotius à Centro fieri, quanta eſt ipſa AB, vel EB, recta qua fertur, (per 3 Elemen. 1.) Adeoque (per 3 hujus) tantundem vel Deſcendere vel Aſcendere. Quod erat propoſitum.

Adeoque; Si utcunque Oblique, ab A vel E, feratur ad D punctum, quod tantundem atque ipſum B à Centro diſtet: tantundem utrobique vel Deſcendiſſe vel Aſcendiſſe cenſendum erit; per 3 hujus: Hoc eſt (per modo demonſtrata) quanta eſt AB, vel EB, perpendicularis æque alta. Quod item probandum erat.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab alia Vi, ſimiliter oſtendetur.

PROP. XI.

Gravis, per rectam utcunque declivem deſcendentis, Deſcenſuum Altitudines ſunt emenſis Longitudinibus proportionales. Atque Aſcenſuum ſimiliter.

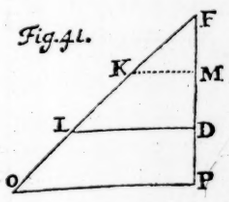
(Intellige; Dummodo planum Horizontale, cum ſuperficie Sphærica, Terræ concentrica, coincidens habeatur. Et ſimiliter in ſequentibus aliquot, quæ hinc dependent.)

Idem de alia Vi, mutatis mutandis, intelligendum.

FO.

FO. FL :: FP. FD.

Fig. 41.



SIt PO, Horizontalis recta; FP ad Horizontem perpendicularis; FO, inclinata recta, per quam vel Descendit vel Ascendit Grave; Et rectæ PO, parallela DL, (trianguli crura secans proportionaliter, per 2 Elem. 6.) Ergo: ut FO, ad FL, Longitudo ad Longitudinem; sic FP, ad FD: Hoc est, (per 3 & 10 hujus,) Descensus ad Descensum (si Deorsum,) vel (si sursum moveatur) Ascensus ad Ascensum. Quod erat propositum.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab alia Vi quavis, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

Supponit hæc Demonstratio: Horizontalis rectæ PO, puncta omnia, ut P, O, æque-alta: adeoque PO rectam, quasi in superficie Sphærica, Terræ concentrica, jacere. Sin ἀκριβῶς loquamur, pro rectis PO, DL, substituendi sunt arcus circulares, Terræ concentrici; (& quidem pro singulis in FO punctis, mutabitur Perpendiculi positio, & inclinatio declivis rectæ:) Sed tantillum à Rectis differunt Arcus illi, ut pro Rectis tuto usurpari soleant, ob causas ad Def. 15. Cap. 1. memoratas.

PROP. XII.

Rectis, sive ad Horizontem perpendicularibus, sive utcunque inclinatis; Si per Æquales Longitudines feratur Grave: Descensuum Ascensuumve Altitudines, sunt Longitudinibus portionum æque-altarum reciproce proportionales.

Si, per Inæquales Longitudines ferantur: Descensuum Ascensuumve Altitudines, sunt in ea ratione quæ componitur ex ratione Longitudinum per quas fit motus, & reciproca Longitudinum portionum æque-altarum.

Adeoque; Si emensæ Longitudines, sint Longitudinibus æque-altis proportionales: Descensus Ascensusve sunt æquales.

Idem intellige, mutatis mutandis, de alia Vi motrice.

FO. FP :: FL = FP. FD :: FK. FM.

$mL.\ L :: M = D.\ \frac{1}{m}D :: nM.\ \frac{n}{m}D.$ Fig. 41.

SIt FP, ad Horizontem recta; FO, inclinata: per FP, descendat P Grave: in FO, grave L; per Longitudinem FL, rectæ FP æqualem. Jungatur PO Horizontalis recta, (abscindens portiones FP, FO, æque-altas:) &, huic parallela, LD. Descensus itaque gravis P, tantus est quanta recta FP; gravis L, quanta est recta FD; (per 10 hujus.) Estque (per 2 Elem. 6.) ut FO (longitudo portionis obliquæ,) ad FL, vel huic æqualem FP, (longitudinem perpendiculi æque-alti:) Sic, vice versa, FP (altitudo Descensus, in perpendiculo descendentis, P,) ad FD (altitudinem descensus, oblique descendentis L, per longitudinem æqualem.) Idemque de Ascendentium per easdem LF, PF; Ascensibus, similiter ostendetur. Quod erat probandum.

Adeoque; Si per Inæquales Longitudines ferantur; (puta, per FP; & FK = ½FP;) erunt Descensus Ascensusve, in ratione quæ ex illa, & longitudinum per quas feruntur, composita; (nempe FM = ½FD.) per præced. Quod porro probandum erat.

Ideoque; (per 6 Cap. 1.) Si rationes illæ, (nempe, reciproca portionum æque-altarum, & directa longitudinum emensarum,) sint invicem reciprocæ; Hoc est, si longitudines emensæ, sint longitudinibus æque-altis proportionales; (Puta, FL, FD, longitudines emensæ, ipsis FO, FP, longitudinibus æque altis, proportionales:)

les:) Deſcenſuum Aſcenſuumve Altitudines, æquales erunt. Quod erat ultimo probandum.

Idem viribus aliis motricibus facile accommodabitur.

PROP. XIII.

Gravium, per rectas utcunque ad Horizontem inclinatas, Deſcenſus, in ea ratione pollent, quæ componitur ex rationibus & ponderum, & Longitudinum emenſarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Atque Aſcenſus ſimiliter.

Idemque motis ab alia Vi motrice facile accommodabitur.

VAlent enim (per 5 hujus) in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compoſita: Hoc eſt, (per præcedentem,) ex rationibus Ponderum, & Longitudinum emenſarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

PROP. XIV.

Rectarum Declivitas Longitudine æqualium, eſt Altitudinibus proportionalis.

Rectarum Declivitas Æque-altarum, eſt Longitudinibus Reciproce proportionalis.

Adeoque; Rectarum quarumvis Declivitas, eſt in ea ratione, quæ ex ratione Altitudinum & Reciproca Longitudinum componitur.

Atque; Si Rectarum Longitudines ſint Altitudinibus proportionales; earum Declivitas æqualis eſt.

Quod & aliis perinde ac gravium motibus accommodabitur.

$$\frac{A}{L}, D. \frac{A}{L}\frac{A}{L}, \frac{2}{1} D. \frac{A}{L}\frac{A}{L}\frac{A}{L}, \frac{1}{2} D. \frac{A}{L}\frac{A}{L}\frac{A}{L}\frac{A}{L}, \frac{3}{2} D. \frac{A}{L}\frac{A}{L}\frac{A}{L}\frac{A}{L}\frac{A}{L}, \frac{2}{2} D = D.$$

$$\frac{A}{L} . D :: \frac{mA}{L} . mD :: \frac{A}{nL} . \frac{1}{n} D :: \frac{mA}{nL} . \frac{m}{n} D :: \frac{mA}{mL} . \frac{m}{m} D = D.$$

A Puncto F, ducantur æquales rectæ quotlibet F P, F O, F B, quæ continuatæ occurrant Horizontali Rectæ (vel Plano ſaltem) in punctis P, S, T.

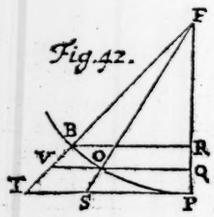


Fig. 42.

Rectarum F P, F O, F B, longitudine æqualium, Declivitates, ſunt earum Altitudinibus, puta, F P, F Q, F R, proportionales. per Def. 17, 18. Cap. 1.

Rectarum F P, F O S, F B V T, æque-altarum, Declivitates, ſunt earum Longitudinibus, hoc eſt, ipſis F P, F S, F T, Reciproce proportionales. per eaſdem Def. 17, 18. Cap. 1. Quæ erant demonſtranda.

(Quas quidem rationes eaſdem eſſe; adeoque geminam quæ habetur Def. 18. Cap. 1. *Majoris Declivitatis* definitionem tantundem valere, (& *Minoris* ſimiliter;) hinc conſtat: Quoniam, Sive ſumantur rectarum F P, F O S, portiones longitudine æquales F P F O, quarum Altitudines ſint F P, F Q; Sive portiones æque-altæ F P, F S, quarum longitudines reciprocæ ſunt F S, F P, hoc eſt F S, F O; Eadem utrobique provenit Declivitatum ratio. Nam, ut F P, ad F Q: ſic eſt F S ad F O: per 2 Elem. 6. Similiter, in rectis F P, F B T; portionum æqualium F P, F B, altitudines F P, F R; & portionum æquealtarum F P, F T, longitudines reciprocæ F T, F P, hoc eſt F T, F B; proportionales ſunt: per 2 Elem. 6. Item; rectarum F O, F B V, portionum æqualium F O, F B, altitudines F Q, F R; & portionum æque-altarum F O, F V, longitudines reciprocæ F V, F O, hoc eſt F V, F B; proportionales ſunt: per 2 Elem. 6.)

Ideoque;

Ideoque; rectarum, puta FP, FV, Declivitates ſunt in ratione FP ad FR; nempe in ratione quæ componitur, ex Altitudinum ratione, puta FP ad FQ; atque FQ ad FR, ſive FV ad FB, hoc eſt FV ad FP, reciproca Longitudinum. Quod itidem demonſtrandum erat.

Adeoque (per 6. Cap. 1.) Si rationes illæ (directa altitudinum, & reciproca Longitudinum) ſint invicem reciprocæ; hoc eſt, ſi Altitudines ſint Longitudinibus directe proportionales; Declivitates ſunt æquales. Quod erat ultimo demonſtrandum.

SCHOLIUM.

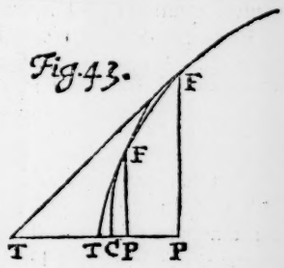
NOtandum hic; Dummodo Terræ Centrum intelligatur tanquam infinite diſtans; eadem eſt ubique ejuſdem rectæ, puta FBT, Declivitas; propter parallelam Perpendiculorum poſitionem: Si vero intelligatur ut in certa diſtantia finita; varia eſt in ſingulis punctis Declivitas: Quippe cum Perpendicula omnia in Centro coeant; quanquam eadem ſit directio Motus, Motricis tamen vis directio ſubinde mutatur: adeoque alia erit illius ad hanc Poſitio, aliuſque ad perpendiculum Angulus, puta in B quam in F puncto: Quæque ex præſenti Figura & demonſtratione colligitur Declivitas, ſoli F puncto convenit; aliaque pro aliis, ut B, V, T, punctis ſimiliter colligenda erit; demiſſis inde ad Terræ Centrum Perpendiculis.

PROP. XV.

Lineæ curvæ Declivitas, in ſingulis reſpective punctis, eadem eſt atque rectæ ibidem contingentis. Et ſuperficiei curvæ, eadem atque ibidem contingentis Plani.

Quod aliis perinde atque Gravium motibus accommodabitur.

SIt FP, perpendiculum; FC, curva; FT, recta contingens. Cum eandem curvam in variis ſui partibus varie declivem eſſe conſtet, (decliviorem alibi, alibi minus declivem:) Eandem dico, in F puncto, declivitatem FC curvæ, atque contingentis rectæ FT, cenſendam eſſe. Cum enim CFT angulus contactus (ſive Circulorum, per 16 Elem. 3. ſive Conicarum ſectionum, per 32 Lib. 1. *Apollonii*; ſive, quod ſimiliter oſtendetur, curvarum quarumvis;) ſit vel nullius magnitudinis, (quod nos, peculiari Tractatu, *De Angulo Contactus*, multis oſtendimus;) vel ſaltem, infinite exiguæ, (utpote qui ſit vel minimo poſſibili rectilineo minor; quod apud omnes in confeſſo eſt:) eadem erit, in puncto F, Directio, ſive FC curvæ, ſive FT contingentis rectæ; (ſaltem, differentia quavis aſſignabili minor erit:) Adeoque, & eadem utriuſque in illo puncto Declivitas. Quod erat propoſitum.



Idemque de ſuperficiei curvæ punctis ſingulis, ſimiliter oſtendetur.

PROP. XVI.

Si ad duos motus ita ſit comparatum Grave, cæteris paribus; ut, altero ſi feratur, Deſcenſurum ſit; Aſcenſurum, ſi altero: Ea præponderat, qua Deſcenſurum eſt.

Si, altero latum, plus Deſcendet; altero, minus: Ea præponderat, qua plus deſcendet.

Si, altero, plus Aſcendet; altero, minus: ea minus Repugnat, qua minus Aſcendet.

Sin æqualiter, utrovis feratur, vel Deſcendet, vel Aſcendet: Æquiponderat utrinque.

Contra vero: Qua, cæteris paribus, Præponderat, vel minus Repugnat; Ea vel plus Deſcenſurum eſt, vel Aſcenſurum minus: Sin neutra; Æqualis utrinque futurus eſt vel Deſcenſus vel Aſcenſus.

Fig. 31. PUta; Si in puncto G ſit conſtitutum Grave; vel per GA, vel per GB ferendum: ſitque GA, cæteris paribus, vel magis deorſum, vel minus ſurſum, quam GB: Per illam potius quam per hanc feretur. Sin æqualiter; neutra propendet magis. Et contra.

Sequitur ex 4 hujus.

PROP. XVII.

Ea præponderat Grave, cæteris paribus, & in ea ratione, qua motus eſt Declivior: Quaque eſt Acclivior, magis repugnat.

Adeoque, omnium maxime in perpendiculo.

(Quare & Ponderis ſimpliciter tanta Vis cenſeri ſolet, quantam in Perpendiculo habet.)

Quaque æqualiter vel Declivis eſt vel Acclivis, æqualiter vel Propendet vel Repugnat.

Suntque hæc perinde vel Gravium motibus, vel aliis, accommodanda.

Fig. 42. PUta; In rectis FP, FOS, FBT; ea ratione ponderat Grave, qua ſunt Declives illæ rectæ. Eſt enim Declivitas in Reciproca ratione Longitudinum æque-altarum; ſive, quod eodem recidit, in Directa Altitudinum æque-longarum; (per 14 hujus.) Hoc eſt, in ratione Deſcenſuum (Aſcenſuumve) cæteris paribus; (per 10, 12, hujus:) Adeoque, in ea ratione ponderant; per 4 hujus. Quod erat propoſitum.

Quare &, in perpendiculo, omnium maxime: ut quæ ex æque-altis Breviſſima eſt; & ex æque-longis Altiſſima.

Et propterea (quod Definitionis inſtar eſto) tantam Ponderis cujuſvis Vim cenſemus, quantam in Perpendiculo habet.

Quodque de FT recta oſtenſum eſt; idem de curvæ FC puncto F, intelligen-
Fig. 43. dum eſt. Utpote cujus Declivitas, adeoque Tendentia deorſum, eadem eſt atque Contingentis rectæ FT: (per 15 hujus:) Adeoque & gravitatio; per 4 hujus.

SCHOLIUM.

Fig. 43. MOnendum tamen eſt: In rectarum, ut FT, punctis ſingulis, eandem intelligendam eſſe gravis Ponderationem, dummodo intelligatur Centrum Terræ tanquam infinite diſtans; adeoque, propter Perpendiculorum quaſi paralleliſmum, eandem ubique Declivitatem. Si tamen (quod ad Prop. 14. monuimus) Centrum intelligatur in certa diſtantia finita; mutabitur, in ſingulis punctis, rectæ Declivitas; adeoque & Gravis, in eo puncto, ponderatio. Quo caſu; quod de Curva modo dictum eſt, idem de recta pariter dicendum; Nempe eam eſſe Gravis, *in rectæ* FT *puncto* F, Ponderationem, quæ ex rectarum FT, FP, reciproca ratione colligitur: Atque in aliis punctis ſimiliter judicandum. Quippe, ut in curvis, ſic rectis, pro mutata in ſingulis punctis Declivitate, mutabitur & Ponderatio.

Verum cum Centrum ſoleat, tanquam infinite diſtans, reputari; & Perpendicula parallela: tuto ſolent (quoad ſenſum) & rectæ in ſingulis ſui punctis pariter Declives æſtimari. Quanquam (quod & ſubinde antea monuimus,) ſi tantæ longitudinis rectæ, Planave tantæ amplitudinis, conſideranda veniant; ut notabile hinc diſcrimen emergat; etiam hujus mutatæ Declivitatis, adeoque & Ponderationis, habenda erit ratio.

PROP.

PROP. XVIII.

Si Grave, ubivis in eodem Perpendiculo, vel Incumbat, vel Dependeat, vel in ipſo ſuſtentationis puncto intelligatur, (vel cum ipſo ita utcunque connexum, ut vel ſimul quieſcant, vel ſimul æqualiter moveantur contrariæ vires; altera ſecundum, altera contra directionem ſuam:) Quo ſuſtineatur, requiritur, æqualis Ponderi, vis Impediens; atque hæc ſufficit.

Idemque intellige, mutatis mutandis, de quacunque Vi motrice.

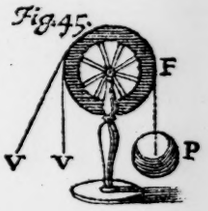
Fig. 44.



INtelligatur Pondus (ſeu Vis quælibet Motrix) in P; atque ibidem vis Impeditiva motus V. Si Vis Ponderis (ſeu Motiva) Major ſit; præpollebit: adeoque deſcendet (ſive ſecundum Directionem ſuam feretur,) non ſuſtinebitur. Si Æqualis, æquipollebit: adeoque ſuſtinebitur Pondus. (per 11. Cap. 1.) Unde conſtat propoſitum. (Si Vis Impediens ſit major; eo fortius impediet: Non requiritur tamen; quia æqualis ſufficit.)

Idem oſtendetur; Si ubivis in eodem perpendiculo (ſive Directionis Linea) conſtituatur P; dummodo quantum Deſcendit (ſive ſecundum directionem ſuam movetur) P, tantum deprimatur (ſeu contra directionem ſuam revellatur) contraria Vis V. Nam (per 5 hujus) æqualium virium æquales progreſſus æquipollent: Adeoque, cum ſint contrariæ, (puta, ſecundum directionem ſuam altera, altera contra ſuam,) propter Impedimentum Momento æquipollens, non fit motus; (nedum ſi Impedimentum majus ſit:) Fit autem; ſi minus valet impedimentum. per 11 Cap. 1.

Fig. 45.



Idem oſtendetur; Si utcunque cum Pondere, ſeu Vi Motrice, ita connectatur Vis Impediens, ut contrarii motus (alter ſecundum, alter contra Virium Directionem,) ſint æquales. Puta; Si intelligatur P Pondus, ex funiculo PF (brevi an longo perinde eſt) libere dependens, qui orbiculo circumpoſitus ex adverſa parte pertingat ad V; ibique æquale Pondus ſeu Vis æqualis applicetur; ita quidem ut, deſcendente P pondere, tantundem aſcenderet, vel contra directionem ſuam revelleretur, pondus ſeu Vis V; (ſive contra; aſcendente P, tantundem deſcenderet V, &c.) Nam (per 5 hujus) æqualium Virium, æquales progreſſus, æquipollent: Adeoque, contrariæ cum ſint, non fiet motus; fiet autem, ſi Vis Impediens minor ſit. Per 11 Cap. 1.

SCHOLIUM.

HInc ſequitur; **Gravia ex filo longiori an breviori dependentia, tantundem ponderare: Item, propius an remotius diſtent quæ incumbunt pondera, aut dependent; dummodo in eodem perpendiculo.**

Hinc etiam ſequitur; In conſtruendis Machinis; Vectes, Juga, Fulcra, Funes, cæteraque Machinarum armamenta, tantæ firmitudinis intelligenda eſſe ſingula, ut oneri quod reſpective ſuſtinent ſint ferendo paria. Alioqui citius rumpetur Machina, vel incurvabitur, quam perficietur exſpectatus motus.

PROP. XIX.

Gravia, cæteris paribus, in ea ratione gravitant, quæ componitur ex rationibus Ponderum & Declivitatum; (ſive Ponderum & Altitudi-

num rectarum longitudine æqualium; vel Ponderum & reciproca Longitudinum rectarum æque-altarum.)

Adeoque; Si Pondera ſint Æqualia; in ratione Declivitatum; Si Declivitates ſint Æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera ſint Declivitatibus reciproce proportionalia, (ſive proportionalia Longitudinibus æque-altis;) æqualiter gravitant.

Idemque aliis Viribus Motricibus accommodabitur.

$$\frac{P.}{D.}\quad\frac{nP.}{D.}\quad\frac{P.}{mD.}\quad\frac{nP.}{mD.}\quad\frac{nP.}{\frac{1}{n}D.}$$

$$\overline{PD.\ G} :: \overline{nPD.\ nG} :: \overline{mPD.\ mG} :: \overline{mnPD.\ mnG} :: \overline{PD.\ G}.$$

PUta: Si Pondus P, in Declivitate D, gravitet ut G: Pondus *n*P, in eadem declivitate, gravitabit ut *n*G, (per 1 hujus:) Adeoque, in Declivitate *m*D, gravitabit ut *mn*G, (per 17 hujus:) Hoc eſt, in ratione ex Ponderum & Declivitatum rationibus compoſita, (per 2 Cap. 1.) Hoc eſt, (per 14 hujus,) ex Ponderum & Altitudinum rectarum Longitudine æqualium, vel ex Ponderum & reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

Corollaria conſtant, ex 4 & 6 Cap. 1.

Alia Demonſtratio.

Fig. 41. Idem ſic alias demonſtrabitur. In F P ad Horizontem recta; ſit Pondus D; & huic æquale L, in inclinata F O æque-alta. Et connecti intelligantur Pondera D, L, filo flexili D F L, punctum F immobile ambiente: ut moto D, verſus P, tantundem moveatur L verſus F; & contra. Erit ut F P ad F O; puta ut *m* ad 1; ſic vice verſa, Deſcenſus Aſcenſumve ponderis L in hac, ad Deſcenſum Aſcenſumve ponderis æqualis D in illa; (per 12 hujus:) adeoque & (quæ huic proportionalis eſt, per 5 & 17 hujus,) Gravitatio Ponderis in L, ad æqualis ponderis D gravitationem. Hoc eſt, ſi D gravitat ut G; æquale pondus L, gravitabit ut *m* G; hoc eſt, in reciproca Longitudinum æque-altarum; ſive in Declivitatum ratione.

Adeoque; Si Inæqualia ſint L, D, pondera; Puta L = *n*D: gravitabit illud L, ut *mn* G: (per 1 hujus:) Hoc eſt, in ratione quæ ex Ponderum & Declivitatum rationibus componitur; ſive ex ratione Ponderum & reciproca Longitudinum æque-altarum.

Quapropter; Si Pondera ſint Declivitatibus reciproce proportionalia, ſive Proportionalia Longitudinibus æque-altis; æque gravitant. per 6 Cap. 1. Quæ erant demonſtranda.

PROP. XX.

Si, circa Punctum quodvis (extra Terræ Centrum) in Horizontali recta, ut Centrum, Recta linea, manente uno extremo, altero deſcribat Circuli peripheriam, in plano ad Horizontem ſive recto, ſive utcunque inclinato: Altiſſimum peripheriæ punctum, illud eſt, quod ſupra Horizontalem rectam eſt in recta ad illam perpendiculari; Humillimum, illud quod eſt in eadem perpendiculari infra Horizontalem rectam: Punctorum vero in peripheria intermediorum, illud Altius eſt, quod eſt ſupremo propius; Inferius, illud quod eſt propius infimo, ſeu à ſupremo remotius: Quæ autem æqualiter utrinque vel à ſummo vel ab imo diſtant; ſunt æque-alta.

Idem, mutatis mutandis, aliis motibus accommodabitur.

Circa

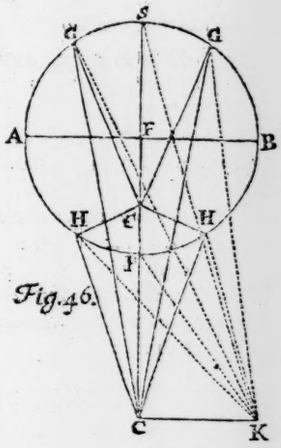


Fig. 46.

Circa Punctum F (quod Terræ Centrum non ſit) in Horizontali recta AB, (cui ad rectos angulos inſiſtit S F P recta,) converſa recta F A intelligatur peripheriam A S B P deſcribere, in plano ad Horizontem vel recto vel utcunque inclinato. Erit, inquam, peripheriæ punctum Altiſſimum, S; Infimum, P: Intermediorum vero, ut G, H; quod propius ab S diſtat, ut G, Superius; quod propius à P, ut H, inferius; Quæque æqualiter vel ab S, vel à P diſtant; puta G, G; vel H, H; æque-alta.

Sit primum ASBP peripheria, in plano ad Horizontem recto: Adeoque Centrum Terræ in eodem plano, (per 19 Elem. 3.) puta, in C, extra Circulum. Ductis, ab aſſignatis punctis, lineis rectis, in C Terræ Centro coeuntibus: conſtabit propoſitum; per 8. Elem. 3.

Sin tantæ magnitudinis intelligatur Circulus A S B P, ut ad ipſum Terræ Centrum, vel ultra, pertingat; ſitque C, verbi gratia, vel intra Circulum, vel in ipſa peripheria. Conſtabit propoſitum, per 7 Elem. 3.

Sit deinde, Circuli planum A S B P non ad Horizontem rectum, ſed utcunque inclinatum: Adeoque nec Centrum Terræ in eodem Circuli plano, puta in C; ſed extra planum, ut in K: Unde, ad obliquum Circuli planum, duci intelligatur K C perpendicularis, (punctum C, omnium in obliquo Circuli plano punctorum, proximum ad Terræ Centrum, adeoque omnium infimum deſignans.) Et jungantur tum S C, G C, H C, P C; tum S K, G K, H K, P K. Oſtendetur, ut prius, (ſive contingat C intra vel extra Circulum,) omnium ad C ductarum, longiſſimam eſſe S C; breviſſimam, P C; item G C, longiorem quam H C; æquales autem tum G C, G C; tum H C, H C. Adeoque, ſumptis quadratis; Quadratum S C, maximum; P C, minimum; G C, majus quam H C; Quadrata G C, G C, item H C, H C, invicem æqualia. Ideoque, addito communi augmento, quadrato C K; erunt quadratorum S C, C K, aggregatum, hoc eſt (per 47 Elem. 1.) quadratum S K, omnium maximum; quadratorum P C, C K, hoc eſt quadratum P K, minimum; quadratorum G C, C K, hoc eſt quadratum G K, majus quam quadratorum H C, C K, hoc eſt quadratum H K; quadratorum G C, C K, & G C, C K, hoc eſt quadrata G K, G K, invicem æqualia; & ſimiliter, quadratorum H C, C K, & H C, C K, hoc eſt quadrata H K, H K, invicem æqualia. Ergo &, ſumptis lateribus; Recta S K, omnium ad K ductarum, maxima; P K, minima; G K, longior quam H K; & G K, G K, item H K, H K, invicem æquales. Adeoque, punctum S, omnium à Terræ Centro Altiſſimum; P, Infimum; G, altius quam H; & G, G, vel H, H, æque-alta. Quod erat propoſitum.

Alia Demonſtratio.

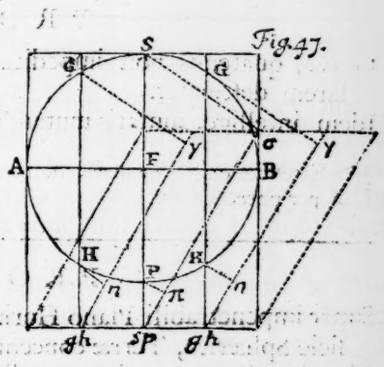


Fig. 47.

Idem oſtendetur, Si intelligatur Centrum Terræ tanquam infinite diſtans. Nam, ductis à punctis S, P, G, H, ad ſubjectam rectam Horizontalem quamvis perpendicularibus: Si planum Circuli ſit ad Horizontem Rectum; conſtabit propoſitum, ex Prop. 15. Elem. 3.

Si vero planum Circuli ad Horizontem ſit Obliquum. Intelligantur ab aſſignatis punctis S, P, G, H, demitti ad planum Horizontale quodvis ſubjectum perpendiculares S σ, P π, G γ, H η; & ab iiſdem punctis, ad communem planorum Horizontalis & Inclinati Sectionem, totidem ad angulos rectos S s, P p, G g, H h: (& compleantur Triangula.) Oſtendetur, (ex 10 Elem. 11.) has illis (propter ſimilia triangula S σ s, P π p, G γ g, H η h.) proportionales eſſe. Adeoque; quæ à communi Sectione *g s p h* longius diſtant puncta in obliquo plano

plano poſita, eadem ab illo Horizontali plano longius diſtabunt, eruntque (ſecundum perpendiculum) altiora. Oſtenſo igitur ut prius (ex 15 Elem. 3.) à communi ſectione *gsph* (quæ ipſa eſt Horizontalis recta;) oſtendetur etiam, ab ipſo ſubjecto plano Horizontali *gshγσ*; punctum S, maxime; P, minime; G,G, & H, H, æqualiter; & G, magis quam H, diſtare. Unde conſtat propoſitum.

SCHOLIUM.

QUoniam (ut ſupra monitum eſt aliquoties) conſideratur Terræ Centrum nunc quaſi infinite diſtans, nunc autem tanquam in diſtantia finita; adeoque perpendicula, nunc ut parallela, nunc ut in puncto concurrentia. Viſum eſt propoſitionem hanc ſecundum utramque ſuppoſitionem demonſtrare.

Notandum interim in propoſitione diſerte dici, *In plano ad Horizontem vel Recto, vel utcunque Inclinato*: Quoniam in Horizontali plano, hoc eſt, in plano Horizonti parallelo, nullum erit peripheriæ vel Altius vel Humilius punctum, ſed æque-alta omnia.

PROP. XXI.

Deſcendens Grave, cæteris paribus, recta ad Horizontem Perpendiculari feretur: Ex obliquis vero, ea potius quæ minus eſt obliqua.
Aſcendens; contra.
Ponderat autem (pro varia Aſcenſuum Deſcenſuumve obliquitate) in ratione Rectorum Sinuum, Inclinationis ad Horizontem, ſive Complementi Obliquitatis.
Idemque aliis motibus accommodabitur.

Fig. 42. OStendetur enim (ex præcedente) rectarum longitudine æqualium, perpendicularem (ut FP) eſſe omnium altiſſimam; adeoque, & maxime declivem (per 14 hujus.) Hac igitur, præ cæteris feretur Deſcendens grave; contra vero, Aſcendens. per 17 hujus.

Ex obliquis vero, ut FO, FB; ſimiliter oſtendetur (ex præced.) illam quæ minus eſt obliqua, Puta FO, altiorem eſſe; adeoque (per 14 hujus) & magis declivem. Ideoque (per 17 hujus) per hanc potius latum iri Deſcendens Grave; Aſcendens, contra.

Utrobique vero ponderat Grave (Deſcenſum promovendo, adeoque Aſcenſum impediendo) in ratione FP, FQ, FR, altitudinum rectarum Longitudine æqualium FP, FO, FB, (per 14 & 17 hujus:) Hoc eſt (quod ex Trigonometricis conſtat) in ratione Sinuum rectorum, angulorum Inclinationis FPS, FOQ, FBR; qui ſunt angulorum Obliquitatis PFP, PFO, PFB, complementa. Quod erat propoſitum.

PROP. XXII.

Grave, quatenus non impeditur; per rectam Horizonti perpendicularem deſcendet.
Idem intellige, mutatis mutandis, in aliis motibus.

DEſcendet enim, quatenus non impeditur; per 2 hujus. Et, hac præ cæteris; per præcedentem.

PROP. XXIII.

Super impenetrabili Plano Horizontali conſtitutum Grave, vel ſuperficie Sphærica, Terræ concentrica; Gravitate ſua non movebitur.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque ſit Vis motrix. Nempe quum planum eſt Directioni virium ad angulos rectos.

Sit,

SIt, in B, Grave; impenetrabili Plano Horizontali HBO incumbens; vel ſuperficiei Sphæricæ, quæ ſit Terræ concentrica, DDB. Manifeſtum eſt (propter æquales Sphæræ radios) nullum in ipſa DDB Sphærica ſuperficie punctum, (nedum quod ſupra ipſam eſt, aut etiam ſupra planum Horizontale,) propius à Terræ Centro diſtare, quam ipſum B punctum. Adeoque; ſi nec ſuperficiem illam (ſive Sphæricam, ſive Horizontalem,) penetrare poſſit, (quod ſupponitur;) in nullas movendo partes, deſcendet, (per 3 hujus.) Cum itaque (per Def. Gravitatis) non niſi Deſcenſus ergo, gravitate ſua moveatur grave, nec poſſit (per jam demonſtrata) deſcendere: Non movebitur, gravitate ſua, ſic conſtitutum Grave. Quod erat Demonſtrandum. Fig. 30.

SCHOLIUM.

IDem oſtenderetur de Gravi, in B, ſuperficiei concavæ incumbenti quæ in B tangat Horizontale planum; ſeu cujus punctum infimum ſit ipſum B. Item, de convexa Sphærica cujus Centrum ſit ultra Centrum Terræ, quam tamen in B continget planum Horizontale; utpote cujus punctum infimum ſit ipſum B. Idem verum eſt de ſuperficie minoris Sphæræ quam ſic contingat B: non autem ob hanc cauſam, quia punctum illud non ſit reliquis altius, (eſt enim;) ſed propter Prop. 8. hujus: quippe non eſt una aliqua declivitas, reliquis omnibus major.

Per *Impenetrabile planum*, &c. illud intelligimus, quod, ea ſaltem quæ adhibetur Vi, non penetrabitur; utut Vi majore penetrari poſſit.

Notandum eſt hic porro; Dummodo, ob immenſam Centri Terræ diſtantiam, & expoſiti plani parvitatem, intelligatur Horizontale planum, cum ſuperficie Sphærica, terræ concentrica, coincidere; adeoque ipſius puncta ſingula: quaſi-æqualiter à Terræ Centro diſtare: perinde eſt, ſive in B, ſive in H, aliove Horizontalis *plani* HBO puncto, intelligatur Grave conſtitutum. Sin ἀκριβῶς conſideretur; non erit illud, niſi unius B puncti reſpectu, planum Horizontale. Quare & in H conſtitutum grave, poterit ad B moveri gravitate ſua; utpote punctum inferius.

PROP. XXIV.

Super impenetrabili plano ad Horizontem ſive recto, ſive utcunque inclinato, conſtitutum Grave; nec alias impeditum; per illam Plani rectam deſcendet quæ eſt rectæ Horizontali ad angulos rectos, deorſum. Quæ quidem recta, in erecto plano, eſt ipſum *Perpendiculum*; in obliquo plano, *Perpendiculi ſuccedaneum*, appello.

(Adeoque; eadem eſt, Deſcenſus Gravis in Declivi plano, ipſiuſque Declivis plani, tum Declivitas, tum Obliquitas, & Inclinatio.)

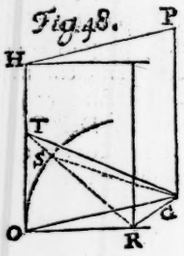
Et, univerſaliter; in quacunque ſuperficie Declivi, illo præ cæteris ductu feretur (ſiquis ſit,) qui eſt reliquis omnibus Declivior.

Idem intellige, mutatis mutandis, de motis ab alia quavis Vi motrice; Nempe ſecundum illam plani rectam feretur Mobile, (niſi alias impeditum,) quæ eſt ad angulos rectos illi rectæ quæ Lineam Directionis Virium ad angulos rectos ſecat.

SIt, in Declivis Plani puncto F, conſtitutum Grave; rectæque Horizontali AFB ad angulos rectos FP recta, in eodem Plano, deorſum. Oſtendetur (ex 20 & 14 hujus) omnium quæ in illo plano ſunt (nedum quæ ſupra planum) longitudine æqualium, ad F ductarum, Unicam FP rectam, maxime declivem eſſe. Adeoque (cum, propter impenetrabile planum, ad illas infra Planum ne tranſeat, impediri intelligatur) per ipſam FP (per 17 & 5 hujus,) niſi alias impediatur, deſcendet Grave. Quod erat demonſtrandum. Fig. 46, 47.

Idem aliis ſuperficiebus accommodandum erit, pro re nata; Nempe, cæteris paribus, illo ſemper ductu (ſiquis ſit) latum iri Grave, qui eſt cæteris omnibus declivior: per 17 & 5 hujus. Sin talis nullus ſit (reliquis omnibus declivior) ductus; non movebitur. per 8 hujus.

Alia Demonſtratio.



Poteſt hoc idem demonſtrari, ex Prop. 21. propter Obliquiorem alibi Deſcenſum: hoc modo.

In Declivis Plani PGOH puncto G, conſtitutum intelligatur Grave: Atque, in eodem plano, tum Horizontalis recta PG (nempe ea recta ſecundum quam Horizontale planum, per G tranſiens ſecat Declive planum,) tum huic ad angulos rectos GO: Indeque ad ſubjectum Planum Horizontale HOR, demiſſa perpendicularis GR: (Per quam itaque, niſi impediatur, deſcendet Grave; per 22 hujus.) Intelligatur autem, ob duritiem Declivi Plano ſubjectam, impediri ne penetret. Dico per GO deſcenſurum Grave.

Cum enim duo Plana Horizontalia, adeoque Parallela, alterum in HO, alterum in PG, ſecet idem declive planum PGOH (per conſtructionem:) erunt HO, PG, parallelæ rectæ. per 16 Elem. 11.

Item, propter PG rectam, rectis GO, GR, ad angulos rectos, (per conſtructionem,) erit ad planum OGR recta, (per 4 Elem. 11.) Adeoque & (huic parallela) HO, eidem OGR plano recta erit, (per 8 Elem. 11.) rectiſque OG, OR, ad angulos rectos; per 3 Def. Elem. 11.

Et, ſi Centro R in plano HOR, ducatur per O, peripheria OS; eam contingens HO, extra peripheriam jacebit; per 16 Elem. 3.

Si itaque ad rectæ HO, aliud quam O, punctum quodvis T, ducatur GT recta, & RT jungatur; ſecabit hæc peripheriam; Puta in S. Et, juncta GS, erit (propter GR ad planum Horizontale rectam; adeoque angulos GRO, GRS, æquales rectos; & RO, RS, æquales radios; rectamque GR communem) SG recta, æqualis rectæ OG; & angulus SGR æqualis angulo OGR; per 4 Elem. 1.

Eſt autem angulus TGR, major angulo SGR (parte ſui,) ergo & (huic æquali) angulo OGR major eſt. Adeoque Deſcenſus obliquior eſt per GT, quam per GO.

Cum igitur Grave, quam poteſt recta ad Centrum deſcendat, (per 21 hujus;) per GO potius quam GT feretur.

Atque ſimiliter de aliis ejuſdem Plani rectis oſtendetur. Adeoque à fortiori, de rectis ultra planum, aut etiam curvis.

Ideoque (cum nec Planum penetrare poſſit) per rectam GO (niſi alias impeditum) deſcendet Grave in G, (ut qui reliquis rectior eſt Deſcenſus:) Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

HAnc Demonſtrationem præcedenti ſubjungere viſum eſt, propter ea quæ apud Mechanicorum Scriptores de Obliquitate Deſcenſuum occurrunt, Angulique Obliquitatis magnitudine. At priorem ego prætulerim, quæ ex Declivitate, hoc eſt, ex Altitudine rectarum longitudine æqualium, vel Longitudine æque-altarum, dependet: tum ut ſimpliciorem; tum, præcipue, quoniam quod ex Obliquitate hac oritur Gravitationis impedimentum, Augmento longitudinis Deſcenſuum æque-altorum proportionale eſt; & non Obliquitatis Angulo; (quod ex jam dictis & poſt dicendis manifeſtum erit:) Adeoque illi potius, quam huic, ut veræ cauſæ referendum.

Hinc autem ſequitur; Eandem eſſe Deſcenſus Gravis in Declivi Plano, ipſiuſque Declivis Plani, ad Horizontem Inclinationem; (Nam, per Def. 5 & 6, Elem. 11. Angulus GOR eſt Inclinationis Menſura, tum rectæ GO, tum plani PGO, ad Horizontem HOR:) Adeoque eandem utriuſque tam Obliquitatem, tam Declivitatem. Nempe idem Obliquitatis Angulus OGR; eademque Declivitas ſive rectæ GO ad GR, ratio.

PROP.

PROP. XXV.

Obliquitas motus, ea ratione minuit Gravitationem, (adeoque Descensum impedit, adjuvat Ascensum;) qua Longior est obliqua recta, illam determinans, quam perpendicularis æque-alta; sive Secans Anguli Obliquitatis, quam Radius.
Idemque aliis motibus accommodabitur.

NAm (per 17 hujus) Grave, pro varia Declivitate, gravitat in ipsa Declivitatis ratione; hoc est (per 14 hujus) in reciproca ratione rectarum æque-altarum. Puta, qua ratione longior est F S vel F T obliqua, quam F P perpendicularis æque-alta; sive (quod in Trigonometricis dicitur) F S vel F T Secans Anguli Obliquitatis P F S vel P F T, quam F P Radius; Ea minus gravitat in F S vel F T ferendum grave, quam in F P. Quod erat probandum. Fig. 42.

Adeoque (per 17 Cap. 1.) in eadem ratione minus Descensum promovet, vel Ascensui repugnat; sive (quod eodem recidit) in ea ratione Descensus Obliquitate impeditur, & facilitatur Ascensus. Quod itidem probandum erat.

PROP. XXVI.

Obliquatio Plani in quo fit Motus; in eadem ratione minuit omnium in illo ferendorum Gravitationem: ea nempe quam ipsa Plani Obliquitas postulat.
Et in aliis motibus similiter.

SIt in Obliquo Plano G O T, recta quævis G T. Atque à puncto G, demittatur, ad Horizontale Planum T O R, perpendicularis G R. Atque, ad communem Planorum intersectionem T O normalis G O; (ut sit G O R Inclinatio Plani, per Def. 6. El. 11. & O G R Obliquitas.) Si igitur intelligatur G O T planum, super Horizontalem rectam O T erectum esse; erit utriusque rectæ G O, G T, communis Altitudo G O: In eodem vero Plano Obliquato, Communis Altitudo est G R. Ideoque, qua ratione G R brevior est quam G O, (hoc est, Radius quam Secans Anguli Obliquitatis,) eadem ob Plani Obliquationem minuitur Altitudo, (adeoque Declivitas, & Gravitatio, per 14 & 17 hujus) sive per G O, sive per G T, ferendi Gravis. Quod erat probandum. Fig. 48.

PROP. XXVII.

Grave, situ Declivi ferendum, sponte sua movebitur: Situ Horizontali (sive secundum Superficiem Sphæricam Terræ concentricam) Vi quantumvis exigua: Situ Acclivi; ea Vi movebitur quæ Impedimento ex Acclivitate (cum Pondere comparata) orto præpollet.
Idem aliis motibus accommodabitur.

PEr Declivem ductum, ut F P, F S, (adeoque Descendentem, per Def. 16. Cap. 1.) sponte sua (nisi alias impeditum,) feretur grave; per 2 hujus. Per Horizontale Planum, vel superficiem Sphæricam, Terræ concentricam, ut P H, (cum nullus sit vel Descensus vel Ascensus; per 9 hujus;) nec sponte sua movebitur, (per 23 hujus;) nec tamen motui adversatur, (per 4 hujus;) adeoque Vi quantumvis exigua movebitur, per 11 Cap. 1. Per Acclivem ductum, ut P F, P O, (adeoque Ascendentem, per Def. 16. Cap. 1.) motui adversatur Gravitas, (per 4 hujus,) impeditque,

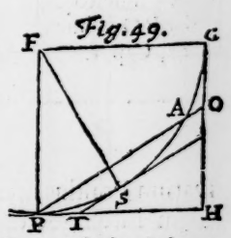


Fig. 49.

ditque, (per 8 vel 10 Cap. 1.) Huic tamen Impedimento Vis præpollens, movebit; per 11 Cap. 1. Quæ erant demonſtranda.

SCHOLIUM.

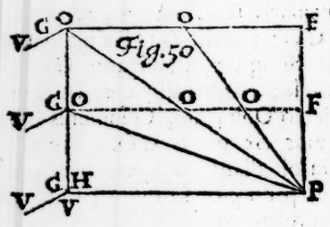
NOtandum vero, tum hic, tum toto hoc Capite, (aut etiam alibi,) ubi variam planorum motuumve, ſive Declivitatem, ſive Acclivitatem (quodque hinc oritur motus vel Adjumentum vel Impedimentum) conſideramus: Nullam omnino habitam eſſe rationem vel Reſiſtentiæ medii, vel Aſperitatis aut ſcabritiei planorum aut ſuperficierum ſuper quibus movetur, & ſiqua ſunt ejuſmodi Impedimenta alia: Sed ſolius, quod ex Obliquitate Deſcenſuum Aſcenſuumve oritur, Impedimenti vel Adjumenti: tanquam ſi in medio vacuo peragendus eſſet motus, nullaque aliunde remora adveniret. Quippe illa omnia ſunt huic conſiderationi plane extrinſeca; & ſeorſum, ſi opus eſt, perpendenda. Quanquam igitur, verbi gratia, ſuper Horizontali Plano, aut etiam aliquantum Declivi, nonniſi magna Boum aut Equorum Vi trahatur Plauſtrum: Non tamen illud ex plani Poſitione oriri cenſendum eſt; ſed ex aliis inſuper ſuperandis motus impedimentis, quorum hic rationem non habemus.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, data Vi, movere; pro varia motuum Acclivitate.
Idem Intellige, de quavis alia Vi Impediente, per aliam quam Directionis ſuæ lineam revellenda.

V. G:: *n*V. *n*G.

SInt PH, FG, rectæ Horizontales; FP, GH, perpendiculares. Atque intelligatur elevandum Pondus, in P: & huic affixum Filum flexile, ſeu Funiculus, PFGV; puncta fixa F, G, ambiens: & in V, Vis Motrix applicata. Adeo ut, quantum trahatur funiculi extremum, ſecundum Vis applicatæ directionem GV; tantundem elevetur, contra directionem ſuam, pondus P, in PF perpendiculari. Atque intelligatur Vis V, Vi ponderis P æqualis. Æquipollebit igitur, (per 7 hujus;) Adeoque ſuſtinebit; &, ſi vel augeatur, vel Ponderis Vis minuatur (recta PF vel tantillum reclinata, puta in ſitum PO, per 25 hujus;) movebit. per 9, 11. Cap. 1.



Requiratur autem, ut idem vel Æquale Pondus, Vi minore moveatur, (Nam de Æquali, vel Majore, jam conſtat:) Puta Vi *n*V; quæ nempe ſit ad V, in minoritatis ratione data *n* ad 1.

Dico; Si aptetur angulo PFG, recta PO, quæ ſit ad PF, ut 1 ad *n*, (nempe, in reciproca ratione virium,) & movendum Pondus, ſuper Acclive Planum, in PO recta, per POGV Filum flexile trahatur: Vis data *n*V, ponderi P, in hoc ſitu Æquipollebit; &, ſi tantillum adhuc augeatur Obliquitas, movebit.

Nam, propter PO ad PF, in ratione 1 ad *n*; Si P in PF Gravitet ut G, idem in PO gravitabit ut *n*G, (per 14 & 17 hujus:) Ideoque, cum illi æquipolleat Vis V, huic æquipollebit Vis *n*V, (per 17 Cap. 1.) Adeoque (per 25 hujus) ſi fiat PO adhuc vel tantillum longior, Vis præpollebit, adeoque movebit; per 9, 11, Cap. 1.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, per Datam Acclivitatem movere.
Idem intellige, de quavis alia Vi impediente.

V. G::

V. G :: *m* V. *m* G.

RElíquis, ut prius, conſtructis: Intelligatur Vis V, æquipollens Ponderi P, per Acclivitatem P O movendo. Et requiratur, ut per Acclivitatem Majorem (nam de Minore ſatis conſtat) puta P F, moveatur. Fig. 50.

Dico; Si, qua ratione Brevior eſt P F quam æqui-alta P O, eadem augeatur Vis V; æquipollebit; Adeoque, ſi ulterius augeatur; movebit.

Nam, ut P O ad P F; puta ut *m* ad 1; Sic, vice verſa, Gravitatio ponderis P in P F, ad ejuſdem gravitationem in P O: (per 14 & 17 hujus.) Adeoque, cum Vis ut V, æquipolleat huic; Vis ut *m* V, æquipollebit illi; (per 17 Cap. 1.) &, aucta, movebit. per, 11. Cap. 1.

PROP. XXX.

Dati Vi, in Acclivitate data, motum efficere.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque ſit Vis impediens.

V. P :: *n* V. *n* P.

CÆteris, ut prius, conſtructis: Intelligatur Vis V, Ponderi P, per Acclivitatem datam P O movendo, æquipollens. Et requiratur, ut data Vi, *n* V, (puta quæ ſit ad V, ut *n* ad 1,) fiat motus. Fig. 50.

Dico; Si pro P pondere, ſubſtituatur *n* P, (quæ nempe ſit ad P pondus, in eadem ratione qua data Vis *n* V ad V;) huic æquipollebit data Vis (per 17 Cap. 1.) Adeoque, Si tantillum adhuc minuatur Pondus; Vis præpollebit, adeoque movebit. per 9, 11. Cap. 1.

SCHOLIUM.

SI porro in tribus proxime præcedentibus Problematis, Celeritatis ratio habenda erit; ut non tantum motus utcunque fiat, ſed & data celeritate fiat. Huic ſatisfactum erit ex Prop. 29, 30, Cap. 1. Nempe invento (per tres Propoſitiones præcedentes, reſpective,) quo pacto motus fieri poſſit aliqua ſaltem celeritate: Qua ratione augenda erit celeritas; eadem augenda erit, in Prop. 28. hujus inventa longitudo rectæ P O; &, in Prop. 29, inventa Vis; &, in Prop. 30, eadem minuendum erit inventum Pondus.

PROP. XXXI.

Grave, ex puncto fixo libere dependens; Si in Perpendiculo conſtituatur; manebit: Si extra Perpendiculum, ad Perpendiculum feretur. (Et quidem per arcum circuli in plano ad Horizontem recto.)
In plano autem ad Horizontem obliquo; ad eam rectam feretur quæ eſt Horizontali rectæ ad angulos rectos; (quam *Perpendiculi Succedaneum* appello:) & in ea ſi ponatur, conſiſtet.
Idem intellige, mutatis mutandis, in alia Vi Motrice.

SIt F G, Horizontalis recta; F P, perpendicularis. Atque ex F puncto fixo, dependeat, per F P filum, pondus P. Adeoque; Si extra perpendiculum quocunque moveatur, puta ad S; deſcribet (propter eandem fili longitudinem) arcum circuli P S, (ſaltem aliquod in ſuperficie Sphærica, centro F deſcripta, punctum S deſignabit, quod P S circuli arcum terminabit:) Eſt autem (per 20 hujus.) Punctum P (utpote omnium in illa peripheria, aut etiam Sphæra; infimum) ipſo S humilius. Non igitur ad S feretur; per 2 hujus. Quod demonſtrandum erat. Fig. 49.

Si vero extra P conſtituatur: Propter punctum P omnium infimum, ductumque S P continue deſcendentem, (per 20 hujus;) omniumque maxime (utpote per circuli peripheriam in Sphæra maximi, in perpendiculari plano poſiti,) per 24, 25, 26. hujus; eo feretur; per 4 & 8 hujus. Quod itidem erat demonſtrandum.

Idem ſimiliter oſtendetur: Si in F P G plano ad Horizontem obliquo ferendum intelligatur Grave; propter punctum P omnium in illo plano infimum, per 20 hujus: ductumque circuli, maxime Declivem, per 24, 25, 26. hujus. Quod erat ultimo demonſtrandum.

SCHOLIUM.

SUpponit hæc Propoſitio, Filum *non Extenſile*, ſed non & *Inflexile*; adeoque diſerte procedit de Gravi Pendulo; quod itaque humilius intelligitur, ſaltem non altius, quam F punctum fixum. Verum quidem eſt; ſi eſſet in eadem P G peripheria, ſupra Horizontalem rectam F G continuata; deſcenderet hoc ad Perpendiculum; at non ſtatim hac de cauſa, neque ſtatim ſecundum peripheriam; ſed ſecundum Perpendiculum, ut Grave adhuc abſolute liberum, (non tantum libere Pendulum,) per 21 hujus: donec, extenſo ad ſuam longitudinem filo coerceretur ne diutius recta deſcenderet, ſed ſecundum Peripheriam, Vi Propoſitionis hujus.

Sin Filum illud etiam Inflexile intelligatur; ubicunque in ea peripheria (extra perpendiculum) ponatur; (ſive ſupra ſive infra Horizontalem lineam;) ſecundum peripheriam deſcendet, circa Centrum motus rotando. Verum illud hujus loci non eſt; ſed ad Libram ſpectat, & infra demonſtrabitur.

PROP. XXXII.

Grave pendulum, in Perpendiculo conſtitutum, Vis quantumvis exigua, à Perpendiculo dimovebit.

Idem de Perpendiculi Succedaneo, in Obliquo plano, intelligendum. Deque aliis motibus, mutatis mutandis.

Fig. 49. EX puncto F, in Perpendiculo F P, dependeat ex Filo Pondus P: Quod, ex perpendiculo motum, deſcribat P S G Circuli quadrantem; Cui circumſcribatur F H quadratum. Et exponatur, ſecundum directionis lineam P H Horizontalem, Vis quantumvis exigua: puta, quæ ſit ad Vim Ponderis P, ut *n* ad 1 (hoc eſt, ſi intelligatur Vis V, Ponderi P in perpendiculo æquipollens, ſit expoſita Vis *n* V.) Et ponatur (ex præſcripto Prop. 28. hujus.) P O recta, ita declivis, ut Ponderi P in P O movendo æquipolleat Vis *n* V. Nempe, ſumatur, in H G recta, recta H O quæ ſit ad P H in ratione virium expoſita *n* ad 1; & jungatur P O. Cum enim ſit, ut Vis ad Pondus, ſic Altitudo H O in perpendiculo (quæ eſt Directio Ponderis) ad H P lineam directionis Vis Moventis: Expoſito Ponderi per P O movendo, æquipollebit Vis expoſita; adeoque aucta vel tantillum Obliquitate, Movebit. per 28 hujus. Eſt autem (propter S P H angulum contactus, minorem angulo rectilineo O P H, per 16 Elem. 3.) Obliquior Aſcenſus per P S quam per P O. Movebit igitur datum Pondus, Vis Expoſita in P S peripheria. Quod erat probandum.

Alia Demonſtratio.

Idem demonſtrabitur ex 15 hujus: Propter eandem P S peripheriæ in puncto P declivitatem, atque Contingentis rectæ P H; quæ cum Horizontalis ſit, conſtabit propoſitum, per 27 hujus.

PROP. XXXIII.

Grave Pendulum datum, quouſque extra perpendiculum, data Vi, movebitur; determinare.

Fig. 49. COnſtructis ut prius: Dico; Per arcus P A (quem abſcindit P O recta) Semiſſem P S, nec ultra, Expoſita Vi motum iri Pondus P.

Nam, quæ P A arcum (adeoque & ſubtenſam, per 30 Elem. 3.) biſecat è Centro recta F S, ſecat ſubtenſam P A ad angulos rectos; per 3. Elem. 3. Huic igitur ſubtenſæ, hoc eſt P Q rectæ, parallela eſt quæ Circulum in S tangit S T recta,

cta, (per 16 Elem 3.) Adeoque & pariter Obliqua, (per 29 Elem. 1.) Cum itaque magis adhuc ſit ad Horizontem Obliqua, arcus PS pars quælibet (ipſo S puncto excepto:) minus autem, pars quælibet arcus SA; (quod ex 15 hujus demonſtrabitur:) ad S, nec ultra, movebitur Pondus P, ab ea Vi quæ illi, per Acclivitatem PO movendo, æquipollet; per 28 hujus. Quod erat determinandum.

PROP. XXXIV.

Grave Pendulum datum, ad datam altitudinem movere, quanta Vis requiritur, determinare.

IN eadem Figura: ſi velim ad S punctum uſque moveri grave Pendulum P; ſumatur arcus PA, duplus expoſiti PS; junctaque PA continuetur donec occurrat, in O, perpendiculari rectæ GH. Cumque arcus PS particulæ minus acclives ſint quam TS vel PA, accliviores autem particulæ omnes ultra S; Si ſumatur (per 29 hujus) Vis ea quæ ſufficiat movendo Ponderi P dato in acclivitate PA, ſeu PO, ſufficiet eidem movendo per arcum PS. per demonſtrata ad Prop. præced. Fig. 49.

CAP. III.

De Libra.

DEFINITIONES.

I. Libra (*quæ & Bilanx dicitur*) *notiſſimum eſt in Officinis Inſtrumentum, quo Pondera explorantur.*

Bilanx, à *binis lancibus*, nomen habet. Græcis ζυγὸς dicitur, ab ἵστημι *pendeo.*

Libræ nomen, an à Græco λίτρα deſcendat, an hoc ab illo à poſterioribus Græcis deformatum ſit; non convenit inter Criticos.

Qui originem Græcam eſſe volunt; à λίτρα, quæ exigua vel Ponderis vel Monetæ ſpecies erat, (ſic enim Siculi *Obolum* dixerunt,) poſteriores Græcos ejus alteram ſignificationem deduxiſſe ſentiunt, (qua vel *Pondo* ſignificet, ſeu duodecim Unciarum Pondus; vel ipſum etiam Ponderationis Inſtrumentum:) atque hinc fluxiſſe Latinorum Libram: ut à τέρετρον, *Terebrum*, (niſi quis hoc à *Tero* malit) T in B mutato.

Qui Latinam malunt originem; *Libram* quaſi *Liberam* dici volunt, (quod ipſum à *Libet* videatur deſcendiſſe, niſi repugnaret primæ ſyllabæ quantitas; fortaſſis igitur, ab ἐλεύθερος, *Liber*; ut, ab ἐρυθρὸς, *ruber*; mutato θ in B; ſic à πλῆθος, *plebs*; &, ab ὖθαρ, *uber*; unde & noſtrum *udder*, mutato θ in *d*; ſicut, à θυγατὴρ, *daughter*:) propter Æquilibrii in utramque partem indifferentiam: Inde autem Græcorum poſteriorum λίβρα, hoc ſenſu, deformatum; ſicut à multis aliis vocabulis Latinis, Græca deſcendiſſe, certum eſt.

Multas habet partes; puta *Jugum*, *Axem*, *Trutinam*, *Examen*, *Lances*, &c.

II. *Libræ* Jugum, *Vectis eſt ſeu Trabs oblonga, cujus ab extremis dependent* Lances. *Quod & tantæ firmitatis eſſe intelligitur, ut appenſis ponderibus ſuſtinendis par ſit, nec eorum pondere vel rumpatur vel incurvetur.*

Jugum, à *Jungo*, dicitur, (ſicut, eodem ſenſu, à ζεύγω, ζυγὸς,) quod Lancium appenſiones interjungat. Niſi quis immediate à ζυγὸς, *Jugum* dici malit; ſicut à ζεύγω, ζδγνύω, *Jungo*.

III. Axis,

III. Axis, *eſt Jugi medio tranſverſim infixus, qui jugum ſuſtinet, & circa quem rotatur: Jugum in duo Brachia dirimens.*

IV. *Jugi* Brachia, *utrinque ab Axe ad Appenſionum puncta porriguntur.*

V. Lances *à Brachiorum extremis libere dependent, quibus immitti ſolent Pondera; alteri quidem, Notum; alteri, Explorandum.*

VI. Trutinam *appellant Manubrium ſive Scapum, quo Axis extrema utrinque ſuſtinentur, &, cum Axe, Jugum ipſum.*

TRutinam vero ipſam ſuſtinet vel tenentis Manus, vel Uncus aliquis fixus, aliudve ſuſtentaculum.

Dicitur autem à Græco τρυτάνη, quod idem ſignificat; & hoc, à τρύω, *tero, attero*; quod pondere ſuſtinendo Teratur. Uſurpatur etiam σωτικοδυχικῶς pro Bilance tota.

Solet autem (nec incommode) Axis, Jugo tranfixus, utplurimum Jugo firmiter conjungi, tanquam ipſius pars; ejuſque extrema, intra duo in infima parte Trutinæ foramina, libere moveri. Quanquam & poſſit Axis ipſius Trutinæ pars fieri, ita ut, circa ipſum immotum, libere rotetur Jugum.

Examen *dico Lingulam, quæ medio Jugo inſiſtens ad angulos rectos, indicium eſt vel Æquilibrii, dum intra fiſſuram perpendicularis Trutinæ continetur; vel Præponderantiæ, prout ad hanc aut illam partem extra vagatur.*

HUc, credo, reſpicit illud *Perſii* Sat. 1.

——— *Examenve improbum in illa*
Caſtiges Trutina. ———



Fig. 51.

Dici videtur (ab *Exigo, Exegi, Exactum,*) *Examen* quaſi *Exagmen*: Atque hinc *Examino*. Alii tamen, ab ἄμμα *vinculum, ligamen* (quod ab ἅπτω *ligo,*) deducunt *Amen* ſive *Amentum*, quod *Lorum* ſignificat, (illud ſpeciatim quod mediis Jaculis annectebatur, quo melius in hoſtes jacerentur:) Atque hinc *Examen*; tum ubi *Examen Libræ* ſignificat, (quod Filum eſſe volunt ſeu Funiculum, quo Trutina regitur;) tum ubi ſignificat *Examen Apum*; quæ quaſi vinculo ſocietatis connectuntur: Sicut & ipſum *Apum* nomen ab antiquo *Apio*, atque hoc ab ἅπτω deducunt, *quod ſe invicem pedibus alligent*: Quaſi huc reſpiciat *Virgilianum* illud, *Georg.* 4.

Atque illæ pedibus connexæ ad limina pendent.

VIII. Æquilibrium *vero dicimus, quum ad Libram contraponderantia, æquiponderant.*

QUodque in Libra ſpeciatim *Æquilibrium* dicimus, idem eſt in aliis Machinis, ſive contrariarum virium quibuſcunque complicationibus, virium *Æquipollentia*: quæ tamen & Æquilibrium, (tranſlatione, à Libra, facta) non raro dicitur; quum æquipollent contrariæ vires in aliis non minus Machinis, quam in ipſa Libra: Pariter atque *Propenſus, Propenſio*, aliaque cognata Vocabula, quanquam prima ſignificatione Libram ſpectent, Metaphorice tamen de quibuſcunque ad motum Inclinationibus uſurpari ſolent.

In adjuncto Schemate: AB, eſt *Jugum Libræ*; per cujus medium C, tranſit Fig. 51. *Axis* XS, dirimens Jugum in duo Brachia CA, CB; unde, ex punctis A, B, dependent duæ *Lances* L, L. Axis autem extrema X, S, ſuſtinet XTS *Trutina*; quæ ipſa, in T, ſuſtinetur; per cujus fiſſuram mediam, *Examen* CE huc illuc tranſit (dum AB Jugum circa Axem XS rotatur,) vel *Æquilibrium* indicans, vel in hanc aut illam partem Præponderantiam.

Eſtque hæc vulgaris Officinarum *Libra*. PROP.

PROP. I.

Dum Axe fixo ſuſtinetur Libra; duo utrinque Brachia (cum ſuis Ponderibus) contra-ponderant.

NAm, fixo Axe XS, non poteſt (propter inflexile Jugum AB, per Def. 2. hujus) Brachium A (Onuſque ſuum) Deſcendere, quin Aſcendat (cum ſuo) Brachium B; neque hoc Deſcendere, quin Aſcendat illud. Fig. 51.

PROP. II.

Si utrinque porrecta duo Libræ Brachia, (una cum Lancibus, reliquaque ſiqua eſt armatura,) invicem æquiponderant: tantundem eſt, Librationem quod ſpectat, acſi nullius eſſent Ponderis: Axis vero reliquæque Libræ firmitatem quod attinet, tantundem valent, quantum eſt ſimul utriuſque (cum armatura ſua) Pondus.

PUta; Si Brachium CA tantundem ponderando valeat, ad ſui Depreſſionem, adeoque (propter inflexile Jugum) Elevationem contrarii CB; quantum in contrarium valet brachium CB, (nempe ad ſui Depreſſionem, cum elevatione contrarii CA:) tantundem ſimul valent atque ſi nullius eſſent Ponderis.

Nam (per Prop. 8. Cap. 1.) contrarii conatus, cum invicem æquentur, ſe mutuo deſtruunt, ſeu nullis æquipollent. Nempe, *Librationem quod ſpectat*; quatenus ſcilicet contra-ponderant duo Brachia.

Ad *Axis* vero (ne ruat) *Jugique* (ne rumpatur aut incurvetur) firmitatem requiſitam; ipſiuſque *Trutinæ*, *Fulcrive* quo ſuſtinetur, Vim: non modo non nullis æquivalent Brachiorum pondera; ſed tantundem valent, quantum eſt utriuſque ſimul Brachii Pondus, & ſiquid ultra eſt oneris.

Quippe, hoc reſpectu, non ſunt conatus contrarii; ſed utriuſque deorſum: cui quidem communi Conatui, cum obſtet tum Axis permanentia, Fulcrique quo ſuſtinetur, tum Jugi vis inflexilis, *&c.* & quidem ſigillatim Singula: illi par eſſe debet ſingulorum firmitas. per 18 Cap. 2.

Def. IX. Libram *igitur* Mathematicam *conſideramus, ad inſtar unius inflexilis Lineæ Rectæ, utrinque quantum opus eſt porrectæ, librandis Ponderibus adhibitæ.*

DUmmodo enim, poſitis in Æquilibrio Libræ Brachiis, eorum Pondera nullius inſtar habeantur; poterit ſimiliter tum Libræ Magnitudo, tum Figura ipſa tuto negligi, ut ſolius Longitudinis habeatur ratio, ob ea quæ inde dependentia poſt tradentur.

X. Centrum Libræ, *dicimus, Punctum illud quod eam dirimit in Brachia invicem Æquiponderantia.*

Æ*quiponderantia*, dico, potius quam *Æque-gravia*; quoniam fieri poteſt, ut, quæ ſunt (abſolute conſiderata) æque-Gravia, poſſint, ratione ſitus ſeu Poſitionis, inæqualiter Gravitare vel Ponderare; quod tum ex ſequentibus patebit, tum ſupra oſtenſum eſt, Prop. 10, 11. Cap. 2.

XI. *Adeoque* Brachia *ſunt, quæ utrinque à Centro Libræ porriguntur; quæ vel Longitudine, vel ſaltem Ponderatione, Æqualia intelliguntur.*

XII. Appenſionum, *vel* Applicationum Puncta, *dicimus, ea Libræ Puncta, in quibus vel actu ſunt, vel inde libere dependeat appenſa Pondera; vel ſaltem (in eodem ad Centrum Terræ Perpendiculo) directe vel incumbunt, vel ſubjiciuntur.*

NOtandum igitur; ſiquando inæqualiter utrinque à Centro libræ diſtant Applicationum Puncta; adeoque quæ inter Centrum & illa puncta interjacent Rectæ, ſint inæquales: intelligendæ erunt illæ rectæ, (ſi ullius omnino cenſeantur ponderis,) vel æqualiter utrinque à Centro porrigi quantumlibet, etiam ultra ipſa Appenſionum ſeu Applicationum puncta; vel ea ſaltem quæ brevior eſt recta, in eadem ratione ponderoſior cenſenda erit; ut una tota toti reliquæ æquiponderet: quo poſſint tum Brachia invicem æquiponderare (ſecundum Def. 11.) tum tota Libra quaſi nullius Ponderis cenſeri, (vi Prop. 2 hujus:) ut applicatorum ſolummodo Ponderum comparandorum habeatur ratio. Siquid autem Inæqualitatis revera fuerit in Brachiorum Ponderatione; id appenſis Ponderibus accenſendum erit.

XIII. Centrum Æquilibrii, *appellamus, illud Libræ punctum, quo ſi intelligatur ſuſpendi Libra; quæ utrinque ponderant, invicem Æquiponderant.*

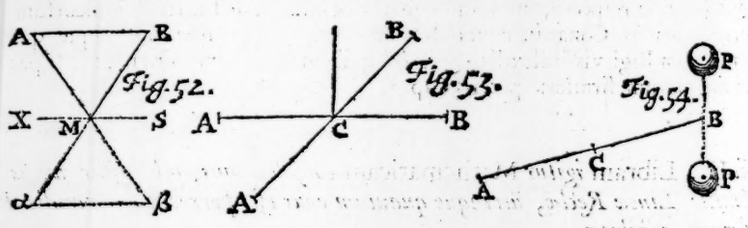
XIV. Perpendiculum Æquilibrii, *appello, quod per Centrum Æquilibrii tranſit Perpendiculum, ſeu recta ad Terræ Centrum.*

XV. Centrum Motus, *appello, Punctum circa quod immotum, rotatur Mobile.*

XVI. Axem Motus, *appello, Rectam, circa quam immotam rotatur mobile.*

XVII. Rotari *vero dicimus mobile circa Punctum fixum, vel quieſcentem Rectam; quando ita movetur, ut ipſius puncta ſingula tum inter ſe, tum ab illo ſeu puncto fixo, ſeu Recta quieſcente & ſingulis in ea punctis, eandem perpetuo diſtantiam conſervent.*

Fig. 52. PUta; Circa punctum M rotari dicetur A B M triangulum modo ita utcunque moveatur (retenta magnitudine & ſpecie Trianguli, adeoque eadem inter ſe punctorum omnium poſitione,) ut ipſius unumquodque Punctum, ut A, eandem ab M diſtantiam conſervet. Adeoque circa M punctum, vel dextrorſum aut ſiniſtrorſum, vel prorſum aut retrorſum, vel in quamvis plagam rotari poteſt; puta,



in ſitum α β M. At circa Rectam X S, nonniſi prorſum vel retrorſum rotabitur. Si enim ipſius puncta ſingula, ut A, aliter moveantur quam Peripherias deſcribendo, quorum omnium planis X S Axis, rectus ſit; non eandem ab ipſius punctis ſingulis diſtantiam conſervabit.

Sive autem intra ipſam Figuram (planam ſolidamve) ſive extra, ſive in ambitu, intelligantur punctum M aut Axis X S circa quæ Figura rotetur; perinde eſt.

XVIII. Planum Æquilibrii, *dicimus, quod ita per Grave incedit planum, ut, quæ utrinque ſunt ſegmenta Gravis, æquiponderent.*

QUum *quæ utrinque ſunt Segmenta* dico; id etiam comprehenſum volo, ſi utrinque nihil ponderet; puta, Si punctum vel linea tota ſit in ipſo plano.

XIX. Axem Æquilibrii, *appello, Rectam per quam quodcunque incedit planum, eſt Planum Æquilibrii.*

XX. Centrum Gravitatis, *appello, Punctum, per quod quæcunque incedit recta, eſt Axis Æquilibrii: Adeoque & quodcunque incedit Planum, eſt planum Æquilibrii.*

Hoc

HOc utique posterius, ex priori sequitur. Nam quodcunque Planum per illud transit, ejus aliqua recta per illud transit; quæ quidem si sit Axis Æquilibrii, etiam & Planum illud erit Æquilibrii planum; per Def. præced.

PROP. III.

Manente Libræ Centro; sibi permissa Libra non movebitur.
Intellige; de Libra jam Quiescente, (& similiter in sequentibus:) contra vero, si jam sit in motu.

SIt Libræ AB, Centrum C. Hoc, inquam manente; sibi permissa Libra, (hoc est, nullo Pondere, Vi, aut Impulsu quovis alio quam Gravitate sua, in has aut illas partes adacta,) non movebitur. Fig. 53.

Cum enim CA, CB, Brachia (Æquiponderantia, per Def. 11 hujus,) invicem contra-ponderent (per 1 hujus:) propter contrarios Conatus æquales, non fiet motus: per 12 Cap. 1. Nempe, si Libra jam Quiescat. Et similiter inde ostendetur, quod non Sistetur, si jam sit in motu.

SCHOLIUM.

VAlet hæc demonstratio, in quocunque Libræ ad Horizontem situ, (puta; vel Horizontali, vel utcunque inclinato:) Siquo enim situ CB, CA, non æquiponderant; non erit, in eo situ, punctum C, Libræ Centrum; Sed aliud aliquod; de quo procedet demonstratio.

Et quidem, secundum Mathematicum rigorem, in certa à Terræ Centro distantia finita, non erit ejusdem AB Libræ, idem in omni situ Centrum C. Sed, in situ Declivi, à puncto medio (quod in situ Horizontali est ipsum Libræ Centrum) pro varia Declivitate varie removebitur Centrum, versus declivius extremum. Adeoque, declivior semissis, si ex puncto medio sustineri intelligatur Libra, reliquo præponderabit; totaque Libra, hoc situ, posita, suapte sponte ad situm Horizonti perpendicularem ferri debet: (Contra quam aliquibus visum est, Nempe, ad situm Horizonti parallelum ferri debere; contra quos fuse disputat *Guid-Ubaldus*, in Mechanicis, Capite *De Libra*, Prop. 4.) Quod seorsim, si opus videbitur, demonstratu non est difficile. Et fiet, post Propositionem 14.

Verum si intelligatur Libra tanquam à Terræ Centro infinite distans; adeoque & Perpendicula invicem Parallela: omnino idem censendum est in quocunque situ Centrum; nempe punctum C, libræ AB medium. Quo modo in Mechanicis assumi solet.

PROP. IV.

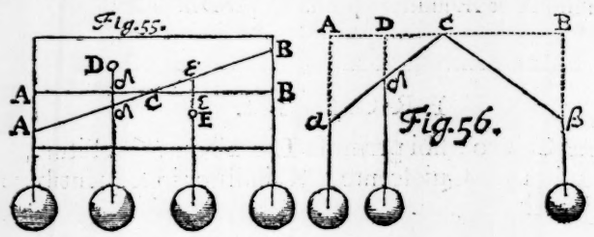
A puncto quovis libere dependens Grave, aut eidem directe vel subjectum vel incumbens; tantundem gravat illud quo ita sustinetur punctum, atque si in illo ipso puncto intelligeretur. Tantundem scilicet quantum est ipsius Pondus.
Idem intellige de Vi quavis alia, mutatis mutandis.

NAm, verbi gratia, ex puncto B, libere dependens P pondus, ad perpendiculum feretur gravitate sua, (per 31 Cap 2.) De quo sic posito, sive alias directe vel subjecto vel incumbente pondere P, (sive propius sive remotius absit, modo in eodem perpendiculo,) constabit propositum; per 18 Cap. 2. Fig. 54.

SCHOLIUM.

ESque hæc Propositio non exiguæ utilitatis: ut quæ ad certam æstimationem reducit Pondera, sive non in eadem recta, sive non ad Jugum rectum applicata. Puta, si intelligatur planum aliquod ADB; atque in eo Libra ACB recta: Fig. 55.

cta : Ex variis autem hujus plani punctis (sive in ipsa Libra, sive supra, sive infra Libram) appensa Pondera. Quæ ex A vel B Libræ punctis libere dependent Pondera, tantundem gravant ea puncta atque si in illis essent. Quod, ex D puncto



supra Libram ; tantundem gravat huic subjectum libræ punctum δ, atque si in illo esset. Quodque, ex E puncto infra Libram ; tantundem gravat punctum ε, cui directe subest, atque si ibidem esset. (Intellige semper, ita conjuncta esse puncta D, δ, vel E, ε ; ut non possit D deprimi nisi depresso δ ; aut E deprimi, nisi depresso ε.) Suntque ipsa A ε δ B, quæ *Applicationum Puncta* dicimus; Def. 12. hujus.

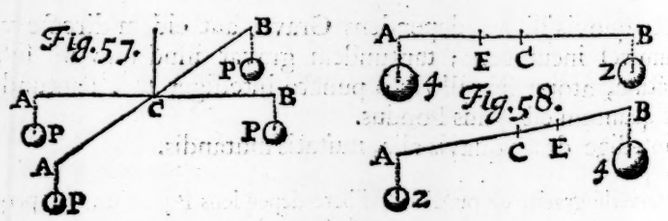
Fig. 56. Similiter ; Si libræ Jugum inflexum intelligatur, aut incurvatum, ut α C β. Quum nos *Libram Mathematicam* definivimus *Lineam Rectam*, &c. Def. 9 hujus: Pro Jugo illo inflexo, substituere licet quamlibet in eodem plano rectam ; (eam potissimum, quæ, per Centrum motus transiens, est Horizonti parallela ;) atque ad hanc, ut Libram, exigere singulorum appensorum Ponderum momenta : Puta, quæ ex α δ β punctis dependent perinde ac si ex A D B punctis dependerent.

PROP. V.

Si Æqualiter Gravetur utrumque Libræ Brachium ; Æquiponderabunt sic gravata Brachia : Et sibi permissa Libra sic gravata, manente Centro, non movebitur.

Sin altero alterum magis Gravetur ; hoc præponderabit, atque deorsum (nisi alias impeditum) feretur : Et simul utraque Ponderando æquipollebunt excessui præpollentis.

Fig. 57. NAm, si æquiponderantibus utrinque Brachiis, ut C A, C B, (per 11 Def. hujus;) accedant adhuc æqualia gravamina, ut P, P, (sive ex appensis Ponderibus, sive adhibita Vi, vel Impulsu quovis, aliasve ;) Æquales etiamnum manebunt Ponderationes ; (quippe Æqualia æqualibus addita, Aggregata faciunt Æqualia.) Ideoque contrariæ cum sint, (per 1 hujus ;) nullis æquipollent ; & Motum propterea non efficiunt, per 8, 12. Cap. 1.



Sin magis gravetur alterutrum ; Præponderabit, (per 9 Cap. 1.) Adeoque deorsum feretur, per 12 Cap. 1. Æquipollent autem Ponderando, simul sumpta, excessui præpollentis. per 8 Cap. 1.

SCHOLIUM.

POnderando, inquam ; nempe quatenus invicem contra-ponderant, Libram in hanc aut illam partem trahendo. At quantum ad Axem ipsum, & quodcunque quo Libra sustinetur fulcrum ; pro contrariis habenda non sunt, sed pro conjunctis

junctis oneribus: ſicut ad Prop. 2. oſtenſum eſt. Quod in ſequentibus item Propoſitionibus intelligendum erit; niſi ſiquando contrarium inſinuetur.

PROP. VI.

Si Ponderibus utcunque gravata Libra, Centro Æquilibrii ſuſtineatur: Neutrum prægravatur Brachium.

Et contra; Punctum illud Libræ, quo ſi ſuſtineatur ſic gravata libra, neutrum prægravatur Brachium; eſt Centrum Æquilibrii.

Patet, ex Definitione Centri Æquilibrii.

PROP. VII.

Manente Centro Æquilibrii, utcunque gravatis Brachiis, Libra non movebitur.

SIt AB, Libra. Atque intelligatur Centrum Æquilibrii, vel idem cum C centro libræ, (nempe ſi æqualiter vel graventur, vel non graventur Brachia;) adeoque conſtabit propoſitum, ex 4 & 5 hujus: Vel ab ipſo aliud, ut E. Hoc, inquam, manente; Libra non movebitur. Fig. 58.

Cum enim (per Def. Centri Æquilibrii) E A, E B, prout jam gravantur, invicem æquiponderant; Nec poſſit (propter inflexilem libram) alterutrum deſcendere, manente E, quin alterum aſcendat: contrarii conatus invicem æquales, motum non efficient. per 12 Cap. 1.

SCHOLIUM.

QUod autem de Gravitate dicimus, (ſive in hac ſive in aliis Propoſitionibus,) deorſum movente; idem de quavis alia Vi movente ſecundum Directionem ſuam, intelligendum erit; juxta Def. 21. Cap. 1.

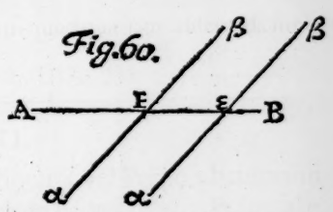
PROP. VII.

Manente in eadem à Centro Terræ Altitudine, Centro Æquilibrii; neque Deſcendere cenſenda eſt gravata Libra, neque Aſcendere, utcunque moveatur. Et contra; dum neque Deſcendere, neque Aſcendere cenſenda eſt gravata Libra; Centrum Æquilibrii manet æque-altum.

Et ſimiliter de aliis motibus à Vi motrice quavis, mutatis mutandis, intelligendum erit.

INtelligatur A B Libra, utcunque gravata, in ſitum α β moveri: Manente (primum) Centro Æquilibrii in eodem E puncto.

Cum igitur (propter E Centrum Æquilibrii,) partes E A, E B, in quocunque ſitu, adeoque in toto progreſſu, invicem Æquiponderant: Sitque, propter inflexilem Libram, unius Aſcenſus cum Deſcenſu alterius perpetuo conjunctus: Erit Aſcenſus Deſcenſui Æquipollens, (nam ſicubi præpollet alter, ea præponderabitur; per 7 Cap. 2.) Nulli igitur vel Deſcenſui vel Aſcenſui, ſimul æquipollent. per 8 Cap. 1. Quod erat demonſtrandum.



Idem deinde oſtendetur; etiamſi non in eodem E puncto maneat Centrum Æquilibrii; ſed in aliud quodvis æque-altum transferatur, ut ε.

Libræ ſiquidem in ſitu α ε β, intelligatur parallela in α E β; nempe dum intelligatur Terræ Centrum infinite diſtans: Si vero in diſtantia finita, intelligatur circa

Centrum Terræ rotari Libra α ε β, in ſitum α E β; ut ſit ε E arcus circuli, terræ concentrici; & ſimiliter α α, β β, &c. Probabitur utcunque (vel ex 33 Elem. 1. Vel ex Def. Rotationis) ſingula ipſius α ε β puncta, punctis ſingulis in α E β reſpective ſumptis, æque-alta, (& ſimiliter de Ponderibus appenſis ſiqua ſint, &c.) Adeoque totam α ε β, toti α E β, hoc eſt (per jam demonſtrata) ipſi A E B, æque altam. Quod porro demonſtrandum erat.

Atque hinc converſa facile conſtabit.

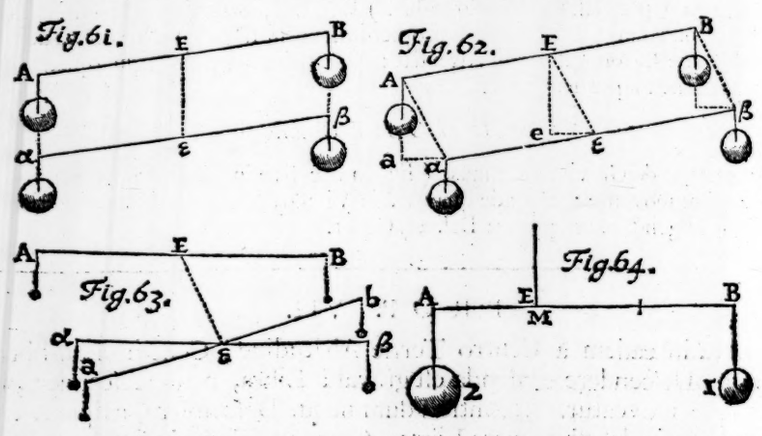
Et ſimiliter de quavis alia Vi motrice, mutatis mutandis, idem oſtendetur.

PROP. IX.

Tantundem vel Aſcendere vel Deſcendere cenſenda erit, utcunque gravata Libra; quantum vel Aſcendit, vel Deſcendit Centrum Æquilibrii.

Quæque de Gravium Aſcenſu & Deſcenſu dicta ſunt; pariter de motis ab alia quavis Vi motrice, mutatis mutandis, intelligenda erunt.

Fig. 61, 62, 63. SIt A B Libra utcunque gravata: E, Centrum Æquilibrii; quod intelligatur ad ε moveri; Deſcenſu ſive recto ſive utcunque obliquo: Dico, tantundem cenſendam eſſe deſcendiſſe Libram cum ſuo quantocunque gravamine; & quidem, ſive eodem manente, ſive utcunque mutato, ad Horizontem ſitu.



Primo; Deſcendat E ad ε deſcenſu recto; retinente Libra eandem ad Horizontem inclinationem, adeoque manente ſibi ut prius poſitæ Parallela; puta in α β. Manifeſtum eſt, tantundem deſcendiſſe libram totam. Junctis enim tum E ε, tum aliis quibuſvis punctis reſpectivis, ut A α: Propter æquales parallelas rectas E A, ε α; ſunt & (per 33 Elem. 1.) æquales item & parallelæ E ε, A α; punctorum E, A, deſcenſus menſurantes (per 10. Cap. 2.) qui itaque æquales ſunt. Et ſimiliter oſtendetur de quovis alio Libræ puncto: adeoque de ipſa Libra.

Secundo; Manente, ut prius, eadem Libræ ad Horizontem inclinatione, deſcendat E ad ε, deſcenſu utcunque Obliquo. Reliquiſque ut prius conſtructis; demittantur ab E, A, ad Horizontales rectas ε e, α a, perpendiculares E e, A a, (deſcenſus punctorum E A menſurantes, per 10 Cap. 2.) Et, demonſtrato, ut prius, æquales eſſe & parallelas, E ε, A α; æquales item erunt (propter ſimilia Triangula) E e, A a; adeoque punctorum E, A, deſcenſus æquales. Et ſimiliter de quovis alio Libræ puncto oſtendetur, adeoque de Libra ipſa.

Tertio; Deſcendat E ad ε, deſcenſu quovis ſive recto ſive obliquo; & ſimul utcunque mutetur Libræ ad Horizontem Inclinatio: Puta non ut in α ε β ſitu parallelo, ſed ut in a ε b alio utcunque ſitu. Etiam ſic tantundem deſcendiſſe Libram, quantum Æquilibrii Centrum, ſic oſtenditur. Si intelligatur Libra in α ε β ſitu parallelo; tantundem deſcendiſſe, jam oſtenſum eſt, (in primo & ſecundo Membro hujus:) Sed (per præcedentem) æque-alta cenſenda eſt Libra in ſitu a ε b,

$a : b$, atque in $\alpha : \beta$: Ergo & ſic tantundem deſcendiſſe Libra, atque ipſum E Centrum Æquilibrii, cenſenda erit. Quod erat demonſtrandum.

Quodque de Deſcenſu ab E ad ε, oſtenſum eſt; ſimiliter oſtendetur de Aſcenſu ab ε ad E. Nempe tantundem Aſcendere cenſendam eſſe Libram, atque Centrum Æquilibrii. Quod porro demonſtrandum erat.

Idem alii cuivis Vi Motrici, mutatis mutandis, facile accommodabitur.

PROP. X.

Si Centrum Æquilibrii ſit in eodem ad Terræ Centrum perpendiculo cum Centro Motus; in neutram partem præponderabit; ſibique ſic permiſſa Libra non movebitur. Sin extra perpendiculum conſtituatur; ad perpendiculum, infra Centrum Motus, feretur Centrum Æquilibrii, (niſi alias impeditum,) in plano ad Horizontem recto; ſaltem quam poteſt omnium maxime Declivi.

Idem aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

SIt M Centrum Motus; circa quod rotanda ſit A B Libra: E, Centrum Æquilibrii, in eodem Perpendiculo cum M; ſive infra, ſive ſupra, ſive in ipſo M puncto: Quieſcet, inquam, ſic conſtituta Libra, in neutram partem præponderans.

Primo; ſit E Centrum Æquilibrii, idem atque M Centrum Motus. Manifeſtum eſt (manente Centro Motus M immoto, per Def.) immotum manere Centrum Æquilibrii E, (quippe idem.) Non igitur in utramvis partem præponderat; neque movebitur in eo ſitu ſibi permiſſa Libra; per 5 hujus. Fig. 64.

Secundo; Sit E, in M E perpendiculo, infra M. Adeoque (per Def. 15, 16. hujus) mota Libra, feretur E in peripheria (ſaltem ſuperficie ſphærica) ut D E F Centro M deſcripta. Cujus cum punctum infimum ſit ipſum E, (per 20 Cap. 2.) quacunque moveatur, Aſcendet E Centrum Æquilibrii; &, cum eo, Libra, (per præced.) non igitur ſua ſponte movebitur. Fig. 65.

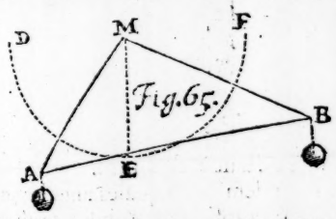


Fig. 65.

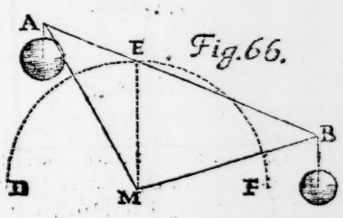


Fig. 66.

Tertio; Sit E, in M E perpendiculo, ſupra M. Adeoque (ut prius) mota Libra, feretur E in D E F peripheria (vel ſuperficie ſphærica,) cujus punctum E (per 20 Cap. 2.) eſt omnium altiſſimum; arcuſque E D, E F, pariter declives; (per 15 Cap. 2. & 16 Elem. 3.) In utramvis igitur partem æqualiter propendet E (per 17 Cap. 2.) ipſaque Libra, (per præced.) Neutra igitur feretur. per 8 Cap. 2. Fig. 66.

Denique; Sit E extra perpendiculum SMP. Cum ſit M Centrum Motus, circa quod Rotando E deſcribet peripheriam (ſaltem in Sphærica ſuperficie lineam) puta S E P: Propter arcum E P deſcendentem, aſcendentem vero E S (per 20 Cap. 2.) E centrum Æquilibrii (libra tantundem deſcendente, per præced.) ad P feretur (niſi alias impeditum) in plano M E P ad Horizontem recto, (utpote quod eſt omnium maxime declive, per 25, 26, Cap. 2.) Saltem (ſi illic impediatur) deſcenſu quam poteſt omnium maxime declivi, per 2 & 8, Cap. 2. Quæ demonſtranda erant.

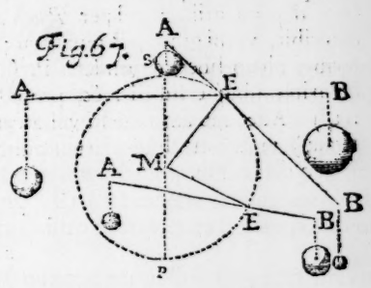


Fig. 67.

SCHO-

SCHOLIUM.

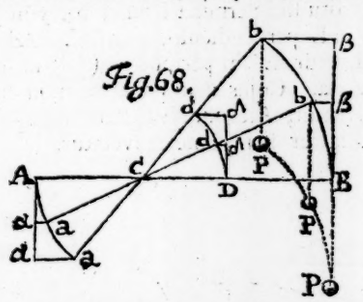
ADeoque ſi, in P conſtitutum centrum Æquilibrii, inde vi amoveatur; ſe reſtituet, ſibi permiſſa Libra, gravitate ſua: Si conſtitutum in S, amoveatur; non eo reſtituetur, ſed deorſum ad P feretur.

Quod autem de Libra, ſtricte ſumpta, ponderibuſque libere appenſis (adeoque in plano ad horizontem perpendiculari) oſtenſum eſt: Pariter oſtendetur, mutatis mutandis, in quavis alia vi. Puta; ſi planum SEP non erectum ſit, ſed utcunque obliquum, in quo AB libra intelligatur, tum ſuper illud moveri appenſa pondera: Similiter enim (ex 20. Cap. 2.) omnia procedent de SP ad horizontalem rectam in eo plano normaliter poſitam (quod *Perpendiculi ſuccedaneum* diximus) atque SP perpendiculo ad Centrum Terræ. Aut etiam; ſi in Horizontali, aliove quocunque Plano intelligatur Libra, (ſive quod Libræ inſtar eſt) eique in A & B applicatæ vires quæcunque ſecundum Directionem ipſi SP parallelam: Eodem plane modo procedet demonſtratio.

PROP. XI.

Si circa Centrum ſuum rotetur Libra; in ea ratione moventur, vel Aſcendendo vel Deſcendendo, tum ipſius puncta ſingula, tum quæ ex ipſis libere dependent gravia; qua diſtant ea puncta à Centro Libræ.

CIrca C Centrum, rotetur Libra AB. Dico ipſius puncta ſingula, ut A, B, D, in ea ratione, Aſcendere vel Deſcendere (eodem ſcilicet quæ in eodem Bra-



chio; quæ in contrario, contrario motu;) qua diſtant à C Centro.

Deſcribunt enim A, B, D, puncta (propter eundem vel æquales angulos ad C) ſimiles arcus (puta A a, B b, D d,) qui itaque tum ipſi, tum & ipſorum altitudines perpendiculo menſuratæ (puta A α, B β, D δ,) ſunt (propter figuras ſimiles & ſimiliter ſitas, ſaltem ſitu contrario poſitas, quod hic tantundem facit) radiis ſuis, hoc eſt, à Centro diſtantiis CA, CB, CD, proportionales: adeoque & (per 10. Cap. 2.) Punctorum A, B, D, Aſcenſus, Deſcenſuſve. Quod erat demonſtrandum.

Quodque de ipſis punctis oſtenditur; perinde verum eſt de Ponderibus inde libere dependentibus; vel per *Prop.* 4. hujus; vel etiam, quia, quemcunque arcum deſcribit, verbi gratia, B punctum; huic ſimilem & æqualem & ſimiliter ſitum, deſcribet ab eo libere dependens P, (utpote quod eidem, per 30. Cap. 2. perpendiculariter ubique ſubeſt; &, propter æqualem fili longitudinem, in eadem diſtantia.) Adeoque tantundem vel aſcendit vel deſcendit; hoc eſt (per modo demonſtrata) in ratione diſtantiarum punctorum appenſionis à Centro. Quod etiam erat Demonſtrandum.

PROP.

PROP. XII.

Si idem ſit Libræ Centrum, atque Centrum Motus: Quæ ex illa libere dependent Gravia, (aut etiam alias directe vel ſubſunt vel incumbunt) in ea ratione ponderant (ſeu gravant ſua reſpective Brachia) cæteris paribus; quæ ex rationibus Ponderum, & Diſtantiarum punctorum applicationis à communi Libræ & Motus Centro, componitur.

Adeoque: Si Diſtantiæ ſint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera ſint æqualia; in ratione Diſtantiarum: Si vel utraque ſint æqualia; vel ſint reciproce proportionalia; Æquiponderant: Quæ vero ex Centro dependent; neutrum gravant Brachium.

Idem intellige de Viribus aliis: Nempe in ea ratione movendo pollent, quæ componitur ex rationibus Virium, & Diſtantiarum à communi Centro Motus & Libræ, (ſive quod hujus inſtar eſt) quibus directe applicantur Vires.

$$\frac{P.}{D.} \quad \frac{nP.}{D.} \quad \frac{P.}{mD.} \quad \frac{nP.}{mD.} \quad \frac{nP.}{\frac{1}{n}D.}$$

$$\frac{}{PD.} \quad G :: \frac{}{nPD.} \quad nG :: \frac{}{mPD.} \quad mG :: \frac{}{mnPD.} \quad mnG :: \frac{}{PD.} \quad G.$$

NAm (per 7. Cap. 2.) in ea ratione ponderant; qua pollent, ſi moveantur Aſcenſus, Deſcenſuſve: Hoc eſt (per 5. Cap. 2.) in ratione quæ ex rationibus Ponderum, & Altitudinum aſcenſus deſcenſuſve componitur: Hoc eſt (per præcedentem) quæ ex rationibus Ponderum, & diſtantiarum punctorum Applicationis à communi motus & libræ Centro, componitur. Quod erat Propoſitum.

Quodque, de Incumbentibus & Dependentibus, additur; conſtat ex 4 hujus. Corollaria conſtant, ex 4. & 6. Cap. 1.

SCHOLIUM.

PRopoſitio hæc (ut & præcedentes) potiſſimum reſpicit Libram tanquam ex unico ſuo puncto liberrime dependentem (non ad certam axis poſitionem, aliter quam gravitate ſua & ponderum dependentium, determinatam,) adeoque in plano ad Horizontem recto, ſive circa axem Horizontalem, librandam; & quidem, præſertim, ut in ſitu Horizontali conſtitutam: (quanquam & ad alium tum Libræ tum Axis ſitum accommodari poterit.) Saltem Pondera ſupponuntur omnia in eodem plano, atque ad unam eandemque rectam per Centrum motus tranſeuntem, applicata; ſecus utique non eſſet idem Libræ atque Motus Centrum. Eratque hæc propoſitio neutiquam omittenda, ut quæ tam Celebris ſit in re Statica, Æqualia Pondera, in ratione Diſtantiarum à Centro Libræ, gravitare.

Verum omnino evenit non raro, comparanda venire Pondera, ad Libram exigenda, neque in ſitu Horizontali, neque in uno aliquo, ſed diverſis poſitam: Sed neque in plano ad Horizontem recto, aut circa Horizontalem Axem, libranda; ſed circa inclinatum Axem, adeoque in inclinato plano movendam: Vel etiam non ad unam aliquam, ſed diverſas Libras, eaſque inæqualiter ad horizontem inclinatas applicata: Ipſaque Pondera neque ex ejuſdem rectæ, neque ejuſdem plani, punctis ſuſpenſa.

Huic itaque caſuum varietati ut ſatisfaciam, viſum eſt ſequentem propoſitionem huic ſubnectere, quæ rem eandem univerſalius exponat.

PROP. XIII.

Pondus idem ad idem Libræ punctum applicatum; pro varia Libræ ad Horizontem positione; in plano ad Horizontem recto (sive circa Axem Horizontalem;) ponderat in ratione *Distantiarum à perpendiculo* per Centrum Motus.

In Plano autem ad Horizontem inclinato (sive circa inclinatum axem;) in ratione *distantiarum à perpendiculi succedaneo*; seu recta quæ est, in illo plano, ad Horizontalem rectam ad angulos rectos.

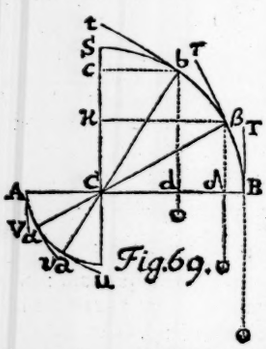
Et quidem, universalius; *Æqualia Pondera*, sive ad ejusdem, sive diversarum librarum, utcunque ad Horizontem inclinatarum (modo *circa Axes æqualiter ad Horizontem inclinatos*, sive in planis æqualiter inclinatis, rotentur) puncta quælibet, appensa; ponderant (seu gravant sua respective Brachia) in ratione *distantiarum à perpendiculo* per suum cujusque Centrum motus, vel *hujus succedaneo*, (illo quidem, si in planis ad Horizontem rectis rotentur; hoc, si in planis inclinatis:) Hoc est; utrobique à *Perpendiculari per Axem plano*.

Circa Axes vero *inæqualiter inclinatos* (adeoque in planis inæqualiter declivibus;) in ratione quæ ex rationibus *Distantiarum* illarum à Perpendiculo ejusve Succedaneo, vel Perpendiculari per Axem Plano, & *Declivitatum* Planorum, componitur.

Adeoque, *Pondera Inæqualia* circa *æqualiter inclinatos* Axes (adeoque in Planis æqualiter declivibus;) in ratione quæ ex *Ponderum* & *Distantiarum* illarum (à Perpendiculo ejusve Succedaneo) rationibus componitur.

Circa Axes vero *Inæqualiter inclinatos*; in ea quæ ex *Ponderum*, & *Distantiarum* illarum, & *Declivitatum*, rationibus componitur.

INtelligatur Libra, à situ Horizontali A C B, ad situm α C ς, vel a C b, moveri; puncto sui B, describens arcum Peripheriæ B ς b, in plano sive ad Horizontem recto, sive utcunque obliquo. Et compleatur C B ς S circuli quadrans. Et ducantur rectæ ς κ, b c, ipsi B C parallelæ; Perpendiculo (ejusve succedaneo) S C, occurrentes in κ, c. Dico in ea ratione ponderare expositum pondus in punctis B, ς, b; quæ est rectarum B C, ς κ, b c, distantias ab S C mensurantium.



Nam, demissis à punctis ς, b, ad Libram in situ Horizontali A B, perpendicularibus ς δ, b d: Ostendetur, ex 4 hujus (ejusve Scholio) si C B ς S planum sit ad Horizontem rectum; tantundem ponderare, respectu assumptæ Libræ A B, pondera ex B, ς, b, punctis suspensa, atque si ex B, δ, d, suspenderentur. Adeoque; si sint æqualia pondera; in ratione Distantiarum B C, δ C, d C, (per præcedentem;) hoc est (propter parallelas) Distantiarum B C, ς κ, b c: Sin pondera sint inæqualia; in ratione quæ ex Ponderum & Distantiarum rationibus componitur (per eandem Prop. præced.) Quæ erant proposita.

Idemque in Plano inclinato, constabit ex 26 Cap. 2. Cum enim inclinatio plani (per 26 Cap. 2.) in eadem ratione omnes in illo plano gravitationes minuit; in eadem inter se ratione ponderabunt in B, ς, b, punctis appensa pondera, in plano inclinato, qua in plano ad Horizontem recto ponderarent (per 5 Cap. 1.) Hoc est (ut jam ostensum est) in ratione Distantiarum, si Pondera sunt æqualia; vel, si inæqualia, in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus composita. Quæ itidem probanda erant.

Quod autem eadem sit punctorum ς, b, ab erecto per Axem Plano perpendiculari,

lari, atque ab S C recta (quæ illius eſt, atque circuli libratione deſcripti, ad planum illud recti, communis ſectio) Diſtantia : Sive (quod eodem recidit, propter punctorum, ſive à recta, ſive à plano, diſtantias, rectis perpendicularibus menſurari ſolitas) quod rectæ β κ, b c, in circuli plano perpendiculares ad S C rectam, ſunt etiam ad illud per axem planum perpendiculares : Conſtat ex Def. 4. El. 11. Quod etiam affirmatum erat.

Alia Demonſtratio.

Eadem alias demonſtrabimus, ex Prop. 21. Cap. 2. pro varia motus Obliquitate. Nam (conſtructis ut prius, ductiſque contingentibus B T, β τ, b t, ut in Schemate ;) Puncti B, quocunque onere gravati (& quidem ſive in recto ad horizontem plano ſive uteunque Obliquo) per arcum B β b moti ; eadem eſt obliquitas motus in ipſis B, β, b, punctis, atque B T, β τ, b t, contingentium ; (per 15. Cap. 2.) quarum inclinationum ad horizontem anguli (ſi planum ſit erectum) ſunt T B C, τ β κ, t b c ; & his æquales, anguli S C B, S C β, S C b ; (eſt utique T B C, S C B, uterque rectus ; & tum τ β κ, tum S C β, ſumpto communi κ β C, complent rectum, per 16 El. 3. & 32 El. 1. & ſimiliter tum t b c, tum S C b, ſumpto communi c b C ;) quorum Sinus recti ſunt, B C, β κ, b c : His igitur proportionalia ſunt Æqualium ponderum momenta in punctis B, β, b, in erecto plano, per 21 Cap. 2. (Adeoque ; Inæqualium, in ratione quæ ex illa & Ponderum ratione componitur ; per 19 Cap. 2.) Eademque plano Obliquo accommodanda, ut prius, per 26. Cap. 2. Quæ erant probanda. Fig. 69.

Quodque de una Libra oſtenſum eſt ; de pluribus ſimiliter oſtendetur. Puta, ſi ad Libræ C B, punctum δ ; &, Libræ C b, punctum b ; appenſa ſint æqualia pondera : ponderabunt (per jam dicta) in ratione diſtantiarum δ C, b c, cæteris paribus, (Adeoque, ſi pondera ſint inæqualia ; in rationibus ex Diſtantiarum & Ponderum rationibus compoſita, per 1 Cap. 2.) Quod itidem erat propoſitum.

Denique ; quod de Axibus inæqualiter inclinatis, affirmatur ; adeoque, Motuum Planis inæqualiter Declivibus : Conſtat ex Prop. 24, 25, 26, Cap. 2. Quod ultimo demonſtrandum erat.

SCHOLIUM.

NOtandum interim hîc erit ; non ita hæc intelligenda eſſe, quaſi, ſi ad Libram A B appenſum pondus in B, ponderi in A, æquiponderet ; illud in β, huic in α cederet, ſeu minus ponderaret. Quanquam enim illud in β, minus ponderet quam in B ; non tamen deſtruitur æquilibrium, quoniam & in eadem ratione (propter eandem obliquitatem) minus ponderet hoc in α quam in A. Quodque de Æquilibrio dicitur ; pariter & de momentis inæqualibus obtinebit. Puta, qua ratione pondus in B, præponderat ponderi in A ; eadem & illud in β præponderabit huic in α. Nam utriuſque momentum proportionaliter minuitur, ob eandem motuum obliquitatem ratione Perpendiculorum ad terræ Centrum ; quæ Ponderum moventium Directiones ſunt, & ſupponuntur invicem parallela.

At vero : Si loco Ponderis in A, α, a, (cujus Directio ſupponitur eadem cum directione ponderis in B, β, b ; utraque ſcilicet deorſum ad terræ centrum ; adeoque &, propter Tangentes parallelas, Declivitates æquales :) ſubſtituatur, verbi gratia, Vis humana ; quæ non minus applicari poterit ſecundum directionm α υ, quam A V perpendiculum ; (adeoque ejuſdem erit momenti in quocunque libræ ſitu ; dum interim illud Ponderis à B ad β moti minuitur :) Minuetur continuo ratio Reſiſtentiæ ponderis (à B ad β, b, moti) ad æquale momentum Virium in A, α, a. Adeoque Vis in α, facilius movebit pondus in β, quam vis eadem in A, pondus idem in B. Quæ ex propoſitione ſequente apertius conſtabunt.

PROP. XIV.

Si duo pondera (aut aliæ quæcunque vires) ad Libram applicata, ita ſe habeant, ut, in quocunque Libræ ſitu, eadem utriuſque ſit obliquitas motus: Quam habent inter ſe horum momenta rationem in uno Libræ ſitu; eandem & in quovis alio habitura ſunt.

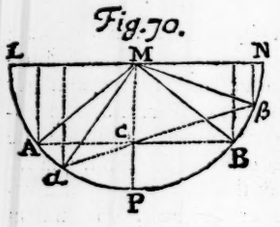
Si vero (vel, propter curvatum libræ Jugum; vel, Centrum Motus extra ipſam Libram; vel, non eaſdem applicatarum virium Directiones; vel, alias undecunque;) contingat, pro vario Libræ ſitu, inæquales ſubinde futuras eſſe duorum motuum obliquitates: Non eadem erit, in omni Libræ ſitu, momentorum ratio: Sed variabitur, pro varia ratione Declivitatum, ſive Sinuum Angulorum Inclinationis ad Horizontem, ſive Complementi obliquitatis.

Quodque de duobus ponderibus dictum eſt, de pluribus ſimiliter conſtabit.

I. INtelligantur, ad libram ACB, duo Pondera (ſeu vires aliæ) in A, B, ita applicata, ut directiones motuum AV, BT, vel nullam habeant vel æqualem obliquitatem (hoc eſt, ad directionem Moventis, quæ in Gravibus eſt Perpendiculum, vel nullum faciant, vel æquales angulos:) Eademque ſi, mota Libra, in alium quemvis ſitum pervenerint, ut α β; eadem adhuc ſit Directionum Motus α υ, β τ, obliquitas: Eadem, inquam, erit inter ſe momentorum ubique ratio. Puta, ſi pondus in B ponderi in A æquiponderet; illud in β huic in α æquiponderabit. Si illic præponderet: &, hic, præponderabit; atque in eadem ratione. Cum enim, ex hypotheſi, eadem utriuſque ſit ubique Obliquitatis variatio; adeoque (per 21 Cap. 2.) eadem ratione vel augeatur vel minuatur utriuſque momentum: Erunt adhuc in eadem ad invicem ratione, qua prius, conſtituta; (per 5 Cap. 1.) Quod erat primo demonſtrandum. Fig. 69.

II. Deinde: Sit *Libræ Jugum incurvatum* AMB: Seu (quod eodem recidit) *Centrum motus* M, *extra libram* ACB. Et ſunto, verbi gratia, utraque A, B, infra LMN Horizontalem rectam per Centrum Motus tranſeuntem; ſed ad perpendiculi MP partes oppoſitas. Adeoque, utut fieri poſſit eandem eſſe in A & B motus obliquitatem; ſi tamen moveatur A ad α verſus P; adeoque (propter rotationem, quæ angulos AMB, αMβ, æquales poſtulat) B ad β verſus N; (nec tamen vel A ad P, vel B ad N perveniat:) Manifeſtum eſt, majorem eſſe motus obliquitatem in α quam in A; minorem tamen in β quam in B; (majorem utique angulum cum perpendiculo faciet Tangens in α, quam Tangens in A, minorem vero Tangens in β quam Tangens in B.) Adeoque (per 21 Cap. 2. vel Prop. præced.) minuitur momentum ponderis ab A ad α moti; moti vero à B ad β, augetur. Et propterea (per 8 El. 5.) major erit ratio momenti in β ad momentum in α, quam momenti in B ad momentum in A. Et ſimiliter oſtendetur (mutatis mutandis) in aliis libræ poſitionibus alias variari momentorum rationes. Et quidem, pro varia ratione ſinuum Angulorum inclinationis, ſeu complementi obliquitatis; per eandem 21 Cap. 2. Quod erat itidem demonſtrandum.

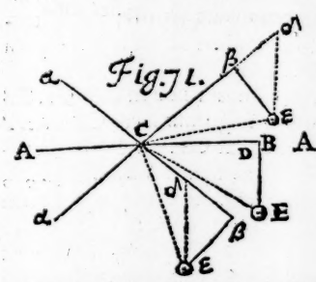
Fig. 70.

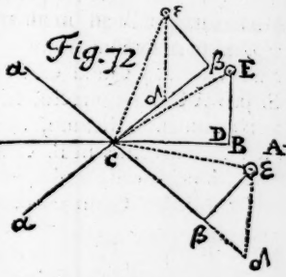


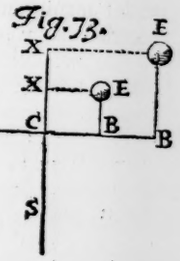
III. Idem oſtendetur, ſi ex ACB Libræ puncto aliquo, ut B, dependeant, non quidem libere (ut eidem ſemper libræ puncto directe ſubſit) ſed in certo angulo, ut CBE, fixum pondus E: Aut etiam, ſi ſimiliter ſuperne affigatur. Manifeſtum utique eſt (rotatione facta circa centrum C) punctum E (vel huic affixum pondus) circulum deſcribere, non quidem radii CB, ſed CE: Idemque plane accidere, ac ſi jugum eſſet incurvatum ACE; de quo modo oſtenſum eſt. quod erat propoſitum. Fig. 71, 72.

Atque hinc oſtendetur (per Prop. præced. vel 21 Cap. 2.) quod *Pondus E infra libram*

libram fixum; prout altius elevatur, ita plus ponderat, ſeu majori in A ponderi æquipollet: At, fixum ſupra libram; minori. Quod, inſpectis figuris, ſtatim patebit. Quippe diſtantiæ æſtimandæ ſunt, non ſecundum longitudines CB, Cβ; ſed CD, Cδ: ut ex 4 hujus patebit.







IV. At vero, ſi nec ſupra libram, nec infra, ſed à latere, affixum ſit Pondus E; (intellige, ita ut, rotata libra ACB circa axem XCS, ſint ubique CX, BE, in eodem plano:) erit eadem ubique momentorum ratio, ponderum in A & E, non minus quam in A & B, poſitorum. Cum enim parallelos arcus, æquales ſimiles & ſimiliter poſitos, deſcribant B, E, puncta; eadem ſemper utriuſque erit obliquitas motus. Adeoque & eadem ratio momentorum; per primam partem hujus. Atque omnino perinde eſt, atque ſi libra XE (ipſi CB parallela) circa centrum X ferretur. Fig. 73.

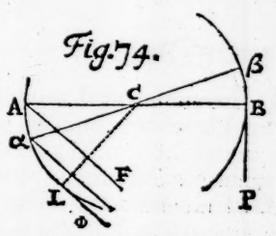
SCHOLIUM.

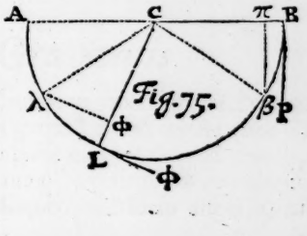
ATque hujus ope, quæ utcunque ad varias circa eundem Axem libras (connexas tamen) in variis Planis applicantur Pondera (puta in parallelis planis Perpendicularibus per AB, XE, &c.) ad eorum unum reducuntur. Perinde ſiquidem Ponderat E Pondus, ubicunque in BE recta infinita fuerit, atque ſi eſſet in ipſo B puncto. Ut jam oſtenſum eſt.

Quæ autem ita ad unum Planum reducuntur Pondera; eadem, per 4 hujus, ad unam ejuſdem rectam quamlibet (utcunque infra, ſuprave fuerint) reducuntur. Perinde ſiquidem ponderant, ubicunque fuerint in eodem Perpendiculo (ſive revera, ſive huc ut modo dictum eſt, reducta) atque ſi in ipſa quam quis velit iſtius Plani recta eſſent. Ut ibidem probatum erat.

Quæque ita ad unam libram reducta ſunt pondera; eadem & ad unum ipſius Punctum, Æquilibrii Centrum, mox reducentur, per 20 hujus. Quippe ita perinde Ponderant ſimul omnia, atque ſi ex illo puncto dependerent. Ut ibidem probabitnr.

V. Porro; Manente Jugo recto AB, & centro motus in ipſa Libra, C: Si tamen alia ſit directio virium in A & B adhibitarum; variabitur, pro varia Libræ poſitione, momentorum inter ſe ratio; atque ita quidem ut in propoſitione eſt affirmatum. Eſto enim, verbi gratia, AB libræ Jugum, in ſitu Horizontali poFig. 74.





ſitum; ejuſque puncto B applicatum grave; adeoque virium Directio BP ad Horizontem perpendicularis: Puncto autem A, vis alia quævis (puta, humana,) adhibita, ſecundum directionem AF (ipſi BP minime parallelam;) cui quidem AF parallela LΦ, peripheriam puncto A (circa C rotando) deſcriptam tangat in L; (infra vel ſupra punctum A, prout contigerit) Manifeſtum utique eſt,

moto A ad α versus L (priusquam ad L pertingat) Minui Obliquitatem motus; (sive angulum quem facit directio motus cum directione virium AF, vel huic parallela:) Adeoque (per prop. præced. vel 21 Cap. 2.) Augeri Momentum: Dum interim moto B, per similem arcum, ad β, hujus Obliquitas Augetur; adeoque Momentum Minuitur. Et propterea (per 8 El. 5.) alia ratio erit, pro mutato libræ situ, momenti virium in A ad momentum Ponderis in B; atque momenti Virium in α ad Ponderis in β momentum. (Et quidem in ea ratione quam innuit propositio: per 21 Cap. 2.) Quod erat affirmatum.

VI. Contra vero; Si pro ACB jugo recto, substituamus (hoc in casu) LCB jugum inflexum; atque ita quidem inflexum, ut quem angulum facit CB ad BP directionem Gravitatis seu vis moventis in B, eandem faciat CL ad LΦ directionem vis in L moventis: Manebit eadem ubique ratio momenti Virium in L, λ, ad momentum Ponderis in B, β. Quippe idem hic præstabit jugum inflexum LCB, atque in primo hujus demonstrationis casu, rectum ACB. Et ut illic (propter similes arcus Aα, Bβ,) æquales erant obliquitates in α, β, non minus quam in A, B; sic hic, ob easdem causas eadem erit in β, λ, non minus quam in B, L, eadem Obliquitas. Cæteraque, ut illic ostendentur. Dummodo (quod hic intelligendum est) directio virium in L, λ, punctis, sit semper eadem; puta, rectæ LΦ parallela: sicut eadem supponitur directio Ponderum, in B, β; puta Perpendiculum ad Terræ Centrum. Fig. 75.

VII. At vero; si in punctorum altero, ut B, β, ponderis directio eadem sit (puta, recta ad Centrum Terræ, seu Perpendicularis ad Horizontem;) in altero vero, ut A, α, directio moventis in singulis Aα curvæ punctis alia atque alia; sitque, verbi gratia, secundum ductum ipsius curvæ, vel Rectas in iisdem punctis Tangentes: Propter motus obliquitatem in A, α, sive nullam, sive eandem; mutatam vero in B, β; (adeoque virium momentum illic æquale, hic continuo immutatum;) vel utrobique immutatum quidem, sed non similiter immutatum: Variabitur & momentorum inter se ratio (sive rectum sit jugum, sive Inflexum) pro vario libræ situ; ita quidem ut in Propositione determinatum est. per 21 Cap. 2.

Quodque in expositis casibus ostensum est; similiter ostendetur (ex iisdem Prop. 21. Cap. 2. & præcedente hujus) in aliis quibusvis casibus. Constat igitur, quod erat propositum.

SCHOLIUM.

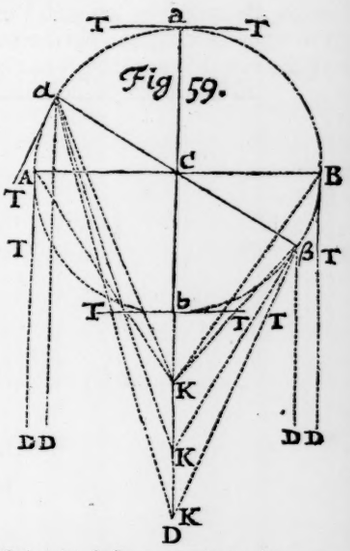
VIsum est, in hac Propositione generaliter proposita plures casus exhibere, & strictim comprehendere; potius quam totidem Propositionibus singulos exhibere: tum quia eodem principio nituntur omnes, eademque demonstratione confirmantur; tum quia infiniti essēt laboris singulos recensere qui huc adduci casus possent. Expositis igitur hisce paucis, facile erit alios hisce similes, prout res tulerit, huc referre; & tanquam generali propositione comprehensos, ejusdem demonstratione confirmatos reputare.

Estque opportunus hic locus demonstrandi illud quod supra insinuavimus in Scholio Prop. 3. Nempe [*Si intelligatur Centrum Terræ tanquam in infinita distantia*; *Libra* (vel non gravata, vel utrinque æqualiter gravata) *quocunque situ ponatur, quiescet*: *Si vero intelligatur Centrum Terræ tanquam in distantia finita*; *quiescet quidem Libra in situ Horizontali posita*; *vel etiam in situ ad Horizontem Perpendiculari*; *posita vero in situ ad Horizontem Obliquo, neque sic quiescet* (quod volunt aliqui) *neque* (quod volunt alii) *ad situm Horizontalem feretur*; *sed ad situm Horizonti Perpendicularem.*

Intelligantur, in AB Libra, duo quævis puncta, AB, æqualiter utrinque à Centro C remota, invicem æquiponderantia (sive æqualiter gravata) à situ AB Horizontali, per situm Obliquum αβ, ad situm ab Horizonti Perpendicularem lata, arcus similes & æquales rotando describere Aαa, Bβb; quos tangant rectæ AT, αT, aT, BT, βT, bT; quæ itaque *Directionem Motus* in illis respective punctis designabunt, per Prop. 15. Cap. 2. Fig. 59.

Atque Intelligatur, primo, Centrum Terræ (quo tendunt Gravia) tanquam in Infinita Distantia; adeoque Perpendicula, seu Rectæ-Deorsum (*Directionem Moventis*, seu Vis Motricis, designantes) AD, αD, aD, BD, βD, bD, invicem parallelæ.

parallelæ. Erunt igitur, in ſitu Horizontali (propter tum rectas AD, AT, tum BD, BT coincidentes) eadem utrobique Declivitas; (utpote utrobique perpendicularis:) Item, in ſitu ad Horizontem Perpendiculari (propter angulos D a T, D b T, rectos) eadem etiam Declivitas (quippe utrobique nulla:) Sed & in ſitu Obliquo (propter tum α T, β T, tum αD, βD, invicem parallelas; adeoque Obliquitatis angulos æquales D α T, D β T, quos cum directione Moventis facit Directio Mobilis;) æqualis utrobique Declivitas (per Declivitatum Definitiones;) adeoque (cum cætera ſint paria) æquiponderabunt (per 13 hujus:) Cum itaque contraponderant (per 1 hujus) ſe mutuo ſuſtinebunt, nec fiet motus (per 12 Cap. 1.) Quieſcet igitur Libra, quocunque ſitu poſita. Quod erat propoſitum.



Intelligatur deinde Terræ Centrum, tanquam in Diſtantia Finita; adeoque Perpendicula ſeu Rectæ ad Centrum (*Directionem Moventis* deſignantes) invicem convergentes puta, A K, B K, α K, β K, a K, b K, in Terræ Centro K coeuntes. Si itaque ponatur Libra in ſitu ad Horizontem Perpendiculari; erit (propter K a T, K b T, angulos rectos) æqualis utrobique Declivitas (quippe nulla:) Item, in ſitu Horizontali (propter tum angulos C A T, C B T, rectos, tum C A K, C B K, invicem æquales) æquales item erunt Obliquitatis Anguli K A T, K B T. Adeoque (propter æqualem utrobique Declivitatem) æquiponderabunt, & ſeſe mutuo ſuſtinebunt, A, B; Libraque propterea quieſcet, per modo demonſtrata. Si vero ponatur Libra in ſitu Obliquo: Obliquitatis Anguli K α T, K β T, inæquales erunt; & quidem major ille qui eſt ad Brachium elevatius: puta K α T. Nam duorum æqualium angulorum D α T, D β T, altero ſemper Major eſt angulus ille K α T; Altero vero, angulus K β T vel Minor erit (nempe quoties ob magnam Libræ declivitatem, vel magnam Centri diſtantiam, β K cadit inter β D & β T;) vel erit Nullus (nempe, ſi β K circulum contingat, adeoque coincidant β T, β K;) vel ſaltem Minus eum ſuperabit (nempe ſi quando propter exiguam Libræ Declivitatem, vel exiguam à Centro Terræ Diſtantiam, β T cadat inter β K & β D) ob angulum K β C, majorem angulo K α C (per 18. El. 1. Euclid.) adeoque (qui ad rectum reliquus eſt) K β T minorem (reliquo) K α T: (Quæ Schema contemplanti ſatis obvia ſunt.) Erit igitur (quocunque ſitu Obliquo ponatur Libra; modo Terræ Centrum intelligatur in diſtantia finita) in motu depreſſioris puncti β minor Obliquitas, (adeoque Declivitas major) quam elatioris α; adeoque β præponderabit, per 13 hujus. Et conſequenter (cum de punctis reliquis utriuſque Brachii reſpective ſumptis, idem ſit judicium; ſintque cætera paria;) deorſum feretur Brachium depreſſius (per 12 Cap. 1.) donec redigatur Libra, ad ſitum Horizonti Perpendicularem a b. Quod erat propoſitum.

Sunt qui contrarium hujus affirmant, inter quos Jordanus & alii, aſſerentes Libram obliquo ſitu poſitam, latum iri in ſitum Horizontalem: contra quos prolixe diſputat Guid-Ubaldus in Mechanicis. Qui tandem concludit, permanſuram fore libram quocunque ſitu poſitam, etiamſi conſideretur Centrum Terræ tanquam in diſtantia finita. Quorum neutrum dicendum eſſe, ex ſupra demonſtratis conſtat.

Hinc ſequitur, *Ejuſdem Rectæ non unum aliquod ſtatum eſſe Centrum Æquilibrii*; quod nempe idem ſit pro omni ſitu: ſed, in ſitu obliquo, à puncto medio magis magiſque ad partem decliviorem procedere, prout obliquitas major fuerit; dummodo Centrum Terræ intelligatur in diſtantia finita. Quodque hic de Rectæ Centro Æquilibrii dicitur; ſimiliter infra intelligetur *de Centro Gravitatis* in Solidis, Planis, aliiſve.

Sed & ex iiſdem principiis probabitur, Ejuſdem *Gravis* (*cæteris paribus*) *gravitatem minorem continuo fieri, prout Centro Terræ magis appropinquat.* Si enim, verbi

verbi gratia, rectæ AB, punctum medium C, intelligatur recta CK ad Centrum directe ferri; adeoque eadem ſemper Declivitate, & eodem impetu: reliqua tamen puncta, ut A, B, majorem continuo Obliquitatem ſortientur prout Centro terræ fiunt propiora. Nam, eadem manente AKB trianguli baſe AB, prout altitudo CK minuitur, obtuſior fiet angulus AKB; adeoque reliqui KAC, KBC, minores; & conſequenter, majores fient Obliquitatis anguli KAT, KBT: (Idemque in ſitu obliquo $\alpha\beta$ ſimiliter fere oſtendetur.) Et quanquam de rectæ ſitu Perpendiculari a b, non idem contingat (eo quod tota recta ſit in perpendiculo) tamen de rectis extra hunc ſitum, ſed & de curvis omnibus, omnibuſque tum ſuperficiebus, tum ſolidis (ut quæ non poſſint tota in perpendiculi recta jacere) idem oſtenditur.

Verum ubi Centrum Terræ conſideratur tanquam in infinita diſtantia; adeoque Perpendicula tanquam parallela; (quod in Staticis plerumque fit;) hæc omnia locum non obtinent. Quam quidem hypotheſin (poſt Archimedem, alioſque) nos etiam ſequimur, niſi cum contrarium inſinuatur: quod & aliquoties monuimus.

PROP. XV.

Ex tribus his, Pondere, Ponderatione, & Diſtantia puncti applicationis (Sive, à communi Motus & Libræ Centro; nempe ſiquod ſit; ſintque ad eandem per centrum motus rectam applicata pondera: Sive, à Perpendiculo per Centrum motus; ſi in eodem recto ad Horizontem plano rotentur: Sive, à perpendiculi Succedaneo; ſi ſaltem in eodem plano rotentur: Sive denique à perpendiculari Plano per axem motus:) Datis duobus quibuſvis, datur tertium.

Nempe; Datis Pondere & Diſtantia; datur Ponderatio: Datis Pondere & momento ſeu Ponderatione; datur Diſtantia: Datis Ponderatione & Diſtantia; datur Pondus.

Excipe; Si (quod una cum ponderatione datur) Diſtantia vel pondus nullum ſit.

Intelligitur autem Propoſitio, præſertim de Libra in plano ad horizontem recto librata; ſaltem in data declivitate. Et ſimiliter in ſequentibus.

$$PD=G. \qquad \frac{G=PD}{P}=D. \qquad \frac{G=PD}{D}=P.$$

CUm enim (per 12 & 13 hujus) Ponderationis ſive Momenti ratio, ex rationibus Ponderum & Diſtantiarum componatur: Datis componentibus; datur compoſita: Item; Datis compoſita, & componentium altera; datur reliqua; (per 2 & 3 Cap. 1.) Adeoque conſtat propoſitum.

Exceptio item inde patet. Quoniam Pondus nullum, nihil Ponderabit, in quacunque Diſtantia: Et, Nullius Diſtantiæ, nulla eſt Ponderatio, quodcunque ſit Pondus.

SCHOLIUM.

MOmentum illud hic intelligo, quo Pondus gravat ſuum reſpective Libræ Brachium; quod itaque ſpeciatim *Ponderationem* appello: Non quatenus vel Centrum Libræ gravat, vel punctum illud ex quo directe dependet.

Propoſitionem hanc (& ſequentes aliquot) multiplicem facere, pro varia Diſtantiæ interpretatione ſecundum varios caſus, potius quam propoſitionum numerum augere, viſum eſt; quoniam eadem toties eſſet repetenda demonſtratio. Quamque hic adhibui variarum interpretationum Diſtantiæ, variis caſibus accommodationem; eadem in ſequentibus Propoſitionibus intelligenda erit.

PROP.

PROP. XVI.

Dato Pondere, in data (à communi motus & Libræ Centro; vel à Perpendiculo per Centrum motus, ejuſve ſuccedaneo; vel à Perpendiculari Plano per axem motus;) Diſtantia: Pondus aliud inveſtigare, quod, in aſſignata diſtantia, dato vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

Item; Diſtantiam inveſtigare, in qua, Pondus aſſignatum, dato vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

$P.$ $\frac{1}{n}P.$ $nP.$ $\frac{m}{n}P$ $nP.$

$D.$ $nD.$ $\frac{1}{n}D.$ $nD.$ $\frac{m}{n}D.$

$\overline{PD.}$ $G::\overline{PD.}$ $G::\overline{PD.}$ $G::m\overline{PD.}$ $mG::m\overline{PD.}$ $mG.$

SIt P, datum pondus; in diſtantia CD, quam D dicimus, ſuſpenſum. Sitque alia expoſita diſtantia, puta nD, (quæ ſit ad D datam ut n ad 1;) idque vel in eodem vel in contrario Libræ Brachio. Dico; Pondus $\frac{1}{n}P$ (quod ſit ad datum P, ut 1 ad n) in aſſignata diſtantia nD, priori in D, æquiponderare.

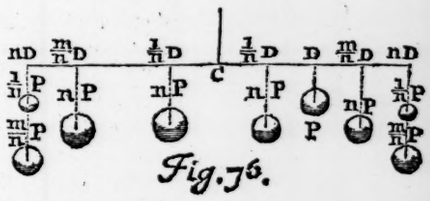


Fig. 76.

Item: Sit aſſignatum Pondus, ut nP (quod ad datum P, ſit ut n ad 1.) Dico; In diſtantia $\frac{1}{n}$D (quod ſit ad datum D, ut 1 ad n) aſſignatum nP pondus, priori in D æquiponderare.

Cum enim utrobique poſteriora Pondus & Diſtantia, ſint prioribus reciproce proportionalia; (alterum ut n ad 1, alterum ut 1 ad n:) Æquiponderabunt. per 12 & 13 hujus.

Similiter: Si imperetur, non ut æquiponderent; ſed, ut in data ratione; puta, ut m ad 1: Pro $\frac{1}{n}$P, $\frac{1}{n}$D; poſitis $\frac{m}{n}$P, $\frac{m}{n}$D; habetur quæſitum. Quippe hæc, ad prius poſita, ponderant in ratione m ad 1. per eaſdem 12 & 13 hujus.

PROP. XVII.

Æqualis; ejuſdem, vel æqualium Ponderum; (ſive, ad commune motus & Libræ Centrum; ſive, ad Perpendiculum per centrum motus, ejuſve ſuccedaneum; ſive, ad Perpendiculare Planum per motus Axem;) Propinquatio; aut inde Elongatio: (ſive Pondus Centro illi, aut Perpendiculo Planove, admoveatur; ſive Centrum, Perpendiculum, Planumve, Ponderi; vel contra:) Æqualiter Auget, Minuitve Ponderationem. Et; Inæqualis: vel, Inæqualium Ponderum: Proportionaliter.

SEquitur ex 12 & 13 hujus. Cum enim Æqualia Pondera, ponderant in ratione Diſtantiarum: Qua ratione Augetur Minuiturve Diſtantia; in eadem ſimiliter vel Augetur vel Minuitur Ponderatio. Tantundem autem Addit, qui ex Duplo Triplum facit, & qui ex Triplo Quadruplum, &c. Quodque de Æqualibus dicitur; de Proportionalibus ſimiliter inde conſtat.

PROP. XVIII.

Datis Ponderibus quotlibet: Datisque, vel communi motus & Libræ Centro (aut perpendiculo per centrum motus ejusve succedaneo, aut perpendiculari Plano per motus axem,) atque Applicationum punctis; vel horum ab illo Centro (aut perpendiculo, perpendiculive succedaneo, aut Plano) ad datas partes Distantiis: Investigare; Quanta sit tum singulorum, tum simul omnium ponderatio; &, ad quas partes; Tum denique quantum gravant ipsum quo sustinentur Centrum, aut Axem.

+D.	+3D.	+4D.	±0D.	−2D.	−3D.
P.	5P.	3P.	4P.	3P.	4P.
+DP.	+G:: +15DP.	+15G:: +12DP.	+12G:: ±0DP.	±0G:: −6DP.	−6G:: −12DP.	−12G.

Fig. 77.

$+1G \left.\begin{matrix}\\+15G\\+12G\end{matrix}\right\} = +28G.$

$\pm 0G = \pm 0G.$

$-6G \left.\begin{matrix}\\-12G\end{matrix}\right\} = -18G.$

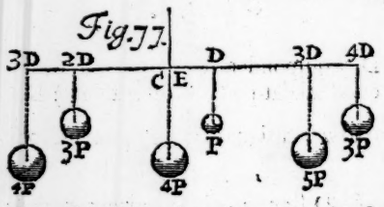
$+10G.$

IN Distantiis: verbi gratia, ad Centri (Perpendiculi, hujusve succedanei, Planive) Dextram (quas signo + insignimus) D, 3D, 4D; dependeant Pondera, P, 5P, 3P: quæ (posito P in Distantia D ponderare ut G) ponderabunt ut G, 15 G, 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeoque simul gravant brachium Dextrum, ut 28 G; per 8 Cap. 1.

In Distantiis ad sinistram (quas contrario signo — insignimus) 2 D, 3 D; dependeant Pondera 3 P, 4 P: Quæ itaque contraponderabunt, ut −6 G, −12 G; per 12 & 13 hujus: Adeoque simul gravant sinistrum brachium ut 18 G; per 8 Cap. 1.

Atque ex ipso Centro, quod itaque neutrum gravat Brachium, Pondus 4 P: Cujus Ponderatio est, ut ±0 G. per 12 & 13 hujus.

Fig. 77.



Quæ simul omnia valent, ut $+28G - 18G \pm 0G = +10G$; per 8 Cap. 1. Adeoque prægravant Brachium Dextrum, ut 10 G. Hoc est (propter positum $DP = G$) quantum Decuplum Ponderis P in distantia D, dextrorsum, appensi.

Et similiter faciendum erit, quotcunque & quantacunque in quibuscunque distantiis, ad utramvis partem appendantur Pondera: (habentur enim vel ex 12 & 13 hujus, vel ex 15 hujus, singulorum Ponderationes:) Idque, sive dentur ipsæ Distantiæ; sive Centrum (Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planumve) una cum Appensionum Punctis; (nam, his datis, Distantiæ simul dantur; nempe ductis ab Appensionum Punctis, vel rectis ad Centrum illud, vel perpendicularibus ad Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planumve.) Invenimus ergo, tum singulorum, tum simul omnium, Ponderationem; &, ad quas partes. Quod erat faciendum.

Quod vero C commune motus & Libræ Centrum spectat, vel siquod aliud est motus Centrum, vel Axem etiam; quo sustinetur cum ponderibus Libra, ne tota ruat: tantundem valent atque simul omnia pondera $+P+5P+3P+4P+3P+4P = 20P$, ex centro æquilibrii directe dependentia; (saltem in ea declivitate inde dependentia, qua cum Ponderibus Libra librari intelligitur:) per 2 hujus vel 18 Cap. 2. Utpote quorum Descensus eo impeditur. Quod itidem investigandum erat.

SCHOLIUM.

DIco autem, *Ex centro æquilibrii*: Quoniam, dum, propter Præponderantiam dextri Brachii, Libra (si sibi permittatur) circa Centrum motus rotatur; Eatenus descendens, quatenus descendit Centrum Æquilibrii (per 9 hujus:) Fixum illud Centrum motus (vel motus Axis) non ulterius impedit Descensum Libræ, quam, quatenus Descensus ille ex Rotatione proveniens, minus valet, quam directus

rectus eorundem Ponderum, totiusque Libræ, Descensus. Et quantum valet horum Descensuum Differentia, tantundem gravatur Centrum (vel Axis) sustinens.

At vero; si addito, ad Brachium sinistrum, Pondere quod gravitet ut 10 G, quo ad Æquilibrii statum redigatur Libra; unde propterea impediatur ne ascendat sinistrum Brachium, quo itaque impediatur Rotatio: jam totum descensum impedit Centrum illud (vel Axis) fixum; Adeoque tantundem gravatur, quantum sunt (tum ipsius Libræ Pondus; tum adventitium illud, quod additur, quantumcunque sit, quod, situ quo ponitur, valet ut 10 G, libram reducens ad æquilibrium; tum) illa simul omnia appensa Pondera.

Obex vero, siquis superne objectus Rotationem impedit, tanta vi premitur, quanta est Ponderis, quod eo loci appensum, Libram reduceret ad Æquilibrium: Nec tamen Centrum (Axemve) tantillo onere levat; (quia nihil sustinet; hoc est, nihil impedit quin tota moles simul descendat:) Sed gravat potius.

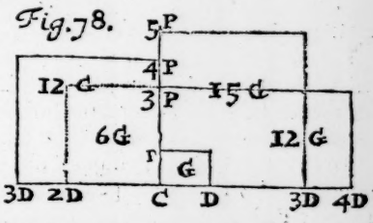
Sin, loco hujus ad Brachium sinistrum Obicis, intelligatur Fulcrum Brachio dextro subjectum, quo Rotatio impediatur: Sustinet quidem hoc partem oneris, eaque Centrum levat.

Verum hæc consideratio non est hujus loci; sed ad Vectem spectat duobus Fulcris sustentum.

Si quis interim (præcedentem hanc demonstrationem quod spectat) Calculi methodum aversetur; (utut Demonstrationes Arithmeticas, Linearibus intermistas, non refugiat vel Euclides ipse, vel quantumcunque severus quisquam ex Veteribus Demonstrator;) Lineisque malit illud præstari: Facile erit quicquid est Calculi, sive hic, sive alias, ad Lineas revocare (quod tamen ad Pompam magis faciet, quam ad Demonstrationis Robur vel Perspicuitatem:) Cujus quidem ad hanc propositionem Instantiam libet exhibere. Ad cujus exemplar, quicquid hujusmodi hic alias occurrat, poterit similiter in Lineis, cui id libitum erit, quispiam exhibere.

Alia Demonstratio.

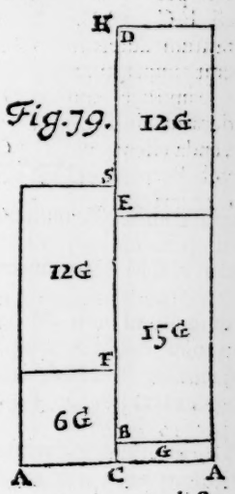
Fig. 78.



Expositis, ut prius, Distantiis, Ponderibusque: Super rectis, quæ expositis Distantiis D, 2D, 3D, 4D, &c. sint æquales, vel proportionales; totidem construantur Rectangula, vel, similiter inclinata Parallelogramma; quorum altitudines, sint respectivis Ponderibus proportionales. Puta; Ad Dextram, DP seu G; 3D 5P seu 15G; 4D 3P seu 12G: Ad sinistram, 2D 3P seu 6G; 3D 4P seu 12G; Quæ quidem Parallelogramma, quum Bases habeant expositis Distantiis proportionales; & Altitudines, proportionales Ponderibus; (ex constructione:) sunt ipsa, in ratione ex his composita (per 23 El. 6.) hoc est; in ea qua ponderant appensa Pondera; per 12 & 13 hujus.

His demum Rectangulis seu Parallelogrammis (per 44, 45, El. 1.) totidem respective æqualia (puta, primum primo, secundum secundo, &c.) invicem æque-alta & æquangula utrinque ad eandem rectam, puta CH infinitam, tanquam communem basem, continue ponantur: Puta, ad Dextram, ea quæ ponderibus dextris respondent, ut G, 15G, 12G; ad sinistram quæ respondent Ponderibus sinistris, ut 6G, 12G.

Fig. 79.



Quæ quidem Parallelogramma, tum ipsa (quia prioribus sunt respective æqualia) tum ipsorum Bases (per 1 El. 6. cum sint æque-alta) puta CB, BE, ED, CF, FS; sunt (per modo demonstrata) Ponderum quibus respondent Ponderationibus proportionalia. Adeoque: Ut CD, summa basium ad dextram; ad CS summam basium ad sinistram; ita ponderum omnium ad Dextram, Ponderatio; ad Ponderationem omnium ad sinistram. Atq; ut SD differentia, sive ad CD, sive ad CS, sive ad CB, &c. sic est Præponderantia ponderum à dextra, ad Ponderationem vel omnium à dextra, vel omnium à sinistra, vel

ipſius ſpeciatim Ponderis cui reſpondet baſis CB, &c. Quæ erant inveſtiganda.

Pondus vero, quod ex Centro (vel Axe) dependet, ut nullam habet inde diſtantiam; ſic quæ huic reſponderent Parallelogramma (puta C4P, CA) nullius ſunt Latitudinis; adeoque nullius magnitudinis; ut & ipſum (librationem quod ſpectat) nihil gravat vel hoc vel illud Brachium.

Denique; ipſum quo omnia ſuſtinentur Centrum (vel Axem) cum ſimul omnium pariter deſcenſui recto reſiſtat, in ea ratione gravant ſingula, qua ſunt ipſa reſpective Pondera; & ſimul omnia, quantum eſt omnium Aggregatum ex æquilibrii centro ſuſpenſum: (per 2 hujus, vel 18 Cap. 2.) Hoc eſt, ut $P+5P+3P+4P+3P+4P=20P$ illic ſuſpenſa. Quod erat ultimo inveſtigandum.

PROP. XIX.

Datis Ponderibus quotlibet (vel ſumma Ponderum;) dataque eorum ad datum commune motus & Libræ Centrum (vel ad datum per centrum motus Perpendiculum, aut Perpendiculi Succedaneum; vel ad datum Motus Axem, Planumve per illum Axem perpendiculare) Ponderatione ad datas partes: Ponderationem illam Augere vel Minuere, data quantitate; ſive manente hoc centro (Perpendiculo, perpendiculi Succedaneo, Axe, Planove;) ſive manentibus Ponderibus ſic appenſis.

$$+\tfrac{1}{2}D\times 20P=+10PD=+10G.$$
$$-5PD$$
$$+\tfrac{1}{4}D\times 20P=+5PD=+5G.$$

SUnto data pondera, vel ſumma Ponderum, verbi gratia, 20 P. Sitque omnium Ponderatio ad datum Centrum, vel Axem C (vel Perpendiculum, planumve perpendiculare per Axem) $+10G=+10DP$, dextrorſum: Quæ verbi gratia, Minuenda ſit (vel Ponderatio ſiniſtrorſum Augenda) quantitate 5 PD; hoc eſt, expoſitæ Ponderationi $+10PD$, auferenda ſit 5 PD.

Inveniatur (per 15 hujus) diſtantia dextrorſum, qua datum Pondus 20 P, ponderet ut 5 PD (nempe quantum expoſitæ Ponderationi auferendum eſt) puta $\frac{1}{4}D=\frac{5PD}{20P}$. Cui ſit æqualis, verbi gratia, CE. Dico; ſi, manente C, omnia ſimul Pondera ſiniſtrorſum moveantur; quantum eſt EC recta; Vel, manentibus Fig. 77. Ponderibus, tantundem dextrorſum transferatur C: Utrumvis fiat, tanto minor erit ponderum ſingulorum Diſtantia dextrorſum (vel major ſiniſtrorſum) quanta eſt $EC=\frac{1}{4}D$. Adeoque (per 17 hujus) expoſitæ ponderationi dextrorſum, tantum aufertur (vel additur ponderationi ſiniſtrorſum) quanta eſt 5 PD. Quod erat imperatum.

Similiter omnino fieret, ſi Augenda eſſet Ponderatio dextrorſum (vel ponderatio ſiniſtrorſum minuenda;) niſi quod tunc vel Pondera dextrorſum movenda eſſent, vel C (Centrum, Axis, Perpendiculum, perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare per axem Planum) ſiniſtrorſum; quo appenſionum diſtantiæ dextrorſum augeantur, vel minuantur ſiniſtrorſum.

SCHOLIUM.

HInc fieri poteſt, ut quæ prius fuerat ſive Dextrorſum ſive Siniſtrorſum Ponderatio, in Æquilibrium evaneſcat; (puta, ſi Ponderationi $+10PD$, tantundem auferatur; quippe $+10PD-10PD=\pm 0PD$:) vel, ut Ponderatio prius Dextrorſum, jam fiat Siniſtrorſum; vel contra; (puta ſi Ponderationi $+10PD$, auferatur 15 PD; quippe $+10PD-15PD=-5PD$:) Quod per 16 hujus (qua docetur, *in data ratione* minuere) non fiet; in quacunque enim ratione (quæ infinita non ſit) minuatur, verbi gratia, $+PD$; manebit adhuc, ſigno + affectum.

PROP.

PROP. XX.

Datis Ponderibus quotlibet; una cum communi Motus & libræ Centro (vel perpendiculo per Centrum Motus, ejuſque Succedaneo, vel motus Axe, aut per hunc plano Perpendiculari;) atque applicationum Punctis, aut horum inde Diſtantiis:

Vel; Datis ſaltem ſumma Ponderum, & ſimul omnium Ponderatione ad datas partes:

Punctum Libræ datæ (vel Perpendiculum illud, aut Perpendiculi Succedaneum; vel Perpendiculare Planum per Axem; prout ab hoc aut illo Diſtantia data fuerit;) invenire: quo ſi ſuſpenderentur omnia, ſimiliter ponderarent; Nempe, tantundem, atque ad datas partes.

Quod ipſum inventum Libræ Punctum; eſt Centrum Æquilibrii: eſtque Unicum. Et Perpendiculum inventum, aut Perpendiculi Succedaneum; eſt Perpendiculum Æquilibrii, aut Succedaneum hujus: eſtque item Unicum. Et inventum Perpendiculare Planum; eſt Planum Æquilibrii Perpendiculare; eſtque hoc (ex planis plano huic per Axem parallelis) Unicum.

$$\frac{+10\,G=10\,P\,D}{20\,P}=+\tfrac{1}{2}D. \qquad \frac{+lr\,DP+ms\,DP-nt\,DP}{+rP+sP+tP}=\frac{+lr+ms-nt}{r+s+t}D.$$

ESto (ut in Prop. 18.) expoſitum C centrum motus & libræ (vel Perpendiculum per motus centrum, aut perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare Planum per motus Axem; juxta conditiones ad Prop. 15. memoratas:) Atque expoſita Pondera; quorum ſumma ſit, verbi gratia, 20 P: Et ſimul omnium Ponderatio, ut 10 G, vel 10 P D, dextrorſum. Fig. 77.

Vel, exponantur ſingula ſeorſum Pondera, cum ſuis Diſtantiis; unde, per 18 hujus, hæc Summa & Ponderatio colligi poſſint.

Datur, inquam, Diſtantia (per 15 hujus) qua ſi ad datas partes hoc totum Pondus, vel ſumma Ponderum ſuſpendatur, ſimiliter ponderabit. Nempe $\frac{+10\,G=+10\,P\,D}{20\,P}=+\tfrac{1}{2}D.$ Hoc eſt; ſi Dextrorſum (quod innuit ſignum +) in Diſtantia $\frac{1}{2}$ D (puta in puncto E, diſtantiæ C D medio; vel ubivis in perpendiculo, aut perpendiculi ſuccedaneo, per E tranſeunte; vel in perpendiculari per E plano, plano per axem motus parallelo;) ſuſpendantur ſimul omnia Pondera ſeu ſumma ponderum 20 P: Similiter ponderabunt, atque jam in ſuis ſingula ſuſpenſa locis; nempe ut +10 G, vel +10 P D. Quod erat inveſtigandum.

Vel, Univerſaliter: In diſtantiis $+l$ D, $+m$ D, $-n$ D, &c. appenſa pondera r P, s P, t P, &c. ponderant ut $+lr$ D P, $+ms$ D P, $-nt$ D P, &c. (per 18 hujus.) Horum Aggregatum, ſi per ſummam Ponderum dividatur; quod prodit $\left(\frac{+lr\,DP+ms\,DP-nt\,DP}{rP+sP+tP}=\right)\frac{+lr+ms-nt}{r+s+t}$ D, eſt Diſtantia (Dextrorſum, aut Siniſtrorſum, prout notata ſignis + aut — præpollent) qua ſi ſumma Ponderum ſuſpendatur, ſimiliter Ponderabunt: per 15 hujus. Quod erat inveſtigandum.

Dico porro; Libræ punctum E ſic inventum, Æquilibrii Centrum eſſe; (Quodque per hoc tranſit Perpendiculum, vel Perpendiculi Succedaneum; eſt Perpendiculum Æquilibrii; vel Succedaneum hujus: Et, Perpendiculare planum per E, perpendiculari per axem Plano parallelum; eſt Perpendiculum Æquilibrii Planum.)

Cum enim ita gravant Libram omnia ſimul Pondera, atque ſi ex E puncto (vel per illud tranſeunte Perpendiculo, Planove perpendiculari) dependerent

omnia (per jam demonſtrata:) Si ipſum E libræ centrum fiat (vel ubivis in eo Perpendiculo, Planove ſuſpendantur;) nihil ponderabunt, ſive neutrum prægravabunt Brachium, per 12 & 13 hujus. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) libræ punctum E, Centrum Æquilibrii: Et (per def. Perpendiculi Æquilibrii, hujuſve Succedanei, & Plani Æquilibrii) Perpendiculum illud, ejuſve Succedaneum; erit Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; & Planum illud, erit Perpendiculare Planum Æquilibrii. Quod erat demonſtrandum.

Vel etiam; Quia, poſito C Centro libræ, tantundem ſimul omnia dextrorſum Ponderant, atque ſi in diſtantia CE dextrorſum, ſuſpenderentur omnia: Si Centrum transferatur à C in E (vel à Perpendiculo, Succedaneove, vel Perpendiculari per Axem Plano, per C, ad parallelum per E Planum rectamve) tantundem omnium (ubicunque dependeant) vel minuitur diſtantia dextrorſum, vel (quod eodem recidit) augetur ſiniſtrorſum, quanta eſt CE recta (vel parallelorum diſtantia.) Adeoque (per præced.) tantundem Ponderationis, vel dextrorſum demitur, vel additur ſiniſtrorſum, quanta eſt ſimul omnium Ponderatio in diſtantia CE: hoc eſt, per modo demonſtrata, tota Ponderatio dextrorſum tollitur. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) E Centrum Æquilibrii. (Et ſimiliter, per ſuas reſpective definitiones, oſtendetur, de Perpendiculo Æquilibrii, ejuſve Succedaneo; & Perpendiculari Plano Æquilibrii.) Quod demonſtrandum erat.

Denique: Centrum Æquilibrii unicum eſſe dico: (& ſimiliter unicum eſſe Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; Unicum item Perpendiculare planum plano per Axem parallelum.)

Poſito enim, verbi gratia, E centro æquilibrii; quo ſcilicet ſuſpenſa libra in neutram partem propendet: Si inde in utramvis partem ad quamcunque diſtantiam transferatur Centrum Motus, puta ad C; vel ex illa parte minuetur, vel ex altera augebitur omnium diſtantia; adeoque & Ponderatio (per præced.) Præponderabit itaque brachiorum alterum (per 9 Cap. 1.) Adeoque non erit C centrum Æquilibrii. (Et ſimiliter de Perpendiculo Æquilibrii, ejuſve Succedaneo, vel de Perpendiculari Plano, oſtendetur. Quod erat ultimo demonſtrandum.

PROP. XXI.

Data dati Ponderis (ſive unius, ſive ex pluribus aggregati) ad datum aliquod libræ punctum ut commune motus & libræ Centrum (vel ad datum Perpendiculum, Succedaneumve, vel Perpendiculare planum per axem) Ponderatione: Datur ejuſdem, ad aliud quodvis libræ punctum ut commune Centrum motus & libræ (vel Perpendiculum, Succedaneumve, aut Perpendiculare planum parallelum, ut dictum eſt) aſſignatum, Ponderatio.

NAm, propter data duo Centra (vel Perpendicula, Succedaneave, aut parallela Plana) adeoque ſecundi à priore Diſtantiam ad datas partes: Datur (per 12, 13, & 17 vel 19 hujus) quantum dati ponderis ponderationi datæ ad datas partes, addendum erit vel auferendum, propter tranſlatum Centrum (vel Perpendiculum, Succedaneumve, aut Perpendiculare planum.) Adeoque quanta erit, & ad quas partes, Ponderatio reſpectu poſterioris. Quod erat propoſitum.

Puta; ſi Pondus, vel ponderum Aggregatum, ut 20 P, ponderet ad C Centrum (vel Perpendiculum, Planumve perpendiculare) ut $+10PD$, dextrorſum; & transferatur centrum (Perpendiculum, planumve) ad E; ut ſit, verbi gratia, diſtantia $CE=\frac{1}{4}D$ dextrorſum; auferendum erit $+\frac{1}{4}D\times 20P=+5PD$. Adeoque ponderabit ad E, ut $+10PD-5PD=+5PD$.

Si $CE=\frac{1}{2}D$: auferendum $+\frac{1}{2}D\times 20P=+10PD$. Adeoque ponderabit, ut $+10PD-10PD=00$.

Si $CE=D$: auferendum $+D\times 20P=+20PD$. Adeoque ponderabit, ut $+10PD-20PD=-10PD$; hoc eſt, ut $10PD$ ſiniſtrorſum.

Similiter

Similiter omnino, ſi ſumeretur E ſiniſtrorſum ; niſi quod quæ jam auferenda ſunt, tunc eſſent addenda ; & contra.

PROP. XXII.

Data Centrorum Libræ Motuſque & Æquilibrii (vel Perpendiculorum per Centrum æquilibrii & per Centrum motus ; vel Plani Perpendicularis per motus axem & huic paralleli Plani Æquilibrii) ab invicem Diſtantia ad datas partes : Ex cognito Pondere (vel ſumma ponderum) cognoſcitur Ponderatio ; vel, cognita ponderatione, pondus vel ſumma ponderum.

$$+D \times P = +DP = +G. \qquad \frac{+G}{+D} = \frac{+DP}{-} = P.$$

CUm enim appenſum Pondus, vel ſumma Ponderum utcunque appenſorum, perinde libram gravant atque ſi omnia ex Centro Æquilibrii (vel in perpendiculari Plano per Centrum Æquilibrii, plano per Axem motus perpendiculari Parallelo) dependerent ; per 20 hujus. Adeoque per 12 & 13 hujus, in ratione quæ ex Diſtantiæ, & Ponderis (ſeu ſummæ Ponderum) rationibus componitur ; atque ad eas partes qua eſt æquilibrii Centrum Planumve. Datis, tum ad datas partes Diſtantia, tum ſumma Ponderum ; datur Ponderatio (quanta, & ad quas partes :) Vel, Datis Diſtantia & Ponderatione ; Pondus datur, vel ſumma Ponderum. per 15 hujus. Quod erat probandum.

PROP. XXIII.

Datis Pondere (ſeu ſumma Ponderum) & Ponderatione ad datas partes : Datur Centri Æquilibrii (Perpendiculi, Planive, in quo eſt) à Plano per axem motus tranſeunte, (vel, in data libra per centrum motus tranſeunte, à Centro libræ) Diſtantia ad datas partes. Adeoque ; Plani Perpendicularis per axem motus, & huic paralleli Plani Æquilibrii : Vel, in dato Libræ Plano, Perpendiculorum (aut Succedaneorum) per centrum Motus & Centrum Æquilibrii : Vel, in data libra per centrum motus tranſeunte, Centrorum Motus & Æquilibrii : Uno dato, datur reliquum.

CUm enim Ponderatio ad datas partes, ſit in ratione quæ componitur ex rationibus Ponderis (ſeu ſummæ ponderum) & Diſtantiæ Centri Æquilibrii (perpendiculive aut plani in quo illud eſt) ſive à communi Motus & libræ Centro ; ſive à Perpendiculo per centrum motus ejuſve Succedaneo ; ſive à plano per axem motus perpendiculari ; ad datas partes : per 12, 13, & 20 hujus : Data Ponderatione ad datas partes, & ipſo pondere ſeu ſumma ponderum ; datur ad illas partes Diſtantia, per 15 hujus.

Adeoque (in data libra) diſtantium punctorum uno inſuper dato, datur reliquum (puta, dato centro libræ per centrum motus tranſeuntis, datur Centrum Æquilibrii ; vel, dato centro Æquilibrii, datur iſtius libræ Centrum :) Similiter, diſtantium Perpendiculorum (per Centrum Motus, & per Centrum Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum : Item, planorum perpendicularium (per Axem motus, & paralleli plani Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum. Quod propoſitum erat.

PROP.

PROP. XXIV.

Libram vulgarem Officinarum Conſtruendi, rationem exponere.

Fig. 51. LIbra vulgaris Officinarum, intelligitur Centro ſuo ſuſpendi; Brachiaque æquali præciſe à Centro longitudine utrinque porrigi: Atque ab horum extremis dependere Lances, ad Æquilibrium redactæ: Quarum uni impoſito noto Pondere, ignotum prius Pondus in altero æſtimatur. Quippe cum æqualibus utrinque à Libræ Centro diſtantiis, ſint appenſa: Quod noto Ponderi, ſic appenſum Æquiponderat, Æquale pondus eſt: Sin majus; præponderabit, adeoque deorſum feretur: Si minus; elevabitur. Sequitur ex 12 hujus.

SCHOLIUM.

QUo exactiores ſint hæ Libræ; requiritur, ut hæc quæ ſequuntur, Obſervantur.

1. Ut Brachia utrinque ab Axe (quo ſuſtinetur Libra) porrecta (una cum Lancibus reliquiſque armamentis) ſint ejuſdem præciſe ponderationis; (præſertim dum ſitu Horizontali ponitur, à quo ponderationis initium ſumi ſolet:) Hoc eſt, in ipſo præciſe Æquilibrii perpendiculo ſuſtineatur Libra, cum armamentis. Quippe ſi alterum Brachiorum (cum armamentis ſuis) præponderet, ea propendebit Libra; indeque appenſo ponderi inique favebit, per 2 hujus.

2. Ut ex ſui Jugi Centro æquilibrii præciſe dependeat. Sive, ut Axis Libræ ſit Axis Æquilibrii. Nam (per 10 hujus) ſi Axis ſit vel tantillum infra Centrum æquilibrii; libra in alteram partem detruſa non revertet, ſed plane præcipitabitur, ut uſui omnino futura ſit incommoda. Si ſupra Centrum Æquilibrii ſit Axis; Revertet quidem detruſa Libra; ſed hoc habet cum priori ſitu commune incommodum, quod Libra ipſa in alteram partem præponderabit, eam ſcilicet qua erit Æquilibrii Centrum. Unde, ut in priori caſu præcipitatio promovetur (propter Libræ præponderantiam ad ſitum decliviorem) ita in hoc caſu (ubi præponderantia Libræ eſt ad partem contrariam) revocatur quidem Libra ne præcipitetur, ſed ſimul minus ſincere ſuum munus peragit; dum illa Libræ præponderantia, ponderis ex ea parte appenſi partibus favet. Quæ conſtant omnia ex 10 hujus.

3. Ut ejuſdem ſint præciſe longitudinibus ipſa Brachia: Quæ quidem ab ipſo Axe ſeu Centro Motus, ad ipſa Appenſionum Puncta, æſtimanda eſt. Quippe ſi Brachiorum alterum altero longius ſit; minus ex illo dependens Pondus, majori ex altero dependenti, æquiponderabit. per 12 hujus.

Atque hinc oriri poteſt inſignis impoſtura. Puta, ſi, qui merces vendunt pondere æſtimandas, Bilancem ita conſtitutam habeant, ut vacuæ lances æquiponderent, brachiorum autem alterum altero ſit longius: poſitis enim in lance ex longiori brachio dependente Mercibus; &, in contraria, noto Pondere: Mercium Pondus minus, majori Ponderi in oppoſita lance æquiponderabit, in fraudem emptoris.

4. Ut liberrime ex Appenſionum punctis dependeant (cum ſuis oneribus) Lances. Eo nempe fine, ut, in quemcunque ad Horizontem ſitum reciprocetur Jugum, Onus tamen (vi prop. 31. Cap. 2.) eidem ſemper Jugi puncto ſubſit; adeoque æquali ſemper à Centro diſtantia ſuſpendi intelligatur. Quippe ex eo Libræ puncto ſuſpendi intelligitur, cui directe ſubeſt: per 4 hujus.

5. Ut ipſa, in libræ Jugo, Appenſionum puncta, ſint in eadem præciſe Linea Recta cum ipſo Motus Centro; ſive (quod eodem recidit) in eodem cum Axe Plano cui Examen Perpendiculariter inſiſtit. Quippe ſi vel infra, vel ſupra, ſint Appenſionum puncta; (cum tantundem valeant appenſa pondera, atque ſi in ipſis eſſent, per 4 hujus) pro vario libræ ſitu, variabitur momentorum ratio: ut ad 14 hujus oſtenditur in caſu 2; ubi Centrum Motus eſt extra Libram; hoc eſt, extra rectam illam quæ appenſionum puncta conjungit; per 9 & 12 def. hujus.

6. Ut duo Brachia, ſint, quam commode fieri poteſt, Longa. Quo enim longius à Centro diſtant Appenſionum puncta, eo plus ponderant, tum ſigillatim appenſa pondera (per 12 hujus,) tum (quod inde ſequitur) comparatorum ponderum

rum Differentia : (cui ponderando æquipollent ſimul utraque pondera contrariis Lancibus impoſita ; per 5 hujus.) Unde, quod, in brevi Jugo, ſenſum fugiat diſcrimen, idem, pro Jugi longitudine auctum, evadet ſatis notabile.

7. Ut Jugi firmitas tanta ſit (pro ratione Ponderum ad illud exigendorum) ut non vel rumpatur, vel inflectatur. Hoc utique adverſaretur def. 2 & 9 hujus ; quæ Libram Jugumque inflexile ſupponunt. Et (ne cæteris immoremur) illis ſaltem incommodis obnoxium erit, quæ, ex Centro Motus extra libram poſito oriunda, modo memoravimus.

8. Ut Axis Acies, qua ſuſtinetur jugum (quæque per ipſius Centrum gravitatis, vel Æquilibrii, tranſire intelligitur) Tum Acuta ſit (ad inſtar quaſi lineæ Mathematicæ, quam referre intelligitur) quo facilius in utramvis partem reciprocetur Libra : Tum ſitu Horizontali conſtituta, (quippe Libra circa Horizontalem Axem ſincerius libratur, utpote in plano ad Horizontem recto, in quo, cæteris paribus, Pondera magis gravitant, & ſuapte ſponte feruntur, per 25, 26, Cap. 2.) Tum denique ut Declivitatem habeat utrinque æqualem (nam ſiqua motus eſt declivior, ea magis propondebit Libra ; per 17, Cap. 2.) Adeoque ut Axis Cuneum referat, cujus duo plana in Aciem coeuntia, ſint (poſito Jugo in ſitu Horizontali) ad Horizontem æqualiter inclinata ; & ſimul Trutinæ foramina, quibus ſuſtineri ſolent Axis extrema, ita ſubtus comparata ſint ut ab infimo puncto, cui incumbit Axis acies, æquali utrinque acclivitate aſſurgant ; utrinque enim (nempe tum ob formam Axis indebitam, tum foraminum Trutinæ inæqualem acclivitatem) oriri poterit inæqualitas in declivitate motus.

9. Ut, quam fieri poſſit per alia incommoda, tenue ſit & leve Jugum, cum armamentis ſuis. Nam (per 2 hujus) utut, cæteris ut dictum eſt comparatis, ipſum Jugi Pondus, cum Lancibus reliquaque armatura, Librationem quod ſpectat, nullius inſtar habeatur : Axem tamen, quo ſuſtinetur, premit, ejuſque obtundit aciem, quo minus circa illum libere rotetur libra. Adeoque quo minus fuerit Jugi pondus, eo minus hinc incommodi, cæteris paribus, oborietur.

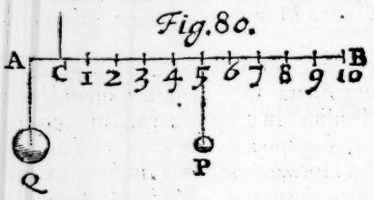
10. Denique ; pro varia Gravium ad Examen exigendorum pondere & magnitudine, aliter atque aliter proſpiciendum erit in fabrica Libræ. Nempe, in Aurifabrorum & Gemmariorum Bilancibus quibus res minutiſſimæ ad examen revocantur ; maxime proſpiciendum erit ut accurate omnia fiant, quo leviſſimum Ponderis diſcrimen detegatur. Quas quidem tanta cum accuratione fieri nonnunquam $\frac{1}{400}$ cernitur, ut unius grani huc illuc vertatur ; imo (quod in Honoratiſſimi *Boylii* noſtri accuratiſſima quadam Bilance obſervatum eſt) parte unius grani, $\frac{1}{1024}$; (quod coram compluribus teſtibus fide dignis experimento facto ſæpius comprobatum fuit.) Ubi autem res, magnæ Molis & Ponderis, librandæ veniunt (ut in Fabrorum ferrariorum negotiis, aliiſque magni moliminis rebus fieri ſolet) magis proſpiciendum erit firmitati totius machinæ : Adeoque ita attemperanda ſunt quæ de Longitudine Brachiorum, de tenuitate & levitate Jugi, de Aciei Axis acumine, reliquiſque hujuſmodi, ſupra diximus ; ut firmitati totius machinæ non officiatur. Et quidem, quæ ad Centipondium pendendum paratur Libra, non minus accurata cenſebitur, ſi uno ſcrupulo vertatur ; quam quæ ad Drachmam pendendam comparatur, ſi vertatur parte $\frac{1}{480}$ unius grani. Nam ut Centipondium in ſe continet ſcrupulos 28800 ; ita Drachma continet $\frac{28800}{480}$ unius grani ; computando ſcilicet in Libra ſeu Pondo 12 Uncias ; in Uncia, 8 Drachmas ; in Drachma, 3 Scrupulos ; in Scrupulo, 20 Grana :) Adeoque ; utrobique eadem appenſi Ponderis parte aliquota vertitur.

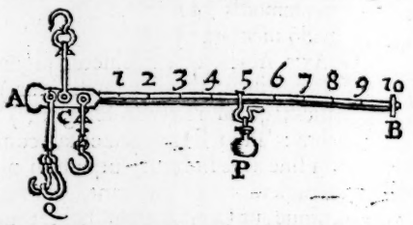
PROP. XXV.

Stateram Romanam conſtruendi rationem exponere.

STatera, quam (ob uſum ejus frequentem Romæ ut putatur) *Romanam* vocant; à vulgari Libra, Brachiorum longitudine potiſſimum differt: Quæ non, ut Vulgaris

Fig. 80.





Libra, Æqualia habet; ſed pro varia Ponderum comparandorum ratione, varie Inæqualia. Porrecto nempe ab Axe Motus (qui & Axis Æquilibrii eſſe debet) Brachiorum altero, ut C A, in certam longitudinem, puta unius Pollicis, aut etiam minorem; in altero Brachio, ut C B, quantumvis porrecto, diſtinguunt partes ipſi C A longitudine æquales, quot opus videbitur, diſtantiis 1, 2, 3, 4, &c. terminatas; (quas etiam in particulas quotlibet æquales diſtribuunt.)

Appenſo itaque Q Quæſito Pondere ſeu explorando ex A; Pondus datum ſeu notum P, ex Brachio contrario dependens, à puncto C removendo & admovendo explorant in qua diſtantia fiet æquilibrium. Atque invento, verbi gratia, pondus P in diſtantia 5, ponderi Q in A, æquiponderare: hinc colligunt (propter pondera Diſtantiis reciproce proportionalia) pondus Q, ponderis P noti, quintuplum eſſe. Cujus Demonſtratio ex 12 hujus dependet.

SCHOLIUM.

HOc habet Statera hæc, præ vulgari Libra commodum: Tum ut uno pondere noto, quodcunque explorandum ponderent: Tum ut minus gravetur Centrum vel Axis Libræ. Quanquam enim rotationem quod ſpectat tantundem valet P in 5, atque 5 P in 1; non tamen æqualiter gravant Axem; Ut ad 18 hujus oſtenſum eſt. Sed Fraudi magis eſt obnoxia.

Monendum porro hic tandem duxi, quod à *Pocockio* noſtro (Linguarum Orientalium apud nos nuper Profeſſore peritiſſimo) didici; ab ipſo, *Conſtantinopoli* olim commorante, obſervatum; ubi frequentiſſimus eſt hujuſmodi *Stateræ* uſus: Nimirum, quod Sacoma, ſeu Contra-pondium, in hac Statera, in forma *Mali Punici* (ſeu Pom-granati) conſtruere ſoleant (quam formam & Noſtri retinent,) quod Hebræis *Rimmon* dicitur, Arabibus *Romman*; unde illis nomen huic Stateræ factum eſt *Rommana*: (quod Lexicographi confirmant:) diceretur quaſi, *ponderatio ad Malum Punicum*. Nos autem (Stateram ipſam ab Orientalibus, ut videtur, mutuati) Nomen etiam (quod fieri ſolet) æmulati ſumus: ad Sonum magis quam Significationem intenti (quam forte minus intelleximus.) Indeque ex eorum *Rommana* noſtrorum deformata eſt *Romana*: declinante Sono ad Vocem nobis notam: (Quod porro ſuadet, etiamnum apud nos retenta *Mali Punici* forma in contra-pondio, ut apud illos.) Dum interim *Romanis*, quam aliis *Europæis*, Stateram hanc magis uſitatam eſſe, aut ab illis ad alios fuiſſe derivatam, mihi nondum conſtat. Viderint alii.

Hæc autem Ponderandi ratio (ni male conjicio) ea eſt quam prohibet Lex noſtra Parliamentaria *Anno*, 25. *Edw.* 3, *Cap.* 9. ſub nomine *Auncel Weight*. Ubi cautum eſt (inter alia) ne in poſterum uſurpetur hæc ponderandi ratio *Auncel* dicta, ſed vendendæ & emendæ merces, ad *Bilancem* ponderentur. (*Whereas great damage and deceit is done to the people, by ſo much that divers Merchants uſe to buy & weigh Wooll and other Merchandiſes by a weight that is called Auncel: It is accorded and ſtabliſhed that this weight called Auncel betwixt buyers and ſellers ſhall be wholly put out; And that every ſale and buying be by the Ballance; ſo that the Ballance be even, and the Woolls and other Merchandiſe evenly weighed by right weight.* Iterumque (iiſdem fere verbis) *Anno* 34. *Ed.* 3. *cap.* 5. Item *Anno* 8. *Hen.* 6. *cap.* 5. Verum ante ea tempora ejuſdem uſum approbatum fuiſſe liquet ex *Statuto*, *Anno* 14. *Edw.* 3. *cap.* 12.

FINIS.

MECHANICORUM,

SIVE

Tractatus

De Motu:

PARS SECUNDA:

Quæ est

DE CENTRO GRAVITATIS, Ejuſque CALCULO.

Anno 1670 edita.

Ad Lectorem

MONITIO.

NEquis miretur, quod Pars *hæc* Secunda, *præter ſolitum, ex abrupto inchoari videatur; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, tum Paginarum Numeris: Lectorem monendum duxi, id pluribus de cauſis contigiſſe. Primo quidem, quod non ab initio ſtatueram particulatim edere; ſed ſimul & ſemel opus integrum emittere. Et quidem (ut dicam quod res eſt) Partis hujus Secundæ pars quaſi dimidia jam ante impreſſa fuerat, quam vel Partem Primam (anno præterito) ediderim, vel Opus ipſum in Partes diſtribuendum putaverim. Sed partim Operarum Moræ, quæ Opus Typothetis difficile, atque inuſitatum, in longum protraxerant; partim aliorum impatientia, qui ut ſaltem Partem illam præmitterem efflagitarunt; fecere, ut loco commodo Sectionem facerem. Verum, ſi id in cauſa non fuiſſet; alia tamen ratio eſt (quæ etiam ab initio fecit, ne Opus hoc in* Libros *partirem,) cur ſic feciſſem. Quippe, cum frequentiſſima occurrat Citationum occaſio; ſi, quoties* Figura *vel* Propoſitio *citanda foret, toties, præter ipſarum Numeros, tum* Libri *ſeu* Partis, *tum* Capitis *Numeri recenſendi eſſent: Omnino minus commode id fieret, quam (quod hic fit) ubi Figura quælibet unico Numero, & quælibet Propoſitio vel unico vel ſaltem duobus Numeris deſignatur. Atque, ob eandem cauſam, etiam ſequentis Partis Numeri cum Numeris Secundæ continuandi erunt.*

CAP.

CAP. IV.

De Centro Gravitatis.

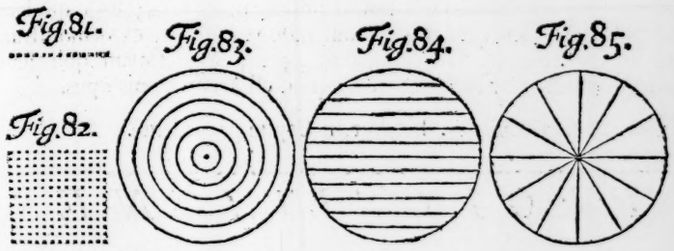
DEFINITIO.

***Continuum quodvis** (ſecundum Cavallerii Geometriam Indiviſibilium) intelligitur, ex Indiviſibilibus numero infinitis conſtare.*

UT, ex infinitis Punctis, Linea; Superficies, ex infinitis Lineis; & ex infinitis numero Superficiebus, Solidum: Item ex infinitis temporis Momentis, Tempus, &c.

Hoc eſt; (ut nos idem explicamus in noſtra Arithmetica Infinitorum, & Tract. de Con. Sect.) ex particulis Homogeneis, infinite exiguis, numero infinitis; Idque (ut plurimum) ſecundum unam ſaltem dimenſionem æqualibus.

PUta; Linea, ex infinitis punctis, hoc eſt, Lineolis infinite exiguis, longitudine æqualibus, vel æque-altis; quarum cujuſvis longitudo vel altitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ (pars infiniteſima) longitudinis vel altitudinis totius lineæ. Fig. 81.



Item, Superficies ex infinitis lineis ſive rectis ſive curvis parallelis; hoc eſt, ſuperficieculis (lineis illis interjectis) æque-altis, quarum cujuſvis altitudo ſit infiniteſima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur conſtare) hoc eſt ex ſuperficieculis æqualibus & ſimilibus, quarum cujuſvis magnitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ totius areæ. Fig. 82. 83. 84.

Item; Solidum, ex infinitis numero ſuperficiebus, hoc eſt ſolidulis æque-altis ſive æque craſſis, quorum cujuſvis altitudo vel craſſities ſit $\frac{1}{\infty}$ totius; vel, lineis numero infinitis (ex quibus intelliguntur illæ ſuperficies conſtare) puta ex totidem Priſmatis, ſitu parallelis, quorum baſes (communi plano ſectorum ad ea recto) ſimiles ſint & æquales, quarum magnitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ iſtius quo ſecantur plani; vel etiam, ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur conſtare) hoc eſt ſolidulis exiguis, æqualibus, quorum ſingulorum magnitudo intelligatur $\frac{1}{\infty}$ totius.

Quæ quidem Lineolæ, Superficieculæ, Solidula, &c. variis modis diſpoſita intelligi ſolent, prout conſtructori videatur expedire. Exempli gratia; Circulus dicetur, hoc ſenſu, ex infinitis numero rectis parallelis conſtare, ad eandem unam aliquam diametrum ordinatim-applicatis; hoc eſt, Parallelogrammis æque-altis: Fig. 84.
Vel ex infinitis numero Circumferentiis concentricis; hoc eſt, annulis æque craſſis: Fig. 83.
Vel ex infinitis numero radiis; hoc eſt, ſectoribus, vel triangulis ſimilibus, &c. Fig. 85.
Et Sphæra ſimiliter, ſive ex infinitis numero planis æque craſſis; ſive ex totidem ſuperficiebus Sphæricis concentricis; ſive ex infinitis numero ſectoribus ſphæricis, aut pyramidulis, &c.

Dico tamen, *ut plurimum*, ita fieri, ut illæ particulæ ſecundum unam ſaltem

dimenſionem ſint æquales: Neque enim illud neceſſario exigitur; quin, ſi id aliquando expedire videbitur, pro altitudinibus (verbi gratia) æqualibus, poterit conſtructor vel Arithmetice proportionalibus, vel ſecundum aliquam aliam ordinatam ſeriem creſcentibus vel decreſcentibus uti.

Hoc eſt (ſecundum Mathematicum rigorem) ſaltem inſcribi poteſt, vel circumſcribi, vel alias adaptari, ex hujuſmodi particulis conflatum quid, quod ab expoſito differat quantitate infinite exigua, ſive quæ data quavis minor ſit.

PUta; in Circuli peripheria, ex arcubus numero infinitis, conflabitur curva quæ peripheriæ exacte congruat; ſed & eidem peripheriæ inſcribi poteſt ex ſubtenſis numero infinitis, vel circumſcribi ex infinitis numero tangentibus, conflata linea, quæ à peripheria illa deficiat, vel eam ſuperet, differentia quæ data quavis minor ſit. Unde factum eſt, ut Circulus, pro Polygono regulari laterum numero infinitorum, haberi ſoleat. Et, in aliis curvilineis, ſimiliter.

Item Circuli Plano, aptari poteſt, ſive ex Annulis, ſive ex Sectoribus, figura quæ circulo accurate congruat: Sed & eidem inſcribi poteſt vel circumſcribi, ſive ex Parallelogrammis, ſive ex ſimilibus Triangulis figura, cujus ab expoſito circulo differentia, ſit data minor. Atque in aliis ſimiliter.

Atque hanc, de Indiviſibilibus, doctrinam (nunc paſſim receptam, atque, poſt Cavallerium, à celeberrimis Mathematicis approbatam) pro Veterum continua figurarum Adſcriptione, ſubſtituere viſum eſt; ut breviorem; nec tamen, minus demonſtrativam, ſi debita cautione adhibeatur.

Hanc interim definitionem, utut Capiti V. maxime ſubſervituram, huic IV Capiti præfigo, quoniam & hic alicubi uſui erit. Ut ſiquando Grave, per omnia ſui puncta, deſignem, &c. nec velim tamen perperam intellectum iri.

Sin Demonſtrandum hoc, non Definiendum, putet quis; Ego quidem pro eatenus demonſtrato habeo quatenus demonſtratione opus ſit, ex demonſtrata ab aliis Methodo Indiviſibilium. Hic utique id agitur, ut definiam quo ſenſu velim hujuſmodi quæ occurrunt intelligenda; quod eſt Definitionis opus.

Definitio *Centri Gravitatis*, habetur in Capite præcedente.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Puncto unico, ut Centro Motus, ſuſtineatur Grave (vel ex pluribus conjunctis gravibus aggregatum:) poterit nihilominus in quaſvis partes, circa illud rotando moveri; non alias.

Si duobus punctis, pluribuſve in eadem recta, ut motus Axe ſuſtineatur: poterit, circa illam rectam, in utramvis partem rotando moveri; non alias.

Si tribus (pluribuſve) non in eadem recta punctis ſuſtineatur: in nullas partes movebitur.

Fig. 86.

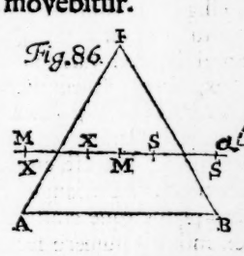


Fig. 87.

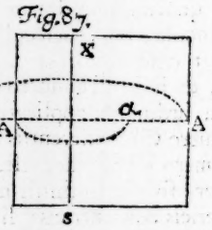


Fig. 86. INtelligatur Grave quodvis ABF, unico puncto M ut Centro motus ſuſtineri. Manifeſtum eſt, ſtante hoc puncto M, in quaſcunque circa hoc moveatur partes, eandem

eandem posse totius figuram retineri. Quippe in quodcunque Superficiei Sphæricæ, centro M descriptæ, moveatur (verbi gratia) punctum A; (hoc est, in quascunque partes circa M rotetur;) nihil impedit quin & reliqua puncta, ut B, ita simul moveantur, ut eandem quam prius inter se positionem retineant. Puta, ut A, B, sint in eadem qua prius distantia; sitque A B F idem angulus, iisdemque ut prius cruribus comprehensus, &c.

Sin duobus punctis, ut X, S, (vel pluribus in eadem recta) aut etiam ipsa X S recta, ut Axe motus sustineatur: Manifestum est, stante recta X S, adeoque omnibus in illa punctis, posse aliud quodvis punctum, circa hanc ut Axem, vel prorsum vel retrorsum peripheriam describere, reliquaque simul puncta, ita ut necesse erit quo eandem inter se positionem retineant, moveri; similes item peripherias circa eundem Axem describendo.

Suntque hæc duo, vel ita ex Elementis perspicua, vel per se manifesta, ut in 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, deff. 11 Euclidis (quæ Sphæram, Conum, & Cylindrum spectant) quasi pro postulatis supponantur.

Sed dico porro; Stante centro motus M, non posse, nisi circa hoc rotando, moveri grave: propter eandem, quam manere supponimus distantiam, cujuslibet sui puncti, tum ab M puncto, tum à sui quovis alio. Per def. Centri motus.

Item; Stantibus X, S, punctis; non posse alias quam circa hanc rectam rotando (ut circa Axem) moveri. Quippe omnia ejusdem X S rectæ puncta, eodem situ manere certum est; (secus enim non possent eandem quam prius ab utroque distantiam retinere:) Quæque extra hanc rectam puncta, si aliter moveantur quam circulos circa X S axem describendo, non retinebunt eandem ubique tum ab X tum ab S distantiam; (quod ex Elementis Sphæricis facile constabit.) Et, nisi simul ita moveantur omnia (hoc est, nisi totum grave circa X S axem rotetur) non eundem inter se situm conservabunt; (quod supponitur.) Non igitur alias quam sic rotando movebitur.

Denique: Si tribus punctis, ut X S A (nedum pluribus) non in eadem recta, sustineatur: Non movebitur. Cum enim, stantibus X S, non posse aliter, quam rotando circa X S ut Axem, moveri grave, jam ostensum sit: non posse autem sic moveri, stante etiam (extra hanc rectam) puncto A; (utpote quod, cum extra Axem sit, non à reliquis moti punctis omnibus, nisi & ipsum simul moveatur, eandem distantiam retinebit, quod Rotationis definitio postulat:) non omnino movebitur.

SCHOLIUM.

INtelligitur Propositio, de Gravi (seu gravium Aggregato) duro & constante; eousque saltem constante, ut, ea, quæ adhibetur Vi, nec frangatur, nec luxetur aut incurvetur; quin eandem (saltem æquipollentem) retineat figuram, omniumve ipsius partium inter se positionem respectu totius, utcunque situm seu positionem respectu loci mutent: Non de Gravi fluido seu molli, quod promiscue incurvetur, vel figuram suam mutet partiumque inter se positionem. Quod & in aliis subinde propositionibus intelligendum erit.

Puncta vero, ut M, X, S, &c. quibus sustineri intelligitur grave; adeoque immotis illis, moveri; sive sint in ipso Gravi, sive extra, perinde est. Sed utcunque ita cum Gravi quod movetur quasi connecti intelligenda sunt, tanquam ipsius puncta essent; & eandem cum reliquis Gravis punctis positionem retineant, utcunque moveatur Grave.

Puncto autem (uno vel pluribus) sustineri dicetur illud Grave; quando (retenta sua ad Gravis partes singulas positione) loco suo minime dimoveri intelligatur punctum illud, seu plura puncta.

Denique; Quod, de Gravium Aggregato (dum ita, ut dictum est, connecti intelligantur) tanquam pro uno Gravi habendo, hic insinuamus: idem in sequentibus intelligendum erit. (Quippe & Gravium Aggregatum, Grave est.) Quod semel moneo; ne singulis identidem propositionibus repetere opus sit.

PROP.

PROP. II.

Si recta quavis, ut Axe Motus, ad Horizontem perpendiculari ſuſtineatur grave; in nullam partem gravitate ſua præponderabit; Adeoque, ſibi ſic permiſſum non movebitur.

Fig. 87. NAm, ſtante recta, ut X S, ad Horizontem perpendiculari (adeoque ipſius punctis omnibus eodem ſitu manentibus;) quodcunque, extra hanc, punctum moveatur, ut A, peripheriam deſcribet, ut A α, circa X S ut Axem (per præced.) adeoque in Horizontali plano: (Cum enim X S perpendicularis ſit, tum ad planum circuli, utpote cujus Axis eſt; tum ad Horizontem, ex hypotheſi; erit circuli planum illud Horizontale; per 14 El. 11.) In quo quidem plano cum nullus ſit Deſcenſus, aut Præponderatio; nec fiet, ob gravitatem, motus. (per 4, 9, 23, cap. 2.) Cumque de omnibus gravis punctis perinde conſtet, conſtat de Gravi toto; Quod erat propoſitum.

SCHOLIUM.

REcta vero ſuſtineri dicetur Grave, ſi duobus ſaltem ipſius punctis ſuſtineatur; quippe ſic tota recta eodem ſitu retinebitur; ut ad prop. præced. oſtenſum eſt.

PROP. III.

Si Grave recta quavis, ut motus Axe, non ad Horizontem perpendiculari, ſuſtineatur; ſitque in Plano per Axem Motus incedente conſtitutum, ad Horizontem recto; (quod *Perpendiculare planum per Axem*, dicimus;) in neutram partem præponderabit; Adeoque ſibi ſic permiſſum, non movebitur.

Sin extra illud Planum conſtitutum ſit; ad Planum illud, infra motus Axem feretur.

Fig.88.

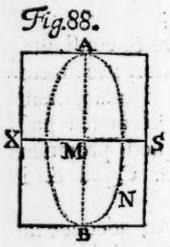
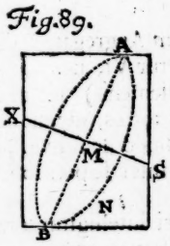


Fig.89.



PEr X S motus Axem (vel Horizonti parallelum, vel utcunque obliquum) incedat Planum Horizonti rectum X S A, in quo intelligatur conſtitutum Grave. Erit quodcunque Gravis punctum vel in ipſo Axe, ut M; vel infra, ut B; vel ſupra Axem, ut A.

De puncto M, manifeſtum eſt, ſtante X S, ipſum M item ſtare; utpote quod eſt in ipſa X S recta.

De B, conſtat; Cum enim (per 1 hujus) non poſſit B moveri, ſtante X S, quin peripheriam rotando deſcribat, ut B N A; ad cujus planum rectus eſt X S Axis; Cujus quidem Peripheriæ punctum infimum eſt ipſum B (per 20 Cap. 2.) Inde non movebitur ſponte ſua: Quippe Grave (per def. Gravitatis) non niſi Deſcenſus ergo, gravitate ſua movebitur.

Idem denique, de A conſtat: Quippe cum non poſſit A moveri (per 1 hujus) niſi peripheriam, ut A N B, circa X S ut axem deſcribendo; cujus (per 20 Cap. 2.) tum ſupremum punctum eſt ipſum A, tum Deſcenſus utrinque pariter Declivis; in neutam partem feretur. per 8, 17 Cap. 2.

Cumque hoc conſtet de ſingulis Gravis punctis, ſive infra, ſive ſupra, ſive in ipſo Axe; conſtat de Gravi toto, ſic conſtituto, in neutram partem præponderare; adeoque nec motum iri. Quod erat propoſitum.

Sin extra hoc planum conſtitutum ſit Grave: ipſius puncta ſingula, quæ extra planum ſunt, ut N; intermedia erunt, in ſuis reſpective peripheriis, inter punctum ſupremum, ut A, & infimum ut B (per 20 Cap. 2.) Adeoque deorſum ad B feretur, per 2, 8, Cap. 2. Quod erat ultimo demonſtrandum.

PROP.

PROP. IV.

Si circa rectam quamvis, ut Axem, (ſive Horizontalem, ſive utcunque obliquum,) rotetur Grave; ea ratione ponderant ipſius puncta ſingula æqualiter gravata (aut illis applicata pondera æqualia) qua diſtant à Perpendiculari per Axem Plano.

Adeoque: Si inæqualiter gravata; in ratione ex Ponderum (ſive Gravaminum) & Diſtantiarum rationibus compoſita.

SIt primum Axis X S, in plano Horizontali; atque in eodem Horizontali plano puncta quotlibet A, B, E. Unde ducantur ad Axem normales AC, BX, ES: Fig. 90.

Fig. 90.

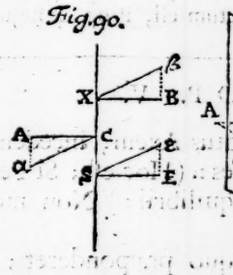
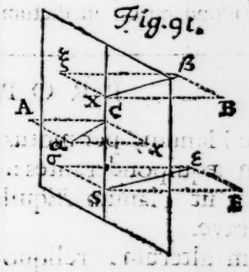


Fig. 91.



(quæ itaque, per def. 4 El. 3. plano per Axem perpendiculari normales ſunt, punctorum ab eo Plano diſtantiam menſurantes.) Cumque, per 1 hujus; non poſſint alias A, B, E, puncta, quam rotando ferri; (circulorum peripherias Centris C, X, S, deſcribendo; & quidem, propter ſitum Axis Horizontalem, ad Horizontem rectorum;) Erunt AC, BX, ES, totidem Libræ, circa ſua reſpective Centra C, X, S, rotatæ: Adeoque, per 12, 13, Cap. 3. A, B, E, puncta, in eodem plano horizontali poſita, æqualiter gravata, ponderant in ratione diſtantiarum, AC, BX, ES: Inæqualiter vero gravata; in ea quæ ex harum, & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propoſitum.

Deinde; Manente Axe X S, in ſitu Horizontali; (quo plana circulorum rotatione factorum, ſint adhuc ad Horizontem recta:) Sint, extra planum Horizontale, puncta Gravis quotlibet, α, β, ε: (ſive in eodem, ſive diverſis Planis, perinde eſt:) Unde, ad Planum Horizontale ducantur perpendiculares; puta αA, βB, εE. Intelligatur autem, per ipſum Axem X S, erigi Planum ad Horizontem perpendiculare; atque ad hoc perpendiculares rectæ, αχ, βξ, εσ; vel his æquales (utpote parallelæ parallelis terminatæ) AC, BX, ES. Oſtendetur (ex prop. 18. cap. 2. vel 4, 13 cap. 3.) tantundem ponderare eadem pondera in α, β, ε, atque in A, B, E. Hoc eſt; (per jam demonſtrata) in ratione diſtantiarum AC, BX, ES, vel αχ, βξ, εσ, ſi Puncta ſint æqualiter gravata; vel, ſi inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propoſitum. Fig. 91.

Denique: Sit ſitus Axis ad Horizontem utcunque obliquus: Reliquaque, ut prius, conſtructa. Nempe, in eodem X S A B E plano Inclinationis, rectæ AC, BX, ES, Axi ad angulos rectos; in quas ſcilicet cadunt, à punctis α, β, ε, demiſſæ Perpendiculares ad idem Planum, αA, βB, εE. Similiter omnino procedet demonſtratio, niſi quod Circuli rotatione deſcripti, qui prius erant ad Horizontem recti, nunc fiant obliqui; adeoque propter planorum Obliquitatem, minuuntur Ponderum Momenta. Eſt autem, propter eundem omnium axem, eadem circulorum omnium Obliquitas; Adeoque in eadem ratione minuuntur Ponderum Momenta, per 26 Cap. 2. Quam itaque rationem inter ſe haberent Momenta Ponderum in A, B, E, α, β, ε, in erectis circulis; eandem & hic habebunt in circulis æqualiter inclinatis (per 5 cap. 1.) Hoc eſt (per jam demonſtrata) in ratione diſtantiarum à Perpendiculari per Axem Plano, ponderabunt, ſi ſint æqualiter gravata; vel, ſi inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum, rationibus componitur. Quod erat ultimo demonſtrandum.

Brevi. Summa Demonſtrationis huc redit. Cum quæ ad prop. 12 & 13 cap. præced. Ponderationum Rationes traduntur, in hanc univerſalem propoſitionem conſpirent, *Æqualia Pondera, circa axes æqualiter inclinatos, ponderare in ratione diſtantiarum à plano per Axem Perpendiculari*; *Et*, *Inæqualia, proportionaliter*: (Quæcunque ſit vel Axis, vel Libræ ad Horizontem poſitio; &, ſive per Centrum Motus tranſeat Libra, ſive ſecus; item, ſive ſint ad eandem vel diverſas Libras, ſive, in eodem vel diverſis Planis librentur:) Conſtat propoſitum, de quocunque Axis ſitu, non ad Horizontem recto; & de quocunque Punctorum ad Axem ſitu. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

DE Situ vero Axis ad Horizontem recto, non agit hæc Propoſitio; (ut neque ſequentium aliquot:) Quoniam, hoc caſu (propter rotationum circulos Horizonti parallelos) nulla erit cujuſvis puncti, utcunque gravati, ad motum circa axem propenſio, ſeu Ponderatio: ut dictum eſt, Prop. 2. hujus.

PROP. V.

Si Perpendiculare Planum, per motus Axem, incedens; ſecet Grave in partes invicem æquiponderantes: (Hoc eſt; Si Perpendiculare Planum per Axem ſit Planum Æquilibrii:) Non movebitur, ſibi ſic permiſſum, Grave.

Sin Segmentorum alterum, reliquo præponderet; (dummodo non ſit Axis motus, ad Horizontem perpendicularis:) Ea feretur; eatenus donec fiat Æquilibrium. Et ſimul utraque æquipollent exceſſui præpollentis.

Adeoque; Non erunt, ejuſdem gravis (aut Aggregati gravium) duo Æquilibrii Plana invicem parallela.

DE Axe motus ad Horizontem recto; conſtat propoſitum; ex 2 hujus. Nempe, non moveri grave.

De Axe motus non ad horizontem recto; ſic demonſtratur.

Fig. 92.

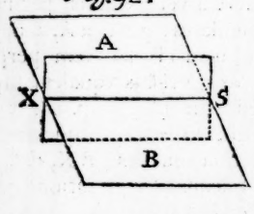


Fig. 93.



Fig. 94.

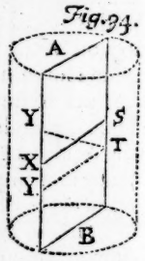


Fig. 92. Si perpendiculare planum per XS motus axem, dividat Grave in ſegmenta A, B: horum utraque (gravia cum ſint, & extra perpendiculare planum poſita) hac illac Deſcenſum molientur (per 3 hujus;) Et quidem utrumque (propter rotationem circa XS axem, per 1 hujus) cum Aſcenſu contrarii; adeoque contraponderabunt: Si itaque æquiponderant: contrarii conatus æquales, ſe mutuo ſuſtinebunt; nec fiet motus. Si alterum præponderet: hoc reliquum ſuperabit; adeoque motus horſum fiet, donec Æquilibrio impediatur (per 12 cap. 1.) Duoque ſimul conatus contrarii: æquipollebunt exceſſui præpollentis. (per 8 cap. 1.) Quæ demonſtranda erant.

Fig. 93. Atque hinc ſequitur: (Quod etiam ante demonſtratum eſt, ad prop. 20. cap. præced.) Non dari, ejuſdem gravis (aut aggregati gravium) duo parallela Plana Æquilibrii. Nam ſi Planum per XS ſit Planum Æquilibrii; huic Parallelum, puta per YT, non erit. Nam (poſitis utriſque ad horizontem perpendicularibus) ſi ſegmenta XSA, XSB, æquiponderant; ſegmenta YTA, YTB, non æquipon-

æquiponderabunt. Nam XSTY interſegmentum, æquiponderantium uni ablatum, alteri additum, momenta faciet inæqualia; per 9 cap. 1. Saltem, ſi interſegmentum illud nullum ſit (ſed quaſi vacuum, inter duo connexa Gravia interjectum;) fiet utcunque ſegmentorum alterum, ut XSB, longius ab YT quam ab XS; propius autem alterum YTA: Adeoque illius momentum augebitur, hujus minuetur (per 13 cap. 3.) & deſtruetur Æquilibrium, per 9 cap. 1.

SCHOLIUM.

PLana Perpendicularia, *Parallela*, hic appello (& ſubinde alias, ubi eadem ratio) quando Horizontales Rectæ unius, ſunt alterius Rectis Horizontalibus, parallelæ. Quanquam enim, perpendicularia cum ſint Plana, in Terræ centrò coeant; eadem tamen ratione (ne longa periphraſi opus ſit) Parallela Plana dicentur, qua Perpendicula (propter immenſam Centri terræ diſtantiam) pro Parallelis Rectis haberi ſolent.

PROP. VI.

Si recta quapiam, ut Axe, non ad Horizontem perpendiculari, ſuſtentum Grave, quieſcet: Idem Grave, eodem ſitu conſtitutum, alia quavis ejuſdem ad Horizontem perpendicularis Plani recta ſuſtentum, pariter quieſcet.

Recta vero extra hoc Planum, plano Parallela (non ad Horizontem recta) ſi ut Axe ſuſtineatur: non, eo ſitu conſtitutum, quieſcet.

PUta: Si AB Grave, Axe XS (non ad Horizontem recto) ſuſtentum, quieſcet: Perpendiculare Planum per hunc incedens, ut YXST, grave dirimet in A, B, ſegmenta, invicem æquiponderantia: (Nam ſi alterutrum præponderaret, non quieſceret Grave; per præced.) Sumpta igitur alia quavis in eodem Plano recta, ut YT: quum per hanc incedens Planum YXST (ut jam oſtenſum eſt) ſecet Grave in partes invicem æquiponderantes: Axe YT ſuſtentum, ſic conſtitutum Grave, quieſcet. per præced. Fig. 94.

Sin alia quavis, extra hoc Planum, recta (quæ Plano parallela ſit, & non ad Horizontem recta) ut Axe, ſuſtineatur: non, eo ſitu, quieſcet. Quippe, ſi quieſceret hac alia recta ſuſtentum; eſſet, per hanc incedens perpendiculare Planum, Planum Æquilibrii; (nam, niſi æquiponderarent ſegmenta, non quieſceret; per præced.) Eſtque plano priori parallelum; (quod, propter parallelam plano per quam incedit rectam, non ad Horizontem perpendicularem; &, quem ſupponimus, Perpendiculorum paralleliſmum; probabitur ex 15 El. 11.) Adeoque, duo eſſent parallela Plana Æquilibrii. Quod (per præced.) fieri non poteſt.

PROP. VII.

Si Æquilibrii Axe ſuſtineatur Grave: quocunque ſitu ponatur, ſibi ſic permiſſum, quieſcet.

Et contra; Si Axe motus ſuſtentum Grave, quocunque ſitu ponatur quieſcet: Axis ille motus, eſt Axis Æquilibrii.

NAm; Si Æquilibrii Axe ſuſtineatur Grave; quocunque ſitu ponatur Grave; (nempe; quocunque ad Horizontem ſitu ponatur Axis ille; & quodcunque Planum per hunc motus Axem, conſtituatur ad Horizontem rectum:) Perpendiculare Planum per Axem, Planum erit æquilibrii: (per def. Axis Æquilibrii.) Adeoque non movebitur, ſibi ſic permiſſum Grave; per 5 hujus.

Converſa ſimiliter patet. Nam, niſi motus Axis ille, ſit Axis Æquilibrii; erit ſaltem aliquod Planum per hunc incedens, quod Planum Æquilibrii non erit (per def. Axis Æquilibrii.) Adeoque, poſito hoc Axe non in ſitu ad Horizontem recto; poſitoque illo non Æquilibrii Plano, in ſitu perpendiculari; Movebitur Grave: per 5 hujus. Quod eſt contra hypotheſin.

PROP. VIII.

Si unico ſui puncto ſuſtineatur Grave: quocunque ſitu ponatur; ſaltem unum per punctum illud incedens Perpendiculare planum, eſt planum Æquilibrii.

Adeoque; Per omne Gravis Punctum incedit aliquod Æquilibrii Planum.

Fig. 88. SIt XASB Grave; puncto ſui M ſuſtentum; per quod tranſeat Perpendiculum AMB; perque hoc incedat AMBN perpendiculare Planum. Erit hoc AMBN, vel Planum Æquilibrii (adeoque habetur quod erat probandum;) vel ſegmentum alterum, puta ABNS, præponderabit. Quo caſu; Planum AMBN (cujus faciem alteram, puta quæ S reſpicit, Anteriorem dicemus; alteram, Poſteriorem;) intelligatur, immoto Gravi, imaginatione converti circa AMB axem; donec eo perveniatur ut quæ utrinque ſunt ſegmenta Gravis Æquiponderent. Hoc enim omnino fore certum eſt: Quippe, facta ſemi-converſione, quod erat ab anteriore converſi Plani facie, à poſteriore relinquetur, ſegmentum Gravis præponderans; & contra: Cumque à præponderantia antica ad poſticam ſic continuo motu perventum ſit; eo momento quo ab hac ad illam tranſibatur, neutra erat; ſed, æquiponderantia. Quodque cum converſo Plano, hoc ſitu poſito, coincidit immotum, per Grave, Planum; eſt Perpendiculare Planum Æquilibrii.

Unde & conſtat Corollarium. Quippe quovis ſui puncto ſuſtentum intelligi poſſit Grave.

PROP. IX.

Si unico ſui puncto ſuſtineatur Grave: Per illud incedens Perpendiculare Planum Æquilibrii, manebit Horizonti rectum.

Ideoque; vel quieſcet grave; (nempe ſi perpendiculum per centrum motus, ſeu punctum illud quo ſuſtinetur grave, ſit Perpendiculum Æquilibrii iſtius Plani ſic gravati.)

Vel (ſi perpendiculum illud non ſit Perpendiculum Æquilibrii iſtius plani) rotabitur circa Horizontalem Axem, Plano illi rectum, per centrum motus ſeu punctum illud quo ſuſtinetur Grave tranſeuntem; donec ad Æquilibrium redigatur.

Sin Planum aliquod Perpendiculare, non ſit Planum Æquilibrii: Segmentum præponderans deſcendet (adeoque obliquabitur Planum;) donec ad Æquilibrium redigatur.

Unde; Si duo quævis per idem punctum plana perpendicularia ſint Plana Æquilibrii: etiam reliqua ſic erunt; eritque Perpendiculum per illud Punctum, Axis Æquilibrii.

Fig. 88. PEr punctum M, quo ſuſtineri intelligatur Grave, tranſeat tum XS recta Horizontalis, quæ pro onuſta Libra habeatur; tum huic ad angulos rectos AMBN Perpendiculare planum per Axem, Grave dirimens in duo ſegmenta AMBX, AMBS; quibus reſpective onerantur MX, MS, libræ brachia, per 13 cap. 3.

Cumque (per præced.) ex Perpendicularibus per M planis, ſaltem unum aliquod ſit Planum Æquilibrii: Intelligatur, primo, illud AMBN planum Æquilibrii; adeoque (per def. Plani Æquilibrii) AMBX, AMBS, ſegmenta invicem Æquiponderantia. Erit igitur M (per def. 13. cap. 3.) centrum Æquilibrii. Quo cum (ex hypotheſi) ſuſtineatur Libra, in neutram partem movebitur, per 7 vel 10. cap. 3. Adeoque nec obliquabitur AMBN, ſed manebit (ut prius) Horizonti rectum. Quod erat primo demonſtrandum.

Adeoque; vel non movebitur Grave, vel circa manentem XMS axem rotabitur, per

per 1 hujus. Illud quidem; ſi AMB ſit Perpendiculum Æquilibrii iſtius plani AMBN ſic gravati, (ſive AMSBX perpendiculare planum Æquilibrii per axem XS;) Hoc, ſi ſecus (puta ſi ſegmentum alterum, ut AMBN præponderet;) per 5 hujus. Quæ itidem erant demonſtranda. Fig. 88.

Sin AMBN perpendiculare planum aliquod per M, non ſit planum Æquilibrii; hoc eſt, ſi ſegmentum alterum præponderet, puta AMBS, quo gravatur MS Brachium: Deſcendet hoc (adeoque obliquabitur AMBN planum) donec ad Æquilibrium redigatur (per 5 hujus, vel 5 cap. 3.) Quod erat item demonſtrandum.

Si itaque duo Plana per idem M punctum Perpendicularia, ut AMBN, AMSBX, ſint utraque Æquilibrii Plana, etiam reliqua per illud punctum perpendicularia plana erunt item plana Æquilibrii (adeoque AMB, axis Æquilibrii.) Cum enim propter Æquilibrii Planum AMBN, non moveatur grave niſi rotando circa illius plani axem; & ſimili de cauſa, non niſi circa axem plani AMSBX; (qui quidem Axes, cum ſuis reſpective planis perpendiculares eſſe debeant, non erunt eadem recta;) non omnino movebitur grave (propter tria ſaltem, non in eadem recta, puncta permanentia) per 1 hujus. Sed (per præcedens membrum hujus) ſi quod ſit ex perpendicularibus planum, quod non ſit planum Æquilibrii, movendum eſſet Grave: Nullum igitur eſt. Quod ultimo erat demonſtrandum.

PROP. X.

Si Perpendiculum per Centrum motus, ſit Axis Æquilibrii; ſibi permiſſum Grave, non movebitur.

Rectaque illa, quæ ſi ſit Perpendiculum per Centrum motus, Grave non movebitur; eſt Axis Æquilibrii.

CUm enim (per def. Axis Æquilibrii) quodvis per illum tranſiens Planum, ſit Planum Æquilibrii: Si Axis Æquilibrii ſit in Perpendiculo per Centrum motus; quodvis per centrum motus incedens Perpendiculare Planum, eſt Planum Æquilibrii. Adeoque ſponte ſua non movebitur ſic ſuſtentum Grave; per præced.

Et Converſa ſimiliter patet. Nam niſi Perpendiculum per Centrum motus, ſit Axis Æquilibrii; aliquod ſaltem per illud incedens Planum, non erit Planum Æquilibrii (per def. Axis Æquilibrii:) Adeoque Grave movebitur; (per præced.) Quod eſt contra Hypotheſin.

PROP. XI.

In quovis Æquilibrii Plano, per quodvis ipſius Punctum, incedit Axis aliquis Æquilibrii.

Adeoque, per omne Gravis punctum incedit aliquis Axis Æquilibrii.

EXpoſitum Æquilibrii Planum, ut AMBN, intelligatur in ſitu ad Horizontem recto conſtitutum. Ejuſque puncto quovis, ut M, ſuſtineatur Grave. Quod itaque (per 9 hujus) non niſi rotando circa Axem plano illi rectum, ut XMS, movebitur. Et Perpendiculum per Centrum motus, ut AB, erit vel perpendiculum Æquilibrii iſtius Plani ſic gravati: Vel, eatenus circa XMS rotabitur grave, donec hoc contingat; & ſic poſitum, ſibi permiſſum Grave quieſcet. per eandem 9 hujus. Eaque Gravis recta, quæ, ſic quieſcente Gravi, in AMB perpendiculo per M tranſeunte jacebit, eſt Axis Æquilibrii. per præced. Fig. 88.

Corollarium conſtat: Cum (per 8 hujus) per quodvis Punctum tranſeat Planum Æquilibrii.

PROP. XII.

Si à puncto fixo libere dependens Grave, unico ſui puncto, ut Centro motus ſuſtineatur: Non prius quieſcet quam illud ſui punctum ſit in eodem perpendiculo cum puncto fixo; Planumque quodvis per illud perpendiculum incedens, grave dirimat in partes invicem æquiponderantes.

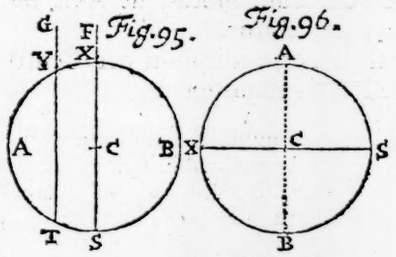
In eo vero ſitu conſtitutum (nempe, cum Perpendiculum appenſionis, eſt Axis Æquilibrii;) ſibi ſic permiſſum, quieſcet.

Si vero, poſito Gravi in hoc ſitu quietis; ſolvi intelligatur in gravi vinculum, illudque alio jam ſui puncto ſuſtineri; Sitque hoc aliud punctum in eodem quo prius Axe Æquilibrii; quieſcet adhuc ſic ſitum Grave.

Sin extra illum Æquilibrii Axem ſit hoc aliud Punctum; non, eo ſitu, quieſcet.

Adeoque; Non erunt, ejuſdem Gravis, duo Æquilibrii Axes invicem paralleli.

Fig. 95. A Puncto F libere dependens, puncto ſui X ſuſtineatur AXB grave. Non prius inquam, quieſcet, quam ipſum X punctum ſit in FX perpendiculo:



quod &, ibi poſitum, conſiſtet. Cum enim unico X puncto ſuſtineatur Grave (quod itaque punctum totius onere gravatur, per 18 Cap. 2.) ſi extra perpendiculum ſit, eo feretur: ibique conſtitutum, conſiſtet X punctum ſic gravatum. per 31 Cap. 2.

Sin, poſito X puncto in perpendiculo FX, per quod incedat Planum aliquod Perpendiculare, dirimens expoſitum Grave in A, B, duo ſegmenta inæqualiter ponderantia: nondum quieſcet Grave. per 9 hujus.

Si vero ita conſtitutum ſit, ut, Planorum perpendicularium per FX incedentium, nullum non dividat grave in partes invicem Æquiponderantes; Hoc eſt, ſi Perpendiculum illud ſit Axis Æquilibrii: non movebitur ſic appenſum Grave. per 9 hujus.

Dico porro; Si (poſito Gravi in hoc ſtatu quietis) ſoluto vinculo in X, alio ejuſdem perpendiculi puncto ut C, ſuſtineatur Grave: Quieſcet adhuc in eodem ſitu poſitum. Cum enim, ex conſtructione, idem ſit perpendiculum FX & & FC; ſitque FX Axis Æquilibrii; erit & FC Axis Æquilibrii. Adeoque (per 10 hujus) quieſcet Grave.

Sin alio, extra hanc rectam puncto ut Y, ſuſtineatur; puta perpendiculo GY (priori parallelo; ſaltem nonniſi in Centro Terræ occurrente, quod pro parallelo jam habemus;) non eo ſitu quieſcet. Intelligatur enim planum quodvis Perpendiculare (aliud quam GYXF) per GY incedens, Grave dirimens in ſegmenta YTA, YTB; & huic plano parallelum, per FX incedens, Grave dirimens in ſegmenta XSA, XSB. Cumque fit ex hypotheſi, illud per FX (Æquilibrii Axem) Planum Æquilibrii; non erit huic parallelum per GY, Planum Æquilibrii (per 5 hujus:) Adeoque nec GY, Axis Æquilibrii; (per def. Axis Æquilibrii:) Nec hujus, in perpendiculo manentis, uno puncto ſuſtentum, Grave quieſcet,

quieſcet, per 10 hujus. Non igitur alio, extra hunc FXS Æquilibrii Axem, puncto ſuſtentum; eodem ſitu conſtitutum quieſcet. Nec erit alius Axis Æquilibrii, expoſito FS parallelus. Quæ demonſtranda erant.

PROP. XIII.

Si Centro Gravitatis ſuſtineatur Grave: quocunque ſitu ponatur, ſibi ſic permiſſum, non movebitur.

Punctumque illud, quo ſi ſuſtineatur, Grave non movebitur quocunque ſitu poſitum; eſt Centrum Gravitatis.

CUm enim (per def. Centri Gravitatis) quævis per illud tranſiens recta, ſit Axis Æquilibrii: Si ſui Centro Gravitatis ſuſtineatur Grave, quocunque ſitu ponatur, perpendiculum per Centrum illud motus, erit Axis Æquilibrii. Adeoque non movebitur ſic ſuſtentum Grave. per 10 hujus.

Et converſa ſimiliter patet. Nam, niſi Punctum illud, quo, ut Centro Motus, ſuſtinetur, ſit Centrum Gravitatis; aliqua ſaltem per illud incedens recta, non erit Axis Æquilibrii (per def. Centri Gravitatis.) Adeoque, poſita hac recta ad Horizontem perpendiculari, non quieſcet unico illo puncto ſuſtentum Grave. per 10 hujus. Quod eſt contra hypotheſin.

PROP. XIV.

In Æquilibrii Axe quovis; eſt Centrum Gravitatis. Nempe; illius Axis, ut Libræ conſiderati, Centrum Æquilibrii.

CUm Æquilibrii Axe, ut XS, ſuſtentum Grave, quocunque ſitu poſitum, quieſcet (per 7 hujus;) Adeoque totum Gravis onus ſuſtineat Axis ille (per 18 Cap. 2. vel 2, 4, 18, Cap. 3.) Intelligatur XS recta, ſic onuſta, ſecundum Libræ longitudinem applicari; vel ipſa etiam, pro Libra cenſeatur. Hujuſque ſic onuſtæ Libræ, quæratur (per 20 Cap. 3.) Centrum Æquilibrii. Quod ſit C. Dico C, Centrum Gravitatis eſſe, totius Gravis. Fig. 96.

Cum enim idem C punctum, in quocunque Gravis ſitu, ſit illius (ſive Axis ſive Libræ) XS, Centrum Æquilibrii; (quod ſtatim demonſtrabitur:) Manente puncto C, non movebitur XS recta. per 7 Cap. 3. Si itaque C puncto, ut Centro Motus, ſuſtineatur Grave: Neque circa manentem rectam XS (utpote quæ eſt Axis Æquilibrii) rotabitur; Neque (propter C, centrum Æquilibrii) movebitur Axis ille: (quæ jam oſtenſa ſunt:) Neque poteſt alias moveri Grave; (per 1 hujus.) Adeoque, puncto C ſuſtentum, ſponte ſua non movebitur, quocunque ſitu conſtitutum Grave. Eſtque propterea, Punctum C, Centrum Gravitatis; (per præced.) Quod erat demonſtrandum.

Quod autem idem C punctum, ſit, ejuſdem axis Æquilibrii XS, Centrum Æquilibrii, quocunque ſitu conſtituatur Grave: Sic oſtenditur.

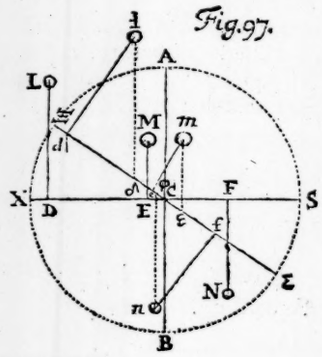
Sit primum, ita utcunque conſtitutum Grave, ut expoſitus æquilibrii Axis XS, ſit in ſitu Horizontali conſtitutus. Per ipſius, ut onuſtæ libræ, Centrum Æquilibrii C, tranſeat Axis libræ; qui itaque ad libram XS normalis erit; & quidem in ſitu Horizontali; (cum enim intelligatur XS libra unico ſui puncto C, ut centro motus, ſuſtineri, adeoque ad nullam axis poſitionem aliter quam gravitate ſua determinari, librabitur in plano ad Horizontem recto, utpote omnium maxime declivi; adeoque circa axem Horizontalem; ut in Scholio Prop. 12. Cap. 3. dictum eſt:) atque per hunc axem perpendiculare Planum ACB; quod itaque (propter C centrum æquilibrii, ex conſtructione) eſt æquilibrii Planum perpendiculare per axem motus, grave dirimens in duo ſegmenta ABX, ABS, invicem æquiponderantia. Atque hoc eo uſque ſaltem permanebit, utcunque moveatur grave, dum idem gravis planum XAS Horizontale maneat (puta, vel rotato utcunque circa Perpendiculum per C Gravi, vel etiam altius humiliuſve elevato aut depreſſo:)

per

per 13 Cap. 3. Quippe eadem adhuc manebit omnium tum ad Horizontem inclinatio, tum ab A C B perpendiculari per axem plano diſtantia.

Fig. 96. Deinde; Manente ut prius, X S axe utcunque in ſitu Horizontali: intelligatur utcunque circa illum rotari Grave, in quemcunque ſitum ad axem (nempe ut quodlibet planorum, per X C S tranſeuntium, perpendiculare ~~fiat:~~) Dico, etiamnum idem A C B planum, planum eſſe æquilibrii; adeoque C, ut prius, æquilibrii Centrum. Cum enim omnia utriuſque ſegmenti puncta, in planis ipſi A C B parallelis rotentur; Manebunt adhuc in eadem qua prius ab A C B, perpendiculari per axem motus, diſtantia: Adeoque in eadem qua prius ratione ponderabunt; per 4 hujus, vel 13 Cap. 3. Cum itaque prius, reſpectu A C B plani, æquiponderabant ſegmenta A B X, A B S; etiamnum æquiponderabunt. Eritque propterea, C, ut prius Centrum æquilibrii.

Fig. 97. Denique; Quocunque Planorum per X S tranſeuntium, manente ad Horizontem recto; Intelligatur X S libra utcunque ad Horizontem inclinari: Dico etiamnum idem C punctum, eſſe libræ X S centrum Æquilibrii.



Ne autem, propter Solidi in Plano repræſentationem, linearum multitudo ducendarum, turbet phantaſiam; ea projectione in figura utor, quæ oculum ſupponit in ipſo motus axe per C tranſeunte, atque in diſtantia infinita. Et propterea, tum axis ille in unicum C punctum projicitur; tum Rectæ quævis huic parallelæ, in totidem reſpective puncta: Planaque per axem omnia, in totidem rectas; in ipſo X A C B S per libram Plano perpendiculari. Quæ quidem Projectio, ut Phantaſiam juvat, ita nec Rationes perturbat: Quoniam (per caſ. 4. prop. 14. cap. 3.) perinde omnino ponderat (reſpectu C axis) quocunque ejuſdem rectæ (puta per D tranſeuntis) axi parallelæ, puncto intelligatur grave. Eadem utique eſt ſingulorum ejuſdem punctorum ab A C B perpendiculari per axem Plano diſtantia, atque ipſius D ab A C B perpendiculo.

Intelligatur itaque, utcunque circa C rotato Gravi, X C S Libra (& ſimul Planum libræ per axem) ex ſitu Horizontali in ſitum ≠ C ≠, utcunque ad Horizontem inclinatum delata: Cui reſpondeat, in eodem Perpendiculari plano, in ſitu Horizontali, X C S; hujuſque punctis D, E, F, &c. puncta illius *d, e, f*, &c. Intelligatur autem Grave totum, ex partibus (æqualibus an inæqualibus, pluribus an paucioribus, adeoque numero finitis an infinitis, perinde eſt) puta tribus L, M, N, conſtare; (& quidem, vel in ipſis perpendicularis plani punctis L, M, N; vel in L, M, N, rectis, axi parallelis; utcunque poſitis, dummodo ſit X C S axis æquilibrii;) ad libræ puncta, in ſitu horizontali poſitæ, D, E, F, applicatis; ut quæ (per 4 cap. 3. & caſ. 4. prop. 14. ejuſdem) ſimiliter ponderent ac ſi in ipſis D, E F, punctis intelligantur. Delata vero libra X C S, in ≠ C ≠; delata ſimul erunt (propter rotationem totius gravis) D, E, F, L, M, N, puncta ponderaque, in *d, e, f, l, m, n*. Erit, inquam, adhuc A C B perpendiculare planum æquilibrii per axem; adeoque C centrum æquilibrii.

Nam, tranſlatis D, E, F, punctis, in *d, e, f*, minuentur quidem horum (propter obliquationem libræ) ponderationes (per 13. cap. 3.) Sed in eadem ratione minuentur; adeoque, quod prius erat æquilibrium etiamnum manebit (per caſ. 1. prop. 14. cap. 3.) ſi ad eadem quæ prius libræ puncta D, E, F, hoc eſt *d, e, f*, applicata maneant pondera L, M, N, hoc eſt *l, m, n*.

Cum autem; pro ponderum *l, m, n*, infra ſuprave libram fixa poſitione; mota libra mutentur applicationum puncta, puta, ex *d, e, f*, in δ, ε, φ; adeoque mutetur ponderationum ratio; (per caſ. 3. prop. 14. cap. 3.) Ponderum *l, m*, quæ ſupra libram fixa intelliguntur, ponderationibus ſiniſtrorſum auferendum aliquid; addendum vero ponderationi ſiniſtrorſum ponderis *n* infra libram fixi; (nempe, prout in præſenti ſchemate ponuntur; & ſimiliter, mutatis mutandis, in quacunque ſive obliquationis libræ, ſive ponderum ad obliquatam libram poſitione.) Sunt autem

autem Addenda illa vel Auferenda (per 17 cap. 3.) in ea ratione quæ componitur ex ratione Ponderum *l, m, n*; & ratione rectarum *dδ, eε, fφ*, hoc eſt (propter ſimilia triangula *ldδ, meε, nfφ*) rectarum *dl, em, fn*: Adeoque in ea ratione qua ponderarent eadem Pondera circa axem ≡C≡ libranda; per 13 cap. 3. Adeoque (per 12 El. 5.) in eadem ratione eſt ſumma Auferendorum ponderationibus *l, m*; ad Addendum Ponderationi *n* (vel ſummam addendorum, ſi plura eſſent;) qua eſſet ponderum *l, m*, circa axem ≡C≡ ponderatio; ad ponderationes ponderis *n*, circa eundem axem. Adeoque cum ſint Ponderationes hæ (propter XCS vel ≡C≡ axem Æquilibrii, ex hypotheſi) invicem æquales; etiam Addenda Auferendis ſunt æqualia: adeoque perinde ſimul valent, atque ſi nihil vel adderetur vel auferretur, per 8 cap. 1. (Quodque de Auferendis Addendiſve ponderationi ſiniſtrorſum dictum eſt, perinde eſt atque ſi de Addendis Auferendiſve ponderationi dextrorſum diceretur: quippe idem valet, plus ad dextram, atque, minus ad ſiniſtram.) Cum itaque; applicatis ponderibus *l, m, n*, ad puncta *d, e, f*, eſſet ACB planum Æquilibrii per axem, ut ſupra oſtenſum eſt, (adeoque ſimul omnium ponderatio, nulli in utramvis partem æquipolleret;) & C centrum Æquilibrii: Erit ſimiliter, idem C, centrum æquilibrii; ponderibus ut nunc applicatis ad puncta *δ, ε, φ*. Fig. 97.

Eſt igitur idem C punctum, æquilibrii Centrum, axis æquilibrii XCS, quocunque ſitu conſtituatur Grave. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

SCHOLIUM.

EXempli gratia. Si intelligantur pondera L=1 P. M=3 P. N=3 P. Diſtantia vero CD=+6 D. CE=+1 D. CF=−3 D. Erit Ponderum ad libræ XCS puncta D, E, F, applicatorum ponderatio reſpectu axis C; ut P×+6 D=+6 DP. 3 P×+D=+3 DP. 3 P×−3 D=−9 DP. Adeoque ſimul omnium, ut +6 DP+3 DP−9 DP=±0 DP. (Atque hoc, ex conſtructione; ponitur enim C, centrum Æquilibrii.)

P	3 P	3 P
+6 D	+ D	−3 D
+6 DP	+3 DP	−9 DP=±0 DP.
+6 *d* P	+3 *d* P	−9 *d* P=±0 *d* P.

Et ſimiliter (diminutis in eadem ratione omnium ponderationibus, propter obliquationem libræ, puta in ratione *d* ad D) eorundem ponderum ad libræ ≡C≡ puncta *d, e, f*, applicandorum ponderationes, erunt ut +6 *d*P+3 *d*P−9 *d*P=±0 *d*P.

Eorundem vero Ponderum à Plano per Axem XCS vel ≡C≡ diſtantiæ; puta rectæ DL, EM, FN; vel *dl, em, fn*; ſint ut +6 D, +3 D, −5 D; Et his proportionales (puta in ratione δ ad D) *dδ, eε, fφ*; ut +6 δ, +3 δ, −5 δ. Adeoque eorundem Ponderationes ad axem XCS, vel ≡C≡; ut +6 DP+9 DP−15 DP=±0 DP: (Idque, ex hypotheſi; ſupponitur enim XCS, axis æquilibrii.)

P	3 P	3 P
+6 D	+3 D	−5 D
+6 DP	+9 DP	−15 DP=±0 DP.
+6 δ P	+9 δ P	−15 δ P=±0 δ P.

Atque (his proportionales) ponderationes auferendæ +6 δ P+9 δ P−15 δ P=±0 δ P.

His itaque rite ſubductis (additiſve reſpective) à ponderationibus prius poſitis, tanquam in *d, e, f*, punctis; prodibit Æquilibrium, ſive ±0 *d*P∓0 δ P=±00.

Verbi gratia; Si ponamus *d* ad δ, ut 3 ad 1; vel, ut 1 ad ⅓; Ex +6 *d*P+3 *d*P−9 *d*P, ſubductis +6 δ P+9 δ P−15 δ P, hoc eſt, +2 *d*P+3 *d*P−5 *d*P; manebunt +4 *d*P±0 *d*P−4 *d*P=±0 *d*P.

Si ponamus *d* ad δ, ut 3 ad 2, vel, ut 1 ad ⅔: Ex +6 *d*P+3 *d*P−9 *d*P, ſubductis +6 δ P+9 δ P−15 δ P, hoc eſt, +4 *d*P+6 *d*P−10 *d*P; manebunt +2 *d*P−3 *d*P+1 *d*P=±0 *d*P.

+6 *d*P+3 *d*P−9 *d*P	=±0 *d*P
−2 *d*P−3 *d*P+5 *d*P	=∓0 *d*P
+4 *d*P±0 *d*P−4 *d*P	=±0 *d*P

Adeoque; Utut ea Portio quæ dextrorſum ponderabat prius vel ſiniſtrorſum; mota libra, vel in neutram partem, vel in oppoſitam ponderet: non tamen deſtruitur, ſimul-omnium æquilibrium.

+6 *d*P+3 *d*P− 9 *d*P	
−4 *d*P−6 *d*P+10 *d*P	
+2 *d*P−3 *d*P+1 *d*P	=±0 *d*P.

PROP. XV.

Cujuſque Gravis, Centrum Gravitatis unicum eſt: Idque tum in omnium Axium Æquilibrii, tum in Planorum Æquilibrii omnium concurſu.

Eſtque omne per illud tranſiens Planum, Planum Æquilibrii; omniſque recta tranſiens, Æquilibrii Axis.



Fig. 98.

INtelligatur A B Grave, puncto ſui X ſuſtentum, ex F puncto fixo libere dependens, in ſitu quietis poſitum; Hoc eſt, ita dependens ut F X S perpendiculum, ſit Axis Æquilibrii; (per 12 hujus.) In quo itaque perpendiculo (per præced.) eſt Centrum Gravitatis; Alio autem, extra hoc perpendiculum, puncto ſuſtentum Grave, non, in eo ſitu, quieſcet; (per eandem 12 hujus;) Adeoque, extra hoc perpendiculum, non eſt Centrum Gravitatis; Nam ſiquod eſſet, eo ſuſtentum Grave, etiamnum in illo ſitu quieſceret, per 13 hujus.

Intelligatur deinde, ſoluto vinculo in X, alio ſui extra rectam F X S continuatam puncto ut Y ſuſtentum, ex puncto fixo ut G libere dependens, quieſcere; Adeoque (per 12 hujus) in eum ſitum redigi gravitate ſua, ut Axis Æquilibrii per Y tranſiens, (eſt utique aliquis, per 11 hujus,) ſit in G Y perpendiculo, puta G Y T. Oſtendetur, ut prius, tum in G Y T (infinita recta) centrum Gravitatis eſſe; tum, extra hanc non eſſe.

Cum itaque oſtenſum ſit, tum in rectarum (infinitarum) X S, Y T, utraque, tum, non extra utramvis, eſſe Centrum Gravitatis; cumque illæ non niſi in uno interſectionis puncto, ut C, communicent: unicum erit Centrum Gravitatis, C.

Eſt autem in Æquilibrii omni ſive Axe ſive Plano (per 11 & 14 hujus) centrum aliquod Gravitatis: Cum itaque unicum eſſe, jam oſtenſum ſit; erit hoc unum in omnium concurſu.

Quodque omnis per illud tranſiens recta ſit Axis Æquilibrii, omneque Planum per illud tranſiens, Æquilibrii Planum: ex definitionibus conſtat.

SCHOLIUM.

DEmonſtravimus itaque (&, credo, omnium primi) quod Poſtulare ſolent alii; tum Dari, in quovis Gravi, centrum aliquod Gravitatis, tum illud, Unicum eſſe.

PROP. XVI.

Manente, in eadem à Terræ Centro altitudine, Centro Gravitatis: neque Deſcendere cenſendum eſt Grave, neque Aſcendere.

Tantundem vero vel Aſcendere vel Deſcendere cenſendum eſt Grave, quantum Aſcendit, vel Deſcendit Centrum Gravitatis.

Adeoque (quoniam hoc in aliis Gravis motibus perinde obtinet) perinde Ponderando valet Grave utcunque ſitum, atque ſi in illo puncto totum eſſe intelligeretur, ubi eſt ipſius Centrum Gravitatis.

Fig. 99, 100. DEmonſtratur eodem modo, mutatis mutandis, atque 8 & 9 Cap. 3.

Nam, immoto C centro Gravitatis; utcunque rotetur Grave, (neque enim aliter, quam rotando moveri poteſt, per 1 hujus) puta ut ipſius recta A C B in ſitum α C β deveniat: Quoniam in quocunque ſitu, adeoque in toto progreſſu, oppoſita ſegmenta, plano quovis ad Horizontem recto ut P D diviſa, invicem æquiponderant; (per def. Centri Gravitatis;) Eſtque (propter rotationem) unius Deſcenſus cum oppoſiti Aſcenſu neceſſario conjunctus; Erit Aſcenſus Deſcenſui æqui-

æquipollens (nam ſicubi alter præpollet, ea præponderabitur, per 7 Cap. 2:) Adeoque nulli vel Aſcenſui, vel Deſcenſui ſimul Æquipollent. Per 8. Cap. 1.

Fig. 99.

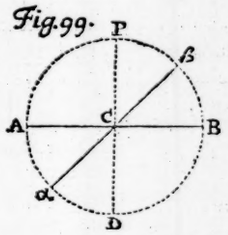


Fig. 100.



Fig. 101.



Fig. 102.



Fig. 103.



Item; moto Centro C in κ, nec aſcendendo tamen vel deſcendendo, ſed in eadem à Terræ Centro altitudine; ſitque ibidem A C B recta, in ſitum α κ β tranſlata: Atque hujus ſimilis ad horizontem ſitus intelligatur, in α C β. Manifeſtum eſt, (propter æque alta puncta C, κ; rectaſque C β, κ β, æquales & ſimiliter poſitas;) puncta β, β, utrobique æque alta eſſe. Idemque de reliquis reſpective punctis ſimiliter oſtendetur. Adeoque totum Grave in ſitu α κ β, æque altum eſt à terræ centro, atque in ſitu α C β; hoc eſt (per jam demonſtrata) æque altum atque in ſitu A C B. Adeoque nec Aſcendiſſe nec Deſcendiſſe cenſendum erit. Fig. 99, 100.

Sin altius humiliuſve ſit punctum κ quam C; atque ſimiliter ad horizontem ſita intelligatur eadem recta in α C β, atque in α κ β: Oſtendetur (propter æquales rectas ſimiliter poſitas) tanto altiora eſſe vel humiliora ſingula rectæ α κ β puncta, quam puncta rectæ α C β; quanto eſt ipſum κ, quam C: Adeoque (cum de reliquis punctis eadem ſit ratio) tanto altius humiliuſve Grave in α κ β, quam in α C β; hoc eſt, (per ante demonſtrata,) quam in A C B. Adeoque tantundem vel Aſcendiſſe vel Deſcendiſſe cenſendum erit Grave, quantum Aſcenderit, vel Deſcenderit centrum Gravitatis; per 3 Cap. 2. Quæ demonſtranda erant.

Cum igitur, per 4 Cap. 2. in ea ratione ponderat idem Grave qua, ſi moveatur, plus vel Aſcenſurum ſit vel Deſcenſurum: tantundem ponderando valere cenſendum erit; atque ſi ibidem totum eſſet Grave, ubi ipſius eſt Centrum Gravitatis.

SCHOLIUM.

QUæ igitur, in præcedentibus, oſtenſa ſunt, de Punctis Applicationum, eorumve à Centro vel aliunde diſtantiis; de Gravium item loco, & motibus varie declivibus; cæteraque iſtiuſmodi: Eorum Centris Gravitatis accommodanda erunt. Quippe totum Grave, hujus ope, in unico illo puncto virtualiter ſitum intelligatur, in quo eſt ipſius Centrum Gravitatis. Quodque de integris gravibus jam dictum eſt; de illorum Particulis quibuſvis, & harum centris gravitatis; perinde intelligendum eſt; Quippe & hæ Particulæ ſunt totidem Gravia: Sicut & Gravium Aggregatum, pro uno Gravi habendum; cujus eſt & unicum commune Centrum Gravitatis.

Quæ igitur (per totum Caput 2 aut alibi) de Gravi, tanquam in uno Puncto exiſtente; aut, ad Punctum unum Applicato, eive vel ſubjecto, vel ſupereminente, &c. dicta ſunt: De Centro Gravitatis commode exponuntur omnia. (Quod & obiter inſinuatum eſt, in Scholio Prop. 3. Cap. 2.) Quippe tantundem ponderando valet Grave, utcunque poſitum, atque ſi in eo puncto totum intelligeretur, ubi eſt Centrum Gravitatis: aut etiam, Gravium quotlibet Aggregatum, utcunque poſitorum, atque ſi in communi ſimul omnium Centro Gravitatis eſſent.

Atque hinc etiam ampliandum jam erit, & aliquatenus relaxandum, quod in Scholio Prop. 1. hujus definivimus: Nempe, quod ſingula totius Gravis, vel Aggregati gravium, Fig. 101, 102.

gravium, puncta, intelligenda sint in eodem ad invicem situ permanere. Quippe, mota utcunque Gravis parte aliqua, vel aliquot partibus, ita tamen ut earum vel singularum vel simul omnium Centrum Gravitatis maneat ut prius situm; perinde est, ponderationem quod spectat, atque si omnino permansissent in eodem situ puncta singula. Adeoque, quod hactenus demonstratum est, supponendo singula totius puncta situm suum ad invicem (atque ad motus centrum vel axem) retinere: posthac pro demonstrato habebitur, si saltem partium Centra gravitatis, maneant ut prius sita; aut etiam commune omnium Centrum Gravitatis similiter ad motus Centrum vel Axem situm. Puta, si A C B Grave, (motis utcunque partibus, manentibus partium centris gravitatis, in situm α C β perveniat; perinde omnino ponderabit. Similiter; Automati rotis quotlibet utcunque circa sua centra motis, manente communi totius centro gravitatis in eodem (vel æquipollente) situ, manet eadem totius Ponderatio.

PROP. XVII.

Si Centrum Gravitatis sit in eodem ad terræ Centrum Perpendiculo cum Centro motus: sibi permissum Grave non movebitur.

Sin extra Perpendiculum constituatur; ad Perpendiculum, infra Centrum motus, feretur: Idque (nisi alias impeditum) in Plano per centrum Motus, centrum Gravitatis, & Centrum Terræ transeunte.

Quodque de Perpendiculo dictum est, Perpendiculi Succedaneo accommodabitur in oblique declivi Plano.

Fig. 103 Sequitur ex 10 Cap. 3. Nam Centrum Gravitatis, saltem Æquilibrii Centrum est; (per eorum definitiones:) Nempe, si recta quævis per Centrum Gravitatis, pro Libra censeatur.

Vel (ut ea) sic ostenditur,

Puta; Si Centrum Gravitatis sit in M centro motus; hoc manente, non descendet Grave; per præced. Adeoque à Gravitate non movebitur.

Si sit in perpendiculo infra centrum motus, ut in P: Centrum Gravitatis, (adeoque & Grave, per præced.) jam est in situ rotationis infimo, (per 20 Cap. 2.) Adeoque non, ob Gravitatem, movebitur.

Si sit in Perpendiculo supra centrum motus, ut S; adeoque in puncto supremo; (per 20 Cap. 2.) In quascunque partes rotetur, æqualiter descensurum est, (propter æqualem quaquaversum declivitatem,) tum Centrum Gravitatis, tum (per præced.) ipsum Grave. Adeoque (per 8 Cap. 2.) non movebitur.

Sin extra perpendiculum sit, ut in G: deorsum ad P feretur, per arcum G P, in M G P plano perpendiculari situm, (ut qui omnium, in superficie sphærica rotationem determinante, descensus est maxime declivis,) per 24 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Eademque, in oblique declivi plano, de perpendiculi Succedaneo, similiter ostendentur. Puta; si super declive planum impenetrabile, volvendum esset G grave, circa C centrum motus; suo centro Gravitatis peripheriam in illo plano describens S P G. Quippe, cum propter duritiem subjecti plani, aut forsan Axis circa quem rotetur determinatam positionem, similemve causam aliam, in plano perpendiculari descendere non possit; quam tamen potest maxime declivi feretur.

PROP. XVIII.

Ad datum motus Axem, (vel similiter inclinatum,) ea ratione ponderant comparata Gravia; (vel idem, Grave pro vario situ:) quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum Centrorum Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano, componitur.

Adeoque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciproce proportionalia; Æquiponderant: Quorum

vero

vero centra Gravitatis ſunt in ipſo per Axem Perpendiculari Plano; nihil in utramvis partem ponderant.

Circa Axes vero inæqualiter inclinatos, adeoque in Planis inæqualiter Declivibus, Libranda: in ea ratione ponderant, quæ ex Ponderum, & Diſtantiarum centrorum Gravitatis à perpendiculari per axem plano, & Declivitatem planorum in quibus librantur pondera, componitur.

P.	nP.	P.	nP.	nP.	P.	nP.
D.	D.	mD.	mD.	$\frac{1}{n}$D.	D.	mD.
					Δ.	rΔ.
PD.	G::nPD.	nG::mPD.	mG::mnPD.	mnG::PD.	G.	PDΔ.	G::mnrPDΔ.	mnrG.

SEquitur ex 12 & 13 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XIX.

Ex tribus his; Pondere, Ponderatione, & Diſtantia Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano; datis duobus quibuſvis, datur tertium.

Nempe: Datis Pondere, & Diſtantia; datur Ponderatio: Datis Pondere, & Ponderatione; datur Diſtantia: Datis Ponderatione, & Diſtantia; datur Pondus.

Excipe; Si (quod una cum Ponderatione datur) Diſtantia vel Pondus nullum ſit.

Intellige; *in data Axis inclinatione*, (& ſimiliter in ſequentibus:) Secus enim & hujus habenda erit conſideratio.

$$PD = G. \qquad \frac{G = PD}{P} = D. \qquad \frac{G = PD}{D} = P.$$

SEquitur ex 15 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XX.

Dato Pondere, dataque Diſtantia Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano: Pondus inveſtigare, quod in aſſignata Centri Gravitatis à perpendiculari Plano per axem Diſtantia, Dato illi vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

Item: Diſtantiam inveſtigare, in qua, Pondus Aſſignatum, Dato illi vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

P.	$\frac{1}{n}$P.	nP.	$\frac{m}{n}$P.	nD.	
D.	nD.	$\frac{1}{n}$D.	nD.	$\frac{m}{n}$D.	
PD.	G::PD.	G::PD.	G::mPD.	mG::mPD.	mG.

Fig. 104.

Fig.104.

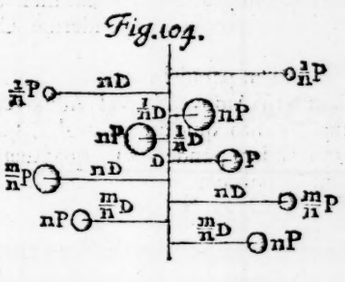
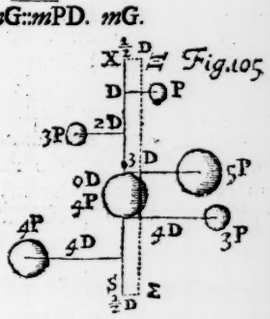


Fig.105



SEquitur ex 16 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP.

PROP. XXI.

Ejuſdem vel æqualium Ponderum, Centri Gravitatis ad perpendicularis Plani per Axem motus Appropinquatio, aut inde Elongatio, Æqualis, (ſive Centrum Plano admoveri intelligatur, ſive Planum Centro, vel contra;) æqualiter auget, minuitve Ponderationem.
Et Inæqualis, vel, Inæqualium Ponderum; proportionaliter.

SEquitur ex 17 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXII.

Datis Ponderibus quotlibet; datiſque vel Axe motus (aut Perpendiculari per hunc Plano) & Ponderum Centris gravitatis; vel horum à Perpendiculari per Axem Plano diſtantiis ad datas partes: Inveſtigare, quanta ſit tum ſingulorum tum ſimul omnium Ponderatio; &, ad quas partes: tum denique quantum gravant ipſum quo ſuſtinentur Axem.

Fig. 105.

+D.	+3D.	+4D.	±0D.	−2D.	−3D.
P.	5P.	3P.	4P.	3P.	4P.

+DP.+G::+15DP.+15G::+12DP.+12G::±0DP.±0G::−6DP.−6G::−12DP.−12G.

+ 1G
+15G } = +28G
+12G

± 0G = ± 0G

− 6G
−12G } = −18G

+10G

OStenditur ex 18 Cap. 3. propter 16 hujus.
Signum +, innuit diſtantiam à Perpendiculari per Axem Plano, Dextrorſum: Signum −, Siniſtrorſum. Pondera vero eodem ſigno + notantur omnia, quia intelliguntur omnia, Deprimentia. Si vero eſſet Ponderum aliud Deprimens, aliud Elevans: illud ſigno +, hoc ſigno −, notari par eſſet: Et multiplicationum leges inſuper eſſent obſervandæ.

PROP. XXIII.

Datis Ponderibus quotlibet (vel ſumma Ponderum) dataque eorum ſimul omnium Ponderatione ad datas partes, reſpectu Axis expoſiti (vel expoſiti per axem Perpendicularis Plani:) Ponderationem Augere vel Minuere data quantitate; ſive manente eodem per Axem plano perpendiculari; ſive manentibus (in iiſdem parallelis Planis) Ponderum centris gravitatis.

OStenditur ex 19 Cap. 3. propter 16 hujus.
Nempe: Manente Axe, (ſaltem ſimiliter ad horizontem inclinato; in eodem perpendiculari plano,) Amovendo vel Admovendo ponderum Centra Gravitatis.
Vel, manentibus ut prius (ſaltem in iiſdem parallelis Planis) Centris Gravitatis; (vel communi ſimul omnium Centro;) Amovendo vel Admovendo Axem, ſimiliter inclinatum, in parallelo Plano. Tanto quidem intervallo, quanto expoſita Pondera (vel ſumma ponderum) tantundem ponderarent, quantum eſt vel Addendum vel Auferendum ponderationi expoſitum.

PROP.

PROP. XXIV.

Datis Ponderibus quotlibet; una cum Axe motus, (aut per illum Perpendiculari Plano,) & Centris gravitatis, (aut horum à Perpendiculari per Axem Plano diſtantiis, ad datas partes:)
Vel, Datis ſaltem ſumma Ponderum, & ſimul omnium Ponderatione ad datas partes:
Diſtantiam Centri gravitatis ſimul omnium, à Perpendiculari per Axem plano, invenire.
Adeoque; Ponderationem Augere vel Minuere in data ratione. Nempe; in ea ratione, aucta vel minuta Diſtantia.

$$\frac{+10G=+10PD}{20P}=+\tfrac{1}{2}D.$$

OStenditur ex 20 Cap. 3. propter 16 hujus.
Puta; Si $+10G=+10PD$ ſumma Ponderationum dextrorſum, data; (vel, ex datis, inventa, per 22 hujus;) per $20P$ ſummam ponderum dividatur: Habetur $+\frac{1}{2}D$, diſtantia Centri gravitatis à Plano per Axem Perpendiculari, dextrorſum: Puta, in ΞΣ Recta, Planove. Fig. 105.
Corollarium, conſtabit ex 20 hujus. Quippe jam datur totius Aggregati (tanquam unius Gravis) tum Pondus tum Centri Gravitatis diſtantia.

PROP. XXV.

Data, à Perpendiculari per Axem Plano communis Ponderum quotlibet, utcunque poſitorum, Centri Gravitatis Diſtantia; Ex cognitis Ponderibus, vel ſumma Ponderum; cognoſcitur Ponderatio: Vel, ex cognita Ponderatione; Summa Ponderum.

$$+D\times P=+DP=+G.\ \frac{+G=+DP}{D}=P.$$

SEquitur ex 22 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXVI.

Datis, in Gravi quovis, tribus Æquilibrii Planis, quæ non in una recta concurrant omnia; Vel, Datis duobus quibuſvis Axibus Æquilibrii: Datur ejuſdem Centrum Gravitatis. Nempe in communi ſecantium concurſu.
Et quidem; Figuræ Planæ, vel Lineæ utcunque curvæ in Plano deſcriptæ: Datis duobus (præter ipſum Planum) Planis Æquilibrii, (non in hujus recta aliqua concurrentibus:) Vel, Uno Axe Æquilibrii non in illo Plano jacente: Datur Centrum Gravitatis. Nempe in communi datorum concurſu.
Lineæ vero rectæ; Dato uno vel Æquilibrii Axe, vel Plano Æquilibrii, rectam illam ſecante: Datur Centrum Gravitatis. Nempe, ſectionis Punctum.
Puncti vero, Centrum Gravitatis, eſt punctum ipſum.

CUm enim duo Plana ſe mutuo non niſi in una recta ſecent; Rectaque ſive rectam, ſive planum, non niſi in unico puncto; (ut ex elementis notum eſt:)

est:) Manifestum est, non posse nisi in unico puncto; vel Duos Axes Æquilibrii, vel Tria Æquilibrii Plana, non in eadem recta concurrentia; se mutuo secare. (Tertium utique Planum, duorum communem sectionem, non nisi in uno puncto secat.) Cumque Centrum Gravitatis, per 15 hujus, sit in communi omnium sive Axium sive Planorum Æquilibrii concursu; Datis illis, datur (quod in eorum concursu est) Centrum Gravitatis. Quod erat primo demonstrandum.

Sin illud Grave sit vel Figura Plana, vel Linea utcunque curva in Plano descripta; erit hoc ipsum planum, unum ex tribus illis Æquilibrii Planis requisitis; (per def. Plani Æquilibrii: quippe posito hoc ad horizontem recto in neutram partem præponderabitur, per 3 hujus.) Adeoque (cum Centrum Gravitatis in illo plano esse constet) si vel duobus aliis Æquilibrii Planis (non in eadem aliqua hujus Plani recta se mutuo secantibus;) vel, Axe uno; secetur Planum hoc: unico secabitur puncto, (quod itaque Gravitatis Centrum erit;) per jam dicta. Quod secundo demonstrandum erat.

Linea recta vero (cujus Centrum gravitatis in ipsa esse, similiter ostendetur;) ex tribus Æquilibrii planis duo supplet; sive communem duorum sectionem: Adeoque, si vel uno aliquo Æquilibrii vel Axe, vel Plano, secetur; secatur puncto unico, quod itaque Centrum erit Gravitatis.

Denique: Quod Puncti Centrum Gravitatis extra ipsum non sit, similiter ostendetur atque de Plano, & Linea recta; (quippe si Planum aliquod extra ipsum ponatur ad Horizontem perpendiculare; totum grave ad unas partes ponderabit:) Cum itaque Punctum sit indivisibile; erit ipsum sui Centrum. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

EXempli gratia. Centrum Gravitatis Puncti C, est ipsum C Punctum. Centrum gravitatis rectæ XS, est in ipsa recta; ejusque Puncto C quo ab Æquilibrii Plano vel Axe YCT, secatur. Fig. 98.

Figuræ Planæ, vel Lineæ Curvæ in Plano, YXTS, centrum gravitatis est in duorum Planorum Æquilibrii, puta XS & YT, communi sectione, (quæ ipsa est Axis Æquilibrii;) hujusque puncto C, quod est in exposito plano.

Figuræ vero solidæ, vel lineæ curvæ non in plano descriptæ, (quales sunt Spirales circa Conum, vel Cylindrum, &c.) Centrum gravitatis erit in trium Planorum Æquilibrii; puta per YXT, duorumve hoc secantium ut in XCS, & YCT; communi concursu C: sive duorum Axium Æquilibrii XS & YT communi sectione C.

Ejusmodi autem duo Axes habentur; ope 12 hujus. Puta suspenso primum Gravi ex sui puncto X, ut habeatur XS; deinde, ex sui puncto Y, ut habeatur YCT.

PROP. XXVII.

Duorum conjunctorum Gravium (Homogeneorum) commune Centrum Gravitatis, est in ea recta quæ sua respective Centra Gravitatis conjungit, sic divisa, ut Distantiæ sint Ponderibus reciproce proportionales.

Adeoque; datis duobus, eorumque Centris Gravitatis; datur commune simul utriusque Centrum Gravitatis.

Quodque de duobus dicitur; de pluribus similiter obtinebitur.

Item; Datis Totius & Ablati, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur Centrum Gravitatis reliqui.

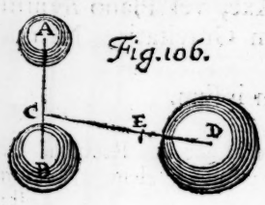


Fig. 106.

SUnto, verbi gratia, duo Pondera, vel (quod eodem recidit, per 16 hujus) eorum Centra Gravitatis, in punctis A, B: Adeoque (per præced.) AB Axis Æquilibrii; & (per 15 hujus) in illo, Centrum Gravitatis: puta C. Est, inquam, ut Pondus A ad pondus B, sic (reciproce) distantia CB ad distantiam CA, (per 18 hujus) ut Æquiponderent.

Invento

Invento autem duorum A B ponderum communi Centro Gravitatis C; dato adhuc tertio Pondere, ejuſque Centro Gravitatis D: eodem modo invenietur trium commune Centrum Gravitatis. Nempe, ita diviſa recta C D in E, ut diſtantiæ E D, E C; ſint Ponderibus D, & A + B, reciproce proportionales.

Item; datis Totius A + B, & Ablati B, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur reſidui Centrum Gravitatis A. Nam datis Ponderibus A + B & B, habetur (ſubductione) Pondus A. Sumptis igitur (in B C recta continuata) ut inventum Pondus A, ad Pondus B datum, ſic data C B diſtantia, ad diſtantiam C A quæſitam.

Dico *Homogeneorum*; quia quæ ſunt invicem Heterogenea, (ut linea & ſuperficies; ſuperficies, & ſolidum; aut ſimilia;) nullam habent ad invicem rationem; (quod docent deff. 3 & 5. Quinti Euclidis:) ſuntque hujuſmodi comparationis incapacia. Quodque hic monitum eſt; alibi, ubi opus erit, eſt intelligendum.

CAP. V.

De Calculo Centri Gravitatis.

MONITUM.

Hoc Caput Integrum, quanquam à Præcedentibus dependeat, & (per Methodi leges) hunc ſibi locum vendicare videatur: Non tamen ita cum Sequentibus connexum eſt, quin ut poſſit ab illis ſeparari. Cum itaque ubi ad interiora Geometriæ penetrandum erit, Calculus neceſſario futurus ſit perplexior, quam forte Tirones, vel minus exercitati, commode ferre poſſint: illud jam ſtatim ſub initium monendum duxi; ut ſicubi perplexi Calculi moleſtiam ſubire nolint, poſſint inoffenſo pede ad Capita ſequentia tranſire; quæ ex præcedentibus, hoc omiſſo, tum ſatis intelligi, tum & legitime demonſtrari poſſunt.

DEFINITIONES.

Def. I. *Quanta quælibet, Arithmetice proportionalia, (ſive ſecundum naturalem Numerorum conſecutionem conſtituta,) appello* Primana.

Quæque ſunt in horum ratione Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, &c. (ſive ut Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. arithmetice-proportionalium,) appello Secundana, Tertiana, Quartana, *&c.*

Quæ autem in eorum ratione Subduplicata, Subtriplicata, Subquadruplicata, &c. (ſive ut illorum Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) appello Subſecundana, Subtertiana, Subquartana, *&c.*

Quæ in ratione, Duplicata Triplicatæ, Subtriplicatæ, &c. Triplicata Duplicatæ, Subduplicatæ, &c. (ſive ut Quadratâ Cuborum, aut Radicum cubicarum, &c. ut Cubi Quadratorum, aut Radicum quadraticarum, &c.) appello Quadrata Tertianorum, Subtertianorum, *&c.* Cubos Secundanorum, Subſecundanorum, *&c. Et ſimiliter, in quavis alia rationum compoſitione, mutatis mutandis, appellanda erunt.*

Atque hujuſmodi Serierum Indices *ſive* Exponentes, *appello, numeros (integros an fractos, ſurdoſve, ut contigerit) unde denominantur illæ ſeries aut Rationes.*

Et, conſonanter, Æqualia dico Nullana: *Quoniam Æqualia ſecundum nullam (ne ſimplam quidem) rationem arithmetice proportionalium creſcunt aut decreſcunt.* Subprimana *vero (ſive, ut dicam, Radices Laterales Primanorum,) eadem erunt atque Primana. propter* $\frac{1}{1} = 1$.

EXempli gratia :

Exponentes.	Series.							
0. Æqualium,	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
1. Primanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
2. Secundanorum,	0.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	&c.
3. Tertianorum,	0.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	&c.
$\frac{1}{1}$. Subprimanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
$\frac{1}{2}$. Subsecundanorum,	$\sqrt{0}$.	$\sqrt{1}$.	$\sqrt{2}$.	$\sqrt{3}$.	$\sqrt{4}$.	$\sqrt{5}$.	$\sqrt{6}$.	&c.
$\frac{1}{3}$. Subtertianorum,	$\sqrt{c0}$.	$\sqrt{c1}$.	$\sqrt{c2}$.	$\sqrt{c3}$.	$\sqrt{c4}$.	$\sqrt{c5}$.	$\sqrt{c6}$.	&c.
$2\times3=6$. Quadratorum tertianorum, vel	0 0.	1×1.	8×8.	27×27.	64×64.	125×125.	216×216.	&c.
	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Q. Subtertianorum,	$\sqrt{c0}$.	$\sqrt{c1}$.	$\sqrt{c4}$.	$\sqrt{c9}$.	$\sqrt{c16}$.	$\sqrt{c25}$.	$\sqrt{c36}$.	&c.
$3\times2=6$. Cuborum secundanorum, vel	000.	1×1×1.	4×4×4.	9×9×9.	16×16×16.	25×25×25.	36×36×36.	&c.
	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. C. Subsecundanorum,	$\sqrt{0}$.	$\sqrt{1}$.	$\sqrt{8}$.	$\sqrt{27}$.	$\sqrt{64}$.	$\sqrt{125}$.	$\sqrt{216}$.	&c.
&c.	&c.							

Def. II. *Series, jam definitis,* Reciprocas, *appello; quando Series æqualium, per earum aliquam Dividi intelligitur. Quæ itaque Indices habebunt Negativos; ut* $-1, -2, -3$, *&c.*

EXempli gratia.

Index.	Series Reciproca.					
-0 Æqualium,	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	&c.
-1. Primanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	&c.
-2. Secundanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{9}$.	$\frac{1}{16}$.	&c.
-3. Tertianorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{27}$.	$\frac{1}{64}$.	&c.
$-\frac{1}{2}$. Subsecundanorum,	$\frac{1}{\sqrt{0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{4}}$.	&c.
$-\frac{1}{3}$. Subtertianorum,	$\frac{1}{\sqrt{c0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.	&c.
$-6=-2\times3$. Q. Tertian.	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.1}$.	$\frac{1}{Q.8}$.	$\frac{1}{Q.27}$.	$\frac{1}{Q.64}$.	&c.
Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$.	&c.
$-\frac{2}{3}=-2\times\frac{1}{3}$. Q. Subtertianorum,	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c4}}$.	&c.
Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c9}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c16}}$.	&c.
$-6=-3\times2$. C. Secundanorum,	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.1}$.	$\frac{1}{C.4}$.	$\frac{1}{C.9}$.	$\frac{1}{C.16}$.	&c.
Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$.	&c.
$-\frac{1}{2}=-3\times\frac{1}{2}$. C. Subsecundan.	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{4}}$.	&c.
Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{8}}$.	$\frac{1}{\sqrt{27}}$.	$\frac{1}{\sqrt{64}}$.	&c.

SCHO-

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quo rectius hæc intelligantur:) quod ſi Poteſtas quælibet ſecundum quam ſeries inſtituitur, (unde & Indicem ſive Exponentem deſumit,) per aliam cujuſvis ſeriei poteſtatem multiplicetur; Poteſtatem facit cujus Index ſit Aggregato indicum utriuſque æqualis: Vel Index Multiplicatæ, tanto augetur, quantus eſt Index multiplicantis. Ut

$1 \times a = a$.	$1 \times a^2 = a^2$.	$1 \times a^3 = a^3$.	$1 \times a^4 = a^4$.	Quantitates.
$0+1=1$.	$0+2=2$.	$0+3=3$.	$0+4=4$.	Indices.
$a \times a = a^2$.	$a \times a^2 = a^3$.	$a \times a^3 = a^4$.	$a \times a^4 = a^5$.	Quantitates.
$1+1=2$.	$1+2=3$.	$1+3=4$.	$1+4=5$.	Indices.
$a^2 \times a = a^3$.	$a^2 \times a^2 = a^4$.	$a^2 \times a^3 = a^5$.	$a^2 \times a^4 = a^6$.	Quantitates.
$2+1=3$.	$2+2=4$.	$2+3=5$.	$2+4=6$.	Indices.

Sin per alteram Poteſtatem Dividatur Poteſtas aliqua; oritur poteſtas cujus Index ſit æqualis exceſſui Indicis poteſtatis diviſæ ſupra indicem poteſtatis dividentis: Vel Index Diviſæ tanto minuitur, quantus eſt Dividentis Index. (Adeoque ſi hic illo major ſit, prodibit index Negativus.) Ut

$a) \; 1 \left(\frac{1}{a}\right.$.	$a^2) \; 1 \left(\frac{1}{a^2}\right.$.	$a^3) \; 1 \left(\frac{1}{a^3}\right.$.	$a^4) \; 1 \left(\frac{1}{a^4}\right.$.	Quantitates.
$0-1=-1$.	$0-2=-2$.	$0-3=-3$.	$0-4=-4$.	Indices.
$a) \; a \left(1\right.$.	$a^2) \; a \left(\frac{1}{a}\right.$.	$a^3) \; a \left(\frac{1}{a^2}\right.$.	$a^4) \; a \left(\frac{1}{a^3}\right.$.	Quantitates.
$1-1=0$.	$1-2=-1$.	$1-3=-2$.	$1-4=-3$.	Indices.
$a) \; a^2 \left(a\right.$.	$a^2) \; a^2 \left(1\right.$.	$a^3) \; a^2 \left(\frac{1}{a}\right.$.	$a^4) \; a^2 \left(\frac{1}{a^2}\right.$.	Quantitates.
$2-1=1$.	$2-2=0$.	$2-3=-1$.	$2-4=-2$.	Indices.

Si itaque intelligatur ſeries poteſtatis inferioris, per ſeriem poteſtatis ſuperioris, reſpective dividi; (hoc eſt, terminus primus illius, per primum hujus; ſecundus, per ſecundum, &c.) orietur ſeries ex Reciprocis aliqua, quarum Indices ſunt Negativi.

Si cui interim hæc minus adhuc explicata videantur: Conſulat, ſi libet, noſtram *Arithmeticam Infinitorum*: ubi fuſius traduntur.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si intelligatur infinita ſeries Quantorum, ab ipſo capite ſeriei (puta 0 vel $\frac{1}{0}$) inchoatorum, & continue procedentium ſecundum ſeriem Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. aliorumve modo definitorum; eorumve Reciprocam: quorum ultimum datum ſit: erit totius ratio, ad ſeriem totidem ultimo æqualium, ea quæ eſt Unius, ad Indicem ſeriei Uno auctum.

Idem continget, ſi, omiſſo termino primo, ſeu 0, Series à ſecundo termino incipiat; ſeu à quovis termino qui ſit primo & ſecundo in-

termedius; Puta si in serie Primanorum (cui reliquæ accommodandæ intelliguntur) terminus primus sit saltem non major quam communis Excessus seriei.

PUta: Infinita series ejusmodi Primanorum (qualia sunt, parallela Plana in Conoeide Parabolico; & Rectæ in Triangulo, Basi parallelæ, &c.) cujus Index est 1: Est ad seriem totidem Maximo Æqualium, (puta, ad circumscriptum Conoeidi illi Cylindrum, aut Triangulo Parallelogrammum, æque altum;) ut 1 ad $2 = 1 + 1$.

Ejusmodi series infinita Secundanorum, cujus Index est 2; (qualia sunt parallela basi Plana in Cono aut Pyramide; vel Ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ;) ad totidem maximo Æqualia, (puta, circumscriptum super eadem basi Cylindrum vel Prisma, æque altum; aut circumscriptum complemento Parabolæ Parallelogrammum;) ut 1 ad $3 = 2 + 1$.

Ejusmodi series infinita Subsecundanorum cujus Index est $\frac{1}{2}$; (puta, rectarum in Parabola basi parallelarum,) ad totidem maximo æqualium, (puta, ad Parallelogrammum super eadem base æque altum;) ut 1, ad $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$; sive ut 2 ad 3.

Ejusmodi series infinita Subtertianorum, cujus Index est $\frac{1}{3}$, (puta, rectarum in Paraboloeide cubicali,) ad totidem maximo æqualium, (puta, ad circumscriptum Parallelogrammum;) ut 1 ad $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$: sive, ut 3 ad 4.

Et similiter in istiusmodi aliis innumeris.

Item in Reciprocis seriebus: Puta, ejusmodi series cujus Index sit $-\frac{1}{2}$; erit ad totidem ultimo Æqualium, ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$; sive ut 1 ad $\frac{1}{2}$; vel 2 ad 1. Et in reliquis similiter.

Per nostræ *Arithmeticæ Infinitorum* Prop. 64. 102, &c.

Idem continget, si, pro serie Primanorum

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
vel 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. &c.

quæ repræsentet Figuram Inscriptam: Intelligatur Series,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c.
vel 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. &c.

quæ repræsentet Figuram Circumscriptam:

vel $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. $6\frac{1}{2}$. &c.
hoc est, ut 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c.
aut etiam $\frac{1}{3}$. $1\frac{1}{3}$. $2\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. $5\frac{1}{3}$. $6\frac{1}{3}$. &c.
hoc est, ut 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. &c.

quæ repræsentent Figuram intermediam; puta quæ sit partim Inscripta, partim Circumscripta; adeoque major quam Inscripta & minor quam Circumscripta. Quippe hæ omnes (atque horum similes) dummodo Series Infinita intelligatur, tantundem valent, (utut in Serie terminorum numero Finitorum secus sit:) Per Schol. Prop. 182. *Arithmet. Infinit.*

Quodque de serie Primanorum dictum est, reliquis Seriebus quæ sunt in Primanorum ratione Duplicata, Triplicata, &c. Subduplicata, Subtriplicata, &c. aut alias compositæ, accommodandum erit.

SCHOLIUM.

QUoties, in sequentibus, serierum hujusmodi mentio fiet: quarum æstimatio ex hac Propositione dependet; intelligendæ sunt series illæ, ab ipso capite ordiri, puta 0 vel $\frac{1}{6}$; & dato terminari. Quod cum in propositione una aut altera expresse dictum sit; idem in sequentibus intelligendum erit; (nisi contrarium insinuetur:) utut, quo longa periphrasis evitetur, (quæ propositionem, alias fortasse satis implicatam, perplexiorem redderet,) illud diserte verbis non dicatur.

PROP.

PROP. II.

Lineæ Rectæ, Parallelogrammi, Parallelepipedi, Priſmatis, Cylindri, Superficiei Cylindricæ vel Priſmaticæ, aut quæ horum inſtar ſunt; Centrum Gravitatis, eſt *in media longitudine.* A.

Nempe; Lineæ Rectæ, in Puncto medio: Parallelogrammi, in media Recta oppoſitis baſibus parallela: Parallelepipedi, Priſmatis, aut Cylindri, vel Superficiei Cylindricæ vel Priſmaticæ; in medio Plano, oppoſitis baſibus Parallelo. B.

Adeoque: Parallelogrammi, in ejuſmodi binarum Rectarum concurſu: Parallelepipedi, in ejuſmodi trium Planorum concurſu. C.

Datur igitur Puncti, Lineæ rectæ, Quadrati aut cujuſvis Parallelogrammi, Cubi aut Parallelepipedi cujuſvis, horumve Solidorum cujuſvis Superficiei, Centrum Gravitatis. D.

Adeoque &, Punctorum quotlibet, poſitione datorum, commune Centrum gravitatis datur. Item, Rectarum quotlibet, magnitudine & poſitione datarum. Imo, & linearum quarumlibet, magnitudine & poſitione datarum, quarum ſingularum Centra gravitatis dantur, datur commune Centrum Gravitatis. Ope Prop. ult. Cap. 4. E.

Et ſimiliter, quotlibet Quadratorum vel Parallelogrammorum quorumlibet; item, quotlibet Cuborum, vel quorumvis Parallelepipedorum; aut ſuperficierum horum; (magnitudine & poſitione datorum;) datur commune centrum Gravitatis. Ope ejuſdem Prop. ult. Cap. 4. Fig. 107, 108, 109, 110, 111, 112.

Fig. 107.

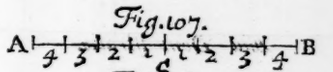


Fig. 108.

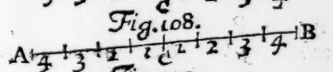


Fig. 109.

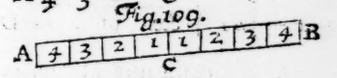


Fig. 110.

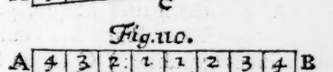


Fig. 111.

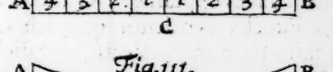
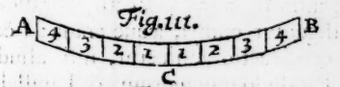


Fig. 112.



SI enim intelligatur Linea Recta, Parallelogrammum, Priſma, Cylindrus, aut quod horum inſtar eſt aliud; utrinque à medio C; Rectis Planiſve parallelis, æquali intervallo ab invicem diſſitis, poſitiſque in ſitu ad horizontem rectis; in ſegmenta invicem æqualia (plura an pauciora, numero finita an infinita,) dividi: Manifeſtum eſt, (ex 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) propter ſegmenta quotlibet ex una parte, totidem ex altera, Æqualia magnitudine, (adeoque & Pondere; ſupponimus utique æquabiliter gravia:) & in Diſtantiis reſpective æqualibus poſita; Æquiponderare ſingula ſingulis reſpective ſumptis; adeoque omnibus omnia ſimul ſumpta. Adeoque, quod per C tranſit, eſt Æquilibrii Perpendiculum, vel Perpendiculare Planum; (per definitiones;) & in illis Centrum Gravitatis; per 15 Cap. 4. A.

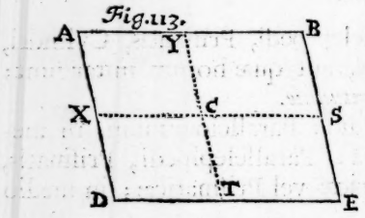
Adeoque; (per 26 Cap. 4.) in Linea Recta, hinc determinatur ipſum Punctum; B.

in Parallelogrammo, aut quod hujus inſtar eſt, ſaltem Recta; in Priſmate, aut Cylindro, Planum; in quo eſt ipſum Gravitatis Centrum.

C.

Fig. 113

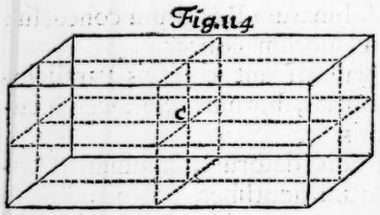
Fig. 113.



Porro; Cum ſint in Parallelogrammo (ſive ſit Quadratum, Oblongum, Rhombus, aut Rhomboeides,) bis bina latera oppoſita: Habentur hinc duæ rectæ, ut XCS (media inter AB, & DE,) & YCT, (media inter AD, & BE,) in quarum utraque (per jam demonſtrata) eſt Centrum Gravitatis: Adeoque; in horum communi ſectione, C puncto. per 26 Cap. 4.

Fig. 114

Fig. 114



D.

Denique; Cum ſint in Cubo, & quovis Parallelepipedo, ter bina Plana oppoſita: Habentur hujuſmodi (per jam demonſtrata) tria Plana, in quorum ſingulis, (adeoque in communi omnium concurſu C,) eſt Centrum Gravitatis. per 15 & 26 Cap. 4.

Adeoque, tum Puncti (ſive per 26 Cap. 4. ſive hinc, quia nihil eſt quod utrinque ponderet, nedum præponderet,) tum Lineæ rectæ, tum Quadrati aut cujuſvis Parallelogrammi, item Cubi aut Parallelepipedi cujuſvis, datur ipſum Gravitatis Centrum; per jam demonſtrata. Quodque de Cubis & Parallelepipedis, dictum eſt; perinde valet de horum ſuperficiebus.

E. Et propterea, Punctorum quotlibet, vel quotlibet rectarum; item Quadratorum aut Parallelogrammorum quotlibet; quotlibet item Cuborum vel Parallelepipedorum; quotlibet denique Superficierum Cuborum aut Parallelepipedorum; datur commune Centrum Gravitatis, modo ipſa ſint magnitudine & poſitione data. Per Prop. ult. Cap. præced.

Alia Demonſtratio.

P.	P.	P.	P.			
0*d*.	1*d*.	2*d*.	3*d*.	&c.	uſque ad	D.

$0dP + 1dP + 2dP + 3dP +$ &c. uſque ad $DP. = \frac{1}{2}NDP.$

Idem demonſtratur ex 1 hujus. Intelligatur utique, per C mediam longitudinem incedens, Perpendiculare per Axem Planum; (cui intelligantur parallelæ, Parallelogrammi vel Priſmatis Baſes oppoſitæ:) Quæque ſunt utrinque CA, CB, rectæ, ex infinitis numero Punctis (eo ſenſu quo def. 1. Cap. 4. definitum eſt) conſtare: (& ſimiliter ex infinitis numero Rectis, Parallelogrammum; &, Planis, Priſma, &c.) Quæ intelligantur omnia, æque craſſa; (& ſimiliter alibi intelligendum, ubi hujuſmodi conſtructio adhibetur, niſi aliud innuatur:) Adeoque tum ipſa (ut Rectarum, Parallelogrammorum, & Parallelepipedorum, natura poſtulat, utpote in omnibus ſui partibus æque altorum;) tum & propterea eorum Pondera, inter ſe æqualia: puta, ut P, P, P, P, &c. quorum omnium numerus intelligatur, N: Sed &, in Diſtantiis à Perpendiculari Plano per Axem, ut 0*d*, 1*d*, 2*d*, 3*d*, &c. uſque ad D, maximam. Adeoque momenta ſeu Ponderationes (per 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) ut 0*d*P, 1*d*P, 2*d*P, 3*d*P, &c. uſque ad DP. Quæ quidem infinitæ ſeries Primanorum, ſimul valent ut $\frac{1}{2}$NDP; (nempe, ad NDP, ſummam totidem Maximo Æqualium, ut 1 ad 2:) per 1 hujus. Cumque hoc, utrinque perinde contingat: Æquiponderabitur utrinque. Adeoque (per 15 Cap. 4.) Centrum Gravitatis eſt in illo Plano. Quod erat demonſtrandum.

Fig. præced.

Reliquaque hinc deducuntur ut prius.

Alia Demonſtratio.

P	P	P.	P.	&c.		P.
0*d*.	1*d*.	2*d*.	3*d*.	uſque	ad	D.

$0dP + 1dP + 2dP + 3dP +$ &c. uſque ad $DP. = \frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D.$

Idem

Idem Analytice, tanquam ſi nondum notum eſſet, ſic inveſtigabitur. Intelligatur AB tanquam ex infinitis numero Punctis conſtans; (& ſimiliter ex Rectis, Parallelogrammum; &, ex Planis, Priſma, &c.) æque craſſis; quorum itaque Pondera ſint, ut P, P, P, P, &c. quorum Numerus ſit N. Poſitoque Centro, vel Axe motus in ipſo extremo A; erunt eorum inde Diſtantiæ reſpectivæ, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. uſque ad D. Et momenta ſeu Ponderationes, ut $0dP$, $1dP$, $2dP$, $3dP$, &c. uſque ad DP. Quorum omnium ſumma (per 1 hujus) eſt ut $\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D$. Nempe quantum ſimul ponderaret NP totum Pondus vel ſumma Ponderum in diſtantia $\frac{1}{2}$ D. Tantundem itaque diſtat Centrum Gravitatis à perpendiculari per A Plano, (per 24 Cap. 4.) Eritque propterea in parallelo plano per mediam longitudinem. Quod erat oſtendendum. Cæteraque hinc deducuntur, ut prius.

Fig.115.

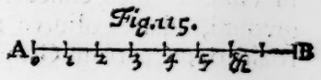


Fig.116.



SCHOLIUM.

PLacuit hanc demonſtrandi methodum, in re facili, cæteris ſubjungere, ut eo melius intelligatur, ubi illa poſt in difficilioribus adhibebitur.

Intelligimus (quod ſemel monendum erit) ubi de figurarum centris gravitatis agitur, æquabiliter gravia eſſe, ſive puncta, ſive plana, ſive ſolida; hoc eſt, æquali magnitudini æquale pondus ineſſe; & proportionalibus, proportionalia.

Item; Puncta, Lineas, aut Plana, ex quibus idem Grave, ut Linea, Planum, aut Solidum, conflari intelligitur; æque craſſa eſſe: ut nempe, pro interjectorum numero, diſtantiarum ratio cenſeatur. Utut enim non negaverim, ad def. 1. Cap. 4. poſſe quidem ſecus aliquando aſſumi: ubi tamen nihil tale inſinuatur, pro æque craſſis ſunt habenda.

Quæque hic monemus; in ſequentibus erunt intelligenda.

Notandum interim, ad hanc Propoſitionem, & alias ſequentes longiores, Literas in margine poſitas, indicare, in quo Demonſtrationis membro quærenda ſit iſtius partis probatio.

PROP. III.

Si quævis Linea (recta aut curva) vel Figura quævis (plana, curva, ſolidave,) plano per medium ita diviſa ſit; ut ſingulæ unius ſegmenti particulæ, ſingulis alterius reſpective ſumptis, ſint æquales & æqualiter à dividente Plano remotæ: Centrum Gravitatis eſt *in Plano dividente.*

Fig.117.



Fig.118.



Fig.119.



Puta, Linea recta, utcunque biſecta. Arcus Circuli, producto *Radio* biſectus. Curva Parabolica, Hyperbolica, aut Elliptica, *Axe* producto biſecta. Portio perimetri Polygoni regularis (aut etiam tota Perimeter) recta per centrum figuræ tranſeunte biſecta, ſi biſecans illa recta vel Laterum unum, vel unum Angulorum biſecet.

Item; Circulus, Ellipſis, Polygonum regulare, (ejuſve portio; ita ut dictum eſt, recta biſecta:) Item Sphæra, Sphæroeides, Conus, Conoeides, Cylindrus; & horum Superficies: Item Pyramis & Priſma, baſium regularium; Segmentum Circuli, Ellipſeos, Parabolæ, Hyperbolæ, Sphæræ, Sphæroeideos; multæque aliæ figuræ; plano per axem biſectæ.

Harumque aliquarum, (quæ pluribus hujuſmodi Planis ſecari poſſunt in

in Puncto unico concurrentibus,) ut Circuli, Ellipſeos, Parallelogrammi, Plani Solidive regularis, Parallelepipedi, Sphæræ, Sphæroeideos; Centrum Gravitatis hinc determinabitur.

$$\frac{\begin{array}{cccc} lP, & mP, & nP, & \&c. \\ rD, & sD, & tD, & \&c. \end{array}}{lrDP+msDP+ntDP, \&c.}$$

NAm, ſi Pondera Ponderibus reſpectivis ſint Æqualia, (puta, utrinque lP, mP, nP, &c.) & in Diſtantiis reſpective æqualibus, (puta rD, sD, tD, &c. utrinque,) erunt utrinque æqualia Momenta $lrDP+msDP+ntDP$, &c. Adeoque, Centrum Gravitatis in dividente Plano. per 15 Cap. 4.

Et quidem, ubi ſunt hujuſmodi plura Plana, quorum communis ſectio ſit Punctum unicum; ipſum Centrum Gravitatis determinatur. Per 26 Cap. 4.

Quod autem hæc enumeratis Lineis & Figuris (& harum ſimilibus) conveniant: Ex earum Definitionibus manifeſtum eſt, aut inde facile demonſtrabitur.

SCHOLIUM.

NOtandum tamen; de Curvis Parabolicis, Hyperbolicis, Ellipticis, (quod & de harum ſimilibus intelligendum,) diſerte dictum eſſe, *Axe* producto biſecandas; (non, *quavis* diametro:) Nam, niſi Punctum biſectionis, ſit in Axis vertice; biſecta linea non erit utrinque ſimiliter curva. At in Parabolæ, Hyperbolæ, aut Ellipſeos, Portionibus Planis, (recta abſciſſis; quippe de his intelligendum:) quævis Diameter baſin totamque aream biſecans, rem præſtat.

Dum autem has Linearum aut Figurarum ſpecies enumeravimus; alias tamen innumeras reperiri certum eſt; De quibus Demonſtratio non minus procedit; ſuntque ſub propoſitione generali comprehenſæ. Nobis interim famoſiores aliquot enumeraſſe ſufficit.

Ponderum, quæ ex eadem parte ſunt, quantacunque inæqualitas, aut quantacunque varietas diſtantiarum, demonſtrationi non officit: dummodo in comparandis quæ utrinque ſunt, ſit æqualitas. Sed &, in prop. ſequente, major adhuc erit variandi licentia.

PROP. IV.

Item; Si Linea vel Figura quævis (plana, curva, ſolida,) ita Plano dividatur; ut ſingulæ unius ſegmenti particulæ, ſingulis alterius reſpective ſumptis, æquiponderent: Centrum Gravitatis eſt in Plano dividente.

$$\frac{\begin{array}{cccccc} lP. & mP. & nP. & rP. & sP. & tP. \\ rD. & sD. & tD. & lD. & mD. & nD. \end{array}}{lrDP+msDP+ntDP==lrDP+msDP+ntDP.}$$

PUta; Si ex una parte Pondera lP, mP, nP, ſint in diſtantiis rD, sD, tD: ex altera vero, Pondera rP, sP, tP, in diſtantiis lD, mD, nD: Utcunque (propter Pondera diſtantiis reciproce proportionalia) comparata comparandis reſpective æquiponderabunt. Adeoque, cum ſingula ſingulis reſpective ſumptis æquiponderent; etiam omnia omnibus æquiponderabunt: (per 12 El. 5.) Eritque propterea Centrum Gravitatis in Dividente Plano. Per 15 Cap. 4.

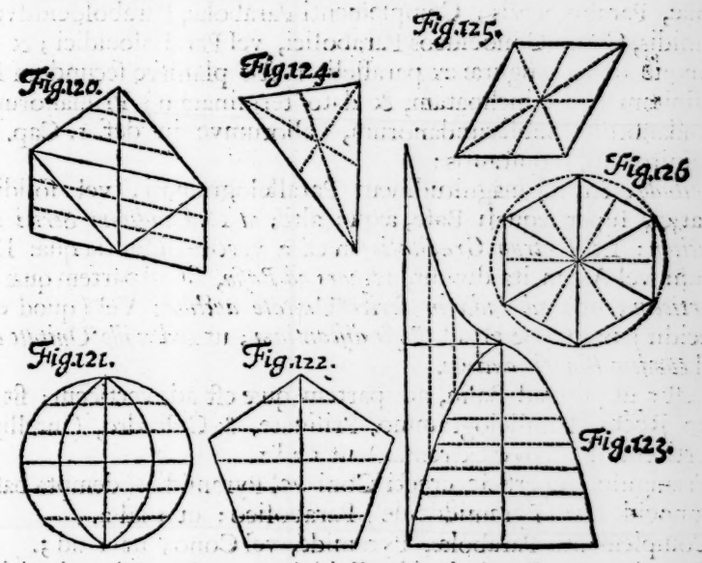
PROP.

PROP. V.

Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Circuli, Ellipſeos; vel Portionis Circuli, Ellipſeos, Parabolæ, Hyperbolæ, recta (vel parallelis rectis) abſciſſæ; Coni, Pyramidis, Cylindri, Priſmatis, Sphæræ, Sphæroeideos, Conoeideos; vel Portionis cujuſvis horum, plano vel parallelis planis abſciſſæ; vel cujuſcunque demum Figuræ planæ ſolidæve, quæ Diametrum aut Axem habet, quæ ſibi ordinatim-applicatas rectas omnes parallelas biſecat, perque omnium ſibi ordinatim-applicatorum Planorum parallelorum centra gravitatis tranſit: Centrum Gravitatis eſt *in ejuſmodi Diametro vel Axe quovis.* A. C.

Atque hinc datur Circuli, Ellipſeos, Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Sphæræ, Sphæroeideos, Cubi, Parallelepipedi cujuſvis, (& figuræ cujuſcunque quæ hujuſmodi plures Axes vel Diametros habet in unico puncto concurrentes,) Centrum Gravitatis. Nempe, in duorum pluriumve concurſu. B. D.

Hinc item (cum prima hujus) datur Centrum Gravitatis Cylindri, Priſmatiſve vel Solidi Priſmatici cujuſvis, cujus baſium centra gravitatis dantur; (eorumque Superficierum, dummodo Perimetri Baſis centrum gravitatis datum ſit:) Nempe; in Axis medio. E.



CUm enim (verbi gratia) in Triangulo, Recta à quovis angulo ad oppoſiti Lateris medium, rectas omnes huic lateri parallelas (Triangulum complentes, per def. 1. Cap. 4.) biſecet, per 2 & 6 El. 6. (quam itaque figuræ Diametrum dico; ea ſignificatione qua Conicarum Sectionum Diametri, ab Apollonio definitæ, ſic dicuntur:) Adeoque per ſingularum Centra Gravitatis tranſeat; (per 2 hujus.) Erit in plano per illam rectam (per 3 hujus,) adeoque in illa recta (quippe in trianguli plano, per 26 Cap. 4.) Centrum Gravitatis. A.

Similiter oſtendetur; de Figuræ cujuſvis Planæ Diametro; (ut Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipſeos, Circuli, Parallelogrammi, Plani Regularis, &c.) ea nempe, quæ omnes parallelas rectas, planum complentes, biſecat.

Cumque ſint hujuſmodi Diametri, in Triangulo tres, (nempe, à ſingulis angulis ad oppoſita latera;) in Parallelogrammo, quatuor, (nempe diagonales duæ, & duæ quæ oppoſitorum laterum media jungunt;) in Polygono regulari, tot B.

quot ſunt Anguli, vel Latera: nempe, ſi laterum numerus par ſit: tum à ſingulis angulis ad angulum oppoſitum, tum à medio lateris cujuſvis ad medium lateris oppoſiti, ducentur hujuſmodi diametri; ſin laterum numerus ſit impar, à quovis angulo ad oppoſitum Latus: in Circulo, & Ellipſi, diametri numero infinitæ: In ſingulis his figuris (aliiſque quibuſcunque quæ plures habent diametros ut ſunt irregulares multæ,) in duarum quarumvis concurſu, eſt Centrum Gravitatis. Per 26 Cap. 4.

C. In figuris ſolidis, quæ Axem habent, per Planorum Parallelorum omnium Centra Gravitatis tranſeuntem; (quales ſunt Priſma, Cylindrus, Pyramis, Conus, Pyramidoeides, Conoeides, Sphæra, Sphæroeides, aliæque multæ;) idem ſimiliter oſtenditur. Quippe Plana omnia per hos Axes (ſive erectos ſive inclinatos ad ordinatim-applicata Plana) ſunt Plana Æquilibrii; (ut quæ, tum ſingula Parallela Plana per quorum centra gravitatis tranſeunt, tum propterea quod ex his conflatur ſolidum, in partes æquiponderantes dividunt;) Adeoque ipſi Axes, Axes Æquilibrii: Et propterea, in illis Centrum Gravitatis. per 15 Cap. 4.

D. Cumque ſint in Parallelepipedo, Sphæra, Sphæroeide, (aliiſque multis figuris ſolidis,) hujuſmodi plures Axes: in duarum quarumvis concurſu, eſt Centrum Gravitatis. per 26 Cap. 4.

E. Corollarium ultimum; ſatis per ſe patet, ex hac & Prop. 1.

PROP. VI.

A. H. Lineæ rectæ, Parallelogrammi, Priſmatis, Cylindri, Trianguli, Parabolæ, Paraboloeidis; Complementi Parabolæ, Paraboloeidiſve; Pyramidis, Coni, Conoeideos Parabolici, vel Paraboloeidici; & cujuſcunque demum figuræ ex parallelis rectis planiſve ſecundum ſeriem infinitam (ab 0 inchoatam, & dato terminatam) Primanorum, Secundanorum, Subſecundanorum, (aliorumve in def. 1. Cap. hujus definitorum,) conſtantis:

Magnitudo, eſt ad magnitudinem Parallelogrammi, vel ſolidi Priſmatici, ſuper æquali Baſe, æque alti; *ut 1 ad indicem Seriei unitate auctum*: Et *Centrum Gravitatis* in ea à vertice diſtantia quæ Diametrum vel Axem ita dividit, ut *pars ad Baſin*, ſit ad partem quæ eſt *ad verticem*; ut 1 *ad Indicem Seriei Unitate auctum*: Vel (quod eodem recidit) in ea quæ eſt ad *Baſis diſtantiam*; ut *Index ille Unitate auctus*, ad *eundem Binario auctum*.

B. Hoc eſt; ut pars ad Baſin, ad partem quæ eſt ad verticem; ſit in Linea Recta, Parallelogrammo, Priſmate, & Cylindro, (intelligendo verticem in utrovis extremo,) ut 1 ad 1.

C. In Triangulo, ſuperficie erecti Coni vel Pyramidis (dempta baſe,) & Conoeide (vel Pyramidoeide) Parabolico; ut 1 ad 2.

D. In Complemento Parabolæ, Pyramide, vel Cono; ut 1 ad 3.

E. In Complemento Paraboloeidis Cubici, ut 1 ad 4; Biquadratici; ut 1 ad 5: &c.

F. In Parabola; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$; ſive, ut 2 ad 3.

G. In Paraboloeide Cubicali; ut 1 ad $1\frac{1}{3}$; ſive ut 3 ad 4: in Biquadratico; ut 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel ut 4 ad 5. &c.

B. Sive, (quod eodem recidit;) Diſtantia Centri Gravitatis à Plano per Verticem baſi parallelo, ad diſtantiam Baſis ab eodem Plano: (Quod & in Semicono, Semicylindro, Semi-Parabola, &c. aut quæ horum inſtar ſunt; non minus valet, atque in figuris integris:) eſt,

In Linea Recta, Parallelogrammo, Priſmate, vel Cylindro; (facto vertice ut prius;) ut 1 ad 2.

C. In Triangulo, & Conoeide (vel Pyramidoeide) Parabolico; ut 2 ad 3.

In

In Pyramide, Cono, & Complemento Parabolæ; ut 3 ad 4. D.

In Complemento Paraboloeidis Cubici; ut 4 ad 5: Biquadratici; ut 5 ad 6, &c. E.

In Parabola; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 3 ad 5. F.

In Paraboloeide Cubicali; ut $1\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{3}$; vel 4 ad 7: Biquadratico; ut $1\frac{1}{4}$ ad $2\frac{1}{4}$; vel 5 ad 9. G.

Et ſimiliter in aliis hujuſmodi figuris quibuſvis. H.

Et quidem in Figuris Integris, utrinque ad Diametrum vel Axem poſitis; datur ipſum Axis vel Diametri punctum in quo eſt Centrum Gravitatis: In Dimidiatis, excavatis, &c. ſaltem Centri illius à vertice diſtantia. A. I.

Unde & Fruſti figuræ ejuſmodi, (parallelis baſi rectis planiſve truncatæ) Centrum Gravitatis habetur; ejuſve à Baſe Verticiſve plano diſtantia. K.

Aut etiam hujuſmodi Figuræ utcunque multatæ figura cujus tum Magnitudo nota ſit, tum Centrum Gravitatis. per 27 Cap. præced.

Item, quæ ex hujuſmodi totis, vel harum fruſtis componitur. L.

Et, ſpeciatim, figuræ cujuſvis planæ Rectilineæ, & ſolidæ Planis terminatæ; Centrum gravitatis habebitur, ex eadem 27 Cap. præced.

*Fig.*127.

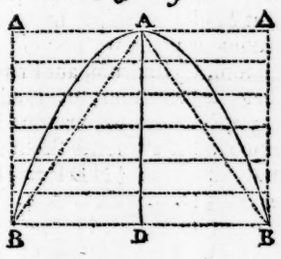


*Fig.*128.

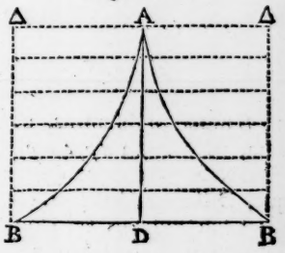
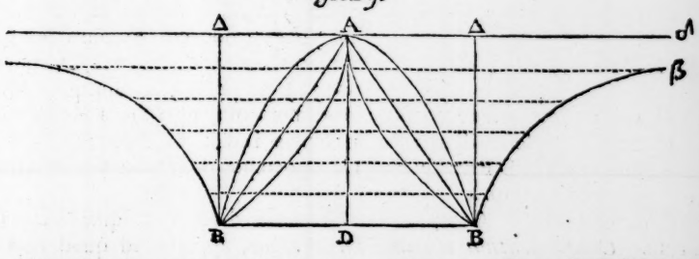


*Fig.*129.



NAm, ſi intelligatur Axis motus, per A verticem tranſiens, Baſi BB parallelus: Quæcunque ſit ſeries particularum (puta, Punctorum, Rectarum, Planorum,) ex quibus conflatur linea, figurave, (puta ſeries Æqualium ſeu Nullanorum, Arithmetice-proportionalium ſeu Primanorum, vel ut horum Quadrata, Cubi, &c. Radices quadraticæ, Cubicæ &c. hoc eſt Secundanorum, Tertianorum, &c. Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. aliave quæcunque ex definitis in def. 1. hujus;) Cum ſint in diſtantiis ab axe motus, ut 0, 1, 2, 3, &c. Arithmetice proportionalibus, (propter æqualem ſingularum craſſitiem:) Erit ſeries Momentorum (quippe quæ ſunt in ratione ex Ponderum & Diſtantiarum rationibus compoſita) uno gradu altior quam eſt ſeries Particularum; ſive, ſeries illa cujus Index ſit unitate major quam Index ſeriei Particularum: Unde habetur tum Magnitudo figuræ, tum ſumma Momentorum; per 1 hujus; adeoque Diſtantia A. Fig. 127, 128, 129.

Fig. 127, 128, 129. Centri Gravitatis à plano per Verticem; per 24 Cap. 4. Ea quam habet positio. Et quidem, ubi per præced. Centrum Gravitatis est in Diametro vel Axe, datur propterea ipsum Diametri vel Axis Punctum.

B. Puta; Cum Linea recta, ut AD, (propter æqualia Puncta;) Parallelogrammum: ut BB△ (propter rectas æquales;) vel circa hoc constructum Prisma, vel Cylindrus, (propter æqualia plana;) sit Series Æqualium seu Nullanorum; (puta ut P, P, P, &c.) cujus Index 0; (estque igitur ad seriem totidem maximo æqualium, hoc est, illam ipsam, ut 1 ad 0+1;) sintque Distantiæ, ut $0d$, $1d$, $2d$, &c. quarum maxima, D: erit series momentorum infinita, ut $0dP$, $1dP$, $2dP$, $3dP$, &c. usque ad DP; Series Primanorum, cujus Index 1: Adeoque simul omnium momenta, (per 1 hujus;) ut $\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D$. Adeoque distantia Centri Gravitatis, $\frac{1}{2}D$. per 24 Cap. 4.

P.	P.	P.	P.	—— P.
$0d$.	$1d$.	$2d$.	$3d$.	—— D.
$0dP$,	$1dP$,	$2dP$,	$3dP$,	—— DP.

$$\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D.$$

C. Item: Cum Triangulum ABB (propter rectas, Basi BB parallelas, distantiis à vertice proportionales,) Et superficies Coni Pyramidisve (propter perimetros planorum similium basi parallelorum, distantiis à vertice proportionales;) Et Conoeides (vel Pyramidoeides) Parabolicum, super Parabola BAB constructum, (cujus parallela plana, propter ordinatim-applicatas in Parabola in subduplicata ratione diametrorum interceptarum, sunt in diametrorum ratione, sive distantiarum à vertice; quippe in duplicata ratione ordinatim-applicatarum in parabola circa quas fiunt illa similia plana;) sit series Primanorum; puta, ut $0p$, $1p$, $2p$, $3p$, &c. usque ad P; cujus Index 1: adeoque omnium summa, ut $\frac{1}{2}NP$; (nempe, in ratione ad totidem maximo æqualium; hoc est, ad Parallelogrammum, Cylindrum, aut Prisma, super eadem basé, æque altum; ut 1 ad 2, per 1 hujus:) Sintque in distantiis, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. quarum maxima D: Erunt Momenta, ut $0dp$, $1dp$, $4dp$, $9dp$, &c. usque ad DP; series Secundanorum; cujus Index 2. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{3}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{2}{3}D$. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis à vertice est $\frac{2}{3}D$. per 24 Cap. 4.

$0p$,	$1p$,	$2p$,	$3p$,	—— P.
$0d$,	$1d$,	$2d$,	$3d$,	—— D.
$0dp$,	$1dp$,	$4dp$,	$9dp$,	—— DP.

$$\frac{1}{3}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{2}{3}D.$$

D. Item; Cum Pyramis vel Conus, circa Triangulum ABB, (propter diametros Circulorum, vel latera similium Planorum, in ratione distantiarum à vertice; adeoque eorum plana, in distantiarum ratione duplicata,) sit infinita series Secundanorum; (puta ut $0p$, $1p$, $4p$, $9p$, &c. usque ad P;) cujus Index 2; & omnium summa, ut $\frac{1}{3}NP$; (hoc est, Pyramis seu Conus, ad circumscriptum Prisma vel Cylindrum, ut 1 ad 3;) per 1 hujus: Sintque, distantiæ ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. usque ad D: Erunt momenta, ut $0dp$, $1dp$, $8dp$, $27dp$, &c. usque ad DP; series Tertianorum: cujus Index 3. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{3}{4}D$. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis à vertice, $\frac{3}{4}D$. per 24 Cap. 4.

$0p$,	$1p$,	$4p$,	$9p$,	—— P.
$0d$,	$1d$,	$2d$,	$3d$.	—— D.
$0dp$,	$1dp$,	$8dp$,	$27dp$,	—— DP.

$$\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{3}{4}D.$$

Similiter omnino, de Complemento Parabolæ dicendum: quæ series est Secundanorum. *Complementum* autem *Semi-parabolæ*, appello, id quod cum semi-parabola complet parallelogrammum circumscriptum; (cujus diameter, est parabolæ Tangens in vertice; & ordinatim-applicatæ, parallelæ diametro parabolæ;) quod, utrinque circa eandem sui diametrum duplicatum, appello, *Complementum Parabolæ*. (Puta, quod continetur inter duas lineas Parabolicas convexas AB, AB, fig. 128. quas in communi vertice A, tangat AD, complementi diameter; basinque huic ordinatim-applicatam BB; cui parallelæ intelliguntur rectæ figuram complentes.) Hujusque ordinatim-applicatæ ad diametros suas; sunt ut diametri interceptæ in Parabola, ad suas ordinatim-applicatas. Adeoque, in duplicata ratione Diametrorum, sive Distantiarum à vertice. Cum itaque sit (ut Pyramis) Series Secundanorum: Momenta, sunt Series Tertianorum: Adeoque simul omnia, ut $\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{3}{4}D$: Et Centri gravitatis à vertice distantia; $\frac{3}{4}D$. Ut, de Cono & Pyramide, ostensum est.

Com-

Complementum Paraboloeidis Cubici, (propter hujus Paraboloeidis ordinatim-applicatas, in ſubtriplicata ratione diametrorum interceptarum; adeoque ordinatim-applicatas Complementi, in Triplicata ratione diametrorum, ſive diſtantiarum à Vertice Complementi;) eſt Series Tertianorum: puta, ut $0p$, $1p$, $8p$, $27p$, &c. uſque ad P; adeoque ſumma omnium ut $\frac{1}{4}$NP; per 1 hujus; (hoc eſt, ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 1 ad 4:) Cum itaque Diſtantiæ ſint ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut $0dp$, $1dp$, $16dp$, $81dp$, uſque ad DP. Et ſimul omnia (per 1 hujus) ut $\frac{1}{5}$NDP = $\frac{1}{4}$NP × $\frac{4}{5}$D. Et Diſtantia Centri gravitatis; $\frac{4}{5}$D. per 24 Cap. 4. E.

$0p$,	$1p$,	$8p$,	$27p$,	—— P.
$0d$,	$1d$,	$2d$,	$3d$,	—— D.
$0dp$,	$1dp$,	$16dp$,	$81dp$,	—— DP.

$\frac{1}{5}$NDP = $\frac{1}{4}$NP × $\frac{4}{5}$D.

Atque, ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis Paraboloeidium Complementis, aut etiam ſolidis eorum converſione circa Axem ſuum factis: aliiſve ſecundum ejuſmodi alias ſeries.

Parabola, BAB, fig. 127. (propter ordinatim-applicatas in ſubduplicata ratione diametrorum:) eſt ſeries Subſecundanorum; cujus Index $\frac{1}{2}$: puta, $\sqrt{0}p$, $\sqrt{1}p$, $\sqrt{2}p$, $\sqrt{3}p$, &c. uſque ad P: Adeoque ſimul omnia, ut $\frac{2}{3}$NP; (nempe ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3,) per 1 hujus. Et propter diſtantias, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. uſque ad D; Momenta erunt, ut $0d\sqrt{p}$, $1d\sqrt{1}p$, $2d\sqrt{2}p$, $3d\sqrt{3}p$, &c. vel, ut $d\sqrt{0}p$, $d\sqrt{1}p$, $d\sqrt{8}p$, $d\sqrt{27}p$, &c. uſque ad DP: quæ eſt, ſeries Cuborum Subſecundanorum; cujus Index $1\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{2}$. Adeoque (per 1 hujus) omnia, ut $\frac{2}{5}$NDP = $\frac{2}{3}$NP × $\frac{3}{5}$D. Et diſtantia Centri gravitatis, $\frac{3}{5}$D. F.

$\sqrt{0}p$,	$\sqrt{1}p$,	$\sqrt{2}p$,	$\sqrt{3}p$,	—— P.
$0d$,	$1d$,	$2d$,	$3d$,	—— D.
$0d\sqrt{p}$,	$1d\sqrt{p}$,	$2d\sqrt{2}p$,	$3d\sqrt{3}p$,	—— DP.
$d\sqrt{0}p$,	$d\sqrt{p}$,	$d\sqrt{8}p$,	$d\sqrt{27}p$,	—— DP.

$\frac{2}{5}$NDP = $\frac{2}{3}$NP × $\frac{3}{5}$D.

Paraboloeides Cubicale, (propter ordinatim-applicatas in ratione diametrorum ſubtriplicata,) eſt ſeries Subtertianorum; cujus Index $\frac{1}{3}$. puta ut $\sqrt{c}0p$, $\sqrt{c}p$, $\sqrt{c}2p$, $\sqrt{c}3p$, &c. ad P. Et omnium ſumma, ut $\frac{3}{4}$NP; per 1 hujus. (hoc eſt, ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 3 ad 4.) Et, propter diſtantias, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut, $0d\sqrt{c}0p$, $1d\sqrt{c}1p$, $2d\sqrt{c}2p$, $3d\sqrt{c}3p$, &c. ad DP; ſive, ut $d\sqrt{c}0p$, $d\sqrt{c}p$, $d\sqrt{c}16p$, $d\sqrt{c}81p$, &c. ad DP; ſeries Biquadratorum ſubtertianorum; cujus Index $1\frac{1}{3}$ vel $\frac{4}{3}$. Et ſumma omnium (per 1 hujus) ut $\frac{3}{7}$NDP = $\frac{3}{4}$NP × $\frac{4}{7}$D. Et diſtantia Centri gravitatis, $\frac{4}{7}$D. G.

$\sqrt{c}0p$,	$\sqrt{c}1p$,	$\sqrt{c}2p$,	$\sqrt{c}3p$,	—— P.
$0d$,	$1d$,	$2d$,	$3d$,	—— D.
$0d\sqrt{c}0p$,	$1d\sqrt{c}p$,	$2d\sqrt{c}2p$,	$3d\sqrt{c}3p$,	—— DP.
$d\sqrt{c}0p$,	$d\sqrt{c}p$,	$d\sqrt{c}16p$,	$d\sqrt{c}81p$,	—— DP.

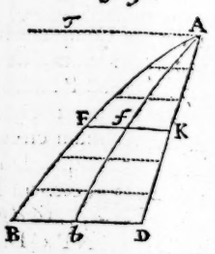
$\frac{3}{7}$NDP = $\frac{3}{4}$NP × $\frac{4}{7}$D.

Et ſimiliter de aliis ſeriebus judicandum.

Nempe, univerſaliter; Si Index ſeriei Ponderum ſit S; adeoque (per 1 hujus) ſumma totius, ut $\frac{1}{S+1}$NP: Index ſeriei Momentorum, erit $S+1$; adeoque horum ſumma, ut $\frac{1}{S+2}$NDP. Quæ per ſummam Ponderum $\frac{1}{S+1}$NP diviſa; exhibet $\frac{S+1}{S+2}$D, diſtantiam Centri gravitatis à vertice; nempe, ad diſtantiam maximam, ut $S+1$ ad $S+2$: Adeoque reliquum diſtantiæ (quæ eſt diſtantia Centri gravitatis à Baſi) ut $\frac{1}{S+2}$D. Et propterea, Axis portio ad Verticem, ad portionem ad Baſem, ut $S+1$ ad 1. Quod erat demonſtrandum. H.

I. Quodque de Figuris integris oſtenſum eſt; idem de Dimidiis, ſimiliter oſtendetur; (Puta, de Semi-parabolis, Semi-paraboloeidibus, & Complementis; vel horum Solidis; &c.) quoad diſtantiam Centri gravitatis à Plano per verticem baſi parallelo. Quanquam enim ipſum Centri punctum non hinc innoteſcat, (quia hujuſmodi Dimidiatæ Figuræ, Diametrum non habent, quæ & linea recta ſit & ſingulas ordinatim-applicatas biſecet, quo propoſitio præcedens hic in ſubſidium advocetur ut ipſum Centrum determinetur;) tamen, quantum illud à verticis Plano diſtet, (quod eſt hujus Propoſitionis opus,) non minus in dimidiatis, quam in integris figuris, hinc innoteſcit; & demonſtratio ſimiliter quadrat; eadem utique eſt ordinatim-applicatarum ſeries ſive in integris, ſive in dimidiis figuris. Ut ex earum definitionibus patet: Dimidiorum enim atque Duplorum, eadem eſt inter ſe ratio; per 15 El. 5.

Fig. 130.



Similiter; Idem obtinet; ſi non quidem ſit Dimidiata figura (puta, A D B Semi-parabola,) ſed utcunque hujuſmodi ſeries una ex altera dematur; reſidui Centrum gravitatis (figuræ Diametrum vel Axem habentis,) vel ſaltem Centri Diſtantia à plano per verticem baſi parallelo. Puta; Si Semi-parabolæ A D B, eximatur A D b ſemi-parabola; reſidui A b B Centrum Gravitatis innoteſcit; ſaltem, quantum à Plano per A diſtat. Nam ejuſdem generis ſeries eſt, tum A D B tum A b B.

Imo vero; ſi non ejuſdem generis ſit A D b, atque A D B; ſed verbi gratia, ex A B D Paraboloeide Cubico, auferatur A b D Parabola, aut Triangulum, aut alia figura quævis quæ ex aliqua definitarum ſerie conflatur: Cognitis enim Totius & Ablati tum magnitudine, tum Centro Gravitatis; etiam Reſidui cognoſcitur; per 27 Cap. 4. Saltem cognita utriuſque Magnitudine, & Ponderatione reſpectu expoſiti plani; cognoſcitur Reſidui Ponderatio & Magnitudo; adeoque & Centri gravitatis diſtantia; per prop. 24. Cap. 4.

K. De Fruſtis item ſimiliter fiet judicium. Nempe, propter datum vel ipſum Centrum Gravitatis, vel diſtantiam Centri Gravitatis, una cum magnitudine; totius A D B vel A b B, & ablati A K F, vel A f F; dabitur & Fruſti reliqui, F K D B, vel F f b B, ut ante. Per 27, vel 24, Cap. 4.

L. Similiter; de figuris ex hujuſmodi pluribus conflatis, fiet judicium: Et ſpeciatim de Planis omnibus Rectilineis, (quippe in Triangula poſſe dividi, notum eſt;) & Solidis quæ planis terminantur; (quippe, hæ ſaltem in Pyramides dividi poterunt:) Datis utique partium Magnitudinibus, & Centris Gravitatis; dabitur Totius; per 27 Cap. 4. Vel datis ſaltem magnitudinibus, & diſtantiis centrorum (ab expoſito plano) adeoque Ponderationibus; dabitur etiam Totius Ponderatio & Magnitudo; adeoque & Centri gravitatis diſtantia à plano expoſito.

Neque hæc de figuris Planis tantum obtinent; ſed in Solidis non minus. Puta, ſi Conoeides Parabolicum, vel Paraboloeidicum, vel Conus etiam, aut Pyramis, vel Cylindrus, aut Priſma, &c. Conice excavetur; vel horum Fruſta, Cylindrice; aut aliis mille modis: uti ex jam dictis ſatis demonſtratur.

SCHOLIUM.

HActenus itaque Centrum Gravitatis invenimus, in figuris omnibus Planis Rectilineis; & Solidis, quæ planis terminantur: Sed & in Planis Curvilineis, & Solidis curvis ſuperficiebus terminatis, non paucis; tum Magnitudinem tum & Centrum Gravitatis determinavimus. Et quidem longe pluribus quam quo pertigerat doctrina Veterum. Atque, in ſequentibus, ad plura adhuc procedendum, ultra quam (quantum ſcio) quiſquam pertigit Recentiorum; ſaltem ultra quam à quoquam editum eſt, ante editam noſtram (unde hæc directa methodo deducuntur) Arithmeticam Infinitorum.

Quod autem, de Figurarum Fruſtis, figuriſque Excavatis, aut alias multatis, & figurarum Aggregatis, &c. ad hanc propoſitionem oſtenſum eſt: Etiam in ſequentibus intelligendum erit. Utpote ex prop. 27. Cap. præced. deducendum.

Plura vero quæ huc ſpectant, videat (cui id lubitum erit) in noſtra *Arithmetica Infinitorum*; (ubi hæc Methodus fuſius traditur:) Et in noſtro *Commercio Epiſtolico*, (cum D. Fermatio, aliiſque,) Epiſt. 16, ejuſque Appendice.

PROP.

PROP. VII.

Si intelligatur ex Rectis Planiſve, ſecundum aliquam ex Reciprocis (in def. 2. hujus definitis, Indicem habentibus Negativum) ſeriem infinitam, (ab $\frac{1}{0}$ ipſa ſeriei origine inchoatam, & dato terminatam,) Figura conflari: A.

Habebit hæc, ad Verticem, latitudinem Infinitam: B.

Finitam tamen, ſi, ex parte Verticis, intelligatur vel tantillum Plano parallelo abſcindi; (adeoque figura ſaltem truncata magnitudinis erit finitæ:) C.

Aream vero; quæ ſit ad Parallelogrammum, vel Solidum Priſmaticum, ſuper æquali Baſe æque altum; ut 1, ad *Indicem Unitate auctum*: D.

Adeoque vel magnitudine Finitam; ſi Index ſit major quam --- 1; (puta $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) G.

Vel Infinitam; ſi Index ſit ---- 1: E.

Vel Pluſquam Infinitam; ſi ſit Index minor quam ---1; (puta, --- 2, --- 3, &c.) F.

Quæque ſunt magnitudinis Infinitæ, (aut pluſquam Infinitæ,) Centrum Gravitatis non habent. H.

Quæ ſunt finitæ magnitudinis, ſiquod habent Centrum Gravitatis, in ea habent à vertice diſtantia, qua ita dividitur Diameter vel Axis, ut *pars ad Baſin*, ſit ad *partem quæ eſt ad Verticem*; ut 1, ad *Indicem ſeriei Unitate auctum*. I. L.

Habent autem Centrum Gravitatis hujuſmodi Figuræ (magnitudinis finitæ) ſi ſint Integræ, (hoc eſt, utrinque Circa Diametrum vel Axem ſimiliter poſitæ;) Nempe, in Axis illo puncto, quod, ita ut dictum eſt, diſtat. K.

Ex dimidiatis vero (vel quæ harum inſtar ſunt) quæ habent, quæque non habent, in Propoſitione ſequente dicetur. L.

Quæ, exemplis facile explicantur. M.

Deque his Figuris Truncatis, aut alias Mulctatis, vel Aggregatis; idem judicandum eſt atque de illis propoſitionis Præcedentis. N.

Atque hæ *Figuræ interminabiles* (planæ, ſolidæve;) ad *Paraboloeidium* genera ſpectant, vel ad harum ſolida. O.

Ipſæ autem *Lineæ Curvæ*, ad quarum convexas adjacent Interminabiles hujuſmodi Figuræ Planæ; ad *Hyperbolarum* ſeu *Hyperboloeidium* genus referendæ ſunt. P.

Sed & quæ ad *Hyperboloeidium* harum (ea ſola excepta quæ eſt vera Hyperbola Apolloniana) *Concavas* adjacent *Figuræ planæ*, (concava & rectis terminatæ) tum quam magnitudinem habent hinc determinabitur; tum & Centrum gravitatis datum erit. Q.

INtelligatur, ad Diametrum vel Axem AD, hujuſmodi figura plana ſolidave conſtrui, A∫BD; cujus Baſis DB; & huic parallelæ rectæ aut ſuperficies planæ (figuram complentes) ordinatim-applicatæ, ſecundum ſeriem ex Reciprocis illis quamlibet. A. Fig. 129, 131.

Erit, propter ſeriei Directæ terminum primum o, ſeriei reciprocæ primus terminus ∞ infinitus: puta $\frac{1}{0} = \infty$. (Nam, ubi quantitas quælibet dividitur; ſi dividens ſit o, quotiens erit ∞: quippe nulla quantitas finita, pro quotiente poſita, dividentem o multiplicans, reſtituet dividendam.) Adeoque Recta Verticis A∫ erit interminabilis: Sive, figuræ latitudo, in Vertice, infinita. B.

Cum vero Seriei directæ terminus poſt primum quilibet quantitatem habeat finitam; ſeriei reciprocæ reliqui omnes termini ſunt finiti; adeoque figuræ infra verticem C.

verticem finita latitudo. (Nam, quantuluſcunque ſit ille poſt primum terminus ſeriei directæ; hic quantitatem finitam dividens, quotientem dabit finitum.)

Adeoque, utut tota à vertice ad baſin figura, magnitudinis eſſet infinitæ (propter infinitam verticis latitudinem;) ſi tamen intelligatur, ex parte verticis, vel tantillum truncari plano baſi parallelo; reliquum figuræ, magnitudinis erit finitæ. (Erit utique magnitudinis datæ, altitudo finita; ſed & truncatæ latitudo vel amplitudo per jam oſtenſa; adeoque tota figura, ſive plana ſit ſive ſolida, ſic truncata, magnitudinis erit finitæ.)

D. Eſt autem, à vertice ad baſin tota, ad Parallelogrammum, vel ſolidum Priſmaticum (ſive ſit Parallelepipedum, ſive aliud Priſma, ſive Cylindrus, vel iſtiuſmodi quodvis Solidum, ſuper quacunque baſe, eandem ubique, per totam altitudinem, amplitudinem habens,) ſuper æquali baſe, æque altum; hoc eſt, ad ſeriem totidem ultimo æqualium, (per def. 1. Cap. 4.) ut 1, ad indicem ſeriei Unitate auctum; per 1 hujus.

E. Adeoque, (propter Reciprocarum Serierum Indicem negativum,) ſi Index, ſit -1; erit $-1+1=0$; adeoque ratio 1 ad 0, Infinita. Et propterea ſi ſeries illa ſit Reciproca primanorum, (quale eſt, complementum Hyperbolæ Apollonianæ, per prop. 95. Arithm. Infin.) figura erit magnitudinis infinitæ. (Quippe ad finitam datam, ut 1 ad 0.)

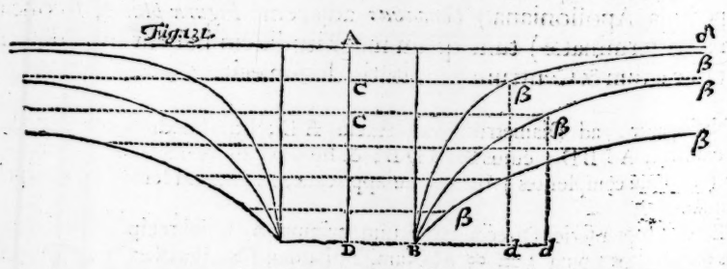
F. Si vero Index ſit minor quam -1, (hoc eſt, magis negativus,) puta, $-1\frac{1}{2}$, -2, -3, &c. etiam addito 1, manebit adhuc negativus; puta $-1\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}$. $-2+1=-1$. $-3+1=-2$, &c. (per 8 Cap. 1.) adeoque, ratio 1 ad $-\frac{1}{2}$, 1 ad -1, 1 ad -2, &c. Nempe; ut Poſitivi ad Negativum; quæ eſt pluſquam infinita; (nam, 1 ad 0, eſt infinita; ergo, 1 ad minus quam 0, eſt major quam infinita; per 8 El. 5.) Ergo, & Figura (quæ, ad datam, illam habeat rationem,) pluſquam Infinita.

G. Sin Index major ſit quam -1, (hoc eſt, minus negativus,) puta, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, &c. addito 1, fiet Poſitivus; puta $-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$. $-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$. &c. (per 8 Cap 1.) Adeoque, ratio 1 ad $\frac{3}{4}$, 1 ad $\frac{2}{3}$, 1 ad $\frac{1}{2}$, 1 ad $\frac{1}{3}$, 1 ad $\frac{1}{4}$, &c. finita. Ergo, & Figura (ut quæ, ad datam finitam, finitam habet rationem,) magnitudinis finitæ; utut, latitudinis in vertice, infinitæ.

H. Quæ autem Magnitudinis ſunt Infinitæ, (aut pluſquam infinitæ,) Centrum gravitatis non habent. Quippe, ſi in ipſa verticis recta, A δ, intelligeretur, (aut ſupra verticem; aut etiam per Baſin, aut infra Baſin:) Figura tota (reſpectu Plani baſi paralleli per Centrum illud tranſeuntis,) ad unas partes ponderaret; adeoque non eſſet Æquilibrium. Sin intra Verticem & Baſin intelligatur; quantulacunque ſit à vertice diſtantia; planum baſi parallelum per hoc tranſiens, Figuram dividet in ſegmenta duo; quorum illud ad baſin, Finitum erit, atque in diſtantia finita, (per jam oſtenſa;) illud autem ad verticem, Infinitum erit; (quippe, ſi à toto Infinito, Finitum auferatur: reliquum erit Infinitum: ſecus enim, Finitum Finito additum, faceret Infinitum:) Adeoque, Infinitum hoc ad verticem (in quantulacunque diſtantia) Finito illi ad baſin, (in diſtantia quantacunque finita,) præponderabit: Adeoque non erit in illo plano Centrum Gravitatis. Nuſquam igitur.

I. Si vero ſint magnitudinis Finitæ; puta, ſecundum ſeriem cujus Index ſit $-S$,

Fig. 131.



major quam -1, (ut jam oſtenſum eſt;) Oſtendetur (ut in prop. præced.) totam figuram, ſive ſeriei ſummam, eſſe $\frac{1}{-S+1}$ NP, (quæ, nempe ſit ad parallelogrammum, vel ſolidum Priſmaticum, NP, ut 1 ad $-S+1$;) & ſummam momentorum,

mentorum, ſive momentum totius, (reſpectu plani per verticem A ſ, baſi paral- Fig.
leli,) ut $\frac{1}{-S+2}$ NDP, (nempe, ad momentum ipſius NP in diſtantia D ſuſ- 129, 131.
penſi, ut 1 ad $-S+2$; propter ſeriem Momentorum, uno gradu altiorem, quam eſt ſeries Ponderum :) per 1 hujus. Adeoque, propter $\frac{1}{-S+2}$ NDP $= \frac{1}{-S+1}$ NP $\times \frac{-S+1}{-S+2}$ D, erit diſtantia Plani Æquilibrii (per 20 Cap. 3.) adeoque & Centri Gravitatis ſiquod eſt, (per 24 Cap. 4.) $\frac{-S+1}{-S+2}$ D; adeoque reliquum diſtantiæ maximæ, (quæ baſeos eſt,) $\frac{1}{-S+2}$ D. Hæc igitur ad illam, eſt ut 1 ad $-S+1$, (in ratione finita ; propter $-S+1$ quantitatem poſitivam :) Si itaque tota diſtantia D (baſis à vertice,) ita dividatur puta in C; ut pars ad baſin, CD, ſit ad partem quæ eſt ad verticem, CA, ut 1 ad $-S+1$; planum per C tranſiens, baſi parallelum, eſt Planum Æquilibrii. per 20 Cap. 3. Et quidem (ſi utrinque ad Diametrum vel Axem ſimiliter conſtruatur figura) in ipſo Diametri vel Axis puncto C, (per 5 hujus.) Sin minus; ſaltem ſiquod eſt Centrum Gravitatis, in eo plano eſt. per 24 Cap. 4. K.

Dico autem, *ſiquod eſt*; quoniam, in figura dimidiata (vel quæ iſtiuſmodi eſt,) fieri poteſt, ut Centrum gravitatis, utut in C β infinita intelligatur, intelligenda tamen ſit ab ipſo C puncto in infinita diſtantia, (ut in prop. ſeq. oſtendetur,) adeoque nuſquam erit. L.

Exempli gratia. Si ſit A D B β ſ figura, ex ſerie reciproca ſubſecundanorum, conflata ; (puta, cujus rectæ vel plana ſint in reciproca ratione ordinatim-applicatarum in parabola :) cujus Index, $-\frac{1}{2}$. Adeoque, ad inſcriptum Parallelogrammum vel Priſma A D B Δ, (quod ſit NP,) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1$; hoc eſt, ut 1 ad $\frac{1}{2}$, vel 2 ad 1 : nempe ut 2 NP. Momentorum ſeries, indicem habebit $-\frac{1}{2}+1$ vel $\frac{1}{2}$; (quippe uno gradu altior quam Ponderum, propter diſtantias arithmetice proportionales :) Adeoque totius momentum, ad momentum Parallelogrammi vel Priſmatis in diſtantia maxima appenſi, (quod ſit NPD,) ut 1 ad $\frac{1}{2}+1$; hoc eſt, ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel 2 ad 3 : Nempe, $\frac{2}{3}$ NPD $=$ 2 NP $\times \frac{1}{3}$ D. Diſtantia itaque Plani Æquilibrii (&, ſiquod eſt, Centri Gravitatis,) à vertice, eſt $\frac{1}{3}$ D. ejuſdemque propterea à Baſi diſtantia, $\frac{2}{3}$ D. Adeoque hæc ad illam, (hoc eſt CD ad CA,) ut 2 ad 1 : vel 1 ad $\frac{1}{2}$; hoc eſt, 1 ad $-\frac{1}{2}+1$. M.

$$\frac{1}{\sqrt{0}}p. \quad \frac{1}{\sqrt{1}}p. \quad \frac{1}{\sqrt{2}}p. \quad \frac{1}{\sqrt{3}}p. \text{ ---- P}$$
$$0d. \quad 1d. \quad 2d. \quad 3d \text{ ---- D}$$
$$\frac{0}{\sqrt{0}}dp. \quad \frac{1}{\sqrt{1}}dp. \quad \frac{2}{\sqrt{2}}dp. \quad \frac{3}{\sqrt{3}}dp \text{ ---- DP.}$$
$$\sqrt{0}\,dp. \quad \sqrt{1}\,dp. \quad \sqrt{2}\,dp. \quad \sqrt{3}\,dp \text{ ---- DP.}$$
$$\tfrac{2}{3}\text{NPD} = 2\,\text{NP} \times \tfrac{1}{3}\text{D.}$$

Si ſit ex ſerie reciproca Tertianorum; cujus Index $-\frac{1}{3}$. Erit ſumma Ponderum, (propter $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$; &, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, ſic 3 ad 2 ;) $\frac{3}{2}$ NP. Index ſeriei momentorum $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. Adeoque (propter $\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$; & 1 ad $\frac{5}{3}$, ut 3 ad 5) ſumma Momentorum, $\frac{3}{5}$NPD $=\frac{3}{2}$NP $\times \frac{2}{5}$D. Adeoque plani æquilibrii (&, ſi quod eſt, Centri Gravitatis) diſtantia à vertice, $\frac{2}{5}$D; à baſe, $\frac{3}{5}$D: Adeoque hæc ad illam, (nempe CD ad CA,) ut 3 ad 2; vel 1 ad $\frac{2}{3}$; hoc eſt, 1 ad $-\frac{1}{3}+1$. Atque in aliis ſimiliter.

$$\frac{1}{\sqrt{c\,0}}p. \quad \frac{1}{\sqrt{c\,1}}p. \quad \frac{1}{\sqrt{c\,2}}p. \quad \frac{2}{\sqrt{c\,3}}p. \text{ ----- P}$$
$$0d. \quad 1d. \quad 2d. \quad 3d \text{ ----- D}$$
$$\frac{0}{\sqrt{c\,0}}dp. \quad \frac{1}{\sqrt{c\,1}}dp. \quad \frac{2}{\sqrt{c\,2}}dp. \quad \frac{3}{\sqrt{c\,3}}dp. \text{ ---DP.}$$
$$\sqrt{c\,0}\,dp, \sqrt{c\,1}\,dp. \sqrt{c\,4}\,dp. \sqrt{c\,9}\,dp. \text{ ---DP.}$$
$$\tfrac{3}{5}\text{NPD} = \tfrac{3}{2}\text{NP} \times \tfrac{2}{5}\text{D.}$$

Si itaque in ea ratione dividatur A D in C; ſitque figura utrinque ſimiliter applicata, ad A D Diametrum vel Axem: erit C Centrum Gravitatis; per 5 hujus. Sin minus; ſaltem planum per C eſt planum Æquilibrii; atque in hoc, ſiquod ſit, Centrum Gravitatis.

Porro ; Habitis hoc pacto, tum figuræ totius A D B ſ, tum abſciſſæ ut A C β ſ, N.

Fig. 129. 131. magnitudine, & Centro gravitatis; ſaltem magnitudine, & plano æquilibrii, plano per axem motus A ∂ parallelo; ſeu magnitudine & ponderatione: Habentur reſidui, ſive figuræ truncatæ C β B D, magnitudo & Centrum Gravitatis; ſaltem magnitudo & ponderatio; adeoque diſtantia Centri Gravitatis, Planumve in quo eſt, plano Baſis ſeu Plano huic parallelo per axem motus, parallelum. Ut in prop. præced.

Et ſimiliter oſtendetur de figuris hujuſmodi alias mulctatis, vel aggregatis; atque in prop. præced.

O. Figuras autem has interminabiles, ego ad Paraboloeidium genera refero; aut horum Solida: propter continuatam ſeriem ſimplicem, utut reciprocam, qua diſponuntur ordinatim-applicatæ rectæ, vel figuræ planæ, ipſas complentes; ut in Paraboloeidibus eorumque ſolidis, obſervare eſt. Qua de cauſa, & communem ſortem ſubeunt, cum iis in propoſitione præcedente memoratis, (niſi quod ex his aliquæ ſint magnitudinis infinitæ, & Centrum gravitatis non habeant.) Et quidem has in eadem cum illis propoſitione comprehendiſſem, niſi quod in his (propter infinitatem) ſpeciatim aliqua determinanda eſſent, quæ in illis abſque aliqua determinatione proponuntur. Quippe nulla eſt ex figuris illis quæ vel infinitæ ſit magnitudinis, vel Centrum Gravitatis non habeat.

P. Ipſæ tamen Curvæ, ad quarum Convexas adjacent hujuſmodi figuræ Planæ, ad Hyperbolarum, vel Hyperboloeidium, familiam ſpectant.

Et quidem, quæ terminat figuram planam, ex ſerie reciproca Primanorum conflatam, (qualis eſt media Curvarum trium in figura 131 adſcripta,) eſt vera *Hyperbola*, Apolloniana; cujus Aſymptotæ ſunt A D, A ∂. (ut prop. 91, 95, Arithm. Infin. oſtenſum eſt.) Atque perinde omnino eſt, ſive, ex parte D terminata, ſit interminata verſus ∂; ſive, ex parte ∂ terminata, interminata ſit verſus D. Utrovis enim modo evadet figura ſimpliciter infinita.

Reliquæ vero, quæ *Hyperboloeides* dici poterunt; duabus item Aſymptotis A D, A ∂, interjacent: ita quidem ut quæ, verſus D terminatæ & interminatæ verſus ∂, figuras terminant magnitudine finitas; eædem terminatæ verſus ∂, & interminatæ verſus D, figuras terminabunt pluſquam infinitas: Et contra. Quippe, ſi ad A D ordinatim-applicatæ, & ipſi A ∂ parallelæ ſint, verbi gratia, in ſerie reciproca Subſecundanorum; ordinatim-applicatæ ad A ∂, ipſi A D parallelæ, erunt reciproca ſeries Secundanorum; Et figura ex illis conſtans non infinita; ex his vero, pluſquam infinita. Et in reliquis ſimiliter. Ut ad prop. 105. *Arithm. Infin.* oſtendimus.

Q. Atque hinc etiam conſtat, hujuſmodi Hyperboloeidium figuras, Curva Concava terminatas, quadrandi methodus; & Centrum Gravitatis inveſtigandi. Cum enim Fruſti C β B D, (ut hic & prop. ſeq. oſtenſum eſt,) & Parallelogrammi D C β d, (ut notum eſt) tum Magnitudo, tum Centrum Gravitatis habetur: Habebitur & Hyperboloeideos β B d, magnitudo & gravitatis Centrum. Atque hoc quidem ſive figura adjacens convexæ, finita ſit, ſive pluſquam infinita; quippe eadem eſt curva (utut ſecundum aliam diametrum conſiderata) quæ utramque terminat; ut modo oſtenſum eſt. At in vera Hyperbola (eaque, ex jam traditis ſola,) non idem fiet; quippe ad cujus convexam adjacens figura interminabilis eſt & magnitudine infinita; ſive A D, ſive A ∂, pro diametro habeatur.

SCHOLIUM.

Atque hactenus (ut de Rectilineis Planis, & figuris Solidis quæ planis terminantur, nihil addam,) oſtendimus in Planis Curvilineis omnibus, quæ ad genus Parabolicum vel Paraboloeidicum ſpectant, & horum Solidis; atque ex Reciprocis, & Solidis horum, quotquot Centrum Gravitatis habent; diſtantiam Centri Gravitatis à Vertice: Adeoque, ſi pro Diametro vel Axe Rectam habeant per omnium ſive rectarum ſive planorum, ex quibus (ſecundum def. 1. Cap. 4.) conflari intelligatur figura, centra gravitatis tranſeuntem; ipſum Gravitatis Centrum totius; utpote quod in ipſa Diametro Axeve conſtitutum eſt; per 5 hujus.

In hujuſmodi tamen figuris Dimidiatis (ut Semiparabola, Semiparaboloeide, &c.) aliiſque ejuſmodi; utut de diſtantia Centri Gravitatis à vertice conſtet; de ipſo Centri puncto, propter ipſius ab illa Diametro Axeve diſtantiam nondum traditam, nondum conſtat.

Hujus

Hujus igitur à Diametro Axeve distantia, propositione sequente tradetur, (atque, in solidis, tertium adhuc æquilibrii planum,) ut ipsum centri punctum determinetur.

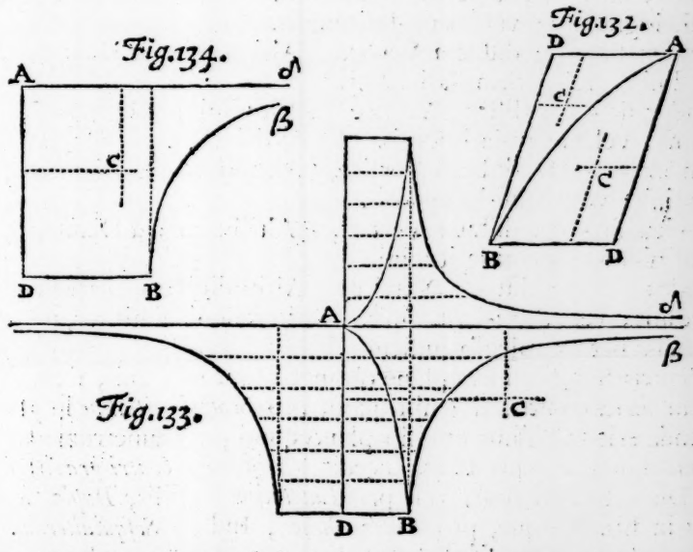
PROP. VIII.

Semiparabolæ, Semiparaboloeidis, aut Complementi utriusvis; Planive Reciproci (centrum gravitatis habentis;) ad diametrum axemve adjacentis; *Distantia Centri Gravitatis ab illa Diametro Axeve*, est, *ad distantiam inde puncti medii* (*vel centri gravitatis Basis*,) ut *Index seriei Unitate auctus*, ad *Duplum ejusdem Indicis unitate auctum.* A. Fig. 129, 131.

In Solidis autem; pro *Basis puncto medio* (quod in planis est basis centrum gravitatis) sumendum est *Centrum Gravitatis Basis*; Eritque totius Centrum Gravitatis, in eo per Diametrum Axemve plano quod per illud Basis Centrum Gravitatis transit; adeoque & per omnium Basi parallelorum Planorum, (quæ similiter posita supponimus,) centra gravitatis. E.

(Quod quidem planum, in solidis ex Planorum semiconversione (aliave conversione quavis imperfecta) circa axem illum descriptis; (qualia sunt, Semiconus; Semi-pyramis; Semi-conoeides vel Semi-Pyramidoeides Parabolicum, vel Paraboloeidicum; Semi-solidum ex conversione figuræ Reciprocæ circa axem suum; & horum omnium segmenta quælibet, duobus per axem planis, interjecta:) illud est, quod Basis arcum bisecat.)

Atque, pro Indicis seriei *Duplo*, ponendum erit *Sesquialterum ejusdem Indicis.*



Adeoque; hujusmodi Dimidiatarum figurarum Planarum (quotquot habent) omnium; & Solidarum circa illas constructarum, quarum Basis Centrum Gravitatis notum est; Centrum gravitatis determinatur. C. Fig. 132, 134.

Nempe; In Semiparabola; distat à Tangente Verticis, $\frac{3}{5}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{8}$ Latitudinis (seu Baseos) Parallelogrammi Circumscripti, vel $\frac{3}{4}$ Semi-latitudinis. D.

In Semi-paraboloeide Cubico; distat à Tangente Verticis, $\frac{4}{9}$ altitudinis; à Diametro $\frac{4}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{5}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloeide Biquadratico; distat à Tangente Verticis, $\frac{5}{9}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{12}$ Latitudinis; vel, $\frac{5}{6}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloeide Supersolidali; distat à Tangente Verticis, $\frac{6}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{6}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{6}{7}$ Semilatitudinis. Et similiter in Semiparaboloeidibus sequentibus, mutatis mutandis.

In Semiparabolæ Complemento; Distat à recta per Complementi verticem (quæ est parabolæ Diameter,) $\frac{3}{4}$ Altitudinis; à Diametro Complementi, (quæ est Parabolæ Tangens in vertice,) $\frac{3}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{5}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloeidis Cubicalis; Distat à vertice Parallelogrammi circumscripti (vel Paraboloeidis Diametro) $\frac{4}{5}$ Altitudinis; à Diametro (vel Paraboloeidis Tangente in vertice,) $\frac{4}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{4}{7}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloeidis Biquadraticalis; distat à verticis recta, (basi parallela,) $\frac{5}{8}$ Altitudinis; à Diametro ejus, $\frac{5}{18}$ Latitudinis, vel $\frac{5}{9}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloeidis Supersolidalis; distat à verticis recta, $\frac{6}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{6}{22}$ Latitudinis; vel $\frac{6}{11}$ Semilatitudinis. Et in sequentibus similiter, mutatis mutandis.

B. Figuræ Reciprocæ dimidiatæ, secundum seriem cujus Index non est
Fig. major, (hoc est, non minus negativus,) quam $---\frac{1}{2}$, constitutæ; Cen-
131, trum Gravitatis non habent. Sin major sit index quam $---\frac{1}{2}$; se-
133, quuntur serierum directarum leges. Nempe,
134. Si Index sit $---\frac{1}{3}$; Centrum gravitatis distat à vertice figuræ, $\frac{2}{5}$ Altitudinis; ab ejus Diametro, $\frac{2}{2}$ Latitudinis (seu Baseos) Inscripti Parallelogrammi; vel $\frac{2}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index sit $---\frac{1}{4}$; distat à Vertice, $\frac{3}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{4}$ Latitudinis; vel, $\frac{3}{2}$ Semi-latitudinis.

Si Index sit $---\frac{1}{5}$; distat à Vertice, $\frac{4}{9}$ Altitudinis; à Diametro $\frac{4}{8}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{3}$ Semi-latitudinis. Et sic deinceps.

Si Index sit $---\frac{2}{5}$; distat à Vertice, $\frac{3}{8}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index sit $---\frac{3}{7}$; distat à Vertice, $\frac{4}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{4}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index sit $---\frac{4}{9}$; distat à Vertice, $\frac{5}{14}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{5}{1}$ Semi-latitudinis. Et in reliquis similiter, mutatis mutandis, fiet ex calculo judicium.

E. In Figuris Solidis, idem plane obtinet atque in Planis, secundum easdem series constructis; nisi quod, pro *Semi-Latitudine* in planis, ponenda erit in Solidis (in illo plano quod per diametrum axemve, & Centrum-gravitatis Basis, incedit,) *Distantia Centri-gravitatis* Basis, à Diametro vel Axe; vel, pro *Latitudine* in illis, *Dupla illa Distantia* in his. Atque, pro *Duplo Indicis*, Indicis *Sesquialterum*.

Puta; Si seriei Index sit, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. 2, 3, 4, 5, &c. $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$, &c. $-\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, -\frac{4}{9}$, &c. qui, in Planis (ut dictum est) exhibet $\frac{2}{8}, \frac{2}{10}, \frac{2}{12}, \frac{2}{14}$, &c. $\frac{3}{10}, \frac{4}{14}, \frac{5}{18}, \frac{6}{22}$, &c. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, &c. $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$, &c. *Latitudinis*; vel $\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$, &c. $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}$, &c. $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$, &c. $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}$, &c. *Semilatitudinis*: Subsitituendum erit, in Figuris Solidis, $\frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \frac{12}{13}$, &c. $\frac{6}{8}, \frac{8}{10}, \frac{10}{12}, \frac{12}{14}$, &c. $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}$, &c. $\frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}$, &c. *Distantiæ* Centri gravitatis Basis, à Diametro vel Axe.

F. Habet autem Centrum Gravitatis Figura Solida, si seriei Index saltem major sit, quam $---\frac{2}{3}$.

Si

Si quando igitur ad communem Rectam per Verticem, (aut aliam unam aliquam rectis per verticem parallelam,) contrario ſitu ponantur hujuſmodi figuræ (planæ, ſolidæve,) ſimiles & æquales: Erit Centrum Gravitatis in illa communi recta, atque in ea à communi Diametro Axeve diſtantia, quam in ſingulis caſibus jam determinavimus. Sin vel diſſimiles vel inæquales vel diſſimili ſitu poſitæ ſint ejuſmodi figuræ dimidiatæ; cognita tamen erit commune ſimul utriuſque Centrum Gravitatis; per 27 Cap. 4. G.

Quodque de figuris Truncatis aut alias Mulctatis, vel Aggregatis, in duabus propoſitionibus præcedentibus dictum eſt: Et hic ſimiliter intelligendum eſt.

ESto enim ad A D diametrum vel axem, adjacens iſtiuſmodi Figura Plana dimidiata, cujus parallelæ rectæ figuram complentes, ſint ſecundum ſeriem directam cujus Index ſit S; vel reciprocam, cujus Index $-S$. Cumque ſingularum rectarum centra gravitatis ſint ipſarum puncta media, (per 2 hujus,) atque perinde ponderant ſingulæ acſi ex illis punctis mediis ſuſpenderentur totæ, (per 16 Cap. 4.) ſintque dimidiæ totis proportionales (per 5 Cap. 1. vel 15 El. 5.) ſimilis erit ſeries Diſtantiarum centrorum gravitatis (à diametro vel axe) atque ipſorum Magnitudinum ſeu Ponderum; nempe cujus Index ſit item S, vel $-S$. Cumque Momentorum ſeu Ponderationum ratio, compoſita ſit ex rationibus Ponderum & Diſtantiarum, (per 18 Cap. 4.) Erit Momentorum ſeries, ea quæ Indicem habet $S+S$, vel $-S-S$; hoc eſt $2S$, vel $-2S$. Eſt ergo (per 1 hujus,) ſumma Ponderum ſeu Magnitudinum, hoc eſt Figura expoſita; ad ſeriem totidem ultimo æqualium, hoc eſt ad Parallelogrammum ſuper eadem Baſe æque altum; (puta NP;) ut 1 ad $S+1$; vel (in reciprocis) ut 1 ad $-S+1$, (adeoque, ſi $-S$ major quam -1, erit $-S+1$ affirmativus; & propterea figuræ magnitudo finita: ſecus; infinita, vel pluſquam infinita:) nempe $\frac{1}{S+1}$ NP, vel $\frac{1}{-S+1}$ NP. Et ſumma Momentorum, ad totidem ultimo æqualium, (hoc eſt, Momentum figuræ expoſitæ ad momentum Parallelogrammi in diſtantia D ſuſpenſi,) ut 1 ad $2S+1$, vel ad $-2S+1$, (quod itaque finitum erit, ſi $-2S$ major ſit quam -1, vel $-S$ major quam $-\frac{1}{2}$; ſecus, infinitum:) Nempe $\frac{1}{2S+1}$ NPD, vel $\frac{1}{-2S+1}$ NPD. Hæc itaque ſumma, per illam diviſa, diſtantiam exhibet Centri gravitatis ab AD, (per 24 Cap. 4.) Nempe; in ſeriebus directis, $\frac{S+1}{2S+1}$ D: In reciprocis, $\frac{-S+1}{-2S+1}$ D. Quod erat propoſitum. A. Fig. 127, 128, 129, 131, 133.

$\frac{1}{S+1}$ NP) $\frac{1}{2S+1}$ NPD($\frac{S+1}{2S+1}$ D.

$\frac{1}{-S+1}$ NP) $\frac{1}{-2S+1}$ NPD($\frac{-S+1}{-2S+1}$ D.

Requiritur autem, in Reciprocis, quo Centrum gravitatis habeant, ut $-2S$ major ſit quam -1; vel $-S$, major quam $-\frac{1}{2}$. Nam, niſi $-S+1$ ſit terminus affirmativus; nullum erit Centrum gravitatis, per prop. præced. Atque, niſi & $-2S+1$ ſit item affirmativus, (hoc eſt, $-2S$ major quam -1, per 8 Cap. 1.) nec-dum erit centrum gravitatis: quippe Affirmativi $-S+1$, ad $-2S+1$ qui vel 0 ſit, vel Negativus; ratio erit vel infinita, vel etiam pluſquam infinita; adeoque $\frac{-S+1}{-2S+1}$ D, diſtantia infinita, vel pluſquam infinita; ipſumque propterea Centrum gravitatis Nuſquam. Unde patet determinatio. B.

Cumque termini ultimi, (hoc eſt, Baſis,) centrum gravitatis ſit in ipſius puncto medio (ut oſtenſum eſt, ex 2 hujus,) ipſius Diſtantia D; erit ſemi-Latitudo figuræ, ſive Parallelogrammi ſuper eadem baſi æque alti. Unde conſtat particularium caſuum Calculus, quod ad diſtantiam à diametro ſpectat. C.

Sed & Centri Gravitatis à Plano per verticem, diſtantia conſtat, ex 6 & 7 hujus. Ergo & ipſum Centri Gravitatis punctum; (per 26 Cap. 4.) Quod item D.

erat Propositum. Idem nempe quod in singulis casibus designavimus: Ut ex Calculo patet; ne opus sit ut singulis casibus immoremur.

E. In figuris Solidis: De Centri gravitatis Distantia à Vertice, similiter constat atque in Planis; ex 6 & 7 hujus.

Quodque sit in Plano per Diametrum & Centrum Gravitatis Basis (adeoque & reliquorum basi parallelorum Planorum Centra Gravitatis; propter omnia, quod supponimus, plana similia, & similiter ad diametrum posita;) constabit ex 4. hujus.

Quod sit in ea quam dicimus à Diametro vel Axe distantia; sic item constabit. In similibus Planis (ex quibus conflari Solidum intelligatur) Centra Gravitatis sunt similiter sita; (quod ex 4 Cap. 4. & 5 Cap. 1. demonstrabitur:) adeoque ab homologis punctis distant in ratione laterum homologorum; vel, rectarum utcunque in suis respective planis similiter positarum; (quod ex def. 1. & prop. 4. El. 6. demonstrabitur:) Cumque, ob similem, quem supponimus, planorum ad Diametrum Axemve situm; homologa similium Planorum puncta sint in Diametro vel Axe constituta: Distantiæ Centrorum gravitatis à Diametro vel Axe, sunt in ratione laterum Homologorum, sive rectarum similiter positarum, in suis respective planis: Hoc est; (quod ex prop. 20. El. 6. demonstrabitur,) in subduplicata ratione Planorum. Adeoque; Si series Planorum, Indicem habeat S, vel $-S$; series Distantiarum, Indicem habebit $\frac{1}{2}S$, vel $-\frac{1}{2}S$: Et series Momentorum (ut quæ sunt in ratione ex rationibus Ponderum & Distantiarum Centrorum Gravitatis composita, per 18 Cap. 4.) Indicem habebit $S+\frac{1}{2}S$, vel $-S-\frac{1}{2}S$; hoc est $\frac{3}{2}S$, vel $-\frac{3}{2}S$. Est igitur (positis P, pro Pondere seu Plano ultimo; N, pro numero Planorum, ex quibus conflari intelligatur Solidum; D, pro distantia Centri gravitatis Basis, à Diametro vel Axe;)

$$\frac{1}{S+1}\mathrm{NP})\frac{2}{3S+2}\mathrm{NPD}(\frac{2S+2}{3S+2}\mathrm{D}$$

$$\frac{1}{-S+1}\mathrm{NP})\frac{2}{-3S+2}\mathrm{NPD}(\frac{-2S+2}{-3S+1}\mathrm{D}$$

$\frac{1}{S+1}$NP, vel $\frac{1}{-S+1}$NP, Solidum, sive Planorum Ponderumve Aggregatum: $\frac{1}{\frac{3}{2}S+1}$NPD, vel $\frac{1}{-\frac{3}{2}S+1}$NPD; sive $\frac{2}{3S+2}$NPD, vel $\frac{2}{-3S+2}$NPD; summa Momentorum, sive Solidi Momentum vel Ponderatio. Adeoque divisa summa Momentorum, per summam Ponderum; prodibit $\frac{2S+2}{3S+2}$D, vel $\frac{-2S+2}{-3S+2}$D, distantia Centri gravitatis Solidi, à diametro vel axe: Nempe, ea quæ sit ad D distantiam Centri Gravitatis Basis, ut $2S+2$ ad $3S+2$, aut $-2S+2$ ad $-3S+2$; hoc est, ut $S+1$ ad $\frac{1}{2}S+1$, aut $-S+1$ ad $-\frac{3}{2}S+1$. Quod erat demonstrandum.

F. Cumque, in Figuris Reciprocis, quo Centrum gravitatis habeant, non solum requiratur, ut $-S+1$ sit terminus positivus, (per prop. præced.) Sed & $-\frac{3}{2}S+1$, (ne ratio illius ad hanc sit vel Infinita, vel plusquam Infinita; adeoque, propter Infinitam, vel plusquam infinitam distantiam, Centrum gravitatis nusquam sit:) major esse debeat (seu minus negativus) $-\frac{3}{2}S$, quam -1; sive $-S$, quam $-\frac{2}{3}$: inde constat determinatio.

G. Porro; quum, in Figuris Solidis, secundum seriem sive Directam, sive Reciprocam constitutis, ostensum sit; tum, quantum distet Centrum gravitatis (adeoque & planum Æquilibrii) à plano per Verticem basi parallelo; tum, in quo per axem plano reperiatur; tum denique, quantum in illo plano à diametro vel axe distat: Datur ipsum Gravitatis Centrum; dummodo Centrum Gravitatis basis non ignoretur, (per 26 Cap. 4.) Quod erat propositum. Nempe illud ipsum quod in singulis casibus designat propositio: Ut ex Calculo patebit.

Denique: Quod, de duabus hujusmodi Figuris Dimidiatis, (similibus & æqualibus,) utrinque ad eandem rectam contrario situ positis; dictum est: constabit ex 5 hujus. Quodque de iisdem (planis solidisve) figuris dimidiatis (aut quæ harum instar sunt) truncatis, aliasve mulctatis, vel aggregatis, additur, Constat ex 27 Cap. 4.

SCHO-

SCHOLIUM.

IN præcedentium aliquot propoſitionibus; in figuris Parabolicis omnibus, & Paraboloeidicis, eorumque Solidis, Centra gravitatis determinavimus. Neque hoc tantum in Figuris integris: Sed & (quod neſcio an alii nobis priores fecerint) in Figuris Dimidiatis; ut Semi-parabolis, Semi-paraboloeidibus, &c. etiam in figuris Reciprocis (quotquot habent) Dimidiatis: Atque in horum omnium Semi-ſolidis; aut etiam, Solidorum portionibus quibuſvis, duobus per axem planis, interjectis.

De Figuris autem Reciprocis (ut A D B β δ,) ſpeciatim monendum eſt; Utut hæ natura ſua ſint utrinque in infinitum continuabiles, (ſunt utique A D, A δ, ad curvam B β, Aſymptotæ;) nos tamen hic eas conſideramus ut Baſe B D terminatas, ad Diametrum ordinatim-poſita (ſicut & Parabolas aliaſque figuras indefinite continuabiles, Baſe pro arbitrio claudimus;) ſed ad partes β δ indefinite continuatas,

Cumque harum aliquas magnitudine ſimpliciter Infinitas oſtendimus (nempe, cum Index ſeriei eſt — 1; quo caſu B β curva, eſt vera Hyperbola, cujus Aſymptotæ ſunt A D, A δ;) Alias vero vel Finitas, vel pluſquam Infinitas: ſunt quidem hæ figuræ ad eaſdem curvas utræque terminatæ. Quippe, ſi A D B β δ, terminata baſi B D, interminata vero ad partes β δ, ſit Finita; eadem ex parte β δ terminata, & interminata ex parte B D, erit Pluſquam-infinita: & contra. Quæ vero ad veram Hyperbolam ponitur (ſeriei indicem — 1 habens) utravis parte terminetur, (modo ne utraque,) eſt pariter Infinita: Atque hæc ſola. Quod prop. 105. Arithm. Infin. oſtendimus.

Conſtat autem, ex his Figuris Reciprocis; (quæ inter Geometriæ miranda cenſentur;) Figuras longitudine Infinitas (Planas Solidaſve) Magnitudine Finitas eſſe poſſe. Nempe, ſi A D B β δ ex parte β δ interminata, ſeriei Indicem habeat negativum quidem, ſed majorem quam — 1.

Eademque figura, (longitudine infinita, ſed finita magnitudine,) ſi utrinque ad A D diametrum ſimiliter ponatur; habebit (in ipſa A D) Centrum gravitatis.

Eadem vero figura dimidiata A D B β δ, indicem habens negativum ſed majorem quam — 1; utut magnitudine finita ſit, centrum tamen Gravitatis non habebit; niſi & major ſit Index quam $-\frac{1}{2}$. Ne quidem quæ ex duabus hujuſmodi dimidiatis utrinque ad infinitam A δ ſimiliter poſitis conflatur. Diſtabit utique ab A verſus δ, diſtantia ſaltem infinita, vel data quavis majore.

Sin major ſit Index quam $-\frac{1}{2}$, Centrum Gravitatis habebit, tum dimidiata illa figura, tum & ex duabus utrinque ad A δ poſitis conflata.

Item; Figura iſtiuſmodi plana, magnitudine Finita eſſe poteſt; (nempe cum Index major eſt quam — 1;) & Solida tamen, quæ hujus converſione fit, magnitudine Infinita: (Nempe, ſi non & major ſit Index quam $-\frac{1}{2}$.) Quippe, ſi ſeries Rectarum, planum complentium, indicem habeat $-\frac{1}{2}$; ſeries Planorum, quæ harum converſione circa A D fiunt, Solidum complentium, (propter Plana in ratione duplicata rectarum in illis ſimiliter poſitarum,) Indicem habebit — 1 ($= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$.) eritque propterea magnitudinis infinitæ. Sin ſeries Rectarum Indicem habeat minorem quam $-\frac{1}{2}$; ſeries Planorum habebit indicem minorem quam — 1; adeoque Solidum erit magnitudinis pluſquam infinitæ. Quæ omnia, ex ſupra demonſtratis conſtant.

Contra vero; Iſtiuſmodi Figura Plana, non modo magnitudine finita quævis; ſed & infinita, modo Index major ſit quam — 2; circa A δ converſa: Solidum exhibet magnitudine finitum: Et quidem, modo Index major ſit quam — 1; quod Centrum habeat Gravitatis. Quod ex prop. ſeq. patebit.

PROP.

PROP. IX.

A. Si Figura Plana (integra an dimidiata;) cujus ad diametrum vel axem ordinatim-applicatæ rectæ Planum complentes sint secundum seriem aliquam vel ex Directis (def. 1. hujus, definitis;) vel ex Reciprocis (def. 2. hujus, definitis;) cujus Index major sit quam -2; intelligatur, circa rectam per verticem ordinatim-positam, converti: Solidum conversione factum, erit magnitudinis finitæ. Nempe quod sit, ad Parallelepipedum, cujus basis sit parallelogrammum super eadem cum plano base æque altum, altitudo vero æqualis Peripheriæ (integræ vel partiali, prout conversio fuerit vel perfecta vel imperfecta) Diametri vel Axis puncto quod in base est, descriptæ: ut 1, ad *indicem seriei in plano expositæ binario auctum.*

Fig. 129, 131, 133.

B. Ejusque figuræ, si Integra sit (hoc est, utrinque ad Diametrum Axemve similiter posita; sitque conversio integra;) Centrum gravitatis erit ipsum Punctum verticis Diametri Axisve.

Si vero (figura plana) Dimidiata sit; ejusque ordinatim-applicatæ sint, ad diametrum vel axem, ad angulos rectos; sitque Index vel affirmativus, vel saltem major quam -1: Solidum illud, Centrum habebit Gravitatis. Nempe, in illa, à plano ad expositum planum recto, perque ejus Axem incedente, distantia; quæ est, ad distantiam puncti medii in base plani expositi; ut *Index seriei, plani expositi, binario auctus*, ad *duplum ejusdem Indicis binario auctum.*

C. Sin major sit Index ille quam -2, sed non item major quam -1: Habebit solidum illud magnitudinem finitam, sed non & centrum gravitatis.

D. Adeoque; si dimidiata illa figura Plana, sit reciproca secundum seriem cujus Index -1; (quo casu curva, est vera Hyperbola;) & convertatur circa verticem infinitum (quæ est Asymptotarum una interminata) solidum conversione factum, erit magnitudinis finitæ, (estque Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*:) Centrum autem gravitatis non habebit. Est utique solidum illud, æquale parallelepipedo, cujus Basis sit Parallelogrammum plano inscriptum, altitudo æqualis cuivis ex peripheriis extimis Solidi: Vel; (quod eodem recidit) duplo Cylindri, parallelogrammo illo circa rectam verticis conversо descripti. Distantia vero Centri Gravitatis, à Plano per axem expositi plani, simpliciter Infinita.

E. Si Plani series Indicem habeat $-\frac{3}{2}$: Solidum conversione factum, erit ad tale Parallelepipedum (vel duplum Cylindri,) ut 1 ad $\frac{1}{2}$ $(=-\frac{3}{2}+2;)$ vel, ut 2 ad 1. Distantia Centri Gravitatis, esset ad semi-latitudinem Parallelogrammi plano inscripti; ut $\frac{1}{2}$, ad -1: plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit.

F. Si Plani series Indicem habeat $-\frac{1}{2}$; (quæ est Reciproca semi-parabolæ:) Solidum erit ad tale Parallelepipedum (vel Cylindri duplum,) ut 1 ad $\frac{3}{2}$ $(=-\frac{1}{2}+2;)$ vel, ut 2 ad 3. Distantia Centri Gravitatis, ad semi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{3}{2}$ ad 1, seu ut 3 ad 2.

G. Si Plani series Indicem habeat $\frac{1}{2}$; (quæ est semi-parabolæ:) Solidum est, ad Parallelepipedum (seu Duplum Cylindri, circumscripto semiparabolæ Parallelogrammo descripti,) ut 1 ad $2\frac{1}{2}$ $(=\frac{1}{2}+2:)$ vel, ut

ut 2 ad 5. Distantia Centri Gravitatis; ad semi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{2}{3}$ ad 3; seu, ut 5 ad 6.

Atque in reliquis similiter. H.

Eritque Solidorum ejusmodi, integra conversione descriptorum, Centrum Gravitatis (siquod est) in ipso conversionis Axe; ejusque illo puncto quod distantia jam tradita designat. I.

Semi-solidorum vero, (aut alias imperfecta conversione descriptorum,) Centrum gravitatis (siquod habent) est quidem in distantia jam assignata à plano quod ab axe plani expositi conversione describitur, & in illo per Axem conversionis plano, quod per Centrum Gravitatis figuræ planæ, expositi plani Axe descriptæ, transit: Atque in illa ab axe conversionis distantia, quæ est, ad modo dicti Centri gravitatis inde distantiam; ut *Index* seriei expositi Plani *Binario auctus*, ad eundem *Indicem Ternario auctum*; vel (quod eodem recidit) ut Index seriei Solidi conversione facti Unitate auctus, ad eundem auctum Binario. K. L.

Quodque de Solidis conversione factis dictum est: idem similiter intelligendum erit, de figuris aliis; si, pro Circulis (eorumve portionibus) conversione descriptis, intelligatur ex similibus figuris planis quibuslibet (circulis illis proportionalibus) similiter ad conversionis axem positis, Solidum conflari. M.

Quodque jam traditum est; supponendo ordinatim-applicatas in expositio Plano ad hujus diametrum vel axem ad angulos rectos constitutas; adeoque conversionis axem ad plana circa illum posita rectum esse: perinde verum erit, si ad axem utcunque inclinatum intelligantur similia illa plana parallela ordinatim-poni.

Item; Si ejusmodi exposita figura plana dimidiata, cujus ordinatim-applicatæ non sint ad angulos rectos, sed ad diametrum suam utcunque inclinatæ; conversione sua solidum describere intelligatur: describet expositi Plani Diameter, (quæque huic sunt parallelæ rectæ,) non quidem circulum, (ut hactenus;) sed superficiem conicam (convexam concavamve, prout angulus, quem cum conversionis axe facit Diameter illa, acutus obtususve fuerit:) ad quam tamen superficiem Conicam accommodabuntur omnia (mutatis mutandis,) quæ de Circulo illo, ejusve Plano tradita sunt. N.

Denique: Quæ de figura, circa rectam in vertice ordinatim-applicatis parallelam conversa, hic tradita sunt; ad conversionem circa rectas alias, alio situ positas, facile accommodantur; Puta, circa Basin, aliasve huic parallelas, sive infra sive supra figuram positas; circa Axem, aut huic parallelas, ultra citrave figuram positas, sive adjacentes, sive utcunque remotas; aliasque situ multis modis variato. Quibus casibus omnibus, pro re nata, principia jam tradita facile accommodabit prudens Geometra. O.

ESto enim expositum Planum, cujus ordinatim-applicatæ ad A D diametrum vel Axem, sint secundum seriem directam A D B, cujus Index sit f; vel secundum seriem reciprocam, ut A D B $\beta\delta$, cujus Index sit $-f$. Atque intelligatur circa rectam, ad eandem A D, in A, ordinatim-applicatam, puta A δ; converti. Describent rectæ sic conversæ, superficies curvas Cylindricas circa A δ ut Axem; quæ quidem superficies curvæ æquantur totidem Parallelogrammis quorum Bases æquentur rectis conversis, altitudines vero peripheriis uno aliquo eorum puncto descriptis: (Quippe, curva Cylindrica, expansa, cum hujusmodi parallelogrammo coincidet.) Sunt igitur illæ superficies Curvæ Cylindricæ, in ratione, ex rectarum conversarum, & peripheriarum sic descriptarum, rationibus compositæ: (per A. Fig. 129, 131, 133.

23 El. 6.) hoc est, (propter peripherias radiis proportionales,) ex rectarum conversarum, & earum à recta per verticem A ♪ distantiarum, composita. Est autem (propter æqualem quam supponimus rectarum crassitiem) series hæc distantiarum, series Primanorum, cujus index 1; adeoque (propter f, vel $-f$, indicem seriei Rectarum,) series superficierum Cylindricarum rectis descriptarum, (vel, his æqualium Parallelogrammorum,) Indicem habebit $f+1$, vel $-f+1$. Quæ itaque simul omnia, (hoc est, Solidum conversione factum) ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum super AB parallelogrammum, altitudinem habens æqualem peripheriæ puncto D descriptæ; vel, quod Parallelepipedo illi æquale est, ad Duplum Cylindri, parallelogrammo illo circa Verticis rectam conversione descripti:) ut 1 ad $f+2$, vel ut 1 ad $-f+2$. (per 1 hujus.) Hoc est, (posito P pro uno ex æqualibus parallelogrammis, & N, pro omnium numero, adeoque NP pro Parallelepipedo,) $\frac{1}{f+2}$ NP, vel $\frac{1}{-f+2}$ NP. Quod quidem magnitudine finitum erit, si vel f sit Index Affirmativus, vel si Negativus $-f$ major sit quam -2. (Quippe tum ratio 1 ad $f+2$, vel ad $-f+2$, erit ratio finita: nempe ut terminus positivus ad positivum; non ut Positivus ad 0, vel minus quam 0.) Quæ erant demonstranda. Atque hinc particularium casuum calculus deducetur.

B. Porro; Si Figura plana sic conversa, dimidiata sit, (nam de Integra, dubium non est, quin Centrum gravitatis, absoluta conversione, erit in A puncto:) sintque ad axem AD ordinatim-applicatæ, ad angulos rectos: Erunt superficierum illarum curvarum Cylindricarum centra gravitatis in media illarum longitudine; (per 2 hujus.) adeoque (propter dimidiata integris proportionalia) in ratione rectarum in plano, quarum conversione hæ superficies Cylindricæ describuntur: Hoc est; in serie cujus Index est f, vel $-f$. Cumque superficierum illarum, seu Ponderum, series Indicem habeat $f+1$, vel $-f+1$, (ut supra ostensum est;) & series distantiarum Centrorum Gravitatis à Plano per AD, indicem habeat f, vel $-f$, (ut ostensum est modo:) Quæ ex utriusque oritur (per 18 Cap. 4.) Momentorum series, (respectu perpendicularis Plani per AD,) indicem habebit $2f+1$, vel $-2f+1$. Adeoque (posito D pro distantia Centri gravitatis superficiei Cylindricæ recta DB descriptæ; quæ est semi-latitudo Parallelogrammi AB;) erit (per 1 hujus) $\frac{1}{2f+2}$ NPD, vel $\frac{1}{-2f+2}$ NPD, simul omnium, hoc est, Solidi, Momentum. Quod quidem si per $\frac{1}{\pm f+2}$ NP summam Ponderum, dividatur; prodibit $\frac{f+2}{2f+2}$ D, vel $\frac{-f+2}{-2f+2}$ D, distantia Centri Gravitatis à Plano per AD. Quæ quidem distantia; si sit vel f Index Affirmativus, vel Negativus $-f$ major quam -1, adeoque $-2f+2$ terminus affirmativus, (propter affirmativi ad affirmativum rationem finitam,) finita erit: atque, in illa, Centrum Gravitatis. Quæ itidem erant demonstranda.

$$\frac{1}{f+2}\text{NP}) \frac{1}{2f+2}\text{NPD} (\frac{f+2}{2f+2}\text{D}$$

$$\frac{1}{-f+2}\text{NP}) \frac{1}{-2f+2}\text{NPD} (\frac{-f+2}{-2f+2}\text{D}.$$

C. Sin major quidem $-f$ quam -2; non autem major quam -1: Habebit quidem solidum illud magnitudinem finitam; (ut ostensum est:) Sed non & Centrum Gravitatis. Erit enim $-f+2$ ad $-2f+2$, ratio positivi, vel ad 0, vel ad negativum; adeoque distantia Centro Gravitatis debita, vel infinita erit, vel plusquam infinita; quod igitur nusquam erit. Quod item Affirmatum erat.

D. Quæque hinc, ad particulares casus enumeratos (aliosve quotlibet) deducuntur: Ex calculo patent.

Puta: Si ADB β ♪ Plani series indicem habeat -1, quæ est Trianguli reciproca;

Fig. 132, 134.

proca; (quo caſu, curva B β, eſt Hyperbola; cujus Aſymptotæ ſunt A D, A δ: ut prop. 92, 95, Arithm. Infin. demonſtravimus: Adeoque, ſolidum iſtius converſione circa A δ deſcriptum, eſt Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*; ut ex hujus apud Torricellium definitione conſtat:) Erit Planum illud Magnitudine Infinitum, (per 7 hujus.) Si tamen, circa A δ converſum, intelligatur Solidum deſcribere; erit hoc magnitudinis finitæ; tantæ ſcilicet quanta in Propoſitione deſignatur. Cum enim, ſuperficies Cylindrica, recta D B deſcripta; vel, huic æquale, Parallelogrammum cujus Baſis D B, altitudo æqualis peripheriæ puncto D deſcriptæ, ſit P: atque huic æque-altum Parallelepipedum, ſuper parallelogrammum A B erectum; ſit N P: (cui quidem Parallelepipedo, æquatur Duplum Cylindri eodem Parallelogrammo circa A δ converſo deſcripti: Nam, qua ratione circulus radio A D deſcriptus, æquatur ſemiſſi Parallelogrammi cujus Baſis eſt A D, altitudo æqualis Peripheriæ puncto D deſcriptæ; quod notum eſt: eadem & Cylindrus parallelogrammo A B deſcriptus, eandem habens altitudinem, æquabitur ſemiſſi Parallelepipedi: propter ſingula hujus Parallelogramma ſingulorum in illo Circulorum, reſpective ſumptorum, dupla: & communem altitudinem D B:) Sintque ſuperficies Cylindricæ rectis ipſi D B parallelis deſcriptæ; (vel, his æqualia Parallelogramma quorum baſes, eædem rectæ; altitudines reſpectivis peripheriis æquales;) Series æqualium; propter $-\int+1=-1+1=0$: (vel etiam; quia tùm peripheriæ ſunt in ratione diſtantiarum ab A δ directa, & rectarum converſarum in earundem diſtantiarum ratione reciproca, adeoque tum Parallelogramma invicem æqualia, tum & Superficies Cylindricæ; per 6 Cap. 1. vel 14 El. 6. Nempe, quod ob minorem baſis peripheriam oritur decrementum, aucta in eadem ratione altitudine compenſatur; ut ſuperficies Cylindricæ, rectis in A D B β δ plano ipſi D B parallelis deſcriptæ, ſint invicem æquales:) Erunt ſimul omnes illæ ſuperficies Cylindricæ, ſive quod ex his intelligitur conflari Solidum; $\frac{1}{-\int+2}$ NP, hoc eſt $\frac{1}{-1+2}$ NP = NP; æquale ſcilicet ipſi Parallelepipedo, vel Duplo Cylindri, quod per N P deſignavimus. At vero; propter Diſtantias (à plano recta A D deſcripto) Centrorum gravitatis harum ſuperficierum Cylindricarum, rectis converſis proportionales; adeoque ſecundum ſeriem cujus index -1 ex conſtructione: erit Momentorum ſeu ponderationum ſeries, indicem habens $-1=0-1$. (nempe qui ex Indice ſeriei ſuperficierum cylindricarum, 0; & Indice ſeriei diſtantiarum, -1; aggregatur) Adeoque ſumma momentorum, $\frac{1}{-1+1}$ N P D; (nempe, quæ ſit ad N P D, ut 1 ad $-1+1=0$; quæ ratio eſt infinita;) vel $\frac{1}{0}$ N P D; quod per N P (quod eſt omnium Pondus, ut modo oſtenſum eſt) diviſum: diſtantiam exhibet, centro gravitatis debitam, $\frac{1}{0}$ D, infinitam. Quod igitur nuſquam erit.

Similiter: Si Plani ſeries Indicem habeat $-\int=-\frac{3}{2}$: (quod eſt magnitudine pluſquam infinitum; per prop. 7 hujus.) Erit Solidum hujus Plani converſione factum, $\frac{1}{-\int+2}$ N P = 2 N P; magnitudine finitum. Sed ſumma momentorum $\frac{1}{-2\int+2}$ N P D = $\frac{1}{-1}$ N P D, pluſquam infinita. Et diſtantia Centro gravitatis debita; $\frac{1}{-2}$ D, pluſquam infinita. Quod itaque nuſquam erit. E.

Item: Si Plani Series Indicem habeat $-\int=-\frac{1}{2}$; (cujus itaque ordinatim-applicatæ, ſunt ordinatim applicatis in Parabola, reciproce proportionales:) Planum hoc eſt magnitudine Finitum, (per 7 hujus.) Et Solidum converſione factum, item finitum; nempe $\frac{1}{-\int+2}$ NP = $\frac{2}{3}$ NP. Eritque hujus Momentum, F.

$\frac{1}{-2\int+2}$ NPD = NPD, finitum. Et distantia Centri gravitatis, $\frac{-\int+2}{-2\int+2}$ D = $\frac{3}{2}$ D; finita.

G. Item: Si Plani Series Indicem habeat $\int = \frac{1}{2}$, (quæ est Semi-parabolæ:) Solidum conversione factum, erit $\frac{1}{\int+2}$ NP = $\frac{2}{5}$ NP. Hujus momentum $\frac{1}{2\int+2}$ NPD = $\frac{1}{3}$ NPD. Distantia Centri Gravitatis, $\frac{5}{6}$ D.

H. Atque ad eandem formam fiet judicium, quæcunque sit expositi Plani series istiusmodi ex definitis in def. 1, 2, hujus.

I. Erit autem, in Solidis hisce, integra conversione factis; Centrum gravitatis, in Fig. 123, 133. ipso conversionis axe; per 5 hujus. Adeoque in ipsius illo puncto, quod distantia ab A, jam demonstrata, designat.

K. Semi-solidorum vero, (quæ semi-conversione describuntur,) aliarumve portio- Fig. 132, 134. num duobus per conversionis axem planis interjectarum, (puta, quæ conversionis integræ Triente, Quadrante, &c. describuntur;) Centrum gravitatis erit in illo per conversionis axem plano quod per Centrum gravitatis figuræ planæ recta AD descriptæ (adeoque per reliquarum huic parallelarum, utpote similium & similiter ad axem positarum, Centra Gravitatis,) transit: quod probabitur ex 4 hujus.

L. Quodque sit in ea quam dicimus à conversionis axe distantia; sic constat. Cum Superficies Cylindricæ ex quibus conflari intelligatur solidum, (ut supra ostensum est;) adeoque & harum portiones similes quantacunque integræ conversionis parte descriptæ, (propter arcus similes, peripheriis suis integris proportionales;) sint series indicem habens $\int+1$, vel $-\int+1$, (adeoque si extima dicatur P, erunt simul omnes ut $\frac{1}{\int+2}$ NP, vel $\frac{1}{-\int+2}$ NP;) sintque earum ab axe conversionis distantiæ, adeoque (propter similium figurarum Centra Gravitatis similiter sita) distantiæ suorum Centrorum gravitatis, rectarum in expositio plano quibus describuntur distantiis ab A ♂ proportionales; adeoque ut series indicem habens 1, (ut supra ostensum est:) Erit momentorum series (respectu axis conversionis A ♂) indicem habens $\int+2$ vel $-\int+2$, (nempe $\int+1+1$, vel $-\int+1+1$;) Et simul omnium Momenta (posito D pro distantia Centri gravitatis extimæ superficiei, recta DB descriptæ à conversionis axe A ♂,) ut $\frac{1}{\int+3}$ NPD, vel $\frac{1}{-\int+3}$ NPD: (per 1 hujus.) Quod, per $\frac{1}{\int+2}$ NP, vel $\frac{1}{-\int+2}$ NP, summam Ponderum, divisum, exhibet $\frac{\int+2}{\int+3}$ D, vel $\frac{-\int+2}{-\int+3}$ D, distantiam Centri gravitatis (siquod est) ab axe conversionis A ♂. Quod erat propositum.

M. Porro: Si pro circulis circa A ♂ axem conversione rectarum AD & huic parallelarum descriptis, dum sit D A ♂ angulus rectus; adeoque, axis A ♂ ad illos rectus: Intelligantur totidem circuli, his respective æquales, circa eandem A ♂ ut axem inclinatum, quocunque applicationis angulo circumpositi; figuram solidam complere: Vel etiam; si, pro circulis, intelligantur aliæ figuræ planæ similes & similiter positæ, circulis illis proportionales: Eadem utcunque, quæ prius, manebit demonstrationum vis.

N. Vel denique; Si, propter D A ♂ angulum Acutum Obtusumve, conversa circa A ♂ ut axem figura plana A D B β ♂; loco circulorum recta D A & huic parallelis describendorum, describantur conicæ superficies Convexæ Concavæve: Similiter ad superficiem hanc Conicam, recta D A descriptam; atque ad circulum eadem, ut prius descriptum; (& de reliquis similiter huic parallelis;) eadem accommodabitur Demonstrationum vis.

O. Denique, quemadmodum in Propositione hac egimus, de Solidis, conversione Planorum circa rectam per verticem Ordinatim applicatis parallelam, descriptis; eorumque Centris gravitatis: Pronus eram idem præstare in aliis Planorum conversionibus;

verſionibus; puta, ſi Parabola, aliave ex jam tractatis figuris, circa Baſem vel Axem, vel rectam Axi parallelam converſa, intelligatur figuram Solidam deſcribere; aliaque hujuſmodi. Abſtinui tamen; partim, quia ad jam traditorum modum poterit his ſimilia Lector ipſe pro libitu plura ſubjungere ſuo Marte: partim etiam, quia eadem, ſequentium aliquot propoſitionum ope luculentius & ſimul univerſalius tradentur: maxime vero ne tædium crearem Lectoribus ſi nimius eſſem in hiſce congerendis; præſertim cum tanta ſeges hic ſe offerat, ut vel ſpicilegium carpenti, nimis intumeſcat Caput hoc De Calculo Centri Gravitatis.

SCHOLIUM.

TRadidimus hactenus, ea præſertim quæ figuras ſpectant, (planas ſolidaſve,) ad quarum Diametros vel Axes, quæ ordinatim-applicantur (rectæ aut plana) ſunt ſecundum ordinatam aliquam (ex iis quas def. 1 & 2 hujus capitis definivimus) ſeriem conſtituta. Quæ quidem ad centrum gravitatis in figuris innumeris determinandum viam aperiunt: Ex noſtra *Infinitorum Arithmetica* plurimum petita: Quæ tamen adhuc facile ampliabit peritus Geometra, & pluribus adhuc caſibus innumeris accommodabit.

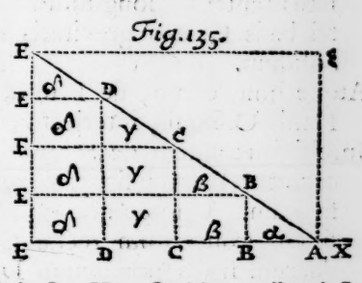
Quoniam vero non omnes figuræ ordinatam hanc conſtitutionem ſortiuntur: quo aliis utut inordinatis conſulatur; ſequente propoſitione methodum adhuc magis generalem exhibemus; ordinatis juxta atque inordinatis pariter applicabilem.

PROP. X.

Si dividi intelligatur Libra quævis, in partes quotlibet æquales, (numero vel finitas vel infinitas,) in diſtantiis à motus ſui Centro vel Axe (aut perpendiculari per axem plano) ut 1, 2, 3, &c. Arithmetice proportionalibus poſitas; ponderibus, aut ponderum particulis, (æqualibus aut inæqualibus, ordinatis vel inordinatis,) utcunque gravatas: Eaque quibus gravantur pondera, ſeu ponderum particulæ, in ſuam quæque ab axe motus (ſeu plano per axem) diſtantiam ducantur; hoc eſt toties ſumatur quæque particula quoto eſt ipſa loco ab axe motus; (Quod variis methodis, prout cuique caſui videbitur maxime expedire, conſequi licebit:) Habetur (reſpectu ejuſdem axis) Momentum omnium; & hujus ope (cognita magnitudine) diſtantia Centri Gravitatis, ab illo per axem plano.

INtelligantur, in A E libra, partes invicem æquales, A B, B C, C D, &c. quarum diſtantiæ (aut mediorum in illis punctorum) à motus axe X, (aut, ſi partes intelligantur infinite exiguæ, ab ipſo A puncto) ſint ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales; ſuis quæque ponderibus (æqualibus aut inæqualibus) α, ζ, γ, δ, &c. onuſtæ. Quorum quodque toties ſumatur, quoto eſt ab axe motus loco.

Fig. 135.



Puta: 1 α, 2 ζ, 3 γ, 4 δ, ſeu α, ζ + ζ, γ + γ + γ, δ + δ + δ + δ, &c. Hoc eſt (in partibus infinite exiguis) omnes onuſtæ B B, C C, D D, &c. Triangulum vel Ungulam A E E complentes.

Aut etiam, α + ζ + γ + δ, ζ + γ + δ, γ + δ, &c. Hoc eſt, (in partibus infinite exiguis) omnes onuſtæ rectæ A E, B E, C E, &c. idem A E E triangulum vel ungulam complentes.

Aut etiam, A E, A E — A B, A E — A C, A E — A D, &c. Hoc eſt, totidem A E demptis omnibus A B, A C, A D, &c. Hoc eſt, (in partibus infinite exiguis,) Parallelogrammum ſeu Priſma (onuſtum) A E E, minus (onuſto) Triangulo vel Ungula contraria A E.

Aut etiam alio quocunque modo obtineatur aggregatum omnium toties reſpective ſumptorum quoto eſt quodque loco ab axe motus remotum.

(Perinde autem eſt, ſive ipſa α, β, γ, &c. quibus onerari cenſetur libra, ſint lineæ rectæ, aut curvæ; ſive ſuperficies planæ, aut curvæ, aut miſtæ; ſive ſolida cujuſcunque figuræ; aut etiam vires, impetus, &c. aut qualiacunque demum invicem homogenea, quæ aut gravia ſint aut tanquam gravia habeantur.)

Dico; his poſitis, haberi momentum ſimul omnium reſpectu ipſius axis motus X: Adeoque (cognita etiam magnitudine ſimul omnium) diſtantiam Centri gravitatis ab X, ſeu perpendiculari plano ſuper X motus axem erecto.

Cum enim (per prop. 12. Cap. 3. vel prop. 18. Cap. 4.) cujuſque momentum ſit in ratione ex ponderum & diſtantiarum rationibus compoſita; hoc eſt, in ratione factorum ex ponderibus in ſuas ſingulis diſtantias ductis; Habito horum aggregato, habetur momentum, (per 18 Cap. 3. vel 22 Cap. 4.) Adeoque; ſi porro habeatur magnitudo ſimul omnium, habebitur (momento per magnitudinem diviſo) diſtantia Centri gravitatis à perpendiculari per axem plano: per prop. 24. Cap. 4.

SCHOLIUM.

His traditis: Monendum porro eſt, Hoc, quod *Centrum Gravitatis* dicimus punctum; etiam alias utile eſſe, quo, quæ ex ſe ſunt Inæqualia, Æqualium inſtar, propter Æquipollentiam cenſeantur. Cujus ſpecimen, in ſequentibus aliquot Propoſitionibus exhibebimus.

Quod dici non incommode poſſet (generaliori nomine) *Medium Arithmeticum*, niſi quod nollem recepta Nomina mutare. Malim *Novos Uſus* hujus Centri indicare.

PROP. XI.

A. Si, ſuper Baſe quavis Plana, erigatur Cylindrus, Priſma, Solidumve quodvis Priſmaticum; Planoque utcunque ad Baſin inclinato, obliqueſecetur: Fruſtum, plano baſis, planoque ſecanti, interjectum, (quæ *Ungula* dici ſolet, aut etiam *Cuneus* non male,) æquatur Solido, ſuper eadem vel æquali Baſe, tantæ altitudinis, quanta eſt altitudo rectæ in Fruſto, quæ baſis Centro gravitatis inſiſtit ſimiliter inclinata atque ipſum Solidum.

D. Fruſtique Superficies, (excluſis Baſibus oppoſitis, quibus interjacet) æquatur ſuperficiei (excluſis item baſibus oppoſitis) Solidi priſmatici, ſimiliter inclinati, ſuper eadem vel Iſoperimetra Baſe, cujus latus tantæ ſit longitudinis quanta eſt rectæ in fruſto quæ perimetri baſis Centro gravitatis inſiſtit, ſimiliter inclinata atque ipſum Solidum.

C. Atque hinc etiam, de Fruſto, Fruſtive ſuperficie, duobus utcunque Planis Obliquis, interjecto; fiet judicium.

B. Intelligitur autem de Secante Plano, quod expoſitæ baſis Plano occurrat vel extra figuram vel in ipſius ſaltem extremo; non, intra figuram. Quippe hoc caſu Solidum Priſmaticum expoſitæ baſi inſiſtens æque-altum rectæ Centro Gravitatis inſiſtenti; æquabitur duarum fruſti portionum Differentiæ, ſub & ſupra baſem expoſitam factarum, continuato Plano ſecante donec expoſitum Solidum Priſmaticum item continuatum totum tranſverſim ſecat. Et de fruſti Superficie ſimiliter.

E. Hinc autem *Ungularum*, quas vocant, omne genus, menſura colligitur.

Item Ungularum ſuper eodem Plano, Rectave, aut Curva in Plano deſcripta,

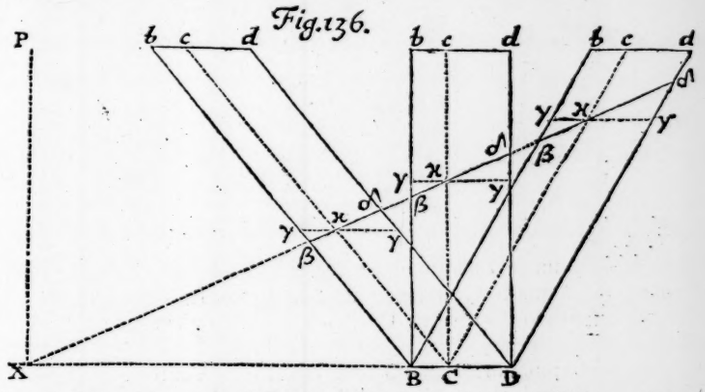
deſcripta, (cujus ſaltem magnitudo nota ſit) differentia, prout acies (ſeu planorum interſectio) propius aut remotius abſit.

Aut etiam differentia momentorum ejuſdem gravis; prout Axis Motus propius abſit aut remotius.

Hinc ſpeciatim habetur etiam Trilinei vel Polygoni cujuſvis, in Superficie Cylindrica deſcripti (planis utcunque poſitis terminati) magnitudo. Quod & de aliis corporum Priſmaticorum Superficiebus figuriſque iiſdem ſic inſcriptis, intelligendum. G

INtelligatur baſis plana B D, (rectilinea, curvilinea, an mixta quælibet;) quæ (poſito oculo in eodem plano ad infinitam diſtantiam) projiciatur in B D rectam: (adeoque & huic parallela plana quælibet, in parallelas rectas projecta:) A. Fig. 136.

Fig. 136.



Super qua erigatur corpus Priſmaticum quodvis, (puta, Cylindrus, ſi baſis illa ſit circulus; ſi rectilinea, Priſma Euclideum; ſaltem Solidum aliquod Priſmaticum ſeu Columnare, quod ex infinitis numero rectis parallelis æqualibus conflari intelligatur, quo ſenſu def. 1. Cap. 4. definivimus;) B D d b; ſitque ſuper baſis Centro gravitatis C, (quod propius remotiuſve à B vel D intelligendum erit, prout Baſis figura & ſitus poſtulaverit,) erecta C c, ipſis B b, D d, lateribus parallela. Intelligatur vero ſolidum hoc Priſmaticum, alio adhuc plano ad planum baſis oblique inclinato ſectum; quod ſectionem faciat β κ δ; rectæ C c occurrens in κ. Dico; fruſtum B D δ β, æquale eſſe Solido Priſmatico ſuper eadem baſe, (vel huic æquali; propter æqualia Priſmata & Cylindros quæ ſunt ſuper æqualibus baſibus æque-alta:) altitudinem habenti eam quæ eſt rectæ C κ; (nempe, huic rectæ æqualem, ſi C κ ſit ad baſin perpendicularis; vel ſaltem, æqualem perpendiculari à puncto κ demiſſæ ad planum baſis B D.)

Intelligatur utique Planorum B D, β δ, communis ſectio X recta; quæ in unicum X punctum projiciatur; adeoque & huic parallelæ rectæ, in totidem puncta. Perque rectam X incedat Planum X P, plano X B D rectum: quod in X P rectam projiciatur. (Quam projectionis formam eo fine adhibemus, quem ad prop. 14. Cap. 4. inſinuavimus; quo & phantaſia plurium linearum confuſione levetur, neque turbentur interim rationes: Quippe tantundem à plano X P diſtabunt ſingula Solidi puncta; atque, ab X P recta, eadem in plano projecta diſtant.)

Ponatur porro; Planum X B D, planum Horizontale; recta X, axis motus; adeoque Planum X P, perpendiculare Planum per motus axem. Adeoque in ea ratione Ponderant ſingula Baſis puncta B, C, D, &c. qua diſtant ab axe motus X, vel à perpendiculari per hunc Plano X P; per 4 Cap. 4. Hoc eſt, in ratione rectarum X B, X C, X D, &c. Sed & (propter C centrum gravitatis) tantundem ſimul omnia ponderant, atque ſi in C puncto intelligerentur omnia: per 16 Cap. 4. Adeoque (per 4 Cap. 4.) tantundem ſunt ſimul omnes X B, X C, X D, &c. atque totidem ipſi X C æquales.

Sed &, (propter ſimilia Triangula;) rectis X B, X C, X D, &c. proportionales ſunt B β, C κ, D δ, &c. Adeoque (per 12 El. 5.) tantundem ſunt ſimul omnes B β, C κ, D δ, &c. (fruſtum B D δ β complentes,) atque totidem C κ (complentes

plentes Solidum Prismaticum $BD\gamma\gamma$, ipsi $C\varkappa$ rectæ æque altum:) Adeoque $BD\delta\beta$ Frustum, est solido Prismatico $BD\gamma\varkappa\gamma$, æquale. Quod erat demonstrandum.

Atque perinde omnino valet hæc demonstratio, sive basi BD insistens solidum Prismaticum, ejusve frustum, Rectum sit, sive Inclinatum: Dummodo eodem modo censeatur rectæ $C\varkappa$ altitudo, atque prismatis; nempe recta perpendiculari à puncto $\varkappa$ ad basis planum demissa.

B. Supponit autem demonstratio, communem planorum sectionem X, extra figuram, (saltem non intra, sed in ipso forsan solidi extremo;) secus enim, non erit eadem Integri & Frusti Basis, quod supponit Propositio.

Sin planum secans, plano Basis intra figuram occurrat; intelligendum erit eousque deorsum continuandum solidum, ut Frusti segmenta duo sint; alterum supra & alterum infra BD basim; duæque rectæ, $C\varkappa$, duorum basis segmentorum Centris erectæ. De quibus intelligenda erit tum propositio, tum Demonstratio.

Fig.137.

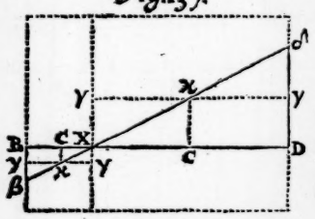


Fig.138.

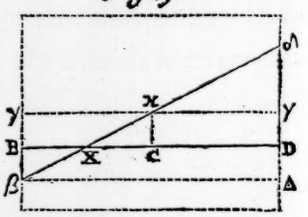


Fig. 137. Puta: Si Planum BD plano $\beta\delta$ secetur in X; sumptis utriusque segmenti BX, XD, centris gravitatis C, C; reliquisque ut prius constructis: Ostendetur Frustum $DX\delta$, æquale solido Prismatico $DX\gamma\varkappa\gamma$ (super eadem base XD;) & frustum $BX\beta$, ipsi $BX\gamma\varkappa\gamma$.

Fig. 138. Vel etiam, conjunctim: Retento communi totius Centro gravitatis C; Propter $XD\delta$ superne (quod notetur signo +) & $BX\beta$ inferne (quod signo — notetur) plano basis BD & secanti $\beta\delta$ interjecta; & solidum prismaticum $BD\gamma\varkappa\gamma$ superne (signo + notandum:) Erit $+XD\delta - BX\beta = +BD\gamma\varkappa\gamma$. Quod ex præcedente Demonstratione, mutatis ut res postulaverit signis + —, elicietur.

Vel, siquis ejusmodi aversetur demonstrationem; idem alias sic ostendetur: Ducto Plano $\beta\Delta$ ipsi BD parallelo; ostendetur, ut supra, frustum $\delta\beta\Delta$ æquale solido $\beta\Delta\gamma\varkappa\gamma$: Et, ablato utrinque $\beta XD\Delta$, manebit δXD æquale toti residuo $\beta XD\gamma\varkappa\gamma$ hoc est, duobus $\beta XB + BD\gamma\varkappa\gamma$; Adeoque (subductis utrinque βXB) erit $\delta XD - \beta XB = BD\gamma\varkappa\gamma$. Quod erat ostendendum.

C. Porro: Si duobus utcunque planis idem solidum Prismaticum secetur, (sive eadem sit utriusque cum expositæ basis plano communis intersectio, sive secus;) simile erit præcedentibus judicium: Frustum scilicet utrisque planis interjectum, istiusmodi Prismatum seu solidorum Prismaticorum Aggregato vel Differentiæ (ut res postulaverit) æquabitur.

Fig.139.

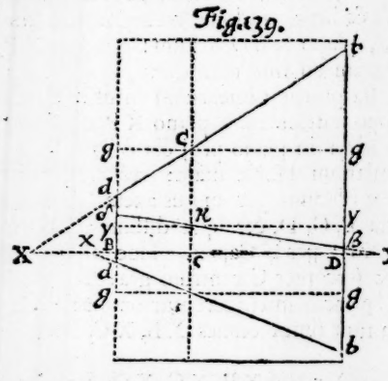


Fig.140.

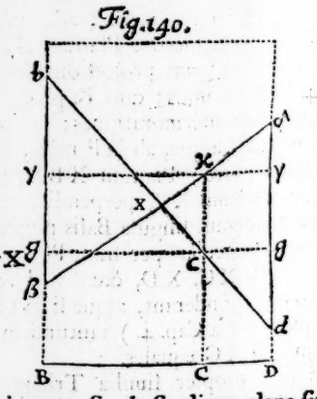


Fig. 139. Puta: Si solidum quodvis Prismaticum, cujus exposita basis aliqua plana sit BD, ejusque Centrum gravitatis C, per quod transeat $C\varkappa Cc$; Quod duobus utcunque planis

planis oblique ſecetur; puta in $\beta\varkappa\delta$, & bcd. Ductis Planis $\gamma\varkappa\gamma$, gcg, ipſi BCD parallelis: Oſtendetur, ut ſupra, Fruſto $BD\delta\beta$ æquale ſolidum $BD\gamma\gamma$; item Fruſto BDdb, æquale ſolidum BDgg: Fruſtum igitur $\beta\delta$db (duorum $BD\delta\beta$, BDdb, ſumma vel differentia, prout ex oppoſitis, vel iiſdem partibus ejuſdem BD ſumantur,) Solido Priſmatico $\gamma\gamma gg$ (duorum ſimiliter $BD\gamma\gamma$, BDgg, ſummæ vel differentiæ,) æquabitur. Quod oſtendendum erat.

Sin hæc duo Plana ſecantia, ſibi invicem intra Solidum occurrant: idem hic monendum (atque ſimiliter oſtendetur) ut prius. Puta; Si $\beta\delta$, bd, plana ſe mutuo ſecent in X; erit $\gamma\gamma gg$ ſolidum priſmaticum, æquale duorum δXd, βXb, differentiæ. Adeoque de Fruſto duobus utcunque Planis interjecto, conſtat. Quod erat propoſitum. Fig. 140.

Denique: De Superficie Fruſti, quod affirmatur; ſimiliter omnino demonſtrabitur atque de Fruſto ipſo: Hoc prius animadverſo: Quod, Priſmatis Solidive Priſmatici cujuſcunque magnitudo æſtimatur, ex ductu altitudinis in Baſin; Superficies vero Priſmatis, Cylindri, Solidive cujuſvis Priſmatici recti (exceptis baſibus) Aream habet æqualem facto ex Lateris longitudine in Perimetrum Baſis ducta. Unde, ut ex Solidi Priſmatici Altitudine & Baſe cognitis, cognoſcitur ſolidi magnitudo; quæque æquales habent tum Baſes (utcunque diſſimiles,) tum Altitudines (utcunque inæqualiter inclinata ſint,) ſunt inter ſe Æqualia: Sic, hujuſmodi Solidorum Rectorum Superficies (exceptis baſibus) Aream habent cognitam, ſi tum Lateris Longitudo, tum Baſis Perimeter, notæ ſunt; quæque tum Baſes habent Iſoperimetras, (utcunque diſſimiles vel inæquales,) tum Latera longitudine æqualia, æquales habent areas. Quæ quidem ex Elementis nota ſupponimus, vel inde demonſtrabilia. D.

Conſtructis igitur, ut prius; niſi quod C ſit jam Centrum Gravitatis (non quidem Baſis, ſed) Perimetri Baſeos: Quoniam ſingula perimetri puncta B, D, &c. in ea ratione ponderant qua diſtant ab X motus axe; hoc eſt, in rectarum XB, XD, &c. ratione: quæ ſimul omnes, (propter C Centrum gravitatis) tantundem ſunt atque totidem XC æquales: Suntque (propter ſimilia Triangula) rectis XB, XD, XC, &c. proportionales $B\beta$, $D\delta$, $C\varkappa$, &c. Tantundem itaque ſunt (per 12. El. 5.) ſimul omnes $B\beta$, $D\delta$, &c. (ſuperficiem Fruſti recti $BD\delta\beta$ complentes,) atque totidem $C\varkappa$, complentes ſuperficiem Solidi Priſmatici (demptis baſibus) $BD\gamma\gamma$. Quod erat demonſtrandum. Fig. 136.

Si vero exponatur ſuperficialis Ungula Scalena, cum ejuſdem baſis Priſmatica, ſimiliter inclinata (hoc utique ſupponimus in ſuperficialibus, utut in ſolidis id non erat neceſſe,) comparanda: Similiter operabitur ſimilis utrobique inclinatio, adeoque non deſtruet æqualitatem.

Vel etiam, (ut in Fig. 139.) præter duo plana Ungulam Scalenam terminantia, ut $\beta\varkappa\delta$, bcd; intelligatur tertium aliquod BCD, quod ſolidum ſecet ad angulos rectos; adeoque duas exhibeat Ungulas rectas (de quibus procedet præcedens demonſtratio) quarum ſummæ vel differentiæ æquabitur expoſita Scalena.

Reliquaque, eodem modo demonſtrantur de Fruſti ſuperficie, atque de ipſo Fruſto demonſtrata ſunt. Adeoque conſtat Propoſitum.

Atque hinc *Ungularum*, quas vocant, omne genus (Cylindricarum, Paraboli-carum, &c.) Menſuram, (cognito vel ſuppoſito Baſis Centro gravitatis, vel hujus ſaltem à communi ſectione plani baſis, planique ſecantis, diſtantia;) quam magno molimine plures ſunt aggreſſi; expeditius, ſimplicius, atque univerſalius, una vice abſolvimus. E.

Hinc etiam patet; expoſiti Cylindri, Priſmatis, Solidive cujuſvis Priſmatici, (ut BDdb,) ſegmentum $BD\delta\beta$, quocunque plano, & quocunque ſitu poſito, (dummodo totam figuram tranſverſim ſecet, non baſi intra figuram occurrat,) ſi per idem (in Cc recta) punctum $\varkappa$ tranſeat; ejuſdem magnitudinis eſſe.

Quod & de Fruſti Superficie (ita ut dictum eſt) pariter intelligendum eſt.

Hinc etiam innoteſcit differentia duarum Ungularum ſuper eodem plano, rectave (aut curva in plano deſcripta) cujus magnitudo nota ſit; prout Ungulæ Acies (ſeu planorum interſectio) propius remotiuſve abfuerit. F.

Fig. 141. Nempe, Si ſuper VA (plano, rectave, aut curva in plano deſcripta) Magnitudinis notæ; erigi intelligantur Ungulæ duæ, quarum altera aciem habeat V ſeu VB, altera α ſeu ατ (ipſi VB parallelam;) ſitque eadem utriuſque inclinatio (puta angulus FVA, angulo fαA æqualis:) Manifeſtum eſt (propter parallelas

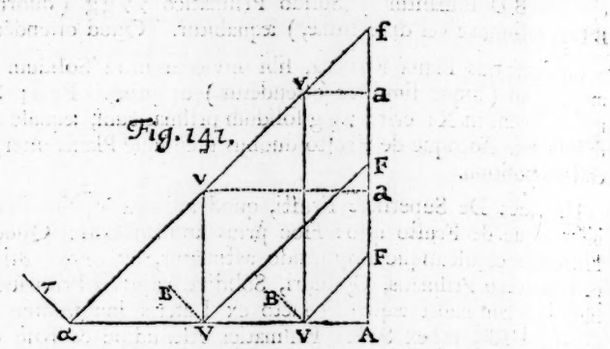


Fig. 141.

ſive lineas ſive ſuperficies VF, vf,) Ungularum VFA, VvfA, differentiam eſſe, ſuperficiem ſolidumve VFfv, vel VvaA; hoc eſt, factum ex baſe VA in altitudinem Vv: Quæ quidem altitudo Vv eſt vel ipſi αV (diſtantiarum differentiæ) æqualis; nempe, ſi inclinationis angulus FVA, ſeu fαA, ſeu vαV, ſit ſemiquadrantalis: vel illa major minorve, in ea ratione quam poſtulat datus inclinationis angulus.

Adeoque, ſi Ungula FVA nota ſit; addito VFfv, vel VvaA, (facto ex baſe VA in altitudinem Vv,) habetur Ungula VvfA. Si nota ſit VvfA, dempto eodem VFfv vel VvaA, habetur Ungula VFA.

Si vero ipſæ VB, ατ, acies, non ſint parallelæ; ſi tamen ſint in eodem plano, eademque utriuſque Ungulæ inclinatio nota, atque innoteſcat ſaltem quanta ſit diſtantiarum à baſis Centro gravitatis differentia; idem ſimiliter obtinetur: ut ex ante demonſtratis patet.

Quodque de Ungulis dictum eſt; Momentis gravium quorumvis accommodabitur. Cum enim gravis VA momentum æſtimetur ex facto à magnitudine in diſtantiam Centri gravitatis ab VB, ſeu ατ, (intellige, à perpendiculari plano per axem, VB, ſeu ατ,) differentia harum diſtantiarum (hoc eſt diſtantia planorum parallelorum BV, ατ,) in eandem VA magnitudinem ducta, exhibebit Momentorum ejuſdem VA differentiam reſpectu Axium BV, & ατ.

C. Atque hinc ſpeciatim, Trilinei aut Polygoni cujuſvis, in ſuperficie Cylindrica deſcripti, planis utcunque poſitis abſciſſi, (ſeu quod eodem recidit, rectis, circulis, ellipſibuſve, quibuſcunque terminati,) magnitudo colligitur. Quippe manifeſtum eſt, hujuſmodi quamlibet figuram in ſuperficie Cylindrica deſcriptam, eſſe vel hujuſmodi Ungulam, vel ſaltem in hujuſmodi aliquot Ungulas diviſibilem. Adeoque (ſi dari intelligatur arcus circularis Centrum gravitatis, quod prop. 14. exhibetur:) iſtius ſive Ungulæ, ſive Ungularum aggregati, magnitudo hinc habebitur. Quod de aliis item Corporum Priſmaticorum ſuperficiebus, figuriſque inibi deſcriptis, pariter intelligendum erit.

SCHOLIUM.

NOtandum interim, Quanquam univerſaliter procedat propoſitio, de quocunque plano XBCD, cui intelligatur ut baſi inſiſtere Solidum Priſmaticum; adeoque & quamcunque habeat ad baſin ſuam inclinationem: Expedire tamen nonnunquam poſſe, illud ex omnibus Planum ſeligere, quod ſolidum recte ſecet; cui itaque ad angulos rectos inſiſtat ſolidum. Utut enim vel Fruſtum ſecet, vel ne attingat quidem, illud XBCD planum, idem interim de altitudine cx (fig. 139.) intelligendum erit, quod de Cx (fig. 136.) dictum eſt.

PROP.

PROP. XII.

A. Si Figura plana circa rectam quamvis in eodem plano expositam (quæ expositam figuram non secet) conversa, Figuram solidam describat: Æquatur solidum hoc, solido Prismatico super eadem vel æquali Base; altitudinem habenti æqualem Peripheriæ (perfectæ vel imperfectæ prout conversio perfecta fuerit vel imperfecta,) quæ expositæ figuræ convertendæ Centro Gravitatis describitur. Fig. 142.

B. Idem intellige, de Linea recta (vel curva) in plano illo descripta, quæ conversa intelligatur superficiem describere. Æquabitur utique hæc superficies, superficiei super expositam lineam erectæ, altitudinem habenti æqualem peripheriæ quæ Centro gravitatis conversæ lineæ describitur.

C. Sin recta, circa quam convertitur, expositam figuram lineamve convertendam secuerit: intelligendum erit de Differentia descriptorum, ab illis conversi partibus, quæ utrinque ad rectæ secantis contrarias partes constituuntur.

D. Hinc itaque; Data figuræ planæ, lineæve in plano, tum Magnitudine, tum Centro gravitatis, (hujusve ab Axe conversionis distantia;) datur figuræ, expositæ conversione factæ, magnitudo.

E. Dataque tum conversæ, tum conversione expositæ factæ, magnitudine; datur distantia centri gravitatis conversæ, ab axe conversionis.

F. Data denique, tum magnitudine expositæ conversione factæ, tum Centri gravitatis conversæ distantia ab axe conversionis; datur conversæ magnitudo.

Conversionem autem *expositam* hic dicimus, quæ quota vel quanta pars sit integræ conversionis, aut ipsa integra conversio, exponitur. Supponimus item, peripheriæ datæ longitudinem datam esse.

G. Estque Centrum Gravitatis Ungulæ (sive solidæ sive superficialis) in illo per aciem plano quod altitudinem bisecat; Solidi vero aut superficiei conversione facti, in illo plano quod conversionis angulum vel arcum bisecat.

H. Atque hinc constat generalis methodus exhibendi solidum figuræ planæ circa rectam quamvis in eodem plano descriptam (saltem quæ ipsam non secet) conversione factum; Superficiemve conversione lineæ cujusvis (rectæ aut curvæ) in eodem cum conversionis axe plano descriptæ.

I. Hinc utique colligitur; Solidum conversione semiparabolæ circa rectam in vertice Tangentem descriptum; ad Cylindrum qui simili conversione Parallelogrammi circumscripti circa eandem rectam Tangentem describitur; esse, ut 4 ad 5.

K. Similiter, si circa semiparabolæ basin convertatur, tum Semiparabola, tum Circumscriptum Parallelogrammum: Solidum illius, ad solidum hujus conversione factum, invenietur, ut 8 ad 15.

L. Si, circa semiparabolæ Axem, utrumque planum convertatur; solidum Semiparabolæ ad solidum parallelogrammi conversione factum; invenietur ut 1 ad 2.

M. Si, circa rectam basi adjacentem, Axi parallelam, utrumque planum convertatur; invenietur solidorum ratio, ut 5 ad 6.

N. Et similiter, Quæ eorundem conversione circa aliam quamvis in eodem plano expositam rectam (quæ figuram non secet) in quacunque di-

ſtantia remotam, & quocunque ſitu poſitam, fiunt Solida; rationem inter ſe habebunt, hac methodo inveſtigabilem. Idemque in aliis figuris mille modis efficietur.

O. Hinc etiam ſequitur: Si converſarum tum Magnitudines, tum Centrorum-gravitatis Diſtantiæ, ſint vel utræque æquales, vel reciproce-proportionales; Figuras, ſimili converſione factas, æquales eſſe: Sin minus; ſaltem in ratione ex illarum Magnitudinum & Diſtantiarum rationibus compoſita. per prop. 6, 7, Cap. 1.

Item; Annulum quemvis, æqualem eſſe, Plano converſo, in Peripheriam Plani Centro gravitatis deſcriptam, ducto. Quod tum de Annulo integro, tum de ipſius partibus, perinde obtinet; prout Converſio integra fuerit, vel partialis.

Item; Circulum, æqualem eſſe, facto ex Radio ducto in ſemiſſem Peripheriæ; (nempe, in Peripheriam, Radii Centro gravitatis ſeu puncto medio deſcriptam; quæ Peripheriæ Radio deſcriptæ ſemiſſis eſt.) Quod tum in Circulo integro, tum ipſius Sectoribus, perinde verum eſt.

Item; Curvam Cylindri recti Superficiem, æqualem facto ex Latere (hoc eſt, recta circumducta,) in Peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, (quæ Baſis peripheriæ æqualis eſt.) Idemque de Converſionibus Dimidiis, aut Partialibus aliis, perinde obtinet atque de Integris. Et ſic in reliquis.

Item; Cylindri recti Solidum, æquale, Parallelogrammo circumducto, ducto in peripheriam ſuo Centro gravitatis deſcriptam; (quæ eſt Peripheriæ Baſis dimidia, propter Parallelogrammi Centrum gravitatis in media ſive longitudine ſive latitudine.)

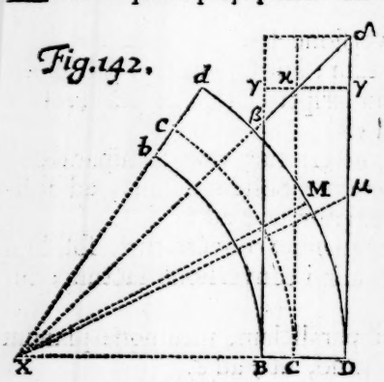
Item; Curvam Coni recti Superficiem, æqualem Lateri (hoc eſt, rectæ circumductæ) ducto in Peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam; (quæ eſt dimidia peripheriæ Baſis.) Quod & Trunci ſuperficiei (plano Baſi parallelo abſciſſi) etiam accommodabitur.

Item; Conum Rectum, æqualem Triangulo circumducto, ducto in Peripheriam ipſius Centro gravitatis deſcriptam; (quæ Peripheriæ Baſis Triens eſt.) Quod & Trunco (plano Baſi parallelo abſciſſo) accommodabitur.

Et in reliquis ſimiliter.

A. ESto expoſita figura plana B C D (in B C D lineam rectam projecta, ea projectione qua in prop. præced. uſi ſumus) quæ circa rectam in eodem plano X (in unicum X punctum projectam) extra (ſaltem non intra) figuram expoſitam converſa, deſcribat B D d b figuram ſolidam; (ſimiliter in planum projectam;) Adeoque baſis Centrum gravitatis C deſcribat C c peripheriam.

Fig. 142.



Vel etiam B C D recta vel curva linea quælibet in eodem plano, (ſimiliter in B C D rectam projecta;) quæ circa X converſa deſcribat B D b d ſuperficiem eodem modo in Planum projectam: ſuoque Centro Gravitatis C, deſcribat C c peripheriam.

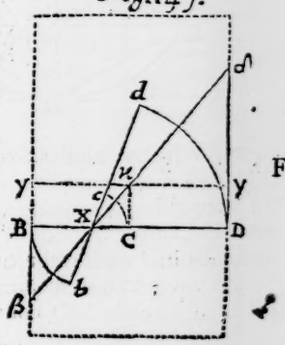
Et ſuper eandem baſem erigatur Solidum Priſmaticum, vel Priſmatica Superficies; cujus recta, Centro gravitatis C inſiſtens, C x, æqualis ponatur ipſi C c peripheriæ. Planoque X x, abſcindatur Fruſtum B D δ c.

Cumque

Cumque tum B b, C c, D d, &c. (ſimiles arcus) ſint radiis ſuis X B, X C, X D, &c. proportionales ; tum (propter ſimilia triangula) iiſdem X B, X C, X D, &c. proportionales rectæ B β, C ϰ, D δ : erunt hæ rectæ arcubus illis proportionales : Adeoque, propter C ϰ ipſi C c æqualem, per conſtructionem ; erunt & reliquæ reliquis æquales ; & omnes omnibus : Hoc eſt, B D d b figura (ſive ſolida ſive ſuperficiaria converſione facta) ipſi B D δ β Fruſto ; adeoque & (per præcedentem) ipſi B D γ ϰ γ figuræ Priſmaticæ ſuper eandem vel æqualem baſin Altitudinem habenti C ϰ, ipſi C c æqualem. Quod erat demonſtrandum. C.

Sin converſionis axis X, ſecet figuram lineamve convertendam : ſimiliter oſtendetur, ſegmentum Fruſti X D δ, ſegmento facti ex converſione X D d ; & reliquum X B β, reliquo X B b : Ergo & differentia differentiæ æqualis ; Et utravis (per demonſtrata ad prop. præced.) ipſi Priſmatico (Solido, vel Superficiei,) B D γ ϰ γ. Quod itidem erat demonſtrandum.

Fig. 147.



D. Fig. 142.

Itaque ; Data figuræ planæ lineæve expoſitæ (BCD) magnitudine quæ ſit *BB*, vel *B* ; atque Centri gravitatis C, ab X converſionis axe, diſtantia ; adeoque & peripheriæ C c longitudine, quæ ſit *P* : datur expoſita converſione factæ magnitudo *PBB*, vel *BP*. Nempe, quod fit ex *BB*, vel *B*, in *P* ducto.

BB	B
P	P
PBB	PB

E.

Item ; data magnitudine factæ expoſita converſione ; puta *PBB*, vel *PB* ; ipſaque converſæ magnitudine *BB*, vel *B* : datur arcus (ſpecie expoſiti) longitudo *P* ; (nempe quod ex *PBB* vel *PB*, per *BB* vel *B* diviſo emergit) adeoque & radii quo deſcribitur : quæ eſt diſtantia Centri gravitatis C ab axe converſionis.

BB)PBB(P
B)PB(P

F.

Item ; data *PBB* vel *PB* magnitudine figuræ converſione factæ ; & diſtantia centri gravitatis converſæ à converſionis axe ; adeoque & quæ ab hoc deſcribitur Peripheria *P* : Datur converſæ magnitudo, *BB* vel *B*. Nempe, quod ex *PBB*, vel *PB*, per *P* diviſo, emergit.

P)PBB(BB
P)PB (B

Denique ; Biſectis D d in M, & D δ in μ ; ductiſque per converſionis axem vel G.

Fig. 143.

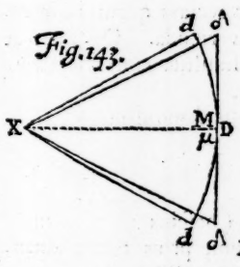


Fig. 144.

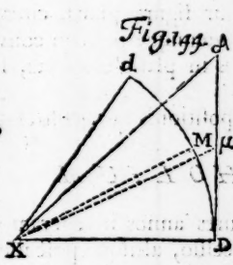


Fig. 145.

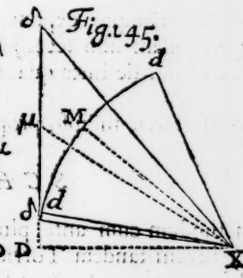
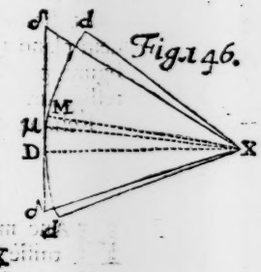


Fig. 146.

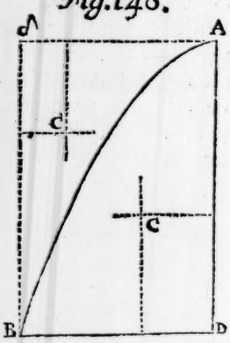


Ungulæ aciem X, planis X M, X μ : Erunt, in illo, Centra gravitatis ſingulorum arcuum ut B b, D d, converſione factorum : in hoc, rectarum ſingularum ut B β, D δ ungulam conſtituentium, (per 2 & 3 hujus :) Adeoque in illo arcuum commune omnium, (hoc eſt, ſuperficiei vel ſolidi converſione facti ;) in hoc, commune omnium rectarum, (hoc eſt, Ungulæ ſuperficialis ſolidæve,) centrum gravitatis : per 27 Cap. præced. Quæ erant ultimo demonſtranda. Fig. 142, 143, 144, 145, 146.

Atque hinc conſtat generalis Methodus exhibendi Solidum converſione figuræ planæ (lineæve in plano) circa rectam in eodem plano deſcriptam : Saltem quæ ipſam non ſecet. H. Fig. 148.

Exempli gratia. Sit A D B ſemiparabola ; cujus magnitudo ad magnitudinem I.

Fig. 148.



parallelogrammi circumſcripti A D B ♌ eſt ut 2 ad 3; Centrum vero gravitatis à Vertice A ♌ diſtat $\frac{3}{5}$ Altitudinis, per 6 hujus; Parallelogrammi centrum à vertice diſtat, $\frac{1}{2}$ Altitudinis: Ergo illius ad hujus diſtantiam, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; vel, ut 6 ad 5. Adeoque propter plani magnitudinem ad magnitudinem, ut 2 ad 3; & Centri diſtantiam ad diſtantiam, ut 6 ad 5; Erit ſolidum ex converſione ſemiparabolæ A B D ad Cylindrum ex converſione A D B ♌, circa eandem A ♌; in ratione ex illis compoſita, ut 12 ad 15, vel 4 ad 5.

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

K. Eadem ſi converſa intelligatur circa B D; (unde Centrum Gravitatis diſtat $\frac{2}{5}$ altitudinis; adeoque ad diſtantiam Centri Gravitatis parallelogrammi circumſcripti, ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; ſive ut 4 ad 5; & magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 3;) Solidum converſione factum, ad circumſcriptum Cylindrum, erit ut 8 ad 15.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

L. Eadem circa A D converſa; propter magnitudinem, ut prius, ſicut 2 ad 3; & diſtantiam Centri gravitatis ad A D, $\frac{3}{8}$ Latitudinis, adeoque ad diſtantiam inde Centri gravitatis parallelogrammi circumſcripti, ut 3 ad 4: per 8 hujus:) ſolidum faciet, ad Cylindrum circumſcriptum; ut 6 ad 12, vel 1 ad 2.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

M. Eadem denique circa B ♌, (unde Centrum gravitatis diſtat $\frac{5}{8}$ latitudinis; adeoque ad diſtantiam Centri gravitatis parallelogrammi ut 5 ad 4; & magnitudo ut prius;) ſolidum faciet, ad circumſcriptum Cylindrum, ut 10 ad 12; vel 5 ad 6.

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

N. Atque eodem plane modo faciendum eſſet, etiamſi rectæ A ♌, ♌ B, A D, D B, non adjacerent, ſed in remota diſtantia, vel etiam obliquo quovis ſitu, utcunque in eodem plano; dummodo figuram convertendam non ſecet expoſitus converſionis Axis.

Et ſimiliter quæcunque exponatur figura plana, circa rectam quamvis in eodem plano (quæ illam non ſecet) utcunque poſitam convertenda. Quodque de figura plana dictum, de linea quavis in plano deſcripta, ſimiliter convertenda intelligatur.

O. Reliqua conſectaria, in ipſo propoſitionis curriculo ſatis demonſtrantur.

SCHOLIUM.

HAnc methodum cum ante plures annos inveneram (neſcius id prius innotuiſſe) inveni tandem Torricellio, aliiſque poſt illum, prius fuiſſe, notam.

Si vero Figura converſa, non ſit Plana, vel non in eodem Plano cum converſionis Axe, (quod & de Lineis ſimiliter intellige:) pro converſa, ſubſtituenda eſt alia (in eodem plano cum Axe) in quam, Converſa, ſic projecta intelligatur, ut utriuſque reſpectiva Puncta ſingula tantundem diſtent à converſionis Axe.

PROP.

PROP. XIII.

Si circa rectam quamvis, ut converſionis Axem feratur (converſione integra vel partiali) Linea recta terminata, in eodem (cum Axe) Plano utcunque poſita, (modo ne axem ſecet, aut illi ſit ad angulos rectos:) Quæ à converſa recta deſcribitur Superficies Curva, æquatur Superficiei Cylindri recti, quæ ſimili converſione deſcribitur à recta quæ æqualis ſit Axis Portioni duabus rectis à converſæ rectæ extremis punctis ad axem perpendicularibus interjectæ, in illa ab axe diſtantia quæ æqualis ſit perpendiculari, medio converſæ rectæ puncto inſiſtenti, ad axem terminatæ, circumlata. A. B. C.

Quodque de una converſa recta dicitur, pluribus ſimiliter accommodabitur. D.

Adeoque; Si Semi-circumferentiæ Circuli, vel arcui minori, circumponatur ex continuis rectis (quæ mediis ſuis punctis peripheriam contingant) conflata linea: Quæ ab hac linea compoſita, circa iſtius circuli diametrum quamvis (quæ illam non ſecet) converſa, deſcribitur Superficies curva; æquatur Superficiei curvæ Cylindri recti, æque-alti, baſin habentis expoſito circulo æqualem. E.

Adeoque &; Superficies curva quæ à Semi-perimetro (vel hujus portione, ex integris Lateribus quotlibet conſtante) *Polygoni regularis*, circa Polygoni illius diametrum (quæ illam non ſecet) converſa deſcribitur; æquabitur ſuperficiei curvæ Cylindri recti æque-alti, baſem habentis æqualem circulo qui Polygono illi inſcribitur. Et Partes partibus reſpective ſumptis. F.

Et, ſpeciatim; *Superficies Sphæricæ*, æquatur ſuperficiei curvæ Cylindri recti circumſcripti: Ejuſque Portiones, reſpectivis hujus portionibus; ſive Planis per Axem, ſive planis ad Axem rectis, abſciſſis. G.

Atque hinc ſequitur; Superficiem Sphæræ, æqualem eſſe quatuor circulis in Sphæra maximis. H

Item; Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis interjecta, Altitudinibus (vel abſciſſis Axis Portionibus) eſſe proportionalia. I.

Et; Segmenti Superficiei Sphæricæ, duobus parallelis planis interjecti, Centrum gravitatis eſſe in Axis ſegmenti medio. K.

Quæ quidem Conſectaria, etiam *Sinibus Rectis*, & *Subtenſis* arcuum (mutatis mutandis) accommodanda ſunt; (utpote illorum in Superficie Sphærica Circulorum Radiis & Diametris.) Nempe, L.

Summa Sinuum Rectorum totius ſive Quadrantis ſive Semicirculi; adeoque & ſumma Chordarum vel Subtenſarum arcuum totius ſive Semicirculi ſive Circuli integri; æquatur Parallelogrammo circumſcripto. Et partes partibus reſpective ſumptis, quæ parallelis planis abſcinduntur. Nempe,

Summa Sinuum Rectorum integri Quadrantis, æquatur Quadrato Radii: Summa Sinuum rectorum totius Semicirculi; vel Subtenſarum arcuum in Semicirculo; duobus Quadratis Radii: Et Summa Subtenſarum in Circulo integro, Quadrato Diametri, ſeu quatuor Quadratis Radii. M.

Item

N. Item (in partibus horum) Summa Sinuum rectorum cujuſvis Arcus particulis (in ſuo ſitu) convenientium, æquatur Parallelogrammo æque-alto, baſem habenti Radium Circuli. (Summaque Subtenſarum correſpondentium, hujus dupla.)

O. Adeoque; Summæ partiales, ſunt Altitudinibus (ſeu Axis particulis interceptis) proportionales.

P. Et; Summæ (ſive Partialis, ſive Totalis,) Centrum-gravitatis, in media Altitudine; Subtenſarum quidem, in ipſo Axis medio; Sinuum, ſaltem æque-altum.

Q. Hinc eadem etiam transferuntur ad *Superficiem curvam Ungula*, ſuper Semicirculum, ejuſve Portionem erectæ, cujus Acies ſit Diameter Semicirculum terminans. Nempe,

Si plani ſecantis ad circuli planum Inclinatio, ſit graduum 45, ſeu Semi-quadrantalis, (adeoque altitudo maxima, æqualis maximo Sinuum;) Curva Superficies æquatur Summæ Sinuum rectorum; (& partes partibus reſpective ſumptis.)

R. Si vero Altitudo maxima, ſit ad maximum Sinuum, ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium; erit Unguæ Curva Superficies, æqualis curvæ ſuperficiei Sphæræ vel Hemiſphærii eiſdem planis (Axi rectis) interjectæ. Atque in aliis Altitudinibus proportionaliter.

S. Et Centrum Gravitatis (quæcunque ſit Ungulæ altitudo) in perpendiculari Plano medio inter extremos Sinus.

M,N,T. Atque hæc eadem, ad *Figuram Sinuum Rectorum*, ſive Quadrantis unius ſive totius Semicirculi, (quæ quidem nihil aliud eſt, quam illa Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindri Curva Superficies in planum expanſa,) ſimiliter accommodantur. Nempe; Figuram illam Sinuum rectorum unius Quadrantis, æqualem eſſe Quadrato Radii; totius autem Semicirculi, æqualem duobus Radii Quadratis; & Segmentum quodvis duobus ſinibus interjectum, æquale facto ex Radio in Diametri Circularis Segmentum duobus correſpondentibus in Semicirculo Sinibus interjectum ducto. (Unde & alia ejuſdem portio quælibet, curvæ hujus particula & recta rectiſve terminata, ſimiliter data erit.)

V. Eademque porro ampliantur, ad *Summas Quadratorum, Cuborum, Biquadratorum*, aliarumve poteſtatum, eorundem *Sinuum Rectorum*. Nempe; Ut *omnes Sinus Recti*, Segmento cuivis Semicirculi (parallelis Sinibus interjecto) reſpondentes, æquantur facto ex Radio in Diametri Segmentum interjectum ducto: Sic & eorundem *Sinuum Quadrata omnia*, æquantur Radio in omnes ordinatim-applicatas (eadem ad invicem diſtantia ſumptas, qua diſtant in arcu circulari Sinus ipſi) ſegmentum illud complentes ducto: Et Sinuum illorum *Cubi omnes*, æquantur Radio in harum Ordinatim-applicatarum Quadrata: Sinuumque *Biquadrata*, Radio in harum Cubos ducto: & ſic deinceps.

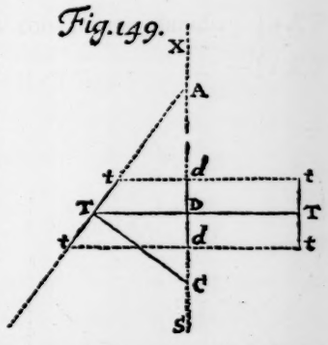
W. Atque hinc porro habetur, Momentum Superficiei Ungulæ iſtius Semicylindri, ejuſve ſegmenti, reſpectu (aciei ſuæ) Diametri circularis. (Nempe, in Semiquadrantali Vngula, Sinuum illorum Quadratorum Summæ æquale: in aliis, pro altitudinum ratione.) Ipſumque gravitatis Centrum.

Item;

Item; Figuræ Sinuum Rectorum, ejuſve Segmenti, Momentum reſpectu rectæ cui adjacent Sinus illi: Vel, Semiquadrantalis Ungula (unde & de aliis Ungulis fiet judicium pro altitudinum ratione,) Figuræ Sinuum Rectorum, ejuſve Segmenti, aciem habens rectam illam cui adjacent. (Nempe, Semiſſis Summæ Quadratorum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis Plani diſtantia ab ipſa cui adjacet recta. X.

Item; Hujus Ungulæ Momentum, reſpectu ejuſdem adjacentis rectæ, aciei ſuæ. (Nempe, Triens ſummæ Cuborum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis inde diſtantia. (Intellige: Si prius cognoſcatur, tum ordinatim-applicatarum illarum Summa, hoc eſt, ipſum Semicirculi Segmentum; tum ſumma quadratorum earundem ordinatim-applicatarum: Quorum utrumque methodis jam notis cognoſcuntur: atque hic infra docentur.) Y.

CIrca Axem XS, recta t t (in eodem plano conſtituta) convertatur; cujus medio Puncto T inſiſtens perpendicularis TC, axi occurrat in C: Ab extremis autem punctis t, t, perpendiculares ad axem ducantur td, td; atque, à T medio, TD. A.



Si ſit tTt axi parallela: Manifeſtum eſt, tum TC, TD, eandem eſſe rectam, tum dDd, tTt, (parallelas parallelis terminatas,) rectas æquales; adeoque conſtare propoſitum.

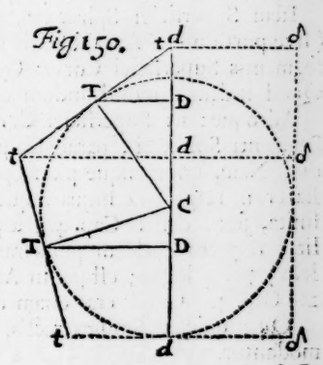
Sin parallela non ſit; occurrat Axi in A: Eritque (propter parallelas, & ſimilia triangula,) tTt, ad dDd; ut AT ad AD; hoc eſt, (propter ſimilia triangula,) ut CT, ad TD. Adeoque, factum ab extremis, tt in TD; æquabitur facto à mediis, dd in CT. Et (propter, ſimiles Peripherias, radiis ſuis proportionales,) Factum ex tt in peripheriam radio DT deſcriptam, ad factum ex dd in ſimilem peripheriam deſcriptam radio CT, vel qui huic æqualis ſit. Adeoque (per prop. præced.) Superficies curva quæ à converſa tt (cujus centrum gravitatis eſt T, ejuſque ab axe diſtantia TD) deſcribitur; æqualis erit curvæ ſuperficiei Cylindri, quæ recta dd vel huic æquali deſcribatur, in diſtantia ab axe quæ ſit ipſi CT æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Nempe; qua ratione CT longior eſt quam DT, eadem brevior eſt dd quam tt.

Dico autem; *modo ne Axem ſecet*; quoniam (ut ad prop. præced. dictum eſt,) hoc caſu, duarum curvarum differentiæ, æqualis eſſet illa Superficies Cylindrica. B.

Item; *ne ſit ad axem ad angulos rectos*: quoniam, hoc caſu, non Curvam ſed Planam ſuperficiem deſcriberet converſa recta; cui in Curva ſuperficie Cylindrica nihil reſponderet. Nec, de illa procederet demonſtratio. C.

Quodque de una converſa recta dictum eſt; pluribus ſimiliter accommodabitur; ductis, à ſingularum punctis mediis, ad axem, reſpectivis rectis. Quippe ſi in omnibus eadem ſit, vel æqualis, recta TC; ejuſdem Superficiei Cylindricæ ſegmentis æquales erunt quæ à tt rectis deſcribentur: Sin minus; diverſarum. D.



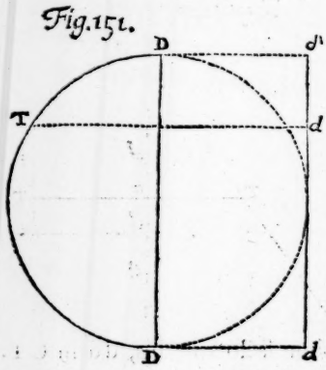
Puta; Si circa Semiperipheriam (arcumve adhuc minorem) circumponatur, ex rectis conflata ttt linea; quarum ſingularum puncta media T, T, ſint in TT peripheria; adeoque TC, TC, invicem æquales: rectis autem tt, tt, æquealtæ dd, dd, axis portiones; atque his æquales δδ, δδ; quarum ab axe diſtantia dδ ſit æqualis E.

ipſi T C, (quæ cum ſit inſcripti circuli radius; eundem tanget δ δ δ.) Oſtendetur, ex jam demonſtratis, Superficies rectis t t, t t, deſcriptas, ſigillatim æquales eis eſſe quæ rectis δ δ, δ δ, deſcribuntur. Ergo; quæ tota t t t deſcribitur, toti deſcriptæ à δ δ δ. Quod itidem probandum erat.

F. Adeoque; Si t t t ſit tota Semi-Perimeter Regularis Polygoni: De hac item conſtat. Sin ipſius ſaltem aliqua latera; De ſuperficie ſaltem his lateribus deſcripta conſtat. Sin forte, ad complendam Semiperimetrum, deſit Semi-latus, ut t d; quod perpendiculare ſit ipſi d d Axi; (vel etiam utrinque inter lineæ compoſitæ t t t extrema, & axem, ſimile ſit interſtitium:) ſaltem tota ſuperficies Curva quæ à Semiperimetro deſcribitur, æqualis jam oſtenſa eſt deſcriptæ Cylindri Curvæ à δ δ δ. Quippe quæ à t d deſcribitur, plana erit: nec magis hic in conſiderationem venit, quam Cylindri Baſes. De Curvis utique Superficiebus procedit Propoſitio.

(Atque hinc facile deducerentur, non modo ea prope omnia quæ ab *Archimede*, de *Sphæra & Cylindro*; ſed & eorum plurima quæ à *Torricellio*, de *Solidis Sphæralibus*, demonſtrantur.)

G. *Fig. 151.*



Denique; Cum Circulus aliud non ſit quam Polygonum regulare laterum numero infinitorum; ſitque Semiperipheria, iſtius Polygoni Semiperimeter; (juxta def. 1. Cap. 4.) etiam hic ſpeciatim verum erit quod de omnibus demonſtratum eſt. Hoc eſt; Quæ Semiperipheriæ D T D circa axem D D converſione deſcribitur Superficies Sphærica, æquatur ſuperficiei Curvæ Cylindri æque alti à recta δ δ deſcriptæ; Et portiones illius portionibus hujus reſpective ſumptis; puta, quæ à curva D T deſcribitur, illi quæ à recta δ d æque-alta; item, quæ ſemiconverſione unius, illi quæ à ſemiconverſione alterius; (& in aliis ſimiliter converſionibus imperfectis.) Quæ itidem erant demonſtranda.

H. Atque hinc ſequitur; Superficiem Sphæræ, quatuor circulis maximis æqualem eſſe. Eſt utique Circuli in Sphæra maximi peripheria, æqualis peripheriæ baſis expoſiti Cylindri (propter æquales utriuſque radios:) eaque ducta in latus Cylindri, (quod æquatur Diametro Sphæræ,) exhibet Cylindri ſuperficiem curvam, ut notum eſt; (vel, quod eodem recidit, recta δ δ in peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, quæ eadem eſt cum peripheria circuli in Sphæra maximi, eandem exhibet ſuperficiem curvam Cylindri, per prop. præced.) Cum itaque quod fit ex Semidiametro in Semicircumferentiam æquetur Circulo, (ſive, quod fit ex Semidiametro in peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, quæ dimidia eſt peripheriæ tota deſcriptæ:) quod fit ex tota Diametro in totam Peripheriam, (hoc eſt, Curva ſuperficies Cylindri, adeoque & Sphæræ,) æquatur Quadruplo ejuſdem circuli maximi. Quod erat propoſitum.

I. Item Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis abſciſſa, altitudinibus (ſive portionibus Axis abſciſſis) ſunt proportionalia. Æqualia ſcilicet reſpectivis ſegmentis Superficiei Curvæ Cylindricæ; quæ ſunt altitudinibus proportionalia. Quod itidem demonſtrandum erat.

K. Adeoque; ut Superficiei Curvæ Cylindricæ, (per prop. 4 & 5 hujus,) ſic &
Fig. 152. Segmenti Sphærici, parallelis planis abſciſſi, Centrum gravitatis eſt in Axis Medio. Nam, quotcunque planis parallelis, utraque ſecetur ſuperficies curva; æqualia erunt reſpectiva hujus atque illius Segmenta; & (ſi intelligantur numero infinita, juxta def. 1. Cap. 4.) æqualiter à medio plano remota, adeoque & æqualiter reſpectu ejuſdem ponderantia. Eſt igitur in plano medio (baſibus parallelo) per 4 hujus; eſtque in Axe, per 5 hujus; ergo in Axis puncto medio, per 26 Cap. 4. Quod erat etiam demonſtrandum.

Quæ quidem Sinibus rectis, & Arcuum Subtenſis ſive Chordis, facile accommodantur.

Intel-

Fig. 152.

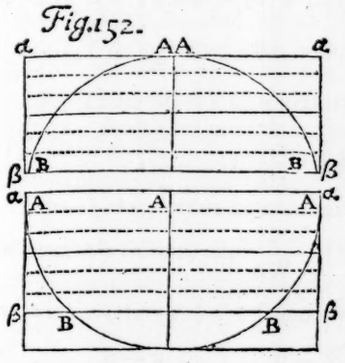
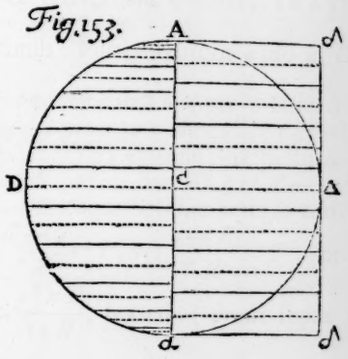


Fig. 153.



Intelligantur enim, tum à ſingulis punctis ſive particulis infinite-exiguis Diametri circularis ſive Axis A α, Ordinatim-applicatæ, ad δ δ Tangentem circuli parallelam pertingentes, (parallelogrammum circumſcriptum complentes:) tum à Semicircularis arcus A D α ſingulis punctis, ſive particulis infinite-exiguis (particulis illis Diametri æqualibus) Sinus recti ad Diametrum vel Axem A α demiſſi: (Quorum itaque numerus ſeu multitudo, reputanda erit ad numerum ſeu multitudinem ordinatim-applicatarum, ut eſt Longitudo Semiperipheriæ ad Diametrum Circuli.) Fig. 153.

Cum itaque ſingulæ arcus Particulæ; ſeu earum Tangentes, cum particulis illis exiguis quaſi coincidentes; ſint (ut jamjam oſtenſum eſt) in ea ratione magis Obliquæ, ſeu minus Altæ, qua Breviores ſunt Sinus recti inde demiſſi: adeoque, Arcus æque alti, in eadem ratione Longiores, indeque Sinus demiſſi eo plures in eadem altitudine quo breviores ſunt; (& quidem eo plures quam ſint in eadem altitudine ordinatim-applicatæ expoſitæ, quo breviores ſunt quam illæ ordinatim-applicatæ Radio æquales:) Erunt ubique, in eadem altitudine, omnes ſimul Sinus recti, omnibus ſimul ordinatim applicatis, æquales: (ſupplente ſcilicet Multitudine quod in Longitudine deeſt.)

Adeoque; Omnes Sinus recti Quadrantis A C D, omnibus Ordinatim-applicatis Quadrati A C Δ δ. M.

Hoc eſt; (Si intelligatur Arcus A D in rectam extendi; eique ad angulos rectos inſiſtere Sinus recti in ſuis reſpective punctis; & per eorum omnia extrema puncta duci curva, Figuram terminans, quæ *Figura Sinuum Rectorum* dicatur;) Figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, A C D, Quadrato Radii æqualis erit. Fig. 155.

Item; Omnes Sinus recti, in A α D Semicirculo, omnibus Ordinatim-applicatis in Parallelogrammo A α δ δ. Fig. 153.

Hoc eſt, Figura Sinuum rectorum totius Semicirculi, A C α; duobus Quadratis Radii. Fig. 155.

Adeoque; Si, continuatis Sinibus, compleantur Subtenſæ duplorum Arcuum; manifeſtum eſt (propter Subtenſas Sinuum duplas) Omnes Subtenſas Semicirculi, æquari duobus Quadratis Radii; & Omnes Subtenſas totius Circuli, quatuor Quadratis Radii, ſive Quadrato Diametri. Quod erat etiam probandum.

Cumque hoc ubique obtineat; Idem in partibus non minus valet. Puta, omnes Sinus Recti in portionibus Circularibus A B E, E B C D, E B F G, G F H K, &c. æquales omnibus Ordinatim-applicatis, in Parallelogrammis A B ♮ δ, ♮ B C Δ, ♮ B F γ, γ F H κ, &c. N. Fig. 154.

Hoc eſt, (expanſis Arcubus in Rectas, erectiſque Sinibus, & completa ut prius figura) Figura figuræ æqualis. Puta E B F G in figura Sinuum, æqualis Parallelogrammo ♮ B F γ: Et ſic in cæteris. Quod etiam erat probandum. Fig. 154, 155.

Sed &, Si Axis A α in Circulo, jam conſideretur ut Libra, (in ſitu Horizontali poſita;) ſimiliter oſtendetur ipſius particulas æquales ſingulas, inſiſtentibus (in ſuo ſitu) Sinibus rectis, æqualiter gravatas eſſe; non minus quam, ex oppoſita parte, Ordinatim-applicatis. O. Fig. 153.

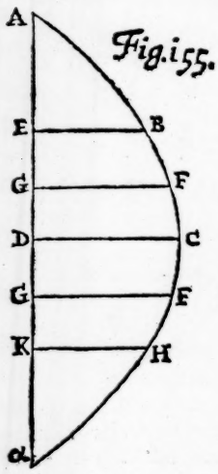


Fig. 155.

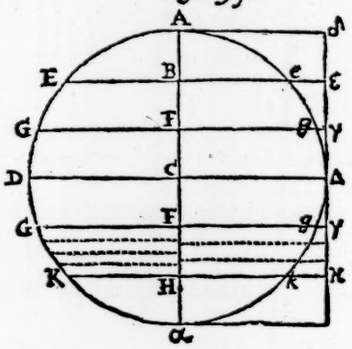


Fig. 154.

P. Fig. 154. Adeoque; (ſive tota A α, ſive pars ut B F conſideretur,) Centrum Æquilibrii erit in aſſumptæ Libræ medio; (per prop. 2 & 4 hujus.) Puta, Summæ Sinuum portionis E B F G, in altitudine media inter E B & F G, (ſive ad eaſdem, ſive ad oppoſitas centri partes ponantur ipſæ E B, F G.) Quod erat itidem demonſtrandum.

Dico autem, *In ſuo ſitu*: Quoniam ſi intelligatur (ut in figura Sinuum, fig. 155.) Arcus in rectam extendi: rem ſecus eſſe, (ob variatas ſinuum diſtantias,) manifeſtum eſt. Niſi cum E B, G F, utrinque à Centro æqualiter diſtant.

Totumque hoc quod de Sinibus Rectis (Arcuumve Subtenſis) hic traditur, eodem plane principio nititur, atque illud de Superficie Sphærica, ejuſque partibus. Quippe Sinus Recti, Arcuumque Subtenſæ, in ſuo ſitu exiſtentes, non ſunt niſi Radii Diametrique Peripheriarum, æqualibus ab invicem diſtantiis remotarum, ſuperficiem illam Sphæricam complentium. Atque ut illæ omnes Peripheriæ, omnibus Cylindricam ſuperficiem complentibus Peripheriis æquantur: Sic & Illarum omnes Radii, & Diametri, omnibus item Radiis, & Diametris, Harum. Quod & in partibus obtinet reſpective ſumptis pariter utrobique.

Q. Fig. 154. Eadem Curvæ Superficiei Ungulæ ſic accommodantur.

Si ſuper A α D Semicirculo, vel ipſius Segmento quovis, ut E B F G, (rectis E B, G F, quibuſvis, quæ ſint ad angulos rectos Axi A α, interjecto,) erigatur Ungula, cujus Acies (ſeu communis interſectio Baſis Planique ſecantis) ſit in A α; ſitque Planorum (Baſis ſcilicet, Planique ſecantis, ſeu Ungulam abſcindentis,) Inclinatio, Semi-quadrantalis: (quam *Semi-quadrantalem Ungulam* appellamus:) Rectis E B, G F, (reliquiſque hiſce parallelis,) inſiſtet Triangulum Rectangulum, & quidem (propter Inclinationem Semi-quadrantalem) Iſoſceles. Adeoque (cum hoc ubique obtineat) ſingulis Peripheriæ A D α, vel E G, punctis, inſiſtent rectæ (curvam Ungulæ Superficiem complentes) ſuarum diſtantiis ab A α, ſeu Sinibus rectis, æquales. Eritque, propterea, Curva Superficies Ungulæ, æqualis ſummæ Sinuum rectorum; ſive (extenſo in rectam arcu A D α, vel E G, erectiſque Sinibus, & completa ut prius figura,) correſpondenti Figuræ Sinuum rectorum, ejuſve portioni correſpondenti. (Eſt utique Figura illa Sinuum rectorum A α C, nihil aliud quam iſtius Ungulæ Superficies curva, in planum expanſa.)

Fig. 155.

Fig. 154. Hoc eſt, per modo demonſtrata, Parallelogrammo α A δ (fig. 154.) ſi Baſis Ungulæ ſit A α D: vel, Parallelogrammo B F γ ε, ſi Baſis ſit E G. Et partes partibus reſpective ſumptis æquales.

Fig. 154, 155. Nempe, Quæ inſiſtet arcui E G curva ſuperficies Ungulæ Semi quadrantalis (aciem habentis B F) æqualis erit ſuperficiei planæ E B F G in figura Sinuum; hoc eſt B F γ ε Parallelogrammo. Et ſic ubique.

R. Fig. 154. Si vero (pro alia Plani ſecantis ad Baſin Inclinatione) alia ſit altitudo: puta, altitudo in E, ad diſtantiam E B, (& ſic ubique,) ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium: Pro Sinubus, Sumendæ erunt Peripheriæ vel Semiperipheriæ his Radiis

Radiis descriptæ, (saltem Rectæ his Peripheriis vel Semiperipheriis æquales;) adeoque Ungulæ curva Superficies, æqualis erit Superficiei Sphæricæ, vel Hemisphæricæ, (hujusve Portioni respectivæ,) ejusdem Arcus A D α, vel E G, conversione vel semiconversione (circa A α) descriptæ. Atque in aliis altitudinibus proportionaliter. (per prop. 11 & 12 hujus.)

Adeoque, pro Parallelogrammis α A δ, B F γ ι, sumenda erunt alia æque-alta; sed quorum Bases, ad Basin A δ vel C Δ, (Radio Circuli æqualem,) sint in ea ratione quæ est Altitudo in E (vel alio Peripheriæ puncto,) ad hujus ab A α distantiam.

Eritque, propter eandem rectæ E B, rectæque ipsi in E insistentis, (& de reliquis similiter,) distantiam à Plano Sphæram tangente in α, (vel huic parallelo quovis;) Centrum Gravitatis in eadem ab illo Tangente Plano (Planove illi parallelo) distantia, qua est Centrum gravitatis Summæ Sinuum, vel Superficiei Sphæricæ, (ejusve portionis,) correspondentis. Hoc est, in Plano inter extremos Sinus, (puta inter E B, G F,) medio. Quæ itidem erant demonstranda. S.

Hujus autem Figuræ Sinuum rectorum A α C (quam totam duobus Radii quadratis æqualem ostendimus,) si portionem aliquam, duabus utcunque rectis Basi perpendicularibus interjectam, libeat mensurare; puta E B F G: Sumptis in Semicirculo (huic respondente) A D α (fig. 154.) Sinibus rectis E B, G F; quæ æquales sint, & similiter siti ipsis E B, G F, in figura Sinuum (fig. 155.) Interjecta Diametri Circularis portio B F, in ejusdem Circuli Radium ducta, exhibebit Rectangulum, expositæ portioni E B F G in figura Sinuum, æquale: ut in supra demonstratis ostensum est. T. Fig. 155.

Si vero aliam quamvis ejusdem portionem, rectis utcunque abscissam, (utut non sint basi perpendiculares,) mensurare libeat: id fiet additis vel ablatis (hujusmodi Portioni perpendicularibus interjectæ) spatiis rectilineis; prout casus expositus postulaverit.

Sciendum porro est; Summam Sinuum rectorum, portioni Circulari ut E B F G respondentium, dici posse alio atque alio modo complere tum E B F G in figura Sinuum, tum E B F G in Semicirculo; sicut eandem portionem Circularem complere dicantur, tum illa Sinuum summa, tum summa Ordinatim-applicatarum, ipsis E B, G F, interjectarum. V. Fig. 154, 155.

Intelliguntur utique tum Sinus omnes ipsis E B, G F, interjecti in figura Sinuum, tum omnes Ordinatim-applicatæ ipsis E B, G F, interjectæ in portione Circulari; æqualibus ab invicem distantiis remotæ & quasi æqualiter crassæ seu latæ: sive (quod eodem recidit) exiguis quidem sed æqualibus basis vel axis particulis insistentes; quarum itaque æqualium particularum non alia ratio haberi solet (in methodo Indivisibilium) quam quod simul-omnes toti æquentur. Fig. 153, 154, 155.

Sed in E B F G portione Circulari, Sinus recti (propter Arcum, non Axem, in æquales partes divisum) inæqualibus ab invicem intervallis removentur; adeoque inæqualibus axis particulis insistunt; (minoribus prope polos, quam longius inde:) quarum itaque habenda ratio.

Æqualibus utique Tangentibus t t, t t, (quas *T* dicemus,) sive Peripheriæ Particulis (quæ, cum infinite-exiguæ supponantur, cum ipsis Tangentibus reputandæ sunt coincidere;) inæquales respondent Axis Particulæ d d, d d, (quas *d* dicemus,) quibus insistere intelligantur Sinus recti respective sumpti. Fig. 150.

Hac autem consideratione interposita, non minus dicetur Summa Sinuum, quam summa Ordinatim-applicatarum, complere expositam portionem Circularem. Tam enim omnes sinus *s*, in suas respective *d* inæquales ducti, quam omnes Ordinatim-applicatæ (quas *o* dicemus) in suas singulæ *T* particulas æquales ductæ, eandem portionem Circularem complent. (Supponimus autem, quod & prius dictum est, particulas Peripheriæ quibus respondent Sinus recti, particulis Diametri seu Axis quibus respondent Ordinatim-applicatæ, æquales esse.) Hoc est, Omnes *s d* simul, æquales simul omnibus *o T*, (iisdem E B, G F, interjectis,) portionem E B F G in Semicirculo, pariter complentes. Omnes autem iidem Sinus *s*, in Arcus sui, Rectæve, E G, Particulas *T*; hoc est, Omnes *s T*; æquales spatio E B F G in figura Sinuum: adeoque Parallelogrammo (ut supra probatum) ε B F γ, portioni Circulari E B F G (vel huic simili & æquali e B F g) æque-alto, basin habenti Radio æqualem. Fig. 153, 154, 155.

(Differentia quæ extenſo Arcu in Rectam oritur, eſt $e g \gamma \varepsilon$.) Sic, in portione Circulari GFHK, Omnes Sinus recti s, in ſuas reſpective d, portionem complentes; æquantur Omnibus Ordinatim-applicatis o in T ductis, quæ complent (illi ſimilem & æqualem) portionem gFHk: Omnes autem iidem s in T ducti, (complentes ſpatium GFHK in figura Sinuum,) æquantur Parallelogrammo γFH$\varkappa$; excedenti ſpatium Circulare gFHk, ſpatio $\gamma g k \varkappa$. Et ſic ubique.

Similiter; Sumptis tum Sinuum omnium, tum omnium Ordinatim-applicatarum, Quadratis, Cubis, &c. erunt *Omnes* $s^2 d$, æquales *Omnibus* $o^2 T$: Item, *Omnes* $s^3 d$ = *Omnibus* $o^3 T$: & *Omnes* $s^4 d$ = *Omnibus* $o^4 T$. &c.

Fig. 149. Quanta autem ſit d in ſingulis, ſic colligitur. Cum ſit (ut in hac prop. § A. demonſtratum eſt) tt ad dd, ut CT ad TD; Hoc eſt, T ad d, ut R ad s; Adeoque $sT = dR$: Erit $d = \frac{sT}{R}$.

Adeoque; $sd = \frac{s^2 T}{R}$: Et *Omnes* sd, hoc eſt, *Omnes* oT, æquales *Omnibus* $\frac{s^2 T}{R}$: Et *Omnes* $s^2 T$, æquales *Omnibus* oTR: Sive, *Omnes* s^2, æquales *Omnibus* oR. Hoc eſt; Summa Quadratorum Sinuum Rectorum in ſpatio Circulari Fig. 154. EBFG; æqualis, *Omnibus* oR; hoc eſt, ipſi ſpatio EBFG in radium R ducto. Et ſic ubique.

Item, *Omnes* $o^2 T$ = *Omnibus* $s^2 d$ = *Omnibus* $\frac{s^3 T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^2 R$ = *Omnibus* s^3.

Item; *Omnes* $o^3 T$ = *Omnibus* $s^3 d$ = *Omnibus* $\frac{s^4 T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^3 R$ = *Omnibus* s^4. Et ſic deinceps. Quæ oſtendenda erant.

W. Fig. 154. Atque hinc porro habetur Momentum Curvæ Superficiei Ungulæ Semi-cylindri, Semicirculo ADα, ejuſve Segmento cuivis BEGF, inſiſtentis, (Aciem habentis Aα,) reſpectu aciei ſuæ. Cum enim omnes Rectæ ſuperficiem illam complentes, ſint Sinibus rectis qui eiſdem arcus punctis reſpondent Æquales, (nempe, ſi Planorum Inclinatio ſit Semi-quadrantalis,) vel ſaltem Proportionales, (quæcunque ſit Plani ſecantis ad Baſin inclinatio;) ſintque earundem ab Aα diſtantiæ, iidem Sinus Recti: Erunt earundem Momenta, ut Sinuum horum Quadrata; & Summa Momentorum, hoc eſt, Momentum Superficiei Curvæ, ut Summa Quadratorum illorum: Nempe huic ſummæ æqualis ſi Inclinatio Ungulæ ſit Semiquadrantalis; vel ad illam ſaltem ſummam eam habebit rationem quam habet rectarum quævis ſuperficiem illam curvam complentium ad ſuam reſpective ab Aα diſtantiam.

Quod quidem Momentum, per Magnitudinem (jam traditam) diviſum, exhibet diſtantiam centri gravitatis à Plano per Aciem Aα, rectis ſuperficiem curvam complentibus parallelo. Sed & in eo per aciem Plano eſſe conſtat, quod Rectas ſuperficiem curvam complentes biſecat; per prop. 11. hujus. Atque in Plano inter rectarum illarum extremas medio, ad axem recto, jam oſtenſum eſt. § S. Ergo, ipſum Centrum datur. per prop. 26. Cap. 4.

X. Fig. 155. Item; Momentum Figuræ Sinuum Rectorum ACα, ejuſve Segmenti ut BEGF, reſpectu rectæ cui adjacent ADα: Seu (quod eodem recidit) Semi-quadrantalis Ungula ejuſdem Figuræ Sinuum, ejuſve Segmenti, aciem habens eandem ADα rectam. Cum enim (propter cujuſque Rectæ Centrum gravitatis in medio ſui) cujuſque Sinuum Momentum, ſeu Triangulum eidem inſiſtens, ſit ejuſdem Semiquadratum, (ducto ſcilicet unoquoque Sinuum in ſemiſſem ſui:) erit ſemi-ſumma Quadratorum, ipſum Plani Momentum, ſeu Semi-quadrantalis Ungula. (Unde & de aliis Ungulis, ſervata Altitudinum ratione, fiet judicium.)

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (jam inventam) diviſum, exhibet Centri gravitatis diſtantiam, ab ipſa Aα recta.

Y. Denique; Hujus Ungulæ Momentum, hinc etiam habetur. Cum enim cujuſque Triangulorum horum Centrum gravitatis, à recta Aα, communi omnium Acie, aut huic potius inſiſtente perpendiculari Plano diſtat, duobus Trientibus iſtius

iſtius cui inſiſtit Sinus; ſitque ipſum Triangulum (uti jam oſtenſum eſt) Semiſſis Quadrati; Erit (propter $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$) Cujuſque Trianguli Momentum, Cubi Triens: Adeoque Triens Cuborum Sinuum illorum omnium, eſt ipſum Ungulæ (Semi-quadrantalis) Momentum.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (modo inventam) diviſum, exhibet Centri-gravitatis Ungulæ, ab ipſo, in $A\alpha$, erecto Plano.

Cum vero, pro inveniendâ Summa Quadratorum, *Omn.* s^2; & Summa Cuborum, *Omn.* s^3; habenda erunt *Omn.* $o R$, & *Omn.* $o^2 R$, (per § V. hujus:) hoc eſt, Summa Ordinatim-applicatarum, & Summa Quadratorum ex illis, (in R ducenda:) Hæc quo habeantur nihil impedit; cum & jam notis methodis, haberi poſſint; & methodis à nobis infra tradendis.

SCHOLIUM.

POſſet quidem hæc Propoſitio, prout Superficiem curvam ex circumducto Arcu Circuli ortam ſpectat, ab illa quæ ſequitur (aliunde demonſtrata) inferri. Nam data Arcus Magnitudine, ejuſque Centro gravitatis; habetur tum Ungulæ ſuperficies curva, (ſive, quod eodem recidit, Summa Sinuum Rectorum;) tum Superficies curva illius converſione facta: per prop. 11 & 12 hujus. Sed perinde eſt ſive hæc ab illa, ſive ab hac illa, inferatur; dummodo harum ſaltem altera aliunde probetur. Ego hanc potius præmiſi, propter ſequentis ex hac demonſtrationem perſpicuam, & quidem ſimpliciorem quam apud alios hactenus viderim. Illa enim (mea methodo) directe ſequitur & immediate, à demonſtratis olim ab Archimede, & poſt illum aliis.

Quæ autem hic tradita ſunt de Curva ſuperficie Ungulæ Semi-cylindri, aciem habentis Diametrum baſis circularis; ſeu, quod eodem recidit, Arcus Momento reſpectu iſtius Rectæ: facile (per ea quæ ad prop. 11. tradidimus) transferri poterunt ad Ungularum aliarum Cylindricarum Superficies curvas, alios habentes Axes; ſeu Arcuum Momenta reſpectu rectarum aliarum. Cumque omnes in ſuperficie Cylindrica Figuræ, planorum ſectionibus terminatæ, reſolvi poſſint vel in curvas figuras Cylindraceas, vel ſaltem Ungulares hujuſmodi: poterunt propterea ejuſmodi Figuræ omnes in Superficie Cylindracea, hac methodo, ad certas menſuras revocari. Quod cum ſolius calculi opus ſit; atque etiam in ſequentibus aliquanto fuſius tradendum: non erit neceſſe ut hic pluribus exponam.

Ea vero Linea Curva, quæ *Figuram Sinuum rectorum* (modo memoratam) terminat, $AC\alpha$ fig. 155. alia non eſt quam Semiellipſis, ſectione Semi-Cylindri facta, in planum expanſa. (Quod olim docui in meo *de Cycloide* Tractatu; & in ſubjuncta illi Epiſtola, pag. 99.) Fig. 155.

Quippe ſi ſuper $A\alpha D$ Semicirculo (fig. 154.) erigatur Semi-cylindrus, altitudinem habens, in D, æqualem ipſi DC; perque punctum ipſi D (in ea altitudine) imminens, Baſiſque diametrum $A\alpha$, tranſeat Planum (Ungulam Semi-quadrantalem abſcindens;) Sectionem illam, Plano ſecanti & Superficiei Cylindricæ communem, Semi-ellipſem eſſe conſtat. Eadem vero abſciſſæ Ungulæ curva ſuperficies, in planum expanſa; eſt ipſa quam *Figuram Sinuum rectorum* vocamus, $A\alpha C$. Ipſaque $AC\alpha$ illam terminans, eadem eſt linea jam in planum expanſa, quæ, in Superficie Cylindri, fuerat Semi-ellipſis.

Sin porro, Planum idem (quod Ungulam hanc ex Semi-cylindro abſcindit) continuetur per totum Cylindrum, integram Ellipſin ſectione perficiens; eaque integra Ellipſis, eodem modo quo hæc ſemi-ellipſis, expanſa in planum ſuperficie curva, expandatur: Continuata curva $AC\alpha$ in A & α, exhibebit (utrinque à C) curvam eam (quam *Ellipſin expanſam* pridem nominavimus) quæ *Figuram Sinuum verſorum* terminabit. Quod in Tractatu de Cycloide fuſius oſtendimus; quæque in iſtius Tractatus Fig. 7 & 30. exhibetur: Et in ſequentibus ulterius conſiderabitur, ad prop. 17 hujus.

PROP.

PROP. XIV.

A. B. Arcus Circuli, Centrum gravitatis, eſt in Axis ſui eo Puncto, cujus diſtantia à Centro circuli, eſt ad Radium, ut expoſiti arcus Chorda,
C. ad Arcum ſuum: Et quidem, in Semiperipheria, ut Circuli Diameter ad Semiperipheriam; ſeu ut Duplum Radii, ad Peripheriæ Semiſſem.

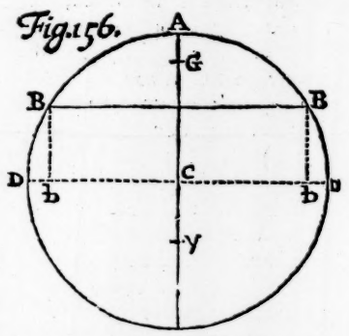
D. (Adeoque; Data ratione Chordæ cujuſvis ad Arcum ſuum; datur Arcus Centrum gravitatis: Et, Dato Arcus cujuſvis, tota Peripheria minoris, Centro gravitatis; datur Arcus ad Chordam ſuam ratio: Et, conſequenter, Circuli Quadratura, ſeu ratio Diametri ad Perimetrum.)

E. Eſtque Diſtantia Centri-gravitatis, Superficiei Solidive, converſione (perfecta vel imperfecta) facti, ab Axe converſionis ſuæ; ad Diſtantiam Centri-gravitatis, correſpondentis Ungulæ (Superficialis Solidæve,) à Plano per ipſius Aciem tranſeunte (rectis in ipſius Curva ſuperficie parallelo;) ut eſt, ad converſionis Arcum, Chorda ſua:
F. Et quidem, in Semiconverſione, ut Diameter ad Semiperipheriam; ſeu, ut Duplum Radii, ad Peripheriæ ſemiſſem.

G. Atque hinc habetur, Superficiei Sphæricæ, Zonæ dimidiæ (aliuſve imperfectæ) Centrum gravitatis.

A. Fig. 156. ESto Arcus circularis B A B, qui non ſit major Semiperipheria, Chorda B B; à cujus extremis punctis B, B, demiſſæ (ad parallelam Diametrum D C D) Perpendiculares ſint B b, B b. Adeoque, ſi circa D C D ut Axem, converti intelliga-

Fig. 156.



tur D A D ſemiperipheria; quæ à D B deſcribitur portio ſuperficiei Sphæricæ, æqualis erit facto ex b D in Circuli Peripheriam, (atque hoc utrinque;) quæque à B A B deſcribitur, æquabitur facto ex b b, hoc eſt B B, in eandem circuli Peripheriam: (per §. G, H, I, prop. præced.) Hoc eſt, ſi Chordæ ſeu Baſis B B magnitudo ponatur c; &, integræ Peripheriæ, $\mathcal{P}$: erit, quæ ab Arcu deſcribitur curva Superficies, $c\mathcal{P}$.

Eſt autem, quæ ab illo Arcu deſcribitur Superficies curva; æqualis facto ab Arcu in Peripheriam Centro gravitatis deſcriptam; per prop. 12 hujus.

Ergo; ſi per magnitudinem Arcus, ut a, dividatur $c\mathcal{P}$; prodibit $\frac{c}{a}\mathcal{P}$ peripheria centro gravitatis deſcripta. Adeoque pro Peripheria $\mathcal{P}$, ſubſtituendo Radium, ut R; erit $\frac{c}{a}R$ (cui æqualis ponatur G) Diſtantia centri gravitatis à D C D diametro.

a) $c\mathcal{P}$

$a)\ cP\ (\frac{c}{a}P.\qquad a)\ cR\ (\frac{c}{a}R=G.\qquad a.c::R.G.$

Eſt autem, in Arcus Axe AC; per prop. 3 hujus. Ergo, in illius eo Puncto quod à Diametro DCD, ejuſve puncto C, (circuli centro,) ita diſtat. per prop. 26. Cap. 4. Nempe, ut a ad c, ſic R ad G. Hoc eſt, ut Arcus BAB, ad BB Chordam; ſic CA Radius, ad Centri Gravitatis à Centro Circuli diſtantiam, CG. Quod erat propoſitum.

Exponatur deinde, Arcus circuli Semiperipheria major, BαB. Invento, ut prius, reſidui arcus BABcentro gravitatis G: erit (propter totius Centrum gravitatis C, per prop. 5 hujus) expoſiti Centrum-gravitatis γ, in GC continuata: Atque ut BαB, ad BAB; ſic CG, ad Cγ: (per prop. 27. Cap. 4.) ſive, ut $\alpha=P-a$, ad a; ſic $G=\frac{c}{a}R$, ad $\gamma=(\frac{a}{\alpha}\times\frac{cR}{a}=)\ \frac{c}{\alpha}R$. Adeoque ut α ad c, ſic R ad γ: Vel ut BαB Arcus, ad chordam ſuam BB; ſic Radius Cα, ad Cγ, diſtantiam Centri gravitatis arcus expoſiti, à circuli Centro C. Quod erat propoſitum. B.

$$\alpha.a::G=\frac{c}{a}R.\qquad \gamma=\frac{c}{\alpha}R.\qquad \alpha.c::R.\gamma.$$

Speciatim vero, in Semiperipheria, (quam ad utrumvis duorum caſuum referamus, perinde eſt;) cum ſit (propter $c=\mathcal{D}$,) $cP=\mathcal{D}P$; ſi hoc per Arcum $a=\alpha=\frac{1}{2}P$ dividatur; erit $\frac{1}{2}$P)DP(2D, peripheria Centro gravitatis deſcripta; cujus itaque Radius $\frac{2\mathcal{D}}{P}R$, hoc eſt, $\frac{4R^2}{P}$, eſt Centri Gravitatis à Circuli Centro diſtantia, $CG=G=\frac{4R^2}{P}$. C.

$$a.c::\tfrac{1}{2}P.\mathcal{D}=2R::R.G=\frac{4R}{P}R=\frac{4R^2}{P}.$$

Corollarium item patet. Cum enim eadem ſit ratio Arcus BAB ad BB chordam ſuam, quæ eſt Radii CA ad CG diſtantiam centri gravitatis in ipſa CA: Data rationum una, datur altera. Data vero unius Arcus (cujus ratio ad totam Peripheriam nota intelligatur) ad Chordam ſuam ratione; dabitur ejuſdem, adeoque totius Peripheriæ, ad aliam quamvis Chordam, adeoque ad Diametrum ipſam. D.

Item illud de Ungulis, Solidiſque aut Superficiebus converſione factis, ſimiliter patet. Si enim Superficiei Solidive bddb (converſione Lineæ Planive BD E. Fig. 157.

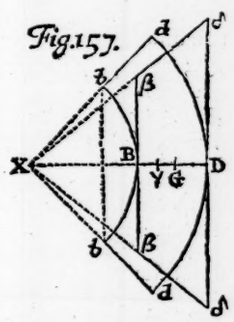


Fig. 157.

facti) ſinguli Arcus bBb, dDd, (plano XBD biſecti) extendi intelligantur in totidem ſibi æquales rectas $\beta B\beta$, $\delta D\delta$, eiſdem plani XBD punctis ad angulos rectos inſiſtentes, atque ab eodem biſectas, (æqualem Ungulam, vel ex duabus compoſitam, complentes; per prop. 12 hujus:) Rectarum Centra Gravitatis, in

ipſis B, D, punctis conſtituta, ab axe converſionis X diſtabunt, reſpectivorum arcuum Semidiametris X B, X D. Ipſorum vero Arcuum ſingulorum (Rectis æqualium, & invicem ſimilium,) Centra gravitatis (propter curvationem) in eadem ratione omnia (propter arcus ſimiles) propius admoventur ad converſionis Axem X; atque in eadem ratione minuitur Momentum (reſpectu ejuſdem X axis) ſingulorum; adeoque & ſimul omnium; &, propterea, communis omnium Centri gravitatis diſtantia. Nempe (per modo demonſtrata) ut Arcuum unus quilibet b B b, ad b b Chordam ſuam; ſic Diſtantia Centri gravitatis, adeoque Momentum, tum ſingularum, tum ſimul omnium, Rectarum $\beta\beta$, $\delta\delta$, &c. Ungulam complentium; ad Diſtantiam centri gravitatis, & momentum, tum ſingulorum reſpective, tum ſimul omnium, Arcuum b B b, d D d, &c. (Superficiem Solidumve converſione circa X factum, complentium,) ab eodem X converſionis Axe. Puta, ut Arcus a, ad Chordam c; ſic X G diſtantia illa, ad diſtantiam hanc X γ. Quod item demonſtrandum erat.

F. Hoc eſt; In Semi-converſione; ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $2R$; ſeu ut $\mathcal{P}$ ad $4R$.

G. Porro: Cum oſtenſum ſit (ad §. K. prop. præced.) In portione Sphæricæ Superficiei integræ, parallelis planis interjecta (quam *Zonam integram* appello,) puta, quæ Arcus E G circa B F converſione integra deſcribitur; Centrum gravitatis eſſe in Axe medio, (puta, in rectæ B F puncto medio:) Adeoque in *Zonis imperfectis*, (puta, quæ converſione dimidiata, aliave imperfecta, deſcribuntur,) & correſpondentibus Ungulis; Centrum Gravitatis in eo plano eſſe, quod tantundem diſtet à plano Sphæram in α tangente, ſeu, quod medium eſt inter B & F axi rectum.

Fig. 154.

Sitque (per prop. 12 hujus) in illo plano quod (per converſionis Axem vel Ungulæ Aciem A α incedens) biſecat, in ſuperficie Ungulari, erectas omnes rectas illam conſtituentes; in Sphærali, omnes Arcus converſione factos: Quippe, in quo Plano ſunt Omnium Centra gravitatis, in eodem eſt commune omnium. (Quod autem rectarum illarum unam biſecat, biſecat omnes; Arcuumque unum biſecans, omnes biſecat: propter ſimilia illic Triangula, hic Arcus ſimiles; ob eundem Inclinationis Angulum ad Aciem vel Axem A α:) Adeoque in duorum illorum Planorum communi ſectione:

Quo ipſum Centrum determinetur (in Ungulis hiſce, & Zonis imperfectis,) Quærenda erit etiam ejuſdem (in hoc plano per Axem tranſeunte) diſtantia ab Acie vel Axe A α. Quod ſic habetur.

Intelligatur Arcui cuivis, ut E G, inſiſtens Semiquadrantalis Ungulæ (aciem habentis B F) ſuperficies Curva: cujus ſingulas rectas arcui inſiſtentes (ſuperficiem curvam complentes) æquales eſſe reſpectivis Sinibus rectis (ad §. Q. prop. præced.) oſtenſum eſt; (adeoque ſuperficiem illam Summæ Sinuum æqualem; hoc eſt, facto ex Altitudine B F, quam l dicamus, in Radium ducta; hoc eſt, lR; per §. N. prop. præced.) Sed earundem diſtantiæ à perpendiculari plano per axem B F, ſunt item iidem Sinus recti. Momenta itaque ſingularum (magnitudine in diſtantiam ducta) ſunt ut Sinuum Quadrata. Adeoque omnium Momenta (reſpectu rectæ B F) ut *omnia* s^2, ſumma Quadratorum Sinuum. Hoc eſt (per §. V. ejuſdem) ut ſpatium E B F G in Radium ductum. Quod quidem ſpatium E B F G (cum ſatis innoteſcat) dicamus k^2; adeoque k^2R eſt Momentum expoſitæ ſuperficiei curvæ Ungularis, reſpectu rectæ B F. Atque hoc Momentum per Magnitudinem lR diviſum; exhibet $\frac{k^2R}{lR} = \frac{k^2}{l}$ diſtantiam Centri gravitatis à perpendiculari Plano ſuper A α erecto.

Cumque eadem ſit ratio (hoc reſpectu) Ungularum cujuſcunque ſint Altitudinis; (utcunque enim aucta Altitudine, adeoque & Magnitudine, & Momento; puta, in ratione $\mathcal{P}$ ad R; erit adhuc eadem diſtantia; $\frac{k^2\mathcal{P}}{l\mathcal{P}} = \frac{k^2R}{lR} = \frac{k^2}{l}$:) Erit cujuſcunque Superficiei Ungularis, ſuper Arcum Circuli erectæ, (Aciem habentis, Circuli Diametrum A α,) Diſtantia Centri gravitatis à perpendiculari plano per ipſam A α, $\frac{k^2}{l}$; hoc eſt, quæ oritur ex plano E B F G ad rectam B F applicato.

Eademque eſſet, (dempta curvitate, quæ converſione oritur,) in Superficie converſione facta, à converſionis Axe diſtantia; (propter ſingulos Arcus in hac, ſingulis

ſingulis in correſpondentis Unguläe ſuperficie curva reſpectivis rectis, æquales; atque in eadem à converſionis Axe Diſtantia, qua ſunt illæ à parallelo Plano per Aciem ſuam.) Sed, propter curvaturam converſione factam; minuenda eſt ea Diſtantia, pro Ratione quam habet Converſionis Arcus ad Chordam ſuam; ut jam oſtenſum eſt. Puta; in Semiconverſione, ut Semiperipheria $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ad Diametrum $2R$; in converſione Quadrantali, ut $\frac{1}{4}\mathcal{P}$ ad $R\sqrt{2}$: Et, univerſaliter, ut Arcus a vel m, ad Chordam ſuam c vel n; ſic diſtantia in Ungula (jam oſtenſa) $\frac{k^2}{l}$, ad $\frac{k^2c}{la}$ vel $\frac{k^2m}{ln}$ diſtantiam Centri gravitatis Zonæ imperfectæ, à converſionis Axe.

Sed & in duorum Planorum, prius memoratorum, communi ſectione reperiri, ſupra oſtenſum eſt: Ergo, in hujus ſectionis eo Puncto quæ ſic (ut dictum eſt) diſtat. Datur igitur, tum in Ungula, tum in Zona utut imperfecta, ipſum Gravitatis Centrum. Quod erat ultimo oſtendendum.

PROP. XV.

Sectoris Circuli (duobus Radiis & Arcu comprehenſi) Centrum gravitatis eſt in Axis ſui illo puncto, cujus à Centro Circuli diſtantia, eſt ad duos Trientes Radii, ut expoſiti Arcus Chorda, ad Arcum ſuum. A. Fig. 158.

Adeoque, in Semicirculo; Ut Semiperipheria ad Diametrum, ſic $\frac{2}{3}$ Radii ad diſtantiam Centri gravitatis Semicirculi à Circuli Centro.

Atque hinc etiam Segmenti circularis (recta abſciſſi) Centrum gravitatis colligitur: Atque de aliis Portionibus ſimiliter. Cæteraque quæ hinc dependent. B.

Nempe; Si ponatur, in expoſito circulo, Radius CA vel CB $=R$; Peripheria integra, $\mathcal{P}$; Arcus BA $=a$, adeoque BAB $=2a$; Chorda BA $=c$; Sinus rectus BV $=s$, adeoque Chorda BB $=2s$: Sinus verſus AV $=v$, reliquuſque V$\alpha=2R-v=b$; à Centro Diſtantia VC $=x=R-v$ ſi V ſit ſupra Centrum, vel VC $=x=v-R$ ſi infra, vel VC $=x=0$ ſi in Centro: Item $a-s=e$; $a+s=f$; $R+v=z$. C. Fig. 159, 160.

Erit totius Semicirculi ADα, Magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Centrique gravitatis, ſive à $\tau\alpha$, ſive à TA, diſtantia, R; momentum reſpectu $\tau\alpha$, vel TA, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}$: Diſtantiæ Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}}$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{2}{3}R^3$. D. I. Q.

Sectoris BCA magnitudo $\frac{1}{2}aR$: Centri gravitatis diſtantia à DC, $\frac{2s}{3a}R$; à $\tau\alpha$, $R+\frac{2s}{3a}R$; à TA, $R-\frac{2s}{3a}R$; momentum ejus, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{3}sR^2$; momentum ejuſdem reſpectu TA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$: Centri gravitatis diſtantia ab Aα, $\frac{2vR}{3a}$; momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{3}vR^2$. D. I. Q. W.

Trianguli BCV, magnitudo $\frac{1}{2}sx$: Diſtantia Centri gravitatis à DC, $\frac{2}{3}x$; à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}R-\frac{2}{3}v$; à TA, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR\pm\frac{1}{3}sx^2=\frac{sR-2v}{6}sx$; reſpectu TA, $\frac{1}{2}sxR\mp\frac{1}{3}sx^2=\frac{R+2v}{6}sx$: Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{6}s^2x$. E. K. R. T.

Semiſegmenti BVA, magnitudo $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2$ F.

L. $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$; distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à TA, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à DC, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à BV, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}-R+v$; momentum respectu BV, R.T.V. $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$ $=\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{vR+s^2}{3eR+3sv}v$.

F. N. Trianguli BAV, magnitudo $\frac{1}{2}sv$: Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $2R-\frac{2}{3}v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $svR-\frac{1}{3}sv^2$; respectu TA, S. $\frac{1}{3}sv^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2v$.

G. N. Segmenti ABA, magnitudo $\frac{1}{2}eR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; respectu TA, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{sv}{3e}$;

Q. S. à $\tau\alpha$, $R+\frac{sv}{3e}$; à TA, $R-\frac{sv}{3e}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}v^2R$: distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{v^2}{3e}$.

Et similiter de segmento αBα, mutatis mutandis.

H. M. S. T. Trianguli BCα, magnitudo $\frac{1}{2}sR$: Centri gravitatis distantia à $\tau\alpha$, $R-\frac{1}{3}v$; à TA, $R+\frac{1}{3}v$; infra DC, $\frac{1}{3}v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sR^2-\frac{1}{6}svR$; respectu TA, $\frac{1}{3}sR^2+\frac{1}{6}svR$: Distantia centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2R$.

H. M. S. T. Trianguli BVα, magnitudo $\frac{1}{2}sh$: Distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}h$; à TA, $2R-\frac{2}{3}h$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2$; respectu TA, $shR-\frac{1}{3}sh^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2h$.

H. M. S. Sectoris BαA, magnitudo $\frac{1}{2}fR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR$; respectu TA, $\frac{1}{2}fR^2-\frac{1}{6}shR$; distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{sh}{3f}$; à TA, $R-\frac{sh}{3f}$; à DC, $\frac{sh}{3f}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$; Centri gravitatis inde distantia, $\frac{2vR+s^2}{3f}$.

O. Momenta autem eadem sunt ubique & Semiquadrantales Ungulæ: Solidaque respectiva integra conversione facta, sunt ad Ungulas illas, ut P ad R; & Semisolida, eorum Semisses; quod & proportionaliter intelligendum est de Solidis aliis imperfecta conversione factis.

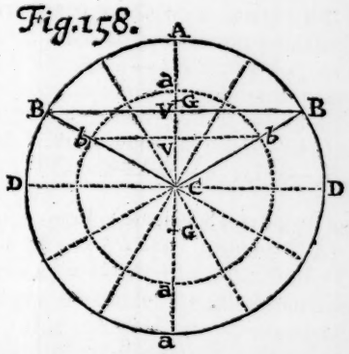
O. P. X. Quæque de Momentis & Solidis respectu rectarum TA, $\tau\alpha$, DC, BV, dicta sunt; facile transferentur ad alias rectas hisce parallelas: Et, quæ respectu Aα, ad alias huic parallelas: Aut (propter ipsa Centra gravitatis Planorum data) ad alias etiam rectas transferentur.

Y. Quæque de Circulo dicta sunt, ejusque Portionibus; eadem Ellipsi, & portionibus hujus, facile accommodantur.

A. Fig. 158. INtelligatur Circuli Sector CBAB, vel CBαB, (major, minor, an æqualis Semicirculo, perinde est:) ex infinitis numero Sectoribus componi: Sive, quod (propter infinitatem) eodem recidit, ex totidem triangulis, invicem æqualibus; (quorum communis vertex sit C Centrum:) per def. 1. Cap. 4. Quæ totidem rectis (ut eorundem Triangulorum Axibus) repræsententur, ut CB. Cumque (per prop. 6 hujus) Centrum gravitatis in Triangulo, Altitudinis Triente à Base distet, (sive, à parallelo plano per Verticem, duobus Trientibus;) Si Radio Cb $=\frac{2}{3}$CB, describatur

describatur peripheria b b, (expositæ B B similis, & similiter posita) transibit hæc per Triangulorum singulorum Centra gravitatis. Cujus itaque cum singula puncta

Fig.158.



(æqualibus ab invicem distantiis remota) æqualiter onerentur (æqualibus utique Triangulis, quorum Centra gravitatis sustinere intelligantur:) idem erit arcus b b sic onusti Centrum gravitatis, atque ipsius Sectoris B C B, per 16 Cap. 4. Facto itaque; ut chorda b b ad arcum suum, hoc est, ut Chorda B B ad arcum suum; sic C G, ad radium C b, hoc est, ad $\frac{2}{3}$ C B: (Hoc est, $CG = \frac{2}{3}\frac{r}{a}R$:) Erit G Centrum gravitatis Arcus b b, (per prop. præced.) adeoque & (per jam demonstrata) Sectoris B C B. Quod demonstrandum erat.

Hoc est, speciatim in Semicirculo; Ut Semiperipheria $\frac{1}{2}\mathcal{P}$; ad Chordam suam, hoc est, ad Circuli Diametrum, $2R$: sic duo Trientes Radii, $\frac{2}{3}R$; ad $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}} = CG$, distantiam Centri gravitatis Semicirculi (in axe suo positi) à Circuli Centro C.

Corollarium, de Circuli Segmento; constat ex 27 Cap. 4. Quippe cognitis tum magnitudine, tum Centro gravitatis, Sectoris C B A B, vel C B α B, & Trianguli B B C: Cognoscitur inde tum Magnitudo tum Centrum gravitatis Segmenti B B A, vel B B α. B.

Idemque in aliis Circuli portionibus ostendetur.

Exempli gratia. In exposito Circulo, sit Radius C A (vel C B) $= R$: Integra Peripheria, $\mathcal{P}$: Arcus B A $= a$: Adeoque B A B $= 2a$: Chorda B A $= c$: Sinus rectus B V $= s$; adeoque Chorda B B $= 2s$: Hujusque ab A vertice distantia, (hoc est, Segmenti B B A altitudo, vel expositi arcus B A sinus versus) V A $= v$: ejusque Altitudo seu distantia à base, V α $= 2R - v = h$; ejusque à Centro C distantia V C $= x$; (eritque $x = R - v$, si V sit supra Centrum C, adeoque B A B minor quam Semiperipheria; vel $x = v - R$, si V sit infra Centrum, adeoque B A B major quam Semiperipheria; vel denique $x = 0$, si V sit in Centro, adeoque B A B Semiperipheria:) Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$. C. Fig. 159, 160.

Fig.159.

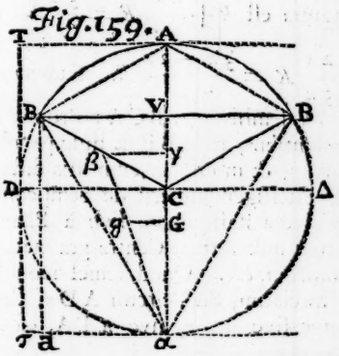
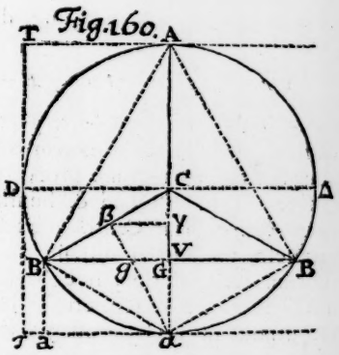


Fig.160.



D. Eſt itaque Sectoris BCBA magnitudo aR, (nempe $\frac{1}{2}$ BA B × CA, per prop. 12 Fig. 159, hujus;) ejuſque Semiſſis BCA, $\frac{1}{2}aR$. Et, ſpeciatim, totius Semicirculi, (propter 160. $a=\frac{1}{2}P$,) $\frac{1}{4}RP$.

E. Item Trianguli BBC magnitudo $\frac{1}{2}$ BB × CV (per prop. 6 hujus;) hoc eſt sx: (Nempe, $sR-sv$, ſi V fuerit ſupra Centrum; vel $sv-sR$, ſi infra:) Adeoque BCV $=\frac{1}{2}sx$: Hoc eſt, $\frac{1}{2}sR-\frac{1}{2}sv$, ſi ſupra; vel $\frac{1}{2}sv-\frac{1}{2}sR$, ſi infra.

F. Adeoque, Si à Sectore BCBA $=aR$, Auferatur Triangulum BBC $=sR-sv$; vel Addatur Triangulum BBC $=sv-sR$; (prout fuerit V ſupra infrave Centrum:) utrovis caſu habetur Segmentum BBA $=(aR\mp sx=)\ aR-sR+sv=eR+sv$. Adeoque BVA $=\frac{1}{2}aR\mp\frac{1}{2}sx=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sv=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$.

Hoc eſt: Si inſcripto (in Circuli Segmento) Triangulo æquialto ABB $(=sv)$ addatur Triangulum aliud $(aR-sR=eR)$ cujus nempe Baſis ſit æqualis Circuli Radio $(=R)$ & Altitudo $(=2a-2s=2e)$ æqualis exceſſui Arcus ſupra ſubtenſam: Habetur Segmenti BBA magnitudo; $aR-sR+sv=eR+sv$. Ejuſque Semiſſis, Semiſegmentum BVA $=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sv=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$.

G. Adeoque, duo ſimul Segmenta abſciſſa AB, AB, (quæ, cum inſcripto Triangulo, complent Segmentum BBA,) æquant $aR-sR=eR$, & eorum utrumvis $\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}eR$.

Hoc eſt; Si $(a-s=e)$ exceſſus Arcus BA ſupra ſuum Sinum rectum BV, ducatur in $(\frac{1}{2}R)$ Semiſſem Radii: Habetur magnitudo Segmenti BA; $=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}eR$.

H. Si vero Segmento BBA $(=eR+sv,)$ adjiciatur Triangulum BBα $(=hs:)$ Habetur Sector BαBA (angulum habens BαB in peripheria, & BABA arcum,) $eR+sv+sh$; hoc eſt (propter $v+h=2R$,) $eR+2sR$; vel (propter $e=a-s$,) $aR+sR=fR$. Adeoque BαA $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$.

(Idem proveniret, ſi Sectori BCBA $=aR$, adderentur duo Triangula BCα, BCα; quorum communis Baſis eſt C$\alpha=R$, & utriuſvis Altitudo BC$=s$: adeoque ſimul utraque sR. Hoc eſt, BαBA $=aR+sR=fR$: Et BαA $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$.)

Hoc eſt; Si $(a+s=f)$ aggregatum Arcus BA, & Sinus Recti BV; ducatur in Semiſſem Radii $(=\frac{1}{2}R:)$ Habetur Sector BαA $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$.

I. Similiter de Centro Gravitatis procedendum.

Nempe, (per jam demonſtrata ad hanc propoſitionem § A,) Sectoris BCBA (ſive Semicirculo major ſit, ſive minor, ſive ipſi æqualis) Centrum gravitatis eſt in CA recta, ſupra Centrum C, quantum eſt $\frac{2s}{3a}R$. Nempe ea ratione ad $\frac{2}{3}R$, quæ eſt Chordæ BB $=2s$, ad arcum BABA $=2a$; ſive ut s ad a:) Adeoque illius, à puncto α, ſeu $\tau\alpha$ tangente, diſtantia eſt $R+\frac{2s}{3a}R=\frac{3a+2s}{3a}R$. Adeoque à TA (tangente verticis) $R-\frac{2s}{3a}R=\frac{3a-2s}{3a}R$. Eademque eſt, ab eiſdem $\tau\alpha$, TA, diſtantia Centri gravitatis ſemiſectoris BCA; Propter dimidias BV & huic parallelas ſemiſectorem complentibus, totis BB & huic parallelis complentibus Sectorem integrum, proportionales, & in eiſdem cum illis diſtantiis ſive à $\tau\alpha$, ſive à TA. (Quod & ſimiliter intelligendum erit de Semi-conis, Semiſegmentis, &c. quorum Centra gravitatis ſive à Baſis plano, ſive à Plano verticis baſi parallelo, tantundem diſtant, quantum inde diſtant Centra gravitatis integrorum ſuorum ſive Conorum, ſive Segmentorum, &c. Quod ſemel monitum eſto, ne opus ſit idem ſæpius repetere.) Et, ſpeciatim, Semicirculi ADα, Centri gravitatis (utpote in DC jacentis) diſtantia ſive à $\tau\alpha$, ſive à TA, eſt $R=C\alpha=CA$.

Adeoque (propter magnitudinem Sectoris BCBA $=aR$, & BCA $=\frac{1}{2}aR$,) Momentum (reſpectu rectæ $\tau\alpha$ ut Axis Libræ) Sectoris BCBA, eſt $\frac{3a+2s}{3}R^2$, (magnitudine ſcilicet in diſtantiam ducta;) & Semiſectoris BCA, $\frac{3a+2s}{6}R^2$.

Et,

Et, reſpectu rectæ T A, momentum Sectoris B C B A, eſt $\frac{3a-2s}{3}R^2$, & ipſius B C A, $\frac{3a-2s}{6}R^2$. Et ſpeciatim, totius Semicirculi A D α, momentum ſive reſpectu τα, ſive reſpectu T A, (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $s=0$,) eſt $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}$. Fig. 159, 160.

Eſtque (per 5 & 6 hujus) Trianguli B B C, Centrum gravitatis in C V, ejuſque à C Centro diſtantia $\frac{2}{3}CV=\frac{2}{3}x$. Adeoque à τα, $R\pm\frac{2}{3}x$; prout infra ſuprave Centrum fuerit; (nempe $R+\frac{2}{3}x$ ſi ſupra; $R-\frac{2}{3}x$ ſi infra Centrum;) Hoc eſt (propter $x=R-v$ ſi ſupra Centrum, & $x=v-R$ ſi infra Centrum,) utroque caſu, $\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$. Adeoque ejuſdem à T A diſtantia, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$. K.

Eſt autem (ut ſupra, § E,) magnitudo Trianguli B B C $=sx$; (hoc eſt, $sR-sv$ ſi ſupra, vel $sv-sR$ ſi infra Centrum.)

Quod ductum in Centri gravitatis diſtantiam à τα, $R\pm\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$; exhibet ejuſdem, reſpectu rectæ τα, momentum $sxR\pm\frac{2}{3}sx^2=\frac{5R-2v}{3}sx$; Hoc eſt $\frac{5sR^2-7svR+2sv^2}{3}$, vel $\frac{-5sR^2+7svR-2sv^2}{3}$; prout ſupra infrave fuerit.

Idemque ductum in ejuſdem à T A diſtantiam, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$; exhibet ejuſdem B B C Trianguli momentum reſpectu rectæ T A, $sxR\mp\frac{2}{3}sx^2$; hoc eſt $\frac{sR^2+svR-2sv^2}{3}$ vel $\frac{-sR^2-svR+2sv^2}{3}$, prout ſupra infrave Centrum fuerit.

Aut etiam (propter A α, A B, A V; hoc eſt $2R$, c, v; continue proportionales: adeoque $2vR=c^2=s^2+v^2$:) Illic quidem $\frac{5sR^2-3svR-2s^3}{3}$ vel $\frac{-5sR^2+3svR+2s^3}{3}$: Hic vero $\frac{sR^2-3svR+2s^3}{3}$, vel $\frac{-sR^2+3svR-2s^3}{3}$; prout ſupra infrave Centrum fuerit hoc Triangulum.

(Atque hic monendum duxi; quod oppido notandum velim, ne ſit opus idem ſæpius repetere: Hanc reductionem in ſequentibus ſæpiſſime occurrere. Nempe, propter $2vR=c^2=s^2+v^2$; quoties occurrit c^2 vel v^2; pro c^2 ſubſtitui $2vR$; &, pro v^2, ſubſtitui c^2-s^2, hoc eſt $2vR-s^2$. Omnino enim expedire compertum habeo, ut unam aliquam formam deſignandi eandem quantitatem adhiberem; ad quam æquipollentes aliæ reducantur quum opus fuerit; ne ſymbolorum varietas confuſionem pareret. Quod memineris velim, ne, in reductionibus à nobis ſubinde crebro faciendis, aliquando hæreas.)

Atque hoc Trianguli Momentum, reſpective Subtractum Additumve, (prout ſupra Centrum infrave fuerit,) Momento Sectoris B C B A, (nempe, $aR^2+\frac{2}{3}sR^2$ reſpectu rectæ τα, & $aR^2-\frac{2}{3}sR^2$ reſpectu rectæ T A,) exhibet (utroque caſu) Momentum Segmenti B B A reſpectu rectæ τα, $aR^2-sR^2+svR+\frac{2}{3}s^3=eR^2+svR+\frac{2}{3}s^3$; & ſemiſegmenti B V A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$: Et, reſpectu rectæ T A, Momentum Segmenti B B A, $aR^2-sR^2+svR-\frac{2}{3}s^3=eR^2+svR-\frac{2}{3}s^3$; & ſemiſegmenti B V A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$. L.

Quæ quidem momenta, per magnitudinem ſegmenti B B A $=eR+sv$, aut ſemiſegmenti B V A $=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, (reſpective,) diviſa: exhibent Segmenti, aut Semiſegmenti, diſtantiam à τα, $R+\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Atque à T A, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Adeoque illius altitudinem ſupra Centrum C, aut C D rectam, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$, hoc eſt $\frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv}$: Et ſupra rectam B B, ſeu B V, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}-R+v=\frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv}-R+v$.

Atque

Fig. 159, 160. Atque hæc demum, à B V, diſtantia; in magnitudinem ducta; exhibet momentum, reſpectu rectæ B V, Segmenti B B A, $\frac{2}{3}s^3 - aR^2 + sR^2 + avR - 2svR + sv^2 = -eR^2 + avR - \frac{1}{3}s^3$. Et ſemiſegmenti B V A, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3$. $= \mp\frac{1}{2}ex R + \frac{1}{6}szv$.

M. Deinde, Trianguli B B α, aut B V α, diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt $\frac{2}{3}h = \frac{4}{3}R - \frac{2}{3}v$: adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}v$. Quæ in magnitudines ($sh$, $\frac{1}{2}sh$,) ducta; exhibet Trianguli B B α, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sh^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{8}{3}svR + \frac{2}{3}sv^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR - \frac{2}{3}s^3$; &, reſpectu T A, $2shR - \frac{2}{3}sh^2 = \frac{4}{3}sR^2 + \frac{2}{3}svR - \frac{2}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{2}{3}s^3$, & Trianguli B V α, momentum reſpectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; &, reſpectu rectæ T A, $shR - \frac{1}{3}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, addita reſpectivis momentis Segmenti B B A, & Semiſegmenti B V A, (§ L inventis) exhibent Sectorum B α B A, B α A, momenta reſpectu earundem $\tau\alpha$, T A. Nempe, Sectoris B α B A momentum reſpectu $\tau\alpha$, $aR^2 + \frac{5}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR = fR^2 + \frac{1}{3}shR$; & reſpectu rectæ T A, $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 + \frac{1}{3}svR = fR^2 - \frac{1}{3}shR$: Et Sectoris B α A, momentum reſpectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & reſpectu T A, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$.

Eodem modo; Trianguli B C α, Centrum gravitatis eſt in recta $\alpha\beta$, quæ à puncto α ad medium rectæ B C ducitur, ejuſdem $\alpha\beta$ duas tertias verſus α abſcindens. Eſt autem ipſius medii puncti β, eadem altitudo ſupra $\tau\alpha$, quam habet rectæ C V medium punctum γ; nempe $\alpha\gamma = R \pm \frac{1}{2}x$ (prout ſupra infrave Centrum fuerit V punctum;) hoc eſt, (utroque caſu) $\alpha\gamma = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}v$. Adeoque diſtantia Centri gravitatis Trianguli B C α, à $\tau\alpha$ eſt $\frac{2}{3}\alpha\gamma = R - \frac{1}{3}v$; atque à T A, $R + \frac{1}{3}v$.

Adeoque (propter magnitudinem Trianguli unius B C $\alpha = \frac{1}{2}sR$, & ſimul amborum 2 B C $\alpha = sR$,) erit unius momentum reſpectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, & ſimul utriuſque $sR^2 - \frac{1}{3}svR$: Et, reſpectu rectæ T A, momentum unius $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; & ſimul utriuſque $sR^2 + \frac{1}{3}svR$.

Quæ quidem addita momentis Sectorum B C A, & B C B A, nempe $\frac{1}{2}aR^2 \pm \frac{1}{3}sR^2$, & $aR^2 \pm \frac{2}{3}sR^2$ (per § I.) exhibent momentum, reſpectu rectæ $\tau\alpha$, Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & ſectoris B α B A, $fR^2 + \frac{1}{3}shR$: Et reſpectu rectæ T A, momentum Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$; & Sectoris B α B A, momentum $fR^2 - \frac{1}{3}shR$. ut prius.

Atque hæc demum momenta, per ſuas reſpective planorum magnitudines ($\frac{1}{2}fR$, fR,) diviſa; exhibent utriuſvis Sectoris B α A, B α B A, Centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$, $R + \frac{sh}{3f}$; & à T A, $R - \frac{sh}{3f}$; Adeoque altitudinem ejus ſupra Centrum C, vel C D rectam, $\frac{sh}{3f} = \frac{2sR - sv}{3a + 3s}$.

N. Similiter, Trianguli A B V, magnitudo, eſt $\frac{1}{2}sv$; diſtantia centri gravitatis à T A, eſt $\frac{2}{3}v$; adeoque, à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$; & propterea ejuſdem momentum reſpectu $\tau\alpha$, $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$: &, reſpectu T A, $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, ſubducta ex reſpectivis momentis Semiſegmenti B V A, (nempe, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR \pm \frac{1}{3}s^3$, per § L.) relinquit Segmenti A B A momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; &, reſpectu T A, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$.

Atque hæc momenta, diviſa per ſectoris A B A magnitudinem, $\frac{1}{2}eR$ (per § G.) exhibent diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{sv}{3e}$; & à T A, $R - \frac{sv}{3e}$; adeoque ſupra D C, $\frac{sv}{3e} = \frac{sv}{3a - 3s}$.

Pariter, de Segmento α B α judicandum; puta, pro arcu A B $= a$, ſubſtituendo arcum reliquum ad Semicirculum α B $= \alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P} - a$: & pro ſinu verſo A V $= v$, ſubſtituendo α V $= h = 2R - v$; item pro T A tangente contermino arcui A B, ſubſtituendo $\tau\alpha$ tangentem conterminum ipſi α B; &, vice verſa, T A pro $\tau\alpha$.

Quippe

Quippe ſic momentium Segmenti $\alpha B \alpha$, reſpectu Tangentis oppoſiti TA, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR$; &, reſpectu Tangentis contermini $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$. Fig. 159, 160.

Aut etiam, ex $\frac{1}{4}PR^2$ momento totius Semicirculi $AD\alpha$, reſpectu Tangentis utriuſvis $\tau\alpha$ vel TA, auferendo $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{2}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ momentum ſectoris $B\alpha A$ reſpectu ipſius $\tau\alpha$ (per § M.) habetur reſidui ad ſemicirculum Segmenti $\alpha B\alpha$ reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{2}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; hoc eſt (propter $\frac{1}{2}P - a = \alpha$, & $v = 2R - h$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$: Atque ſimiliter inde ſubducendo ejuſdem $B\alpha A$ ſectoris momentum reſpectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; habetur ſegmenti $\alpha B\alpha$, reſpectu ejuſdem TA, momentum $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; hoc eſt (propter $\frac{1}{2}P - a = \alpha$, & $v = 2R - h$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR$. ut prius.

Et ſimili ratione, mutatis mutandis, eorundem expoſitorum omnium Planorum momenta reſpectu alîus rectæ ipſis $\tau\alpha$, TA, BV, parallelæ; cujus diſtantia infra vel ſupra harum aliquam datur. O.

Quodque de horum Planorum Momentis reſpectu rectarum $\tau\alpha$, TA, BV, aut hiſce parallelarum, dictum eſt; pariter intelligendum eſt de Ungulis ſuper eadem plana erectis, quæ plano abſcindantur per eaſdem reſpective $\tau\alpha$, TA, BV, vel hiſce parallelas, (quæ expoſitum planum non ſecent,) tranſeunte. Nempe; Si ſecantis plani ad expoſitum, inclinationis angulus ſit Semiquadrantalis ſeu grad. 45, (quam *Semiquadrantalem Ungulam* dicimus;) eadem erit (per 11 hujus) Ungulæ atque Momenti deſignatio. (Erit enim Ungulæ altitudo, ſuper quodvis expoſiti plani punctum, eadem atque ejuſdem puncti ab illa recta quæ eſt communis planorum interſectio quam *Ungulæ aciem* dicimus, diſtantia.) Sin major fuerit minorve Inclinationis Angulus; major erit minorve illa Ungula; & quidem in ratione Tangentium Anguli Inclinationis. Nempe Solido Priſmatico ſeu Columnari æquatur; cujus Baſis, ſit expoſitum Planum; Altitudo, æqualis altitudini rectæ Centro gravitatis inſiſtentis; (ut ad prop. 11. oſtenſum eſt;) Hoc eſt, (ſi angulus Inclinationis ſit Semiquadrantalis,) æqualis diſtantiæ Centri gravitatis ab illa recta quæ concipitur vel ut Axis motus, vel ut planorum, expoſiti & ſecantis, communis ſectio, ſeu Acies Ungulæ.

Denique; Eadem quæ diximus Momenta, exhibent etiam Magnitudinem Solidi, quod expoſitorum Planorum circa expoſitas rectas converſione deſcribitur; (per 12 hujus.) Nempe, in ea ratione ad momenta ut jam deſignata, vel Ungulas Semiquadrantales, quam habet Peripheria (integra, vel dimidia, &c. prout converſio illa eſt integra vel dimidia, &c.) ad ſui Circuli Radium. Eſt enim diſtantia Centri gravitatis plani, ab expoſita recta, Radius iſtius Peripheriæ (ſive perfectæ, ſive imperfectæ) quæ converſione Centri gravitatis circa illam rectam deſcribitur.

Puta, Sectoris BCA, reſpectu rectæ $\tau\alpha$ Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (ut ſupra, § I.) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$; & reſpectu rectæ TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$. Ergo Solidum Annulare, illius integra converſione circa $\tau\alpha$ factum, eſt, $\frac{1}{2}aRP + \frac{1}{3}sRP$; &, ſemiconverſione, $\frac{1}{4}aRP + \frac{1}{6}sRP$: Et, circa TA, integra converſione, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{3}sRP$; & ſemiconverſione, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{6}sRP$.

Item, Sectoris $B\alpha A$, reſpectu rectæ $\tau\alpha$, Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, (ut § M.) eſt $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{2}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & reſpectu rectæ TA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$. Ergo, Solidum illius integra converſione circa $\tau\alpha$ deſcriptum, eſt, $\frac{1}{2}aRP + \frac{2}{6}sRP - \frac{1}{6}svP = \frac{1}{2}fRP + \frac{1}{6}shP$; &, converſione dimidia, $\frac{1}{4}aRP + \frac{2}{12}sRP - \frac{1}{12}svP = \frac{1}{4}fRP + \frac{1}{12}shP$: Atque, circa TA, converſione integra, $\frac{1}{2}aRP + \frac{1}{6}sRP + \frac{1}{6}svP = \frac{1}{2}fRP - \frac{1}{6}shP$; &, converſione dimidia, $\frac{1}{4}aRP + \frac{1}{12}sRP + \frac{1}{12}svP = \frac{1}{4}fRP - \frac{1}{12}shP$.

Item, Semiſegmenti BVA, reſpectu ipſius $\tau\alpha$ Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (per § L.) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; Et, reſpectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$. Ergo Solidum illius integra converſione circa $\tau\alpha$ deſcriptum, eſt, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{2}sRP + \frac{1}{2}svP + \frac{s^3P}{3R} = \frac{1}{2}eRP + \frac{1}{2}svP + \frac{s^3P}{3R}$; & converſione dimidia, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP$

Fig. 159, 160. $-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}$: Ac, circa TA, converſione integra; $\frac{1}{2}aRP-\frac{1}{2}sRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}=\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}$; & converſione dimidia, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}$.

Item, ejuſdem Semiſegmenti BVA, reſpectu rectæ BV, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (per § L.) $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$. Ergo Solidi illius circa BV, converſione integra, deſcriptum, eſt $-\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}avP-\frac{s^3P}{6R}$; & converſione dimidia, $-\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}avP-\frac{s^3P}{12R}$.

Quodque hic de Semiſolidis, (intellige, quæ converſione dimidia deſcribuntur,) oſtenſum eſt; quæ ſunt Integrorum dimidia: Similiter de aliis, quæ converſionibus aliis imperfectis, (puta Quadrantali, &c.) deſcribuntur; ſervata proportione, judicandum erit. Quod & in ſequentibus pariter intelligendum erit.

Quodque, de Solidis, Planorum horum converſione circa rectas $\tau\alpha$, TA, BV, oſtenſum eſt; ſimiliter ad alia, mutatis mutandis, accommodabitur, quæ eorundem planorum, circa aliam quamvis in eodem plano rectam illis parallelam (quæ planum convertendum non ſecet,) in quacunque ab illis diſtantia, infra ſuprave, poſitam, converſione deſcribuntur.

P. Atque jam quidem, quod ad Sectores integros BCBA, BαBA, & integrum Segmentum BBA, &c. quorum non modo Centri gravitatis altitudo, (puta quantum diſtat à $\tau\alpha$, TA, BV, vel CD, &c.) ſed ipſa Centra jam determinantur (ut quæ ſint, in altitudine deſignata, in ipſo Axe, puta Aα recta, per 5 hujus:) Illorum Momenta, Ungulæ, & Solida converſione facta, ſatis determinantur; non modo reſpectu rectæ quæ ſit ipſis $\tau\alpha$, TA, &c. parallela, ſed reſpectu rectæ cujuſvis expoſitæ utcunque in illo plano ſitæ (ſaltem quæ convertenda Plana, ſeu, Ungulæ Baſin, non ſecet.) Nam, propter datum ipſum gravitatis Centrum, datur etiam ejuſdem diſtantia à quavis ſic expoſita recta: Unde reliqua conſequuntur.

Quod etiam, de Sectore BCA, Segmentis ABA, αBα, Triangulis BVC, BCα, &c. ſimiliter intelligendum eſt: utpote quorum ipſa Centra gravitatis non minus determinantur, quam ipſorum BCBA, BBC; quippe in illorum axe poſita.

Sed Semiſectoris BαA, & Semiſegmenti BVA; quorum Centra Gravitatis nondum ipſa determinantur, ſed ipſorum tantum à $\tau\alpha$, TA, vel quæ hiſce parallelæ ſunt rectis, Diſtantia: Momenta, Ungulæ, & Solida converſione facta, nondum determinantur, niſi reſpectu ipſarum $\tau\alpha$, TA, rectarum, aut hiſce parallelarum. Quum vero eorum item Centrorum diſtantia ab Aα determinata fuerit (quod jam facturi ſumus;) adeoque illorum Centra ipſa determinata; eadem etiam ad rectas ipſi Aα parallelas, aut etiam alias in eodem plano rectas, ſimiliter transferentur.

Ut igitur, de his etiam, eadem univerſaliter determinentur: eorum ipſa Gravitatis Centra jam determinabimus, (per 26 Cap. præced.) exhibita eorum etiam ab Aα diſtantia, quæ ipſis $\tau\alpha$, TA, &c. parallela non eſt.

Q. Fig. 161, 162. Nempe; Centri gravitatis Sectoris BCA, à recta Aα, diſtantia, eſt $\frac{c^2}{3a}=\frac{2vR}{3a}$. Quod ſic oſtenditur. Biſectis BA, BA, arcubus in δ, δ; erit (propter arcum $\delta\delta$, æqualem arcui BA$=a$,) Chorda $\delta\delta=BA=c$; ejuſque ſemiſſis $\delta\epsilon=\frac{1}{2}c$. Item Sectoris BCA, Centrum gravitatis G, in recta Cδ; ejuſque à Centro diſtantia $CG=\frac{2c}{3a}R$; (per hujus § A.) Atque (propter ſimilia Triangula) ut C$\delta=R$, ad $\delta\epsilon=\frac{1}{2}c$; ſic $CG=\frac{2c}{3a}R$, ad $G\epsilon=\frac{c^2}{3a}$, diſtantiam Centri gravitatis ab Aα;

vel

Fig.161.

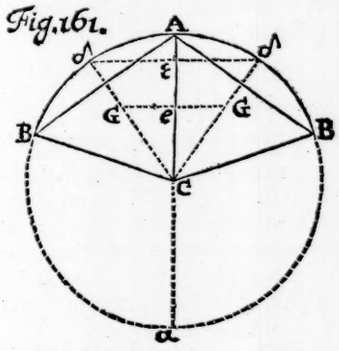
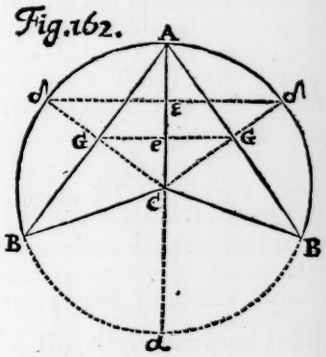


Fig.162.



vel (propter $2vR=c^2$,) $\frac{2vR}{3a}$. Et, ſpeciatim, in Semicirculo A D α, (propter $v=2R$, & $a=\frac{1}{2}P$,) diſtantia Centri gravitatis ab A α, eſt $\frac{8R^2}{3P}$. In Quadrante vero A D C, propter $v=R$, & $a=\frac{1}{4}P$) diſtantia Centri gravitatis ab A α, eſt ſimiliter $\frac{8R^2}{3P}$.

Eſt igitur, (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}aR$, per § D,) Sectoris B C A, reſpectu rectæ A α, Momentum vel Ungula Semiquadrantalis, (ducta magnitudine in diſtantiam,) $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$. Adeoque Solidum integra converſione circa A α deſcriptum, $\frac{1}{6}c^2P=\frac{1}{3}vRP$; &, converſione dimidia, $\frac{1}{12}c^2P=\frac{1}{6}vRP$. Et, ſpeciatim, Momentum Semicirculi A D α reſpectu A α, vel correſpondens Ungula, $\frac{2}{3}R^3$: Et ſolidum converſione circa A α factum (nempe Sphæra integra) $\frac{2}{3}R^2P$; & Semiſolidum, ſeu Hemiſphærium, $\frac{1}{3}R^2P$. Fig. 159, 160.

Quæque Quadrantem ſpectant, ſunt eorum Semiſſes.

Sin, ex hoc Sectoris B C A momento $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$; auferatur momentum (reſpectu ejuſdem A α) Trianguli A B C; hoc eſt (propter Baſin A C $=R$; altitudinem B V $=s$, adeoque à baſe A C diſtantiam, $\frac{1}{3}s$,) $\frac{1}{6}s^2R$: Habetur, ſegmenti A B A, momentum (reſpectu ejuſdem A α) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}c^2R-\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}v^2R$. Quod, per magnitudinem $\frac{1}{2}eR$ (per § G,) diviſum; exhibet Centri gravitatis ab A α diſtantiam $\frac{v^2}{3e}=\frac{2vR-s^2}{3a-3s}$. Solidumque ejuſdem integra converſione circa A α, $\frac{1}{3}vRP-\frac{1}{6}s^2P=\frac{1}{6}v^2P$; & converſione dimidia, $\frac{1}{6}vRP-\frac{1}{12}s^2P=\frac{1}{12}v^2P$.

Et ſimiliter de ſegmento α B α, mutatis mutandis: Puta, ſubſtitutis α pro a, & b pro v.

Deinde, Trianguli B V C, diſtantia centri gravitatis ab A α, (per 6 hujus) eſt $\frac{1}{3}BV=\frac{1}{3}s$. Adeoque (propter magnitudinem, ut prius $\frac{1}{2}sx$; hoc eſt, $\frac{1}{2}sR-\frac{1}{2}sv$, vel $\frac{1}{2}sv-\frac{1}{2}sR$, prout ſupra infrave Centrum fuerit;) ejuſdem, reſpectu rectæ A α, Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt $\frac{1}{6}s^2x$; hoc eſt $\frac{1}{6}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$, vel $\frac{1}{6}s^2v-\frac{1}{6}s^2R$, prout ſupra infrave fuerit. Adeoque Solidum integra converſione circa A α factum, eſt, $\frac{s^2xP}{6R}$; (hoc eſt, $\frac{R-v}{6R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{6R}s^2P$, prout ſuprave infrave fuerit:) Et, ſemiconverſione, $\frac{s^2xP}{12R}$; hoc eſt (prout ſupra infrave fuerit) $\frac{R-v}{12R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{12R}s^2P$. R.

Illudque Trianguli B V C momentum vel ſemiquadrantalis Ungula, momento vel Ungulæ ſemiquadrantali Sectoris B C A (reſpectu ejuſdem A α rectæ,) ſublatum ſi ſupra Centrum fuerit, vel additum ſi infra; exhibet Momentum (reſpectu ejuſdem A α) vel ſemiquadrantalem Ungulam correſpondentem, Semiſegmenti B V A. Hoc eſt, ſi momento Sectoris B C A, $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$ (per § Q.) auferatur

Fig. 159, 160. ratur $\frac{1}{6}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$, vel addatur $-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$; habetur Semisegmenti BVA Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu ipsius Aα, $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$. Adeoque Solidum illius integra conversione circa Aα descriptum, $\frac{1}{3}vR\mathcal{P}-\frac{1}{6}s^2\mathcal{P}+\frac{s^2v\mathcal{P}}{6R}$: & Semiconversione, $\frac{1}{6}vR\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2\mathcal{P}+\frac{s^2v\mathcal{P}}{12R}$. Centrique gravitatis, ejusdem BVA Semisegmenti distantia ab Aα, (diviso Momento per magnitudinem §F inventam) erit $\frac{\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v}{\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sv}=\frac{2vR^2-s^2R+s^2v}{3cR+3sv}$.

Aut etiam, propter $2vR-s^2=c^2-s^2=v^2$; Momentum erit $\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$; Solidum conversione integra factum $\frac{1}{6}v^2\mathcal{P}+\frac{s^2v\mathcal{P}}{6R}$; &, conversione dimidia, $\frac{1}{12}v^2\mathcal{P}+\frac{s^2v\mathcal{P}}{12R}$; & distantia centri gravitatis ipsius Semisegmenti BVA, ab Aα, $\frac{v^2R+s^2v}{3cR+3sv}=\frac{vR+s^2}{3cR+3sv}v$.

S. Si autem, ex hoc Semisegmenti BVA momento $\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$, auferamus momentum Trianguli BAV (respectu ejusdem Aα) $\frac{1}{6}s^2v$ (est enim Basis AV$=v$, altitudo BV$=s$, Centrique gravitatis à basi distantia $\frac{1}{3}s$; adeoque momentum $\frac{1}{6}s^2v$:) relinquitur Segmenti ABA (respectu ejusdem Aα) momentum, $\frac{1}{6}v^2R$. Ut prius.

Similiter; Distantia Centri gravitatis Trianguli BCα, à recta Aα, est (per 6 hujus) $\frac{1}{3}$BV$=\frac{1}{3}s$; ejusque magnitudo $\frac{1}{2}sR$. Ergo illius (respectu rectæ Aα) Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2R$: Adeoque Solidum integra conversione circa Aα factum, $\frac{1}{6}s^2\mathcal{P}$; & conversione dimidia, $\frac{1}{12}s^2\mathcal{P}$.

Triangulique BCα momentum illud $\frac{1}{6}s^2R$, additum Sectoris BCA momento (§Q reperto) $\frac{1}{3}vR^2=\frac{1}{6}c^2R$: exhibet Sectoris B$\alpha$A (respectu ejusdem A$\alpha$) Momentum, vel Semiquadrantalem Ungulam, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}c^2R+\frac{1}{6}s^2R$: Solidumque integra conversione circa Aα factum, $\frac{1}{3}vR\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2\mathcal{P}=\frac{1}{6}c^2\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2\mathcal{P}$; & Semisolidum, $\frac{1}{6}vR\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2\mathcal{P}=\frac{1}{12}c^2\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2\mathcal{P}$.

Aut etiam; Propter Trianguli BVα magnitudinem $\frac{1}{2}sb=sR-\frac{1}{2}sv$; & Centri gravitatis ab Aα distantiam $\frac{1}{3}s$; erit ejusdem, respectu Aα, momentum $\frac{1}{6}s^2b=\frac{1}{3}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$: Et solidum ejusdem circa Aα integra conversione factum, $\frac{s^2b\mathcal{P}}{6R}=\frac{1}{3}s^2\mathcal{P}-\frac{s^2v\mathcal{P}}{6R}$; & Semisolidum, $\frac{s^2b\mathcal{P}}{12R}=\frac{1}{6}s^2\mathcal{P}-\frac{s^2v\mathcal{P}}{12R}$.

Triangulique BVα momentum illud $\frac{1}{3}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$; semisegmenti BVA momento $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$ (§R reperto) additum; exhibet Sectoris BαA (respectu ejusdem Aα) momentum, seu semiquadrantalem Ungulam $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$. Ut prius. Adeoque (ut prius) Solidum, $\frac{1}{3}vR\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2\mathcal{P}$; & Semisolidum $\frac{1}{6}vR\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2\mathcal{P}$.

Eritque (momento per magnitudinem $\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$, §H inventam, diviso,) Sectoris BαA distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R}{\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR}=\frac{2vR+s}{3f}=\frac{c^2+s^2}{3f}$.

Determinavimus igitur (inter alia) tum Sectoris BCA, tum BαA, tum Semisegmenti BVA, Centra gravitatis, (per eorum tum à $\tau\alpha$, seu TA, seu BV, seu DC, tum ab Aα, distantias,) quæque hinc dependent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, de aliis circuli portionibus judicandum erit.

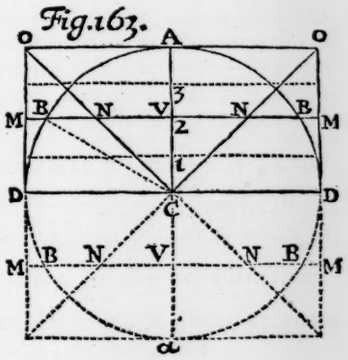
T. Possunt autem hæc eadem, quæ rectam Aα spectant, (§Q, R, S, tradita,) hac adhuc alia methodo explorari.

Sunt utique (per nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*, prop. 111, 121, 123, &c.) Quadrata ordinatim-applicatarum in Quadrante, (vel Subtensarum in Semicirculo,) Series Æqualium mulctata serie Secundanorum. Puta, ut R^2-0, R^2-1, R^2-4, R^2-9, &c. usque ad R^2-R^2. Hoc est, ut Plana Cylindri Conice excavati, (per prop. 113. ejusdem;) Vel, (per ejusdem prop. 112.) ut Rectæ in Semiparabola diametro parallelæ.

Fig. 163. Si enim Quadranti ADC, circumscribatur AODC quadratum, quod Diagonali

nali CO dividatur; ducanturque ordinatim-applicatæ VB, occurrentes ipſi DO in M, ipſique CO in N: Manifeſtum eſt, Quadratum ordinatim-applicatæ BV, æquari quadrato CB minus quadrato CV (per 47 el. 1. Euclidis:) Hoc eſt, Quadrato VM minus quadrato VN: ſunt enim VM=CB, & VN=CV: & ſic ubique.

Fig. 163.



Adeoque, Omnia quadrata BV complentium ADC quadrantem; æquantur omnibus quadratis VM complentium AODC quadratum, minus omnibus quadratis NV complentium ACO Triangulum. Et ſingula ſingulis reſpective ſumptis.

Adeoque ſi ex Parallelepipedo ODCA (quod compleant omnia MVq;) eximi intelligatur Pyramis OCA (quam compleant omnia NVq;) quod reliquum eſt, æquabitur omnibus BVq.

Aut etiam (propter Circulos Quadratis Radiorum proportionales) Cylindrus ODDO, exempto Cono OCO; æquabitur Hæmiſphærio, DAD.

Sed & (propter ſingula BVq, ſingulis MVq—NVq, æqualia,) etiam partes partibus reſpective ſumptis æquantur.

Nempe; Parallelepipedum OMVA dempto Pyramidis trunco ONVA (ſi V ſit ſupra Centrum) vel dempta Pyramide aucta OCNVA (ſi infra Centrum;) hoc eſt, dempto OCA∓NCV: Æquatur quadratis ordinatim-applicatarum in ABV, ſegmento. Et ſic ubique.

Et ſimiliter: Cylindrus OMMO, dempto ONNO vel OCNNO (hoc eſt, dempto Cono OCO, mulctato vel aucto ſimili cono NCN, prout ſupra infrave Centrum fuerit punctum V) æquatur Segmento Sphærico ABB. Et ſic ubique.

His poſitis; erit (propter $MVq=R^2$, & $AV=v$,) Parallelepipedum $OMVA=vR^2$.

Item; (propter $OAq=ACq=R^2$, & $AC=R$,) eſt Pyramis $OCA=\frac{1}{3}R^3$.

Item; (propter $NVq=VCq=x^2$, & $VC=x$;) Pyramis $NCV=\frac{1}{3}x^3$.

Eſt ergo, Summa Quadratorum omnium Ordinatim-applicatarum (puta omnia o^2) complentium ipſum ABV ſemiſegmentum; $OMVA-OCA\pm NCV=vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3$.

Eſt autem, ſupra Centrum, $x=R-v$; infra Centrum, $x=-R+v$: Adeoque illic $x^3=R^3-3vR^2+3v^2R-v^3$; hic vero $x^3=-R^3+3vR^2-3v^2R+v^3$. Ergo (cum illo caſu habeatur $+\frac{1}{3}x^3$; hoc vero $-\frac{1}{3}x^3$) erit $vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3=v^2R-\frac{1}{3}v^3$ (utroque caſu) ſumma omnium o^2; ſeu Quadratorum ordinatim-applicatarum complentium ABV ſemiſegmentum.

Vel etiam (propter $v^2=c^2-s^2=2vR-s^2$; adeoque $v^2R=2vR^2-s^2R$: & $\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}v^2R-\frac{1}{3}s^2v=\frac{4}{3}vR^2-\frac{2}{3}s^2R-\frac{1}{3}s^2v$;) erit eadem Omnium o^2 ſumma $v^2R-\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{3}s^2R+\frac{1}{3}s^2v$.

Sed & manifeſtum porro eſt; cujuſque rectæ ut BV, (atque de huic parallelis, Semiſegmentum BVA complentibus ſimile erit judicium,) momentum reſpectu rectæ $A\alpha$, æquari ſemiquadrato ejuſdem, (propter Rectæ Centrum gravitatis in ipſius medio; adeoque $VB\times\frac{1}{2}VB=\frac{1}{2}VBq$.) Et ſimiliter quæ ſemiquadrantalem Ungulam (aciem habentem $A\alpha$) complent plana, ipſis BV inſiſtentia, æquari ejuſdem BV ſemiquadrato; (nam, propter angulum in V ſemirectum; altitudo in B, æqualis erit ipſi BV baſi; ipſumque Triangulum Rectangulum Iſoſceles, erit Quadrati dimidium.) Et conſequenter, tum Semiſegmenti BVA momentum reſpectu ipſius $A\alpha$; tum ſemiquadrantalis Ungula eidem BVA inſiſtens, aciem habens $A\alpha$; æquabitur eorundem o^2 ſemiſummæ; Hoc eſt, $\frac{1}{2}v^2R-\frac{1}{6}v^3=\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v=\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$. Idem quod ſupra (§ R.) repertum erat.

Huic vero Semiſegmenti BVA momento (reſpectu rectæ $A\alpha$) ſic invento; Si addantur Triangulorum BVC, BVα, (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) Momenta; (§ R,S, reperta:) Prodibunt Momenta (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) Sectorum BCA, BαA: Cæteraque de Solidis converſione circa $A\alpha$ factis, Centriſque gravitatis planorum

Fig. 163. ab $A\alpha$ distantiis, similiter elicientur atque prius. Ut non sit opus eisdem ulterius immorari.

At interim haud erit incommodum hic loci monuisse; eadem etiam methodo Triangulorum BCV, $B\alpha V$, $BC\alpha$, momenta respectu ipsius $A\alpha$, haberi posse.

Cum enim singularum BV rectarum (seu huic parallelarum) Triangulum BCV complentium, momenta respectu $A\alpha$; seu Triangula eisdem insistentia, semiquadrantalem Ungulam (aciem habentem $A\alpha$) complentia; sint earundem BV, &c. Semiquadrata: Quæ quidem Semiquadrata, Pyramidem complent, cujus Basis est $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}s^2$, altitudo, $CV = x$; Erit ipsa Pyramis (per 6 hujus;) Hoc est, momentum illud, seu semiquadrantalis ungula BVC aciem habens $A\alpha$, $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}s^2x$. ut prius § R.

Item, (pari de causa,) Momentum Trianguli $B\alpha V$, seu huic insistens Semiquadrantalis Ungula aciem habens $A\alpha$; Pyramis erit, cujus Basis $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}s^2$, altitudo $V\alpha = h$; adeoque ipsa Pyramis (hoc est, Momentum illud, seu semiquadrantalis Ungula,) $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}s^2h$. Ut prius § S.

Estque Triangulum $BC\alpha$; idem atque $BV\alpha$ dempto additove (prout supra infrave Centrum C, sit V punctum,) BCV: Adeoque (respectu ipsius $A\alpha$) momentum Trianguli $BC\alpha$; idem atque momentum $BV\alpha$, dempto, additove, momento BCV: Adeoque Trianguli $BC\alpha$ momentum (respectu ipsius $A\alpha$) seu Semiquadrantalis Ungula eidem insistens aciem habens $A\alpha$; est $\frac{1}{6}s^2h \mp \frac{1}{6}s^2x$. Hoc est, (propter $h = 2R - v$; &, supra Centrum, $x = R - v$, auferendum; infra vero, $x = -R + v$ addendum; adeoque $h \mp x = R$;) $\frac{1}{6}s^2R$. Ut prius, § S.

V. Eadem item ostendentur ex prop. 112. Arithm. Infin.

Fig. 154. Cum enim illic ostendatur, Rectas in Semiparabola, Diametro vel Axi parallelas, esse ut Seriem Æqualium serie Secundanorum Mulctatam; (sunt enim Omnes $V\delta$, parallelogrammum $AC\Delta\delta$ complentes, series Æqualium; omnesque $\beta\delta$, complentes Semiparabolæ complementum $A\Delta\delta$, series Secundanorum; Ergo, omnes residuæ $V\beta$, parabolæ diametro $C\Delta$ parallelæ, sunt series Æqualium mulctata serie Secundanorum:) Hoc est, Ut quadrata ordinatim-applicatarum in Circuli quadrante; ut modo ostensum est.

Si igitur, super eadem $A\alpha$ recta, (ut communi Base,) describatur tum $AD\alpha$ Semicirculus, tum $A\Delta\alpha$ Parabola recta (cujus Axis $C\Delta$ æqualis sit ipsi CD circuli Radio:) Et ordinatim-applicata in Semicirculo quælibet BV producta, occurrat Parabolæ in β: Erunt omnes $V\beta$ Rectæ, omnibus Quadratis VB respective sumptis proportionales.

Adeoque ductis omnibus $V\beta$ rectis, (sive totam Parabolam, sive ipsius segmentum ut $AV\beta$ complentibus,) in communem altitudinem $R = C\Delta = CD$: Erunt omnia $V\beta$ in R parallelogramma (Prisma, Parabolæ, ejusve portioni, insistens complentia,) æqualia omnibus VB quadratis (& singula singulis respective sumptis;) Hoc est (per ante demonstrata) Duplo momenti Semicirculi, ejusve cui insistunt portioni, respectu rectæ $A\alpha$; seu, Duplo semiquadrantalis Ungulæ correspondentis, aciem habentis $A\alpha$. (Sunt enim hæc Parallelogramma, propter communem altitudinem R, ipsis quibus insistunt Rectis $V\beta$, proportionalia; adeoque, per jam ostensa, proportionalia ipsis VB quadratis: Sed &, propter $CD = C\Delta = R$, Parallelogrammum, $C\Delta$ in R, æquatur ipsi CD quadrato: Ergo & reliqua reliquis respective.) Eademque, $V\beta$ in $\frac{1}{2}R$, (utpote illorum dimidia,) ipsi Momento plani ABV respectu ipsius $A\alpha$; vel Semiquadrantali Ungulæ correspondenti æquantur.

Si igitur, Parallelogrammo $AV\delta\delta$; auferatur $A\beta\delta\delta$ vel $A\Delta\beta\delta\delta$ (hoc est, Semiparabolæ Complementum $A\Delta\delta$, dempto additove $\Delta\beta\delta$, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) habetur Parabolæ segmentum $AV\beta = AV\delta - A\Delta\delta \pm \beta\Delta\delta$.

Est autem (propter $AV = v$, & $V\delta = R$) Parallelogrammum $AV\delta\delta = vR$.

Item; (propter Semiparabolæ Complementum, subtriplum circumscripti Parallelogrammi, per prop. 23. *Arithm. Infin.* vel prop. 1. hujus; rectamque $AC = C\Delta = R$;) Semiparabolæ complementum $A\Delta\delta = \frac{1}{3}R^2$.

Item;

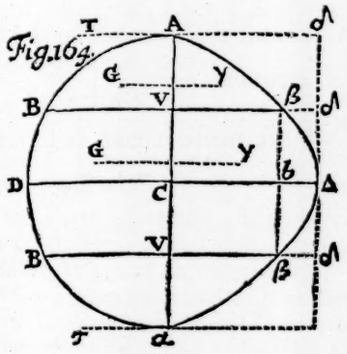


Fig. 164.

Item; (propter $AC = C\Delta$;) Parabolæ Latus rectum erit æquale ipsi $C\Delta = R$: Et (propter $\beta b = VC = x$) erit $\beta\delta = b\Delta = \frac{x^2}{R}$: Adeoque Semiparabolæ complementum $\beta\Delta\delta$ (utpote circumscripti Parallelogrammi $\beta b\Delta\delta$ triens) $= \frac{x^3}{3R}$.

Ergo; Parabolæ Segmentum $AV\beta = AV\delta - A\Delta\delta \pm \beta\Delta\delta = vR - \frac{1}{3}R^2 \pm \frac{x^3}{3R}$. Atque hoc demum in $\frac{1}{2}R$ ductum; exhibet $\frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{6}R^3 \pm \frac{1}{6}x^3$ Semisegmenti Circularis ABV Momentum respectu rectæ $A\alpha$; vel Semiquadrantalem Ungulam correspondentem: Ejusque duplum, $vR^2 - \frac{1}{3}R^3 \pm \frac{1}{3}x^3 = v^2R - \frac{1}{3}v^3 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$; ut prius, § T.

Atque hinc similiter elicientur, tum Sectorum BCA, $B\alpha A$, Momenta seu semiquadrantales Ungulæ respectu rectæ $A\alpha$, tum Centrorum gravitatis inde distantiæ; cæteraque ut prius.

Eademque adhuc alias sic investigantur.

Si intelligatur Sphæra, vel Sector Sphæricus, (puta BCB ex conversione Sectoris circularis BCA circa $A\alpha$ factus,) ex numero-infinitis Pyramidulis (juxta def. 1. Cap. 4.) conflari: Quorum omnium communis vertex sit C Centrum; & communis altitudo Circuli Sphæræve Radius; Baseque compleant ipsam superficiem Sphæricam, vel Sectoris Sphærici Superficiem curvam, (puta BAB quæ arcus BA circa $A\alpha$ conversione describitur:) Erit (propter, Pyramides Prismatum super eisdem basibus æque altorum Trientes, per prop. 6 hujus;) Sector Sphæricus BCBA, æqualis superficiei Sphæricæ segmento BAB in Trientem Radii ducto. W. Fig. 159, 160.

Habetur autem Superficiei Sphæricæ segmentum illud BAB, si ducatur Arcus $AB = a$, in Peripheriam ejusdem arcus Centro gravitatis descriptam, per 12 hujus. Est autem ejusdem AB arcus Centrum gravitatis, puta G (in fig. 161, 162.) in recta $C\delta$ arcus axe; rectaque $CG = \frac{c}{a}R$, (per 14 hujus.) Rectaque $\delta\varepsilon = \frac{1}{2}c$, (ut § Q. ostensum est:) Atque (propter similia Triangula) Ut $C\delta = R$, ad $\delta\varepsilon = \frac{1}{2}c$, sic $CG = \frac{c}{a}R$, ad $\frac{c^2}{2a} = Ge$ distantiam Centri gravitatis Arcus AB, ab $A\alpha$; Adeoque $\frac{c^2P}{2aR}$ est Peripheria ejusdem integra conversione circa $A\alpha$ descripta. In quam itaque si ducatur $AB = a$, habetur Sphæricæ Superficiei segmentum $BAB = \frac{c^2P}{2R}$: vel (propter $c^2 = 2vR$,) Superficiei Sphæricæ segmentum $BAB = vP$. Fig. 161, 162.

Vel etiam (per 13 hujus;) Propter integram sphæræ superficiem quatuor Circulis maximis æqualem; hoc est, $2RP$: atque abscissum segmentum ABB, in ea ratione ad totam, qua est ipsius altitudo $AV = v$, ad $A\alpha = 2R$: Erit ut $A\alpha = 2R$, ad $AV = v$, sic tota superficies Sphærica $2RP$, ad ipsius segmentum $BAB = vP$. ut prius. Fig. 159, 160.

Quod itaque superficiei Sphæricæ segmentum, in $\frac{1}{3}R$ ductum, exhibet Sectorem Sphæricum $BCBA = \frac{1}{3}vRP$: Adeoque Semiquadrantalem Ungulam, seu Plani BCA momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2$. Idem quod supra, § Q repertum est. Cæteraque hinc, ut ibidem, deducentur.

Exhibuimus itaque Semicirculi Partiumque ipsius expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; eorumque distantiam Centri gravitatis à rectis illis. Adeoque per prop. 26. Cap. præced. (propter datas X.

eorum

eorum à duabus in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantias,) ipsa gravitatis Centra.

Eademque methodo, de aliis Circuli portionibus, eorumque Momentis, & Solidis conversione factis fiet judicium. Puta, si pro sectore B α A, (ad verticem terminato) exoneretur sector D α B, aliusve hujusmodi: Cum enim tum Sectoris B α A, tum D α A, magnitudines & momenta (reliquaque quæ hinc dependent) jam exhibeantur; etiam sectoris D α B (qui illorum vel differentia vel summa sit) magnitudines & momenta (adeoque & quæ hinc dependent) facile exhiberi poterunt.

Item; eadem methodo qua momenta, verbi gratia, semisegmenti B V A, à recta τ α, ad rectas T A, vel B V, transferuntur; possunt similiter à recta A α, ad T τ, vel B a, transferri. Eaque, quæ hic traduntur, mille modis aliis ampliari.

Y. Quæ autem de Circulo ejusque portionibus dicta sunt: eadem ad Ellipsin, hujusque portiones, facile transferentur. Nempe, si intelligatur Axium ellipseos alter A α, alter D Δ: Manente, ut prius, $A\alpha = 2R$; (adeoque $AV = v$, $V\alpha = b$;) erit D Δ in ea ratione ad $2R$, qua est ad A α; adeoque B V in eadem ratione ad s. Adeoque ubicunque B V, aut huic parallelæ in calculum veniunt; pro s, substituenda erit quantitas quæ sit, ad s, in ea ratione qua est D Δ ad A α: (majore quidem, si D Δ sit axium major; minore, si minor;) Adeoque, pro s^2; quantitatem quæ sit ad hanc in duplicata ratione rectæ D Δ ad A α: & similiter, mutatis mutandis, in reliquis ejusdem potestatibus.

PROP. XVI.

A. Sectoris Sphærici Centrum gravitatis, est in Axis sui illo puncto, quod à Centro Circuli distat Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ: Seu Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus sinus Versi: Seu, quod à Centro Circuli distat, Tribus Octantibus altitudinis residuæ superficiei curvæ; seu Tribus Octantibus sinus Versi residui.

Fig. 165.

Hoc est, in Hemisphærio; $\frac{3}{8}$ Radii.

B. Atque hinc Segmenti Sphæræ (plano abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Et in aliis portionibus similiter. Et quæ hinc dependent.

Fig. 159, 160.

C. Nempe; Si ponantur Symbola ut in propositione præcedente; erit, Semiquadrantalis Ungulæ totius semicirculi, aciem habentis A α, (unde de Solidis conversione factis, & Semisolidis fiet judicium,) Magnitudo $\frac{2}{3}R^3$; distantia Centri gravitatis, sive à τ α, sive à TA, R; momentum respectu τ α, vel TA, $\frac{2}{3}R^4$: Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3}{32}P$; momentum respectu A α, $\frac{1}{16}R^3P$.

P.

I. Aciemque habentis τ α, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; momentum respectu A α,

T. $\frac{2}{3}R^4$; distantia Centri gravitis ab A α, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu τ α, $\frac{5}{16}R^3P$; respectu T A, $\frac{3}{16}R^3P$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{5}{4}R$; à TA, $\frac{3}{4}R$.

I. Aciemque habentis TA, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; momentum respectu A α,

T. $\frac{2}{3}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{16}R^3P$; respectu T A, $\frac{5}{16}R^3P$; distantia centri gravitatis a τ α, $\frac{3}{4}R$; à T A, $\frac{5}{4}R$.

C. Semiquadrantalis Ungulæ, Sectoris B C A, aciem habentis A α, (unde de Solidis conversione factis, & semisolidis, fiet judicium;) Magnitudo, $\frac{1}{3}vR^2$; distantia Centri gravitatis à D C, $\frac{3}{8}b$; à τ α, $R+\frac{3}{8}b$; à T A; $R-\frac{3}{8}b$; momentum respectu τ α, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3$

$\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3e}{8v}R+\frac{3}{8}s$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$. Fig. 159, 160. P.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{3}sR^2$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8vR+3s^2}{12a+8s}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}aR^3+\frac{19}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15aR+19sR-3sv}{12a+8s}$; à TA, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a+8s}$. I. X.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8vR-3s^2}{12a-8s}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2$; reſpectu TA, $\frac{1}{8}aR^3-\frac{13}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a-8s}$; à TA, $\frac{15aR-13sR-3sv}{12a-8s}$. I. X.

Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Trianguli BVC, aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2x$; diſtantia Centri gravitatis à DC, $\frac{3}{4}x$; à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{3}{4}x$; à TA, $R\mp\frac{3}{4}x$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}s^2xR\pm\frac{1}{8}s^2x^2$; reſpectu TA, $\frac{1}{6}s^2xR\mp\frac{1}{8}s^2x^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}s$. momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{12}s^3x$. D. Q.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{6}sxR-\frac{1}{3}sxv$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{24}s^2xR-\frac{1}{8}s^2vx$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{7R-3v}{20R-8v}s$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2\pm\frac{1}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; reſpectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{4xR\pm3x^2}{6R\pm4x}$; à TA, $R\mp\frac{4xR\pm3x^2}{6R\pm4x}$. M. X.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{6}sxR+\frac{1}{3}sxv$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{24}s^2xR+\frac{1}{8}s^2xv$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα $\frac{R+3v}{4R+8v}s$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; reſpectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2\mp\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{4xR\mp3x^2}{6R\mp4x}$; à TA, $R\mp\frac{4xR\mp3x^2}{6R\mp4x}$. M. X.

Ungulæ Semiſegmenti BVA aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; reſpectu TA, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à TA, $R-\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à DC, $\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2=\frac{3s^2b-3b^2v}{4vR+4vb}$; à BV, $\frac{3b^2}{4R+4b}-R+v$; momentum reſpectu BV, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{24}s^4$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^3x$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^3+3svR^2\mp2s^3x}{4v^2R+4s^2v}$. E. Q.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; momentum K.

Fig. 159, 160. reſpectu Aα, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2+4s^2R+3s^2h}{12eR^2+12svR+8s^3}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{11}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu BV, $-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R+\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$; à TA, $\frac{3}{4}R-\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$; à BV, $\frac{3}{4}R-h+\frac{3s^2h}{6eR^2+6svR+4s^3}=-\frac{3}{4}R+v+\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$.

K. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; diſtantia Centri gravi-

T. tatis ab Aα, $\frac{4vR^2+4s^2R-8s^2h}{12eR^2+12svR-8s^3}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu BV, $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à TA, $\frac{5}{4}R-\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à BV, $\frac{3}{4}R-h+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}=-\frac{5}{4}R+v+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$.

K. Aciemque habentis BV; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{24}s^4=\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{24}v^2h^2$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2-s^2h}{-12eR^2+12avR-4s^3}v$:

V. Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; reſpectu TA, $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; reſpectu BV, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3+12avR^2+3svR^2-6s^3R+2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à TA, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à BV, $\frac{15eR^3+15svR^2-12as^2R+2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$.

G. Ungulæ Trianguli BAV, aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2v$; centri gravitatis Diſtantia à $\tau\alpha$, $2R-\frac{3}{4}v$; à TA, $\frac{3}{4}v$; momentum re-

S. ſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; reſpectu TA, $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$: Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}s$; momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{12}s^3v$.

N. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; centri gravitatis diſtantia ab Aα, $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$:

Y. Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2+10s^2R-3s^2v}{4vR+4s}$; à TA, $\frac{4R^2-2s^2R+3s^2v}{4vR+4s^2}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2+\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$.

N. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{3}sv^2$; momentum reſpectu Aα,

Y. $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; centri gravitatis ab A$\alpha$ diſtantia, $\frac{3}{8}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $2R-\frac{3}{4}v$; à TA, $\frac{3}{4}v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R-\frac{1}{4}sv^3$; reſpectu TA, $\frac{1}{4}sv^3$.

Ungulæ

Ungulæ Segmenti A B A, aciem habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{1}{2}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{1}{2}b$; à TA, $R-\frac{1}{2}b$; à DC, $\frac{1}{2}b$. Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2=4v^2}$. G. Fig. 159, 160. S.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; centri gravitatis ab A α diſtantia $\frac{4R^2-2bR+s^2}{6eR+2sv}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{7}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2+7svR+2s^3}{12eR+4sv}$; à TA, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR+4sv}$. N. Y.

Aciemque habentis TA, Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; centri gravitatis ab A α diſtantia $\frac{4R^2-2bR-s^2}{6eR-2sv}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}eR^3-\frac{3}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR-4sv}$; à TA, $\frac{15eR^2-9svR+2s^3}{12eR-4sv}$. N. Y.

Ungulæ Trianguli BCα, aciem habentis A α, Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{1}{2}v$; à TA, $\frac{3}{4}R+\frac{1}{2}v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$: Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}s$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3R$. F. R.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu A α, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; centrique gravitatis ab A α diſtantia, $\frac{5R-2v}{12R-4v}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7R^2-3vR-s^2}{6R-2v}$; à TA, $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R-2v}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{7}{12}sR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$. M. X.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3R+2v}{12R+4v}s$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{7}{12}sR^3+\frac{5}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R+2v}$; à TA, $\frac{7R^2+5vR-s^2}{6R+2v}$. M. X.

Ungulæ Trianguli BVα, aciem habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2b$; centri gravitatis diſtantia à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}b$; à TA, $2R-\frac{3}{4}b$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}s^2b^2$; reſpectu TA, $\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{8}s^2b^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}s$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3b$. F. R.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{3}sb^2$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}s^2b^2$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3}{8}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}b$; à TA, $2R-\frac{3}{4}b$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3=\frac{1}{12}sb^3+\frac{1}{3}s^3b$. M. W.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $sbR-\frac{1}{3}sb^2$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{8}s^2b^2$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8R-3b}{24R-8b}s$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v=\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3=\frac{1}{12}sb^3+\frac{1}{3}s^3b$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; diſtantia M. W.

Fig. 159, 160. ſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; a TA, $R + \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à DC, $\frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2} = \frac{3v^2}{12R - 4b} = \frac{3v^2}{4R + 4v}$.

F. Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis Aα; Magnitudo $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; à

R. TA, $R - \frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; à DC, $\frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$: Momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{8vR + 4s^2}$.

L. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; diſtan-

W. tia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6fR + 2sb}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{8}fR^3 + \frac{3}{8}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15fR^2 + 9sbR - 2s^3}{12fR + 4sb}$; à TA, $\frac{9fR^2 - sbR + 2s^3}{12fR + 4sb}$.

L. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; diſtantia Centri

W. gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6fR - 2sb}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{8}fR^3 - \frac{7}{24}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9fR^2 - sbR + 2s^3}{12fR - 4sb}$; à TA, $\frac{15fR^2 - 7sbR - 2s^3}{12fR - 4sb}$.

Z. Adeoque exhibuimus, Sphæricorum Sectorum & Segmentorum, Ungularum item aliorumque Solidorum expoſitorum, tum magnitudines, tum momenta reſpectu expoſitorum aliquot planorum, eorumque Centrorum gravitatis à planis illis diſtantiam, ipſaque gravitatis Centra.

Quæ omnia, ad alia etiam Solida, ad Sphæram ejuſve partes ſpectantia, facile poterunt accommodari: Aut etiam ad alia Solida ex Circulorum portionibus oriunda.

Quæque, de Ungulis Semicirculi ejuſve portionum; Sphæraque & portionibus hujus, dicta ſunt; eadem ad Ungulas Semi-ellipſeos hujuſve portionum; & Sphæroeides, portioneſque hujus; facile accommodantur.

Intelligatur

INtelligatur BCB Sector Sphæricus; (intellige Figuram Solidam in Sphæra, quæ conversione Sectoris Circularis BCA, seu BCα, Circa ACα, describitur:) Ex infinitis numero Pyramidulis similibus & æqualibus (juxta def. 1. Cap. 4.) componi: Quarum communis vertex sit Sphæræ Centrum C; Basesque componant Sphæricæ superficiei segmentum Sectori sphærico conveniens. Erit itaque, Tum simul omnium Magnitudo, æqualis Trienti Radii (communis Altitudinis omnium) in Sphæricam superficiem BAB, vel Bα B, sectori convenientem, (utpote Basium Aggregatum,) ducto: (Quod ex 1 vel 6 hujus probabitur; propter Parallela Pyramidum Plana similia, aut etiam parallelas Sectorum sphæricorum curvas superficies similes, in ratione Secundanorum:) Tum Centra gravitatis omnium, in Simili Superficie Sphærica, descripta Radio $Cb=\frac{3}{4}CB=\frac{3}{4}R$: (propter Centra gravitatis Pyramidum, in Axe suo posita, tres quadrantes ejusdem ad verticem abscindentia; per 6 hujus.) Cujus quidem superficiei bab, radio Cb descriptæ, cum singula puncta intelligantur æque onusta, (ut quæ æqualium Pyramidum Centra gravitatis sustineant;) idem erit hujus Centrum gravitatis, atque expositi Sectoris Sphærici. Puta (in sectore BCBA) in G, medio puncto rectæ av (sinus versi arcus ba) per 13 hujus. Est autem, (propter $Cb=\frac{3}{4}CB=\frac{3}{4}R$:) recta $av=\frac{3}{4}AV=\frac{3}{4}v$: Adeoque $aG=\frac{1}{2}av=\frac{3}{8}v$, & $CG=Ca-aG=\frac{3}{4}CA-\frac{3}{8}AV=\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}v=\frac{3}{8}h$, (propter $2R-v=h$.) Et similiter ostendetur, in opposito Sectore BCBα, $av=\frac{3}{4}\alpha V=\frac{3}{4}h$; & $aG=\frac{1}{2}av=\frac{3}{8}h$; & $CG=Ca-aG=\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}h=\frac{3}{8}v$, (propter $2R-h=v$.) Hoc est; Distantia Centri gravitatis Sectoris Sphærici (in Sectoris Axe positi) à Centro Sphæræ, æqualis Tribus Quadrantibus Radii minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ sectori convenientis; aut etiam (quod eodem recidit) æqualis Tribus Octantibus altitudinis reliquæ superficiei sphæricæ. Quod erat propositum. A.

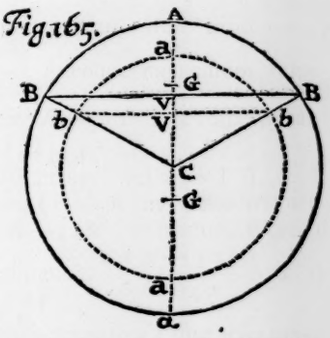


Fig. 165.

Hoc est, speciatim in Hemisphærio, (propter $v=h=R$,) $\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}R=\frac{3}{8}R$.

Corollarium constat, ex prop. 27. Cap. præced. Nam Sectori BCBA, dempto BBC Cono, habetur Segmentum BBA; & Sectori BCBα, addito eodem BBC Cono, habetur Segmentum BBα. Cum itaque tum Sectoris sphærici (per jam ostensa;) tum dempti additive Coni (per 6 hujus;) magnitudines & Centra gravitatis assignantur; habebitur & Relidui, vel Aggregati, Segmenti Sphærici, tum Magnitudo, tum & Centrum gravitatis. Et similiter, (mutatis mutandis,) in aliis Sphæræ portionibus. B.

Exempli gratia. Centri gravitatis Sectoris integri BCBA (conversione Semisectoris Circularis BCA, circa CA, descripti) distantia à C, (per modo demonstrata) est $\frac{3}{4}CA-\frac{3}{8}AV=\frac{3}{8}A\alpha-\frac{3}{8}AV=\frac{3}{8}V\alpha$, in ipso Axe AC. C. Fig. 159, 160.

Hoc est (positis ut in demonstratione propositionis præcedentis, Radio $CA=CB=C\alpha=R$; integra Peripheria $=P$; Arcu $BA=a$; chorda $BA=c$; sinu recto $BV=s$; & verso $AV=v$; versique residuo ad Diametrum $V\alpha=2R-v=h$; à Centro Distantia $VC=x=R-v$ vel $v-R$; Item $a-s=e$; $a+s=f$; &c.) $\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}v=\frac{3}{8}h$.

Adeoque ejusdem Centri gravitatis ab α, vel τα, (intellige; à plano in α Sphæram Tangente,) $R+\frac{3}{8}h=\frac{1}{4}R-\frac{3}{8}v$. Atque à TA, $R-\frac{3}{8}h=\frac{1}{4}R+\frac{3}{8}v$.

Eademque est ab iisdem τα, vel TA, planis; distantia Centri gravitatis Semisectoris, (puta, qui plano per Aα transeunte, integrum bisecante, determinatur;) aut Sectoris Quadrantalis; aliusve imperfecta quavis conversione descripti, (adeoque duobus ejusmodi planis, quorum communis sectio sit Aα, interjecti;) propter omnia plana, Sectorem integrum complentia, ipsorum partibus, Sectores partiales complentibus, proportionalia, atque in iisdem à τα, TA, planis Tangentibus, distantiis. Quod de semi-conis, vel semisegmentis Sphæricis aliis, aliisve Solidis imperfecta conversione descriptis, & correspondentibus Ungulis, &c. similiter obtinet. Quod semel moneo, ne sæpius sit opus idem repetere.

Fig. 159, 160. Eſt autem (per prop. præced. § Q.) Sphærici Sectoris integri BCBA magnitudo, $\frac{1}{6}c^2P=\frac{1}{3}vRP$; (adeoque ſemiſectoris magnitudo, $\frac{1}{12}c^2P=\frac{1}{6}vRP$,) & Ungulæ Semiquadrantalis, qui huic reſpondet, (intellige, qui Sectori circulari BCA inſiſtit, aciem habens Aα,) magnitudo $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$.

Ducta igitur diſtantia illa in magnitudinem; Habetur momentum ſphærici ſectoris integri BCBA (reſpectu Axis motus, Planive Tangentis, τα,) $\frac{1}{6}c^2RP+\frac{1}{16}c^2bP=\frac{7}{12}vR^2P-\frac{1}{8}v^2RP=\frac{1}{3}vR^2P+\frac{1}{8}s^2RP$: Semiſectoris, $\frac{1}{6}vR^2P+\frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$.

Et, reſpectu ipſius TA, momentum ſphærici Sectoris integri BCBA, $\frac{1}{6}c^2RP-\frac{1}{16}c^2bP=\frac{1}{12}vR^2P+\frac{1}{8}v^2RP=\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{8}s^2RP$: Semiſectoris $\frac{1}{6}vR^2P-\frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$.

Et ſpeciatim, quæ toti Semicirculo inſiſtit Semiquadrantalis Ungula aciem habens Aα; (propter $v=2R$, & $s=0$,) eſt $\frac{2}{3}R^3$, & ſolidum converſione factum, hoc eſt, Sphæra integra, $\frac{2}{3}R^2P$; & Semiſolidum, ſeu Hemiſphærium $\frac{1}{3}R^2P$. Diſtantia Centri gravitatis à τα, vel TA, R: Momentum Ungulæ reſpectu τα, vel TA, $\frac{2}{3}R^4$; Sphæræ, $\frac{2}{3}R^3P$; Hemiſphærii ADα; $\frac{1}{3}R^3P$.

D. Deinde (per prop. præced. § R.) Coni integri BBC, (converſione Trianguli BVC, circa Aα,) magnitudo eſt $\frac{xs^2P}{6R}$; Semiconi, $\frac{xs^2P}{12R}$; Ungulæ Semiquadrantalis, $\frac{1}{6}xs^2$. Hoc eſt; Si V ſit ſupra C Centrum; $\frac{R-v}{6R}s^2P$; $\frac{R-v}{12R}s^2P$; $\frac{R-v}{6}s^2$: Si, infra Centrum; $\frac{v-R}{6R}s^2P$, $\frac{v-R}{12R}s^2P$, $\frac{v-R}{6}s^2$.

Eſt autem (per 6 hujus) Centri gravitatis à DC diſtantia, $\frac{3}{4}x$: Hoc eſt $\frac{3}{4}R-\frac{3}{4}v$, ſi ſupra Centrum; & $\frac{3}{4}v-\frac{3}{4}R$, ſi infra Centrum. Et utroque caſu, ejuſdem à τα diſtantia, $\frac{1}{4}R-\frac{3}{4}v=R\pm\frac{3}{4}x$: Atque à TA, $\frac{1}{4}R+\frac{3}{4}v=R\mp\frac{3}{4}x$.

Et propterea (ductis magnitudinibus in diſtantias) Momentum, reſpectu ipſius τα, Coni integri BCB, $\frac{1}{6}xs^2P\pm\frac{x^2s^2P}{8R}$; Semi-coni, $\frac{1}{12}xs^2P\pm\frac{x^2s^2P}{16R}$, Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2R\pm\frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{7R-3v}{24R}xs^2P$, $\frac{7R-3v}{48}xs^2P$, $\frac{7}{24}xs^2R-\frac{1}{8}xs^2v$. Hoc eſt; ſi ſupra Centrum, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{7}{24}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Si infra Centrum, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{7}{24}s^2R^2+\frac{1}{6}svR+\frac{1}{8}s^4$.

Et, reſpectu ipſius TA; momentum Coni integri, Semi-coni, & Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2P\mp\frac{x^2s^2P}{8R}$, $\frac{1}{12}xs^2P\mp\frac{x^2s^2P}{16R}$, $\frac{1}{6}xs^2R\mp\frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{R+3v}{24R}xs^2P$, $\frac{R+3v}{48R}xs^2P$, $\frac{1}{24}xs^2R+\frac{1}{8}xs^2v$. Hoc eſt, Supra Centrum, $\frac{R^2-4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{R^2-4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{1}{24}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; vel Infra centrum $\frac{-R^2+4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-R^2+4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{1}{24}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$.

E. Hæc itaque momenta Coni, Semiconi, Ungulæve, BBC, BVC; momentis Sectoris, Semiſectoris, Ungulæve, BCBA, BCA, reſpectivis; Subducta, Additave, prout vel ſupra vel infra centrum fuerint; exhibent Segmenti, Semiſegmenti, Ungulæve, BBA, BVA, momenta reſpectu ipſius τα, $\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{6}s^2RP+\frac{1}{6}s^2vP+\frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P-\frac{1}{12}s^2RP+\frac{1}{12}s^2vP+\frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4=\frac{1}{6}v^2R^3+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$.

Et,

Et, reſpectu ipſius TA, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P} - \frac{1}{6}s^2R\mathcal{P} + \frac{1}{6}s^2v\mathcal{P} - \frac{s^4\mathcal{P}}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P} - \frac{1}{12}s^2R\mathcal{P} + \frac{1}{12}s^2v\mathcal{P} - \frac{s^4\mathcal{P}}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Fig. 159, 160.

Adeoque, momenta per magnitudines dividendo (puta, Ungulæ momenta, per magnitudinem Ungulæ, $\frac{1}{8}v^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$, prop. præced. § R. inventam,) habetur diſtantia Centri gravitatis Ungulæ BVA aciem habentis Aα, (adeoque & Sectoris, vel Semiſectoris correſpondentis,) à τα, $R + \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à TA, $R - \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à DC, $\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à BV, $\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} + R - b = \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} \cdots R + v$.

Vel (quod eodem recidit) à τα, $R + \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2$; à TA, $R - \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2 = \frac{2vR + 3s^2}{4vR + 4s^2}v$; à DC, $\frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2 = \frac{3bs^2}{4vR + 4s^2} = \frac{3b^2v}{4vR + 4vb} = \frac{3b^2}{4R + 4b}$; à BV, $\frac{3b^2}{4R + 4b} + R - b = \frac{3b^2}{4R + 4b} - R + v$.

Et (reſtituendo magnitudines) momentum (reſpectu ipſius BV) Segmenti Sphærici BBA, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P} - \frac{1}{6}s^2R\mathcal{P} - \frac{s^4\mathcal{P}}{24R}$; Semiſegmenti BVA, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P} - \frac{1}{12}s^2R\mathcal{P} - \frac{s^4\mathcal{P}}{48R}$; & correſpondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4$.

Sed & poſſunt hæc eadem, ſic alias haberi.

Cum enim (ut oſtenſum eſt prop. præced. §. V.) Semi-Quadrata rectarum BV & huic parallelarum Semiſegmentum AVB complentium; ſint rectis Vβ, &c. (fig. 164.) Parabolæ portionem AVβ complentibus, proportionalia; & quidem ipſis Vβ, &c. in $\frac{1}{2}R$ ductis ſigillatim æqualia; atque in eiſdem à τα, TA, DC, diſtantiis: Eadem erunt reſpectu ipſarum τα, TA, DC, momenta Semiquadrantalis Ungulæ (quam illa complent Semiquadrata) Semiſegmento AVB inſiſtentis; atque Priſmatis portioni Parabolæ AVβ inſiſtentis, quam illa complent parallelogramma βV × $\frac{1}{2}R$; Eademque utriuſque Solidi diſtantia Centri gravitatis, (puta G, & γ,) ab ipſis τα, TA, DC, (planis) reſpective. Hoc eſt (per 5 hujus) quantum inde diſtat ipſius portionis Parabolæ AVβ centrum gravitatis γ. Fig. 164.

Eſt autem Semiparabolæ AΔC magnitudo (per 6 hujus) $\frac{2}{3}\Delta C \times CA = \frac{2}{3}R^2$; ejuſque Centri gravitatis ab Axe CΔ diſtantia (per 8 hujus) $\frac{3}{8}AC = \frac{3}{8}R$; adeoque à τα, $R + \frac{3}{8}R = \frac{11}{8}R$; à TA, $R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R$. Adeoque ipſius momentum reſpectu DCΔ, eſt $\frac{1}{4}R^3$; reſpectu τα, $\frac{11}{12}R^3$; reſpectu TA, $\frac{5}{12}R^3$.

Item Semiparabolæ βΔb, magnitudo $\frac{2}{3}\Delta b \times b\beta = \frac{2x^2}{3R}x = \frac{2x^3}{3R}$: Centrique gravitatis à CΔ diſtantia $\frac{3}{8}b\beta = \frac{3}{8}x$: (adeoque à τα, $R \pm \frac{3}{8}x$; à TA, $R \mp \frac{3}{8}x$; prout fuerit ſupra infrave rectam CΔ.) Adeoque momentum ejus, reſpectu ipſius CΔ, $\frac{x^4}{4R}$; Cui additum momentum parallelogrammi VCbβ, hoc eſt (propter βb = x, & Cb = $R - \frac{x^2}{R} = \frac{R^2 - x^2}{R} = s^2$; Centrique gravitatis à CΔ diſtantiam, $\frac{1}{2}\beta b = \frac{1}{2}x$;) $\frac{x^2R^2 - x^4}{2R} = \frac{s^2}{2R}x^2$, exhibet portionis VβΔC momentum reſpectu ipſius CΔ, $\frac{2x^2R^2 - x^4}{4R} = \frac{2s^2 + x^2}{4R}x^2$. Hujuſque propterea portionis VβΔC (propter magnitudinem $xR - \frac{x^3}{3R}$) diſtantia Centri gravitatis à CΔ, eſt $\frac{6x^2R^2 - 3x^4}{12xR^2 - 4x^3} = \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$: Adeoq; à τα, $R \pm \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; à TA, $R \mp \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; (prout

ſupra

Fig. 164. ſupra infrave Centrum fuerit.) Et (reſtituendo Magnitudinem) Momentum ejuſdem V β Δ C, reſpectu τ α, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \pm \frac{2R^2 - x^2}{4R} x^2$, & reſpectu T A, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \mp \frac{2R^2 - x^2}{4R} x^2$.

Atque hæc portionis V β Δ C momenta reſpectiva, dempta additave (prout ſupra infrave Centrum C contigerit V punctum,) reſpectivis Semiparabolæ A Δ C (reſpectu rectarum τ α, T A,) momentis, $\frac{11}{12}R^3, \frac{5}{12}R^3$: exhibent Portionis A V β, momentum reſpectu τ α, $\frac{11}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R} x^2$; & reſpectu T A, $\frac{5}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R} x$.

Reductione autem facta, valorem ipſius x reſtituendo, reperientur hæc momentis ſuperius deſignatis convenire.

Eſt enim $x = \pm R \mp v$; prout ſupra infrave Centrum contigerit; (Hoc eſt, $x = R - v$, ſupra Centrum; vel $x = -R + v$ ſi infra Centrum.) Adeoque $\mp xR^2 = -R^3 + vR^2$.

Similiter $x^3 = \pm R^3 \mp 3vR^2 \pm 3v^2R \mp v^3$. Adeoque $\pm\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}R^3 - vR^2 + v^2R - \frac{1}{3}v^3$. Hoc eſt (propter $v^2 = 2vR - s^2$, & $v^3 = 4vR^2 - 2s^2R - s^2v$,) $\pm\frac{1}{3}x^3 = +\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$.

Et utroque caſu (hoc eſt, ſive $x = +R - v$, ſive $x = -R + v$,) eſt $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$. Adeoque $\frac{2R^2 - x^2}{4R} x^2 = \frac{R^2 + s^2}{4R} x^2 = \frac{R^4 - s^4}{4R} = \frac{1}{4}R^3 - \frac{s^4}{4R}$.

Adeoque momentum Portionis A V β, reſpectu τ α, $\frac{11}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R} x^2 = \frac{3}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v + \frac{s^4}{4R}$; & reſpectu T A, $\frac{5}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R} x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v - \frac{s^4}{4R}$.

Atque hæc momenta (propter Priſmatis ipſi A V β inſiſtentis altitudinem $\frac{1}{2}R$) ducta in $\frac{1}{2}R$; exhibent iſtius Priſmatis momentum, hoc eſt momentum Semiquadrantalis Ungulæ Semiſegmento Circulari A B V inſiſtentis (aciem habentis A α) reſpectu τ α, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & reſpectu T A, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Ut prius.

Indeque Centri gravitatis diſtantia, ſive à τ α, ſive T A, ſive à B V, elicietur, ut prius.

F. Fig. 159, 160. Porro; Coni integri BBz (Trianguli BV α, circa A α converſione deſcripti,) magnitudo (per prop. præced. § S.) $\frac{s^2b}{6R}\mathcal{P} = \frac{2R - v}{6R} s^2\mathcal{P}$; ſemiconi, $\frac{2R - v}{12R} s^2\mathcal{P}$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2b = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$.

Centrique gravitatis diſtantia (per 6 hujus) à τ α, $\frac{3}{4}b = \frac{3}{2}R - \frac{3}{4}v$; à T A, $2R - \frac{3}{4}b = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$.

Quæ quidem diſtantiæ, in magnitudines ductæ, exhibent momenta, reſpectu ipſius τ α, Coni $\frac{s^2b^2\mathcal{P}}{8R} = \frac{4R^2 - 4vR + v^2}{8R} s^2\mathcal{P} = \frac{4R^2 - 2vR - s^2}{8R} s^2\mathcal{P}$; Semiconi $\frac{4R^2 - 2vR - s^2}{16R} s^2\mathcal{P}$; Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{8}s^2b^2 = \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

Et, reſpectu ipſius T A, Momentum Coni $\frac{1}{3}s^2b\mathcal{P} - \frac{s^2b^2\mathcal{P}}{8R} = \frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{24R} s^2\mathcal{P}$; Semiconi, $\frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{48R} s^2\mathcal{P}$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{8}s^2bR - \frac{1}{8}s^2b^2$.

Atque

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Segmenti, Semisegmenti, & correspondentis Ungulæ, B B A, B V A, respective addita, exhibent momenta, respectu ipsius $\tau\alpha$, Sphærici Sectoris B α B A, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{3}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semisectoris B α A, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$. Fig. 159, 160.

Et respectu T A, momentum Sectoris Sphærici B α B A, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semisectoris B α A, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$.

Vel etiam; Intelligatur, super B C α Triangulo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens A α: Quæ Pyramis erit verticem habens α; & basin Triangularem super B C rectam. Hujusque Basis Triangularis (in rectam C B projectæ) Centrum gravitatis puta β, distabit à C (vertice Trianguli) $\frac{2}{3}$C B, (per 6 hujus;) ejusque ab A α (plano) distantia, $\beta\gamma=\frac{2}{3}BV=\frac{2}{3}s$; &, in recta inde ad α ducta, Trianguli centrum gravitatis ut g, abscindet $\alpha g=\frac{3}{4}\alpha\beta$; Cujus itaque ab A α distantia $gG=\frac{3}{4}\beta\gamma=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$: Ejusque à $\tau\alpha$ distantia, $G\alpha=\frac{3}{4}\gamma\alpha$; hoc est (propter $\gamma\alpha=R\pm\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$,) $\frac{5}{4}R-\frac{1}{2}v$; adeoque ejusdem à T A distantia $\frac{3}{4}R+\frac{1}{2}v$.

Quæ quidem distantiæ, in $\frac{1}{6}s^2R$ (Pyramidis magnitudinem, per prop. præced. §S.) ductæ; exhibent momentum Pyramidis; (seu Ungulæ B C α, aciem habentis A α,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; &, respectu ipsius T A, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque Solidi (scil. Coni, conice excavati,) conversione Trianguli B C α circa A α facti, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; &, respectu T A, $\frac{1}{8}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$: Semisolidique momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{48}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; &, respectu T A, $\frac{1}{16}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Sectoris, Semisectoris, & correspondentis Ungulæ, B C B A, B C A, respective addita; exhibent momenta Sectoris, Semisectoris, Ungulæque, B α B A, B α A, respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{3}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$;

Et, respectu ipsius T A, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$. Ut prius.

Quæ quidem momenta, per magnitudines divisa, (prop. præced. § S. traditas) exhibent distantiam Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR}{\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R}=R+\frac{2s^2R-s^2v}{4vR+2s^2}$; & à T A, $R-\frac{2s^2R-s^2v}{4vR+2s^2}$; à D C, $\frac{2s^2R-s^2v}{4vR+2s^2}=\frac{hs^2}{4vR+2s^2}$.

Similiter; Coni integri B A B, (Trianguli B A V conversione circa A α descripti) magnitudo (per § R, prop. præced.) $\frac{s^2v\mathcal{P}}{6R}$; Semiconi $\frac{s^2v\mathcal{P}}{12R}$; & Semiquadrantalis Ungulæ $\frac{1}{6}s^2v$. Centrique gravitatis distantia à T A, $\frac{3}{4}v$ (per 6 hujus;) atque à $\tau\alpha$, $2R-\frac{3}{4}v$. Quæ quidem distantiæ in magnitudines ductæ, exhibent, respectu T A, momentum Coni $\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{8R}$; Semiconi $\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{8}s^2v^2=\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$: Respectu $\tau\alpha$, momentum Coni $\frac{1}{3}s^2v\mathcal{P}-\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{8R}$, Semi-coni $\frac{1}{6}s^2v\mathcal{P}-\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{3}s^2vR-\frac{1}{8}s^2v^2=\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$. G.

Quæ quidem momenta, ex respectivis momentis Segmenti, Semisegmenti, Ungulæque, B B A, B V A, (§ E. traditis,) subducta; relinquunt Annuli, (conversione segmenti A B A circa A α,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; Et correspondentis Ungulæ $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$. Atque, respectu T A, momentum Annuli $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$: Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem § Q, R. prop. præced. $\frac{1}{6}v^2R=\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R$,) distantia Centri gravitatis est à $\tau\alpha$, $R+\frac{s^2}{2v}=R+\frac{1}{2}h$; à T A, $R-\frac{1}{2}h$; atque à D C, $\frac{1}{2}h=\frac{s}{2v}s$.

H. Fig. 159, 160. Porro, Cum jam exhibuerim, Momenta respectu rectæ $\tau\alpha$ (aut huic parallelæ) ut Axis Motus seu Libræ; Solidorum ex conversione vel semiconversione Semisectorum vel Semisegmentorum BCA, BαA, BVA, circa Aα ut axem Conversionis; & Ungularum Semiquadrantalium, illis correspondentium, aciem habentium Aα: Eadem opera etiam exhibuimus, Momenta respectu Aα ut Axis Motus seu Libræ, Solidorum ex conversione vel Semiconversione eorundem Semisectorum vel Semisegmentorum BCA, BαA, BVA, circa $\tau\alpha$ (vel huic parallelam) ut axem Conversionis. Et Ungularum Semiquadrantalium illis correspondentium, aciem habentium $\tau\alpha$, vel huic parallelam. (Quod &, Solidis ex quavis alia conversione imperfecta, non minus quam ex Semiconversione ortis; Ungulisque aliis quam Semiquadrantalibus; mutatis mutandis, accommodabitur.)

Quippe idem omnino momentum erit; sive sit Aα Axis Conversionis, & $\tau\alpha$ axis Libræ; sive $\tau\alpha$ axis Conversionis, & Aα axis Libræ. (Et similiter in unguli; idem momentum erit, sive Acies Ungulæ sit Aα, & Axis Libræ $\tau\alpha$; sive Acies Ungulæ $\tau\alpha$, & Axis Libræ Aα, & similiter alibi.)

Cum enim, (verbi gratia,) rectæ BV momentum respectu Aα, sit BV$\times\frac{1}{2}$BV, (propter ipsius centrum gravitatis in sui medio,) hoc est, $\frac{1}{2}$BVq: Atque tantundem etiam sit Triangulum, in Ungula Semiquadrantali (cujus Acies Aα,) eidem BV insistens, (ut dudum ostensum est:) Erit hujus Trianguli momentum respectu $\tau\alpha$ rectæ (propter Vα distantiam) $\frac{1}{2}$BVq$\times$Vα. Sed & in Ungula Semiquadrantali cujus acies $\tau\alpha$, eidem BV insistet parallelogrammum cujus altitudo (propter angulum Semiquadrantalem) æqualis erit ipsi Vα distantiæ; cujus itaque magnitudo erit BV$\times$Vα: Cumque hujus Centrum gravitatis sit in media sui longitudine (per 2 hujus,) adeoque illius distantia ab Aα, seu perpendiculari plano huic insistente, sit $\frac{1}{2}$BV; erit ejusdem Parallelogrammi, respectu axis Libræ Aα, momentum, $\frac{1}{2}$BV$\times$BV$\times$Vα = $\frac{1}{2}$BVq$\times$Vα, ut prius. Cumque idem obtineat, de singulis rectis ipsi BV parallelis, Semisectores vel Semisegmenta BCA, BαA, BVA, complentibus: Idem de totius Ungulæ Momento obtinebit: Nempe idem omnino esse Momentum Ungulæ (super eodem plano,) sive sit Aα acies, & $\tau\alpha$ axis libræ; sive $\tau\alpha$ acies, & axis libræ Aα.

Atque idem plane obtinet de Solidis conversione, vel semiconversione descriptis: Quippe hæc tum magnitudine, tum & momento, nihil aliud ab Ungulis Semiquadrantalibus correspondentibus differunt quam quod sint ad illas in ratione $\mathcal{P}$ ad R, vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R: ut supra ostensum est. Adeoque tum facti ex conversione BV circa Aα momentum respectu $\tau\alpha$, tum ejusdem conversione circa $\tau\alpha$, momentum respectu Aα, est $\frac{\frac{1}{2}\text{BVq}\times\text{V}\alpha}{R}\mathcal{P}$ seu $\frac{\text{BVq}\times\text{V}\alpha}{2R}\mathcal{P}$; factique ex semiconversione, utrobique, $\frac{\text{BVq}\times\text{V}\alpha}{4R}\mathcal{P}$. Et sic ubique.

I. Est itaque Semiquadrantalis Ungulæ super BCA Sectore, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu rectæ (planive perpendicularis) Aα (ut § C.) $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique ejusdem integra conversione circa $\tau\alpha$ facti momentum (respectu ipsius Aα) $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{8}s^2R\mathcal{P}$; & Semisolidi $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{16}s^2R\mathcal{P}$.

Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Sectoris BCA respectu $\tau\alpha$) $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{3}sR^2$ (per prop. præced. § I.) erit istius Ungulæ Centri gravitatis ab Aα distantia $\frac{8vR+3s^2}{12a+8s}=\frac{14R-3v}{12a+8s}v=\frac{8R+3b}{12a+8s}v$. Eademque est distantia ab Aα (recta, planove perpendiculari) Solidi conversione (perfecta vel imperfecta) BCA circa $\tau\alpha$ descripti.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem BCA Sectore aciem habentis TA, momentum respectu ipsius Aα, est (ut § C) $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique correspondentis, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{8}s^2R\mathcal{P}$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{16}s^2R\mathcal{P}$. Adeoque, (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$, per § I. prop. præced.) distantia Centri gravitatis istius Ungulæ (adeoque & Solidi seu Semisolidi correspondentis) ab Aα, est $\frac{8vR-3s^2}{12a-8s}=\frac{8R-3b}{12a-8s}v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo insistit semiquadrantalis Ungulæ aciem habentis

bentis ſive $\tau\alpha$, ſive T A, Momentum reſpectu A α, eſt $\frac{2}{3}R^4$; Solidique correſpondentis $\frac{2}{3}R^3\mathcal{P}$; & Semiſolidi, $\frac{1}{3}R^3\mathcal{P}$: Centrique gravitatis ab A α diſtantia, $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}}$. Fig. 159, 160.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ ſuper B V A Semiſegmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu A α, eſt (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{8}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; (Solidique correſpondentis, & Semiſolidi, momenta, ad hoc; ut $\mathcal{P}$, vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ad R.) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Semiſectoris B V A reſpectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis iſtius Ungulæ (adeoque Solidi Semiſolidive correſpondentis) ab A α, $\frac{8vR^3-4s^2R^2+4s^2vR+3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR+8s^3}=\frac{4vR^2+4s^2R+3s^2h}{12eR^2+12svR+8s^3}v$. K.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem B V A Semiſegmento, aciem habentis T A, momentum reſpectu ejuſdem A α, eſt (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{8}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; (Solidique aut Semiſolidi correſpondentis momentum, ad hoc; ut $\mathcal{P}$ vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (ſeu plani B V A momentum reſpectu T A,) $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis Ungulæ (Solidive aut Semiſolidi converſione facti) ab A α, $\frac{8vR^3-4s^2R^2+4s^2vR-3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR-8s^2}=\frac{4vR^2+4s^2R-3s^2h}{12eR^2+12svR-8s}v$.

Similiter, Semiquadrantalis Ungulæ ſuper eodem B V A, aciem habentis B V, momentum reſpectu A α, eſt (ut § E,) $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{24}s^4=\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{24}v^2h^2$; (Solidique & Semiſolidi converſione facti momenta, ad hoc, ut $\mathcal{P}$ & $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R:) Adeoque propter Ungulæ magnitudinem (vel plani reſpectu B V momentum) $-\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3=\mp\frac{1}{12}exR+\frac{1}{6}svz$; (per § L prop. præc.) Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8vR^3-4s^2R^2-s^4}{-12aR^2+12sR^2+12avR-4s^3}$: Vel (quod eodem recidit) $\frac{c^2+s^2}{4svz\mp12exR}v^2$, ſeu $\frac{4R-v=2R+h}{4svz\mp12exR}v^3$, ſeu $\frac{4vR^2-s^2h}{-12eR^2+12avR-4s^3}v$.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ ſuper B α A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu A α, (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{3}s^2R^2+\frac{1}{12}v^3R$; (Solidique converſione facti, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{3}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; & Semiſolidi $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (ſeu plani momentum reſpectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$ (per § M. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{4vR^2+4s^2R-s^2v}{6aR+10sR-2sv}=\frac{4R^2+4hR-s^2}{6fR+2sh}v$. L.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem B α A, aciem habentis T A, momentum reſpectu ejuſdem A α (ut § F) $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$; (Solidique & Semiſolidi, converſione facti, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem, (ſeu plani momentum reſpectu T A,) $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$, (per § M. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{4vR^2+s^2v}{6aR+2sR+2sv}=\frac{4R^2+s^2}{6fR-2sh}v$.

Eodem modo, Semiquadrantalis Ungulæ Triangulo B C α inſiſtentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu A α, eſt (ut § F.) $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; (& Solidorum, converſione vel ſemiconverſione deſcriptorum, his proportionalia; nempe in ratione $\mathcal{P}$ ſeu $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R: quod & in ſequentibus intellige.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR$, per § M. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis ab A α, eſt $\frac{5sR-2sv}{12R-4v}=\frac{5R-2v}{12R-4v}s$. Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem B C α inſiſtentis, aciem habentis T A, momentum reſpectu A α, eſt (ut § F) $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3R+2v}{12R+4v}s$. M.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper Triangulo B V C, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu A α; eſt (ut § D.) $\frac{7R-3v}{24}s^2x$: Et magnitudo (per § K.

Fig. 159, 160.

prop. præced.) $\frac{5R-2v}{6}sx$: diſtantiaque Centri gravitatis ab $A\alpha$ $\frac{7R-3v}{20R-8v}s$. Aciemque habentis TA, momentum (reſpectu $A\alpha$,) $\frac{R+3v}{24}s^2x$; magnitudo, $\frac{R+2v}{6}sx$; diſtantiaque $\frac{R+3v}{4R+8v}s$.

Et Semiquadrantalis Ungulæ ſuper Triangulo $BV\alpha = BC\alpha \pm BVC$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum (reſpectu $A\alpha$) $\frac{5R-2v}{24}s^2R \pm \frac{7R-3v}{24}s^2_4x$; hoc eſt (propter $x=R-v$, ſupra centrum, addendum; vel $x=-R+v$, infra Centrum, auferendum;) $\frac{5R-2v}{24}s^2R + \frac{7R^2-10vR+3v^2}{24}s^2$ $= \frac{12R^2-12vR+3v^2}{24}s^2$; vel (propter $v^2=2vR-s^2$,) $\frac{1}{2}s^2R^2-\frac{1}{4}s^2vR$ $-\frac{1}{8}s^4=\frac{1}{8}s^2b^2$; (ut § F.) Adeoque (propter mag. $\frac{3R-v}{6}sR \pm \frac{5R-2v}{6}sx$ $= \frac{3R-v}{6}sR+\frac{5R^2-7vR+2v^2}{6}s = \frac{4}{3}sR^2-\frac{4}{3}svR+\frac{1}{3}sv^2=\frac{4}{3}sR^2$ $-\frac{2}{3}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{3}sb^2$; ut § M. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3}{8}s$. Aciemque habentis TA; momentum (ut § F.) $\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{8}s^2b^2$; magnitudo (ut § M. prop. præced.) $sbR-\frac{1}{3}sb^2$; diſtantiaque $\frac{8R-3b}{24R-8b}s$ $=\frac{2R+3v}{8R+8v}s$.

N. Ungulæque Semiquadrantalis ſuper Triangulo BAV, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, eſt (ut § G,) $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; & magnitudo (propter magnitudinem Trianguli $\frac{1}{2}sv$; diſtantiamque Centri gravitatis à TA $\frac{2}{3}v$, & à $\tau\alpha$ $2R-\frac{2}{3}v$,) $svR-\frac{1}{3}sv^2=\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$; & diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$ $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$. Aciemque habentis TA, momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}s^2vR$ $-\frac{1}{8}s^4$; magnitudo, $\frac{1}{3}sv^2=\frac{2}{3}svR-\frac{1}{3}s^3$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia, $\frac{6vR-3s^2}{16vR-8s^2}s=\frac{3}{8}s$.

Et Semiquadrantalis Ungulæ ſuper ABA Segmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, eſt (ut § G.) $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo (per § N. pr. præced.) $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia, $\frac{4vR^2-2s^2R+s^2v}{6aR-6sR+2sv}=\frac{4R^2-2bR+s^2}{6eR+2sv}v$. Aciemque habentis TA, momentum $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR$; diſtantiaque $\frac{4vR^2-2s^2R-s^2v}{6aR-6sR-2sv}=\frac{4R^2-2bR-s^2}{6eR-2sv}v$.

O. Atque jam (inter alia) Solidorum Semiſectoris BCA, $B\alpha A$, aut ſemiſegmenti BVA, Segmentive ABA (nedum Triangulorum $BC\alpha$, BCV, BAV, $BV\alpha$, &c.) circa $A\alpha$, integra converſione deſcriptorum, Centra gravitatis determinavimus: Oſtendimus utique, diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, TA, BV, &c. Atque in ipſo Axe $A\alpha$ ſitum eſſe, conſtat, ex prop. 5 hujus. Ipſum itaque punctum determinavimus.

Et ſimiliter, Centra gravitatis Solidorum integrorum, quæ (non modo Sectoris BCB, vel $B\alpha B$, vel Segmenti BBA; ut quæ in medio Axis converſionis eſſe manifeſtum eſt; ſed &) Semiſectoris BCA, vel $B\alpha A$, aut Semiſegmenti BVA, Segmentive ABA, circa $\tau\alpha$ vel TA, aut etiam Semiſegmenti BVA circa BV, converſione integra deſcribuntur, determinavimus. Cum enim eorum diſtantias ab $A\alpha$ plano deſignavimus, eaque in ipſo converſionis Axe $\tau\alpha$, TA, vel BV, eſſe conſtet (per 5 hujus:) ipſa Axis puncta, quæ Centra gravitatis ſunt, determinantur.

Verum

Verum in horum Semisolidis, solidisve imperfecta quavis conversione descriptis; Unguliſque correſpondentibus: nondum determinantur ipſa Centra; ut quæ non in ipſo Axe poſita ſunt, ſed alibi, extra axem, in plano per axem tranſeunte. Fig. 159, 160.

Cum tamen in quo per Axem converſionis, ſeu Aciem Ungulæ, tranſeunte plano conſtituta ſint, jam conſtet ex § G prop. 12. hujus; (nempe, in eo per converſionis axem plano quod ſolidorum, converſione factorum, arcum converſionis biſecat; eoque per Ungularum aciem plano, quod biſecat ungulæ altitudinem:) Atque in qua quidem hujus plani recta, jam ſit determinatum; nempe in eis quorum Axis ſeu Acies eſt $A\alpha$, per Centri gravitatis diſtantiam, à $\tau\alpha$, TA, BV, &c. & in eis quorum Axis eſt $\tau\alpha$, TA, vel BV, per ejus ab $A\alpha$ diſtantiam: Id ſolum ſupereſt, ut in quo iſtius rectæ puncto ſitum ſit, determinemus per ipſius à converſionis Axe diſtantiam in eis quæ converſione deſcribuntur Solidis; &, in Ungulis, per diſtantiam à perpendiculari per Aciem Plano. (Unde ipſum gravitatis Centrum determinatum iri conſtat, per prop. 26. Cap. præced.) Id autem ſic aggredimur.

P. Ut Sectorem Sphæricum integrum, BCBA, § A, (plani BCA circa rectam $A\alpha$ integra converſione deſcripti,) ſic ejuſdem ſemiſſem ſeu Semiſectorem Sphæricum, aliumve imperfectum, (converſione dimidia, aliave imperfecta deſcriptum,) intelligamus ex Pyramidulis (ſimilibus & æqualibus) componi, (juxta def. 1. Cap. 4.) Quarum communis vertex ſit Sphæræ centrum, Baſeſque compleant Superficiei Sphæricæ portionem Semiſectori huic, Sectorive imperfecto, convenientem: nempe Trilineum Sphæricum, quod *Sectoris Baſin* appellabimus.

Cumque (per 6 hujus) Centri gravitatis in Pyramide, diſtantia à vertice pyramidis ſit $\frac{3}{4}$ totius altitudinis; Pyramidularum illarum omnia Centra gravitatis (æqualibus ab invicem diſtantiis remota) intelligantur complere Simile Trilineum Sphæricum, ut ba, fig. 165. cujus radius ſit $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$. Cujus cum ſingula puncta, (utpote æqualium Pyramidum Centra gravitatis,) æqualiter onerata reputentur; idem erit Trilinei hujus, ipſiuſque expoſiti Semiſectoris, Sectoriſve imperfecti, Centrum gravitatis; (per 16 Cap. 4.) adeoque tantundem ab $A\alpha$ converſionis axe diſtabit.

Quod & ſimiliter accommodabitur Ungulæ eidem BCA Sectori Circulari inſiſtenti; Cujus utique (pari ratione) Centrum gravitatis idem erit atque Superficiei Ungulæ Cylindraceæ arcui ba inſiſtentis aciem habentis $A\alpha$; adeoque tantundem ab $A\alpha$ perpendiculari plano diſtans.

Eſt autem (per § V, W. prop. 13.) Semiquadrantalis Ungulæ ſuperficialis, arcui BA inſiſtentis, momentum reſpectu ipſius $A\alpha$; idem atque ſumma quadratorum ſinuum rectorum ipſi AB arcui convenientium; adeoque æquatur facto ex BVA ſemiſegmento, in R ducto; hoc eſt, (propter $BVA = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, per § F. prop. præced.) $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR$: Atque hoc, per Ungulæ ſuperficialis magnitudinem diviſum; hoc eſt, (per § N. Q. prop. 13.) per vR diviſum; exhibet iſtius Ungulæ Superficialis BA, diſtantiam Centri gravitatis ab $A\alpha = \frac{e}{2v}R + \frac{1}{2}s$. Adeoque (propter $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$,) arcui ba inſiſtentis Ungulæ ſuperficialis, & propterea (per jam demonſtrata) Ungulæ Solidæ ipſi BCA inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, diſtantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$ plano, $\frac{3}{8}\frac{e}{v}R + \frac{3}{8}s$. (Et, ſpeciatim, iſtius quæ toti $AD\alpha$ ſemicirculo inſiſtit, Ungulæ, diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, propter $s = o$, adeoque $e = a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, erit $\frac{3}{32}P$.)

Eademque eſſet diſtantia Centri gravitatis Solidi, imperfecta ejuſdem BCA circa $A\alpha$ converſione deſcripti, ab $A\alpha$ converſionis axe; dempta curvatura. Sed, propter curvaturam, minuenda eſt pro ratione quam habet ad converſionis arcum chorda ſua, (per prop. 14. hujus) hoc eſt, in Semiconverſione, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu ut $4R$ ad P; (& in aliis converſionibus ſimiliter, mutatis mutandis, in ratione Chordæ ad Arcum;) Adeoque Semiſolidi, ipſius BCA ſemiconverſione circa $A\alpha$ deſcripti, diſtantia Centri gravitatis à converſionis ſuæ Axe $A\alpha$, eſt $= \frac{3eR + 3sv}{2vP}R$. (Et, ſpeciatim, quod Semiconverſione Semicirculi $AD\alpha$ deſcribitur, Hemiſphærii, diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, eſt $\frac{3}{8}R$.)

Atque

Fig. 159, 160. Atque hæ diſtantiæ in magnitudines ductæ, (nempe Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^2$; & Semiſolidi, $\frac{1}{6}vRP$, per § Q. prop. præced.) exhibent Semiquadrantalis Ungulæ ſuper B C A Sectore, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$; Semiſolidique correſpondentis, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2$. Et ſpeciatim, pro Ungula Semicirculi, & Hemiſphærio; $\frac{1}{16}R^3P$, & $\frac{1}{8}R^3P$.

(Atque hic obiter notare non erit importunum, momentum Semiſolidi reſpectu ſui axis converſionis, duplum eſſe momenti correſpondentis Ungulæ Semiquadrantalis reſpectu aciei ſuæ ſeu Plani per illam perpendicularis; quod in hujuſmodi caſibus ſemper obtinet, quod ſemel moneo: Cum enim magnitudo ad magnitudinem ſit ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique diſtantia, propter converſionem dimidiam, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; erit quæ ex utriſque componitur, momentorum ratio $\frac{\frac{1}{2}P}{R}\times\frac{2R}{\frac{1}{2}P}=\frac{2}{1}$.)

Q. Deinde, quæ Triangulo B V C inſiſtit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens A α, Pyramis eſt; verticem habens C Centrum; Baſemque Triangularem rectæ B V inſiſtentem; cujus quidem Trianguli Centrum gravitatis ab A α plano, diſtat $\frac{2}{3}$B V $=\frac{2}{3}s$; Centrumque gravitatis Pyramidis (utpote in recta, à baſis Centro ad C pyramidis verticem ducta, quæ eſt Pyramidis axis, tres quadrantes verſus C abſcindens; per 6 hujus;) diſtabit ab A α plano, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. Quæ quidem diſtantia, ducta in Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{6}s^2x$, (per § R. prop. præced.) exhibet ejuſdem momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3x$: Et Semiſolidi correſpondentis (cujus magnitudo ad magnitudinem Ungulæ eſt ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique gravitatis diſtantia, ad diſtantiam hujus, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$;) momentum $\frac{1}{6}s^3x$.

Atque hæc Ungulæ, Semiſolidique momenta; momentis Ungulæ Semiſolidique Sectoris B C A (§ P. repertis;) Ablata, ſi ſupra Centrum; vel Addita, ſi infra Centrum; exhibent Ungulæ Semiſegmento B V A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^3x$: Hoc eſt, (propter $x=R-v$, ſupra Centrum, auferendum; & $x=-R+v$, infra Centrum, addendum;) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$: Et ſemiſolidi, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2\mp\frac{1}{6}s^3x=\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{6}s^3v$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$, per § R. propoſitionis præcedentis) diſtantia centri gravitatis Ungulæ ab A α, $\frac{3eR^3+3svR^2-2s^3R+2s^3v}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}=\frac{3eR^3+3svR^2\mp2s^3x}{4v^2R+4s^2v}$: Centrique Semiſolidi inde diſtantia, ad hanc ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu $4R$ ad P.

Poteſt autem hoc momentum Ungulæ & Semiſolidi, Semiſegmento B V A convenientium, ſic aliter concipi. Nempe, ſi omnes ordinatim applicatæ B V &c. æqualibus intervallis ſumptæ, (complentes B V A ſpatium,) ducantur primum in ſui ſemiſſes, ut habeantur Triangula eidem inſiſtentia (Ungulam complentia,) quæ ſunt (ut ſupra oſtenſum eſt) ordinatim-applicatarum Semiquadrata: Atque hæc demum Triangula (ſemiquadratis æqualia) in rectarum duos Trientes, (pro diſtantia Centri gravitatis à vertice in Triangulo:) Quod prodit, B V $\times\frac{1}{2}$B V $\times\frac{2}{3}$B V $=\frac{1}{3}$B V c, exhibebit momentum Trianguli rectæ B V inſiſtentis. Quod cum ubique fiat: Erit Ungulæ Semiquadrantalis, ſuper B V A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α; ſummæ Cuborum ordinatim applicatarum Triens; Puta, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3. (Quod perinde verum eſt, ſi pro Semiſegmento B V A in vertice terminato, ſumeretur B V C D, vel quævis alia Semicirculi portio, duabus ordinatim-applicatis interjecta. Quippe, & hic, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3 momentum Ungulæ ſimiliter exhibebit.)

Sed & idem momentum jam modo repertum eſt, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$. Hujus itaque Triplum, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$, æquatur *Omnibus* o^3; hoc eſt, ſummæ cuborum ordinatim-applicatarum, quæ Semiſegmentum circulare B V A, in vertice terminatum, complent.

(Si vero hæc ad ſummam Cuborum ordinatim-applicatarum in alia portione, puta B V C D, non ad verticem A terminata, accommodare libet; id fiet, ut aliis modis, ſic hac ſaltem facili ratione; nempe, ſi, modo jam tradito, habeatur primum ſumma *omnium* o^3 quæ totum A D C Semiſegmentum ſpectant; atque deinde ſumma *omnium* o^3 quæ ſpectant Semiſegmentum A B V; atque demum hæc ſumma, ab illa ſubducatur; quod reſtat, erit *omnium* o^3 portionem B V C D ſpectantium ſumma,)

Verum

Verum poteſt & hoc idem Ungulæ ſemiſegmento B V A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α, ſic adhuc aliter concipi. Nempe, ſi rectæ omnes ipſi A V parallelæ, Semiſegmentum B V A complentes, ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum reſpective, à recta A V: (hoc eſt; propter æqualia quæ ſupponimus parallelarum illarum interſtitia; in ſeriem ſecundanorum, ut 0, 1, 4, 9, &c. quorum maximum ſit remotiſſimæ parallelarum diſtantia quadrata:) Nam rectarum quælibet in diſtantiam ſuam ducta, exhibet parallelogrammum eidem inſiſtens in Semiquadrantali Ungula expoſita; idemque iterum in eandem diſtantiam ductum, exhibet iſtius parallelogrammi momentum reſpectu Axis A V, ſeu A α. Adeoque ſimul omnia, iſtius parallelogrammi momentum. Fig. 159, 160.

Quæque de Ungula dicta ſunt; ſolido ejuſdem plani B V A converſione imperfecta deſcripto facile (ex præmonſtratis) accommodari poterunt. Sed de his hactenus.

Progredimur ad imperfectum Sectorem, Sectoris plani B α A circa A α imperfecta converſione deſcriptum; Ungulamque huic correſpondentem. Quantum ſcilicet, in his, Centrum gravitatis diſtat ab A α, converſionis Axe, ſeu plano per aciem Ungulæ perpendiculari. R.

Quæ Triangulo B V α inſiſtit ſemiquadrantalis Ungula aciem habens A α, Pyramis eſt; Cujus vertex α; Baſiſque triangularis ipſi B V inſiſtens. Centrique gravitatis diſtantia ab A α, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. (Quod eodem modo oſtendetur, atque in § Q. de Pyramide triangulo B V C incumbente.) Ejuſque magnitudo (per § S. prop. præced.) $\frac{1}{6}s^2h$. Adeoque momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3h=\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$. Quod quidem additum momento Ungulæ Semiſegmenti B V A (§ Q. invento) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ ſectori B α A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$.

Idemque ſic habetur. Semiquadrantalis Ungula Trianguli B C α, aciem habens A α, eſt item Pyramis cujus vertex, α; Baſiſque Triangularis (ipſi C B inſiſtentis.) Centrum gravitatis ab A α plano diſtat, $\frac{2}{3}$B V $=\frac{2}{3}s$; adeoque Centrum Pyramidis inde diſtat, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. Adeoque, propter magnitudinem $\frac{1}{6}s^2R$ (per § S. prop. præced.) momentum $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc Additum momento Ungulæ BCA, (§ P. invento,) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$; exhibet momentum Ungulæ Semiquadrantalis Sectori B α A inſiſtentis, aciem habentis A α, reſpectu ipſius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$. Ut prius. (Hujuſque duplum, eſt Semiſolidi correſpondentis momentum.)

Atque hoc Ungulæ momentum, per ipſius magnitudinem diviſum; hoc eſt, per $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. præced.) exhibet hujus Ungulæ Sectori B α A inſiſtentis, aciem habentis A α, diſtantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3eR^2+3svR+2s^3}{8vR+4s^2}$. Adeoque Semiſolidi correſpondentis, diſtantia Centri gravitatis eſt ab A α converſionis axe, $\frac{3eR^2+3svR+2s^3}{2vRP+s^2P}R$: nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad P.

Similiter oſtendetur, Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A V inſiſtentis, aciem habentis A α, (quæ etiam Pyramis eſt,) Centrum gravitatis ab A α plano diſtare $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$; magnitudinem eſſe $\frac{1}{6}s^2v$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3v$. Atque hoc ex momento Ungulæ Semiſegmenti B V A (§ Q. invento) ſublatum; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ, Segmento A B A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$. S.

Vel etiam; Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A C inſiſtentis, aciem habentis A α, (quæ vel Pyramis, vel ſaltem duarum Pyramidum aggregatum vel differentia, quarum communis baſis triangularis ipſi B V inſiſtit,) Centrum gravitatis ſimiliter ab A α diſtare, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$; magnitudinem, $\frac{1}{6}s^2R$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc ex momento Ungulæ Sectoris B A C (§ P. invento) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$, ſubductum; relinquit $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$, momentum, reſpectu A α, Ungulæ aciem habentis A α, ipſi A B A, ſegmento inſiſtentis. Ut prius. (Hujuſque duplum $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$, momentum Semiſolidi correſpondentis.)

Illudque

Fig. 159, 160. Illudque Ungulæ momentum, per ipſius magnitudinem diviſum, hoc eſt per $\frac{1}{6}v^2R = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$ (per § Q. prop. præced.) exhibet iſtius Ungulæ Segmento ABA inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, diſtantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$ plano, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2=4v^2}$. Semiſolidique correſpondentis, Centri inde diſtantiam $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{2vRP-s^2P}R$.

T. Reſtat, ut ſimiliter expendamus Solida, imperfecta converſione circa $\tau\alpha$, TA, BV, deſcripta: Ungulaſque correſpondentes: Eorum Momenta reſpectu $\tau\alpha$, TA, BV, reſpective, determinando; Centrique gravitatis inde diſtantiam.

Intelligatur itaque ſuper ADα Semicirculo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens $\tau\alpha$. Cujus itaque ſingulis ordinatim-applicatis, ut BV, totidem inſiſtunt Parallelogramma Rectangula, Ungulam complentia; quorum altitudines ſint ipſis $V\alpha$ reſpectivis æquales; eorumque à TA diſtantia VA. Eritque propterea Rectangulorum horum cujuſque momentum reſpectu TA, (oppoſitæ tangentis,) æquale facto ex Baſe BV, in altitudinem $V\alpha$, & diſtantiam à vertice VA, continue ducta: Hoc eſt, $BV \times V\alpha \times VA$. Eſt autem $\alpha V \times VA = BVq$, (propter BV mediam proportionalem inter Diametri ſegmenta AV, αV:) Adeoque $BV \times \alpha V \times VA = BVc$. Et ſic ubique.

Idemque erit (eadem de cauſa) momentum, reſpectu $\tau\alpha$, Ungulæ, aciem habentis TA. Quæ enim eſt, in altera, altitudo; eſt, in reliqua, diſtantia: & vice verſa.

Sunt itaque Parallelogrammorum horum omnium (ſive quæ Ungulam totam ipſi $A\alpha D$ inſiſtentem; ſive quæ ipſius portionem ipſi BVA, vel BVCD, inſiſtentem complent; quippe utrobique eadem eſt ratio;) momenta reſpectu TA, ſi acies ſit $\tau\alpha$; vel reſpectu $\tau\alpha$, ſi acies ſit TA; Summa cuborum ordinatim-applicatarum baſin complentium. Puta, *omnium* o^3, reſpective.

Et quidem in ea quæ Semiſegmento BVA inſiſtit, (ad Verticem A terminato) *Omn.* o^3, $= \frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, ut § Q. oſtenſum eſt. (Idemque, ſi opus fuerit ad aliam portionem, ut BVCD, facile accommodabitur; ut ibidem etiam oſtenſum eſt.)

Illud itaq; momentum; ſi dividatur per Ungulæ magnitudinem ipſi BVA Semiſegmento inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$ (per § L. prop. præced.) exhibet diſtantiam Centri gravitatis ab (oppoſita) TA, $\frac{9eR^3+9svR^2-6s^3R+6s^3v}{12eR^2+12svR+8s^3} = \frac{3}{4}R - \frac{6s^3R-3s^3v}{6eR^2+6svR+4s^3} = \frac{3}{4}R - \frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$: Adeoque ab ipſa $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$; & à BV, $\frac{3}{4}R - h + \frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$. Ungulæque propterea reſpectu ipſius BV, momentum $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: Ejuſdemque reſpectu ipſius $\tau\alpha$, aciei ſuæ, momentum, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. Hujuſque duplum $\frac{3}{4}eR^3 + \frac{5}{4}svR^2 + \frac{11}{6}s^3R - \frac{1}{2}s^3v$ momentum ſemiſolidi, ſemiconverſione ſemiſegmenti BVA circa $\tau\alpha$, reſpectu ipſius $\tau\alpha$ axis converſionis: Atque hoc, per Semiſolidi magnitudinem diviſum, exhibet $\frac{15eR^3+15svR^2+22s^3R-6s^3v}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R = \frac{5}{P}R + \frac{12s^3R-6s^3v}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R = \frac{5}{P}R + \frac{6s^3h}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R$: Semiſolidi iſtius, diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, (nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$, ad P.) Adeoque, à TA, $\frac{2P-5R}{P}R - \frac{6s^3h}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R$, Semiſolidique iſtius, reſpectu ipſius TA (axi oppoſitæ) momentum $\frac{1}{2}eR^2P + \frac{1}{2}svRP + \frac{1}{3}s^3P - \frac{5}{4}eR^3 - \frac{5}{4}svR^2 - \frac{11}{6}s^3R + \frac{1}{2}s^3v$.

Idemque (quod prius) momentum $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; ſi dividatur per Ungulæ magnitudinem ipſi BVA inſiſtentis, aciem habentis TA, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) exhibet, hujus, Centri gravitatis

diſtantiam

distantiam ab (opposita) $\tau\alpha$, $\frac{9eR^3+9svR^2-6s^3R+6s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3}=\frac{3}{4}R$ Fig. 159, 160.
$+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Atque à B V, $\frac{3}{4}R-b+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}=-\frac{5}{4}R+v+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à T A, $\frac{5}{4}R-\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Ungulæque propterea, respectu B V, momentum $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; & respectu ipsius T A (aciei suæ) momentum $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$: Hujusque duplum, $\frac{5}{4}eR^3+\frac{5}{4}svR^2-\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{2}s^3v$, momentum Semisolidi correspondentis. Hujusque propterea Semisolidi distantia Centri gravitatis à T A (axe suo) est $\frac{5R}{\mathcal{P}}R-\frac{6s^3v}{3eR^2\mathcal{P}+3svR\mathcal{P}-2s^3\mathcal{P}}R$; adeoque à $\tau\alpha$, (axi oppositæ) $\frac{2\mathcal{P}-5R}{\mathcal{P}}R+\frac{6s^3v}{3eR^2\mathcal{P}+3svR\mathcal{P}-2s^3\mathcal{P}}R$. Ejusque momentum respectu hujus $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2\mathcal{P}+\frac{1}{2}svR\mathcal{P}-\frac{1}{3}s^3\mathcal{P}-\frac{5}{4}eR^3-\frac{5}{4}svR^2+\frac{5}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo A Dα insistit Ungula, aciem habens, sive $\tau\alpha$, sive T A; momentum habet (propter $s=0$, & $e=a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$,) respectu earum alterius, nempe aciei suæ, $\frac{5}{16}R^3\mathcal{P}$; alterius vero, quæ aciei opponitur, $\frac{3}{16}R^3\mathcal{P}$; Adeoque Centri gravitatis distantiam inde, $\frac{5}{4}R$; hinc, $\frac{3}{4}R$. Et correspondentis Semisolidi conversione facti, momentum respectu axis conversionis suæ, $\frac{5}{8}R^3\mathcal{P}$; Centrique gravitatis inde distantia, erit $\frac{5R^2}{\mathcal{P}}$. Unde habetur ejusdem ab altero extremo distantia, & momentum respectu istius.

V. Deinde; ut hæc ad Axem B V, transferantur; (per § F. prop. 11. hujus:) Ex Ungulæ Semisegmenti B V A, aciem habentis T A, momento respectu $\tau\alpha$, modo invento, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; si auferatur factum ex Ungulæ magnitudine $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, in $\alpha V=b$ ducta, hoc est, $\frac{1}{2}ebR^2+\frac{1}{2}svbR-\frac{1}{3}s^3b=\frac{1}{2}ebR^2+\frac{1}{2}s^3R-\frac{1}{3}s^3b$, (propter $bv=s^2$,) hoc est, $eR^3-\frac{1}{2}evR^2+\frac{1}{2}s^3R-\frac{2}{3}s^3R+\frac{1}{3}s^3v=eR^3-\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{3}s^3v$: Quod restat $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$, est ejusdem Ungulæ B V A aciem habentis T A, momentum respectu B V; (quod § T. aliter ostensum est:) Ejusque Centri gravitatis distantia à B V, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3}=v-\frac{5}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$. Idemque habetur, si ejusdem Centri distantia à T A, auferatur ex A V $=v$, (aut ab ejus à $\tau\alpha$ distantia auferatur $b=2R-v$;) ut habeatur illius à B V distantia; atque hæc à B V distantia ducatur in magnitudinem Ungulæ, ut habeatur momentum: (ut § T. factum est.) Et, utrovis modo, habebitur Semisolidi correspondentis momentum respectu ejusdem B V; Centriq; gravitatis inde distantia: Nempe, distantia, $\frac{6s^3v}{3eR^2\mathcal{P}+3svR\mathcal{P}-2s^3\mathcal{P}}R-\frac{5R^2}{\mathcal{P}}+v$; & momentum, $\frac{1}{4}fvR\mathcal{P}-\frac{1}{4}s^3\mathcal{P}-\frac{s^3v\mathcal{P}}{6R}-\frac{5}{4}eR^3-\frac{5}{4}svR^2+\frac{5}{8}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Ex Ungula vero Semisegmenti B V A, aciem habentis $\tau\alpha$; puta V v f A (fig. 141.) auferendum primo factum ex plano B V A in α V, puta Prisma V v a A, ut habeatur v a f, seu V A F, Ungula ejusdem basis aciem habens B V: Atque ex momento istius Ungulæ respectu ejusdem $\tau\alpha$ hoc est, ex $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{11}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$ (per § T.) auferendum illius Prismatis respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum; hoc est, plani B V A momentum, in V v, seu $\alpha V=b$ ductum; hoc est (per § L. prop. præced.) $\frac{1}{2}ebR^2+\frac{1}{2}svbR+\frac{1}{3}s^3b=eR^3-\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{2}svR^2+\frac{7}{6}s^3R-\frac{1}{3}s^3v$; ut habeatur momentum Ungulæ B V A F (Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis B V,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque momentum respectu B V,

Fig. 159, 160. aciem habentis $\tau\alpha$.) Atque ex hoc demum momento respectu $\tau\alpha$, auferendum quod fit ex ipsa Ungulæ BVAF magnitudine, in $V\alpha = b$; hoc est, (per § L. prop. præced.) $-\frac{1}{2}ebR^2 + \frac{1}{2}avbR - \frac{1}{6}s^3b = -eR^3 + \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{6}s^3v$: Et habebitur $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$ momentum Ungulæ BVAF (semisegmento BVA insistentis, aciem habentis BV,) respectu aciei suæ BV: Adeoque (per magnitudinem dividendo) distantia Centri gravitatis à BV, $\frac{15eR^3 + 15svR^2 - 12as^2R + 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; atque à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3 + 12avR^2 + 3svR^2 - 6s^3R + 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$. (Semisolidique correspondentis momentum, sive respectu $\tau\alpha$, sive BV, est duplum momentum Ungulæ: Ejusque Centri gravitatis, distantia sive à $\tau\alpha$, sive à BV, est ad distantiam Centri Ungulæ, ut $4R$ ad $\mathcal{P}$.) Centrique Ungulæ distantia à TA, $\frac{-15eR^3 + 12avR^2 - 3svR^2 - 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; ejusque momentum respectu TA, $-\frac{5}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque, respectu BV, momentum aciem habentis TA.) Similiter, si Semisolidi distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, auferatur ex $A\alpha = 2R$; habebitur ejusdem à TA distantia. Atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet ejusdem respectu TA momentum.

W. Porro; Triangulo $BV\alpha$ insistens Ungula Semiquadrantalis aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis; Cujus magnitudo $BV \times V\alpha \times \frac{1}{3}V\alpha = \frac{1}{3}sb^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR + \frac{1}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$: Ejusque Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, distantia $\frac{3}{4}V\alpha = \frac{3}{4}b$: Adeoque Ungulæ momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3 = 2sR^3 - 3svR^2 + \frac{3}{2}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - \frac{3}{2}s^3R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - svR^2 - s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

Atque hoc additum momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ejusdem $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) seu $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; exhibet $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, seu $\frac{5}{8}fR^3 + \frac{3}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori $B\alpha A$ insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$. (Hujusque duplum est momentum correspondentis Semisolidi, respectu ejusdem $\tau\alpha$.) Idemque per magnitudinem divisum, hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; (ut § M. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$ $\frac{15aR^2 + 33sR^2 - 9svR - 2s^3}{12aR + 20sR - 4sv} = \frac{15fR^2 + 9shR - 2s^3}{12fR + 4sh}$. Adeoque ejusdem Centri distantia à TA, $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + svR + 2s^3}{12aR + 20sR - 4sv} = \frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR + 4sh}$; & propterea ejusdem Ungulæ momentum respectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. (Et correspondentis Semisolidi, distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad $\mathcal{P}$; ejusque residuum ad $2R$, est ejusdem distantia à TA; atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet semisolidi momentum respectu ipsius TA.)

Ejusdemque Triangulo $BV\alpha$ insistentis Ungulæ, Pyramidisve, Centrum gravitatis à TA, distat $2R - \frac{3}{4}b = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$: Adeoque ipsius respectu TA momentum (distantia in magnitudinem ducta) $\frac{2}{3}sR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sb^2R - \frac{1}{4}sb^3 = \frac{1}{12}sb^3 + \frac{1}{3}s^3b$; propter $s^2 = bv$.

Atque hoc additum, momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(= \frac{3}{8}eR^3) + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, (ut § V.) exhibet $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, seu $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori $B\alpha A$ insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius TA. ut prius.

Eidem vero Triangulo $BV\alpha$ insistens Ungula, aciem habens TA, constat ex Prismate eidem insistente cujus altitudo $AV = v$; eique superjacente pyramide, cujus

cujus basis Triangulum B V α (aut huic æquale;) altitudo, perpendicularis supra α punctum æqualis ipsi V α = *h*; Adeoque (propter B V α = ½ *s h*) Pyramidis magnitudo $\frac{1}{6} s h^2 = \frac{2}{3} s R^2 - \frac{2}{3} s v R + \frac{1}{6} s v^2 = \frac{2}{3} s R^2 - \frac{1}{3} s v R - \frac{1}{6} s^3$: Et, (propter Centri gravitatis basis B V α, à τ α distantiam, ⅔ *h*; pyramidisque Centrum gravitatis in recta inde ad verticem ipsi α puncto supereminentem ducta, abscissa inde versus verticem, ¾ ipsius;) distantia Centri gravitatis pyramidis à τ α plano, erit $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} h = \frac{1}{2} h$; & propterea pyramidis momentum respectu τ α, $\frac{1}{12} s h^3 = \frac{2}{3} s R^3 - s v R^2 + \frac{1}{2} s v^2 R - \frac{1}{12} s v^3 = \frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 - \frac{1}{3} s^3 R + \frac{1}{12} s^3 v$. Prismatis vero, eidem B V α incumbentis magnitudo (propter basem B V α = ½ *s h*; & altitudinem V A = *v*) est ½ *s h v* = ½ *s*³: Ejusque Centri gravitatis à τ α distantia (quippe eadem quæ basis Triangularis) ⅔ *h*; adeoque Prismatis respectu τ α momentum $\frac{1}{3} s v h^2 = \frac{1}{3} s^3 h = \frac{2}{3} s^3 R - \frac{1}{3} s^3 v$. Atque hoc additum Pyramidis momento $\frac{1}{12} s h^3$; exhibet Ungulæ (ipsi B V α insistentis, aciem habentis T A,) momentum respectu τ α, $\frac{1}{12} s h^3 + \frac{1}{3} s v h^2 = \frac{1}{12} s h^3 + \frac{1}{3} s^3 h = \frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{3} s^3 R - \frac{1}{4} s^3 v$. (Idem atque aciem habentis τ α, momentum respectu T A.) Atque hoc additum, momento Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem item habentis T A, respectu τ α, $\frac{3}{8} a R^3 - \frac{3}{8} s R^3$ $(= \frac{3}{8} e R^3) + \frac{3}{8} s v R^2 - \frac{1}{4} s^3 R + \frac{1}{4} s^3 v$; exhibet, Ungulæ Sectori B α A insistentis aciem habentis T A, momentum respectu τ α, $\frac{3}{8} a R^3 + \frac{7}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R = \frac{3}{8} f R^3 - \frac{1}{24} s h R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$. (Idem plane atque Ungulæ aciem habentis τ α momentum respectu T A: Quippe quæ illic est Altitudo, hic est Distantia; & vice versa.) Atque hoc momentum per Ungulæ mag. divisum, hoc est, per $\frac{1}{2} f R^2 - \frac{1}{6} s h R = \frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{6} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$ (ut § M. prop. præced.) exhibet $\frac{9 a R^2 + 7 s R^2 + s v R + 2 s^3}{12 a R + 4 s R + 4 s v} = \frac{9 f R^2 - s h R + 2 s^3}{12 f R - 4 s h}$; distantiam Centri gravitatis (Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis TA,) à τ α. Adeoque ejusdem Centri à TA distantia est $\frac{15 a R^2 + s R^2 + 7 s v R - 2 s^3}{12 a R + 4 s R + 4 s v}$ $= \frac{15 f R^2 - 7 s h R - 2 s^3}{12 f R - 4 s h}$; & Ungulæ respectu ipsius T A (aciei suæ) momentum $\frac{5}{8} a R^3 + \frac{1}{24} s R^3 + \frac{7}{24} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R = \frac{5}{8} f R^3 - \frac{7}{24} s h R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. (Quæ omnia correspondenti semisolido, facile accommodantur: eodem modo quo in iis quæ aciem habent τ α factum est.)

Vel etiam; propter Ungulæ Triangulo B V α insistentis (aciem habentis T A, ex Pyramide & Prismate constantis) magnitudinem (modo exhibitam) $\frac{1}{6} s h^2 + \frac{1}{2} s h v = \frac{2}{3} s R^2 - \frac{1}{3} s v R + \frac{1}{3} s^3 = s h R - \frac{1}{3} s h^2$; Momentum ejus respectu τ α (modo ostensum) $\frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{3} s^3 R - \frac{1}{4} s^3 v$, per magnitudinem illam dividendo; habebitur istius Centri gravitatis à τ α distantia $\frac{8 s R^3 - 4 s v R^2 + 4 s^3 R - 3 s^3 v}{8 s R^2 - 4 s v R + 4 s^3}$ $= R - \frac{3 s^2 v}{8 R^2 - 4 v R + 4 s^2}$; & à T A, $R + \frac{3 s^2 v}{8 R^2 - 4 v R + 4 s^2}$; (adeoque à D C, $\frac{3 s^2 v}{8 R^2 - 4 v R + 4 s^2} = \frac{3 v^2}{12 R - 4 h} = \frac{3 v^2}{4 R + 4 v}$;) & propterea ejusdem respectu T A momentum, $\frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{3} s^3 R + \frac{1}{4} s^3 v$. Atque hoc additum Momento Ungulæ Semisegmento B V A insistentis (aciem item habentis T A) respectu ipsius T A, $\frac{5}{8} a R^3 - \frac{5}{8} s R^3$ $(= \frac{5}{8} e R^3) + \frac{5}{8} s v R^2 - \frac{5}{12} s^3 R - \frac{1}{4} s^3 v$, (ut § T;) exhibet momentum Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{5}{8} a R^3 + \frac{1}{24} s R^3 + \frac{7}{24} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. ut prius.

Fig. 159, 160.

X.

Deinde; ex his momentis Ungularum sectori B α A insistentium, subductis Ungularum Triangulo B C α insistentium momentis respectivis, habentur momenta Ungularum sectori B C A insistentium respectiva.

Quæ autem Triangulo B C α insistit Ungula semiquadrantalis, aciem habens τ α, est Pyramis: Cujus vertex α; Basis, Trapezium rectæ B C insistens, duabus rectis plano circuli perpendicularibus & invicem parallelis interjectum; quarum altera, puncto C insistens, æqualis est rectæ C α = *R*; altera, insistens puncto B, æqualis rectæ V α = *h*; quas itaque, in planum replicatas, repræsentent rectæ C α, B a. Quod quidem Trapezium, (quo Centrum gravitatis habeatur,) dirimi intelligatur in duo Triangula α B C, α B a. Quæ (propter communem altitudi-

Fig. 159, 160.

nem α a ſeu $BV = s$,) ſunt ut baſes $C\alpha$, Ba; hoc eſt $C\alpha$, $V\alpha$; ſeu, R, b: Puta $\frac{1}{2}sR, \frac{1}{2}sb$. Diſtatque illius Centrum gravitatis ab $A\alpha$ (recta planove) $\frac{1}{3}VB = \frac{1}{3}s$; hujus vero, $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$. Eruntque, propterea, eorum momenta reſpectu $A\alpha$, ut $\frac{1}{6}s^2R, \frac{1}{3}s^2b$. Adeoque momentum totum $\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{3}s^2b$, per totam magnitudinem $\frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sb$ diviſum, exhibet totius Trapezii diſtantiam Centri gravitatis, quod puncto β deſignatum intelligatur (toto ſcilicet Trapezio, in rectam cui inſiſtit, BC projecto,) ab $A\alpha$, $\frac{s^2R + 2s^2b}{3sR + 3sb} = \frac{R + 2b}{3R + 3b}s = \beta\gamma$. Adeoque (propter ſimilia Triangula BVC, $\beta\gamma C$,) ut $BV = s$, ad $VC = x$; ſic $\beta\gamma$, ad $\gamma C = \frac{R + 2b}{3R + 3b}x$. Et $\gamma\alpha = R \pm \frac{R + 2b}{3R + 3b}x$. Sumptaque $\alpha g = \frac{3}{4}\alpha\beta$, (ductaque, ut $\beta\gamma$, ſic gG, ipſi $\tau\alpha$ parallela,) erit $\alpha G = \frac{3}{4}\alpha\gamma = \frac{3}{4}R \pm \frac{R + 2b}{4R + 4b}x = \frac{3}{4}R \pm \frac{5R - 2v}{12R - 4v}x$, diſtantia Centri gravitatis pyramidis à (plano Tangente) $\tau\alpha$. Hoc eſt (propter $x = R - v$, ſupra Centrum, addendum; vel $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum; adeoque $\pm x = R - v$,) $\frac{3}{4}R + \frac{5R^2 - 7vR + 2v^2}{12R - 4v} = \frac{7R^2 - 5vR + v^2}{6R - 2v} = \frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$. Atque hæc diſtantia, in Pyramidis magnitudinem ducta, hoc eſt, (per § M. prop. præced.) in $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, exhibet Pyramidis illius reſpectu $\tau\alpha$, momentum $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{12}s R = \frac{7}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc demum momentum, ſubductum ex momento Unguiæ Sectori $B\alpha A$ inſiſtentis, (aciem item habentis $\tau\alpha$) reſpectu ipſius $\tau\alpha$; hoc eſt (ut § W.) ex $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, relinquit momentum Unguiæ Sectori BCA inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{19}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. (Semiſolidique correſpondentis momentum, hujus duplum.) Quod quidem Unguiæ (ipſi BCA inſiſtentis) momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) diviſum, exhibet ejuſdem Centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$, $\frac{15aR + 19sR - 3sv}{12a + 8s}$. (Adeoque Semiſolidi correſpondentis, Centri gravitatis inde diſtantiam, $\frac{15aR + 19sR - 3sv}{3aP + 2sP}R$; utpote ad illam Unguiæ, ut $4R$ ad P.) Et propterea diſtantia Centri gravitatis Unguiæ, à TA, $\frac{9aR - 3sR + 3sv}{12a + 8s}$; Unguiæque iſtius (Sectori BCA inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$,) momentum reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. (Quod Semiſolido facile accommodabitur.)

Aut etiam, propter Pyramidis illius, Triangulo $BC\alpha$ incumbentis, magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantiam $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$, (ut dictum eſt,) adeoque à TA, $\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R - 2v}$; erit ejuſdem, reſpectu TA, momentum $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Quod quidem momento Unguiæ ſectori $B\alpha A$ incumbentis (aciem habentis $\tau\alpha$) reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, (ut § W.) ſublatum; relinquit Unguiæ Sectori BCA inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Quæ vero Triangulo illi $BC\alpha$ inſiſtit Semiquadrantalis Ungula aciem habens TA, idem plane habet reſpectu $\tau\alpha$ momentum, quod habet reſpectu TA ea quæ aciem habet $\tau\alpha$; (propter Altitudines & Diſtantias ubique reciprocatas, ut pridem aliquoties:) Hoc eſt, (ut modo oſtenſum eſt) $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; quod per Unguiæ magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) diviſum; exhibet ſui Centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$, $\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R + 2v}$; Adeoque, à TA,

$7R^2$

$\frac{7R^2+5vR-s^2}{6R+2v}$; & propterea ejuſdem reſpectu TA (aciei ſuæ) momentum $\frac{7}{12}sR^3+\frac{5}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$ (Solidique correſpondentis momentum eſt hujus duplum.) Quæ quidem Ungulæ momenta, momentis reſpectivis Ungulæ ſectori Bα A inſiſtentis, aciem habentis TA, hoc eſt, $\frac{3}{8}aR^3+\frac{7}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$, reſp. τα; & reſp. TA, $\frac{5}{8}aR^3+\frac{1}{24}sR^3+\frac{7}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; ut § W.) ſublata; relinquunt Ungulæ Sectori BCA inſiſtentis, aciem habentis TA, momentum reſpectu τα, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{6}sR^3+\frac{1}{8}svR^2$ (idem nempe quod Ungulæ eidem BCA inſiſtentis, aciem habentis τα, reſpectu TA; propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas;) & reſpectu (aciei ſuæ) TA, $\frac{5}{8}aR^3-\frac{13}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; (hujuſque duplum, eſt momentum correſpondentis Semiſolidi, reſpectu ſui axis converſionis:) Ungulæque hæc momenta, per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) diviſa; exhibent ejuſdem Centri grav. diſtant. à τα, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a-8s}$; &, à TA, $\frac{15aR-13sR-3sv}{12a-8s}$; (quæ, obſervatis obſervandis, Semiſolidis accommodari facile poterunt.)

Eadem haberi poterunt, ope Trianguli BVC, & Ungularum huic inſiſtentium.

Quæ autem huic inſiſtit Ungula ſemiquadrantalis, aciem habens DC; eſt Pyramis: Cujus vertex C, altitudo CV = x, Baſis (rectæ BV inſiſtens) BV×CV = sx; adeoque pyramidis magnitudo $\frac{1}{3}sx^2$; Diſtantia Centri gravitatis à DC, $\frac{3}{4}x$; adeoque momentum Pyramidis reſpectu DC, $\frac{1}{4}sx^3$.

Si vero ponatur Ungulæ axis τα, ſitque V ſupra Centrum; vel acies TA, ſitque V infra Centrum; Pyramidi huic ſubjungendum, eſt Priſma, ſuper eadem baſe, altitudinem habens Cα, vel CA, hoc eſt, R; cujus itaque (propter Trianguli magnitudinem $\frac{1}{2}sx$,) magnitudo erit $\frac{1}{2}sxR$: Centrique gravitatis à DC diſtantia (eadem quippe quæ Trianguli,) $\frac{2}{3}x$; adeoque momentum reſpectu DC, $\frac{1}{3}sx^2R$.

Totius itaque Ungulæ ipſi BVC triangulo inſiſtentis; aciem habentis τα vel TA, tangentem remotiorem; ex Priſmate & Pyramide conflatæ: momentum reſpectu DC, eſt, $\frac{1}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$.

Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sxR+\frac{1}{3}sx^2$ diviſum, exhibet Centri gravitatis à DC diſtantiam $\frac{4xR+3x^2}{6R+4x}$; adeoque ab Ungulæ acie, ſeu tangente remotiore, (intellige, ut alibi, à perpendiculari plano huic inſiſtente,) $R+\frac{4xR+3x^2}{6R+4x}$; à propiore, $R-\frac{4xR+3x^2}{6R+4x}$; Adeoque momentum reſpectu remotioris tangentis (aciei ſuæ) $\frac{1}{2}sxR^2+\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; & reſpectu tangentis propioris (quæ aciei oppoſita eſt) $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$.

Si vero ponatur Ungulæ acies τα, & V infra Centrum; vel acies TA, & V ſupra Centrum; Priſmati auferenda eſt illa Pyramis, (ejuſque momento momentum hujus:) Adeoq; Ungulæ magnitudo, erit, $\frac{1}{2}sxR-\frac{1}{3}sx^2$; momentum reſpectu DC, $\frac{1}{3}sx^2R-\frac{1}{4}sx^3$; Centrique gravitatis à DC diſtantia, $\frac{4xR-3x^2}{6R-4x}$; & ab Acie, ſeu tangente propiore; $R-\frac{4xR-3x^2}{6R-4x}$; à remotiore (quæ aciei oppoſita eſt) $R+\frac{4xR-3x^2}{6R-4x}$: Et momentum reſpectu aciei (ſeu tangentis propioris) $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; & reſpectu tangentis oppoſitæ (remotioris) $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$.

Hoc eſt: Ungulæ Triangulo BVC inſiſtentis, aciem habentis τα; momentum reſpectu ipſius τα; eſt $\frac{1}{2}sxR^2\pm\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$, (prout ſupra infrave Centrum fuerit V:) Et reſpectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$, (ſive ſupra ſive infra Centrum fuerit V, propter altitudinum & diſtantiarum reciprocationem.) Centrique gravitatis

Fig. 159, 160. vitatis à $\tau\alpha$, distantia, $R \pm \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$; &, à T A, $R \mp \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$.

Ungulæque eidem Triangulo B V C insistentis, aciem habentis T A; momentum respectu $\tau\alpha$ (oppositæ) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$ (sive supra Centrum, sive infra, fuerit V punctum;) &, respectu Aciei suæ T A, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, (prout supra Centrum infrave fuerit V punctum) Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ (opposita) distantia, $R \pm \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$; à T A (acie) $R \mp \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$.

Atque hæc momenta, momentis Ungularum (respective sumptarum) semisegmento B V A insistentium, Addita, vel Ablata, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum; exhibent momenta respectiva Ungularum Sectori B C A insistentium.

Puta; Ungulæ Scmisegmenti B V A, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3$ $(= \frac{5}{8}eR^3) + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; (ut § T.) si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit,) respectivum Ungulæ Trianguli B V C momentum, $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum: adeoque $x^3 = R^3 - 3vR^2 + 3v^2R - v^3 = R^3 - vR^2 - s^2R + s^2v$, addendum; & $x^3 = -R^3 + 3vR^2 - 3v^2R + v^3 = -R^3 + vR^2 + s^2R - s^2v$, auferendum; quæ tantundem valent: Sed, $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$; estque vel $+x^2$ addendum, vel $-x^2$ auferendum, quod tantundem valet:) Si addatur $\frac{17}{12}sR^3 - \frac{3}{4}svR^2 - \frac{11}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur momentum Ungulæ sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{19}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Atque ejusdem Ungulæ B V A (aciem habentis $\tau\alpha$) momento respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(= \frac{3}{8}eR^3) + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) si addatur vel auferatur (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{4}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$: Habetur, Ungulæ sectori B C A insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Ungulæque aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque *illud* aciem habentis $\tau\alpha$, respectu T A; propter altitudines & distantias ubique reciprocatas.

Ungulæ vero insistentis semisegmento illi B V A, aciem habentis T A, momentum respectu aciei suæ T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3$ $(= \frac{5}{8}eR^3) + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{5}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{3}{4}svR^2 + \frac{5}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur momentum Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{13}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Y. Denique: Ex momentis eisdem Ungularum Semisegmento B V A insistentium, si auferantur respectiva momenta insistentium Triangulo B A V; habentur momenta insistentium Segmento A B A.

Quæ autem Triangulo B A V insistit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens T A; est Pyramis. Cujus vertex A, basis B V × V A = sv; altitudo A V = v; adeoque magnitudo $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{4}v$; adeoque à $\tau\alpha$, $2R - \frac{3}{4}v$: Et propterea momentum respectu T A, $\frac{1}{4}sv^3 = svR^2 - \frac{1}{2}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, $(\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{5}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, per § T.) subducta; relinquunt, Ungulæ segmento A B A insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{5}{8}eR^3 - \frac{3}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$: Et (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$, ut § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{15eR^2 - 9svR + 2s^3}{12eR - 4sv}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR - 4sv}$.

Quæque Triangulo B A V insistit semiquadrantalis Ungula, aciem habens $\tau\alpha$; idem

idem habet reſpectu T A momentum, quod habet ea cujus acies T A reſpectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & diſtantias reciprocatas:) hoc eſt, (ut modo) $\frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Adeoque (propter magnitudinem $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$, per § N. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis à TA, erit $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2 + 10s^2R - 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; ideoque momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2 + \frac{5}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = 2svR^2 - \frac{4}{3}sv^2R + \frac{1}{4}sv^3$. Fig. 159, 160.

Eaque momenta, momentis reſpectivis Ungulæ Semiſegmento B V A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, ($\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, ut § T.) ſubducta; relinquunt Ungulæ Segmento A B A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu T A, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; &, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{7}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; & (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; per § N. propoſitionis præced.) Diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR + 4sv}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2 + 7svR + 2s^3}{12eR + 4sv}$.

Eademque Segmento $\alpha B \alpha$ reſpectu rectæ $\tau\alpha$, accommodantur, quæ Segmento A B A reſpectu T A; & vice verſâ. (Nempe, pro a, ſubſtituendo $\alpha = \frac{1}{2}P - a$; & pro v, ſubſtituendo $b = 2R - v$.)

Puta; Segmento $\alpha B \alpha$ inſiſtens Semiquadrantalis Ungula aciem habens $\tau\alpha$, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{5}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{16}R^3P - \frac{5}{8}aR^3 - \frac{11}{8}sR^3 + \frac{3}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; reſpectu T A, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{7}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.

Et; Segmento $\alpha B \alpha$ inſiſtens Semiquadrantalis Ungula aciem habens TA, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{7}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; & reſpectu T A, $\frac{5}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{7}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{16}R^3P - \frac{5}{8}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 - \frac{7}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$.

Exhibuimus itaque, expoſitorum Sectorum Sphæricorum, & Segmentorum, Ungularumque eo ſpectantium, & correſpondentium Solidorum ſeu Semiſolidorum converſione factorum, tum magnitudines, tum momenta reſpectu Planorum aliquot expoſitorum; eorumque Centrorum gravitatis diſtantiam à duobus ſaltem planis ſibi invicem non parallelis; atque in quo tertio per Ungulæ aciem ſeu converſionis axem ducto, neutri priorum parallelo, idem reperiatur: Adeoque (per prop. 26. Cap. præced.) ipſa gravitatis Centra determinavimus. Z.

Quæque ad calcem Propoſitionis præcedentis monuimus; etiam hic monenda erunt: Nempe, hæc omnia aliis Sphæræ portionibus, ſimili methodo accommodari poſſe. Puta, quæ de Sectore B α A (ad verticem terminato) ejuſque Ungulis, &c. dicta ſunt; facile accommodari poſſe ſectori D α B (duorum ad verticem terminatorum D α A, B α A, differentiæ,) ejuſque Ungulis &c.

Et, prout hic quæ de Ungularum aut Solidorum magnitudinibus & momentis docentur; à recta $\tau\alpha$, ad T A vel B V, transferuntur; ſimili methodo, hæc aut his ſimilia, à recta A α, ad T τ vel B a, transferri poterunt. Aliaque quæ hic traduntur, mille modis ampliari.

Quæque de Ungulis Semicirculi, ejuſve portionibus; Sphæraque, & portionibus hujus; dicta ſunt; ad Ungulas Semiellipſeos, & portionum hujus; Sphæroeides hujuſque portiones; facile accommodantur. Nempe ſi intelligatur axium ellipſeos alter A α, alter D Δ: manente A $\alpha = 2R$, (adeoque AV $= v$, V $\alpha = b$;) erit D Δ in ea ratione ad $2R$, qua eſt ad A α; majore quidem ſi ſit D Δ axium major, (adeoque Sphæroeides converſione deſcriptum, Sphæroeides latum;) minore, ſi ſit D Δ axium minor, (adeoque Sphæroeides longum, converſione deſcriptum:) & B V, in eadem ratione ad s. Adeoque, quoties B V in calculum venit; pro s, ſubſtituenda erit alia quantitas, quæ ſit ad hanc, ut eſt D Δ ad A α: &, pro s^2, alia quæ ſit ad hanc, ut in duplicata ratione rectæ D Δ ad A α: & in reliquis poteſtatibus ſimiliter, mutatis mutandis.

PROP.

PROP. XVII.

PARS PRIMA.

A. Figura *Sinuum Verſorum*, ut $A\tau\alpha$; (quæ eadem eſt & Figura *Arcuum*:) Fig. 169, 170. Eſt Semicirculi correſpondentis *Dupla*; & partes, partium (reſpective ſumptarum,) *Duplæ*; Puta, $b\beta\alpha A = 2B\alpha A$. Et ſic ubique.

C. Momenta vero illorum, ad momenta horum, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$ tangentis, ſunt ut 3 ad 2, ſeu *ſeſquialtera*.

Atque hinc, eadem reſpective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in hac Sinuum Verſorum Figura; quæ ſupra in Semicirculo (prop. 15.) determinantur. Nempe; (retentis Symbolis ut in propoſitionibus præcedentibus;)

B. C. Trilinei $A\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}RP$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}R^2P$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R$; à TA, $\frac{5}{4}R$:

G. Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; reſpectu $T\tau$, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

B. D. Portionis $b\beta\alpha A$; Magnitudo, fR: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$; reſpectu TA, $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

H. $\frac{3}{4}R + \frac{sh}{4f}$; à TA, $\frac{5}{4}R - \frac{sh}{4f}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; reſpectu $b\beta$; $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{a^2 + 2as - 2vR}{2a + 2s}$; à $b\beta$, $\frac{a^2 + 2vR}{2a + 2s}$.

B. E. Portionis AbK; Magnitudo, eR: Momentum reſpectu TA, $\frac{3}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; diſtantia Centri gravitatis, à TA,

H. $\frac{3}{4}R - \frac{sv}{4e}$; à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R + \frac{sv}{4e}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; reſpectu βbK, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{a^2 - 2as + 2vR}{2a - 2s}$; à βbK, $\frac{a^2 - 2vR}{2a - 2s}$.

B. E. Portionis $b\beta\tau$; Magnitudo, $\alpha R - sR$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; reſpectu TA, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; diſtantia Cen-

H. tri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{sh}{4\alpha - 4s}$; à TA, $\frac{5}{4}R + \frac{sh}{4\alpha - 4s}$: Momentum reſpectu τT, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$, reſpectu βb, $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$; diſtantia Centri gravitatis à τT, $\frac{\alpha^2 - 2\alpha s + 2hR}{2\alpha - 2s}$; à βb, $\frac{\alpha^2 - 2hR}{2\alpha - 2s}$.

B. F. Parallelogrammi $bB\alpha\beta$; Magnitudo, $ah = 2aR - av$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; à TA, $2R - \frac{1}{2}h$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$;

I. reſpectu TA, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, ſeu $b\beta$, $\frac{1}{2}a$; momentum reſpectu $A\alpha$, vel $b\beta$, $\frac{1}{2}a^2h$.

B. F. Portionis bBA; Magnitudo $fR - ah = -eR + av$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$; reſpectu TA, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; diſtantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à TA, $\frac{3}{4}R + \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à bB, $v - \frac{3}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; momentum

reſpectu

respectu bB, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$: Momentum respectu A$\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; respectu b$\beta$, $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a-\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$; à b$\beta$, $\frac{1}{2}a+\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$. I. Fig. 169, 170.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Versorum, Arcuumve, ejusque partium expositarum magnitudines, & momenta respectu rectarum aliquot expositarum, eorumque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias; adeoque & ipsa Centra gravitatis, per eorundem à duabus saltem in eodem plano non parallelis rectis distantias, determinavimus.

Atque hinc Ungularum, & Solidorum conversione factorum, horumve Semisolidorum, momentis jam traditis correspondentium, magnitudines habentur. Horumque omnium rationes, ad his correspondentia Semicirculum ejusve portiones spectantia. Quæ & ad alia facile poterunt ampliari. K.L.R.

Pars Secunda.

Atque his Analoga, in Figura *Sinuum Rectorum* $\alpha\tau\varkappa$, similiter determinantur. Nempe, Fig. 170. M.

Bilinei $\alpha\tau\varkappa$, Magnitudo, $2R^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$; à Tτ vel Aα, $\frac{1}{4}\mathcal{P}$; momentum respectu Tτ, vel Aα, $\frac{1}{2}R^2\mathcal{P}$.

Trilinei $\alpha\delta\varkappa$; Magnitudo, R^2; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$: Momentum respectu Aα, R^3; respectu $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}-R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, R; à $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}\mathcal{P}-R$. N. Q. P. Q.

Portionis $\alpha\beta\upsilon$, Magnitudo vR; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$; distantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$: Momentum respectu Aα, $-eR^2+avR$; respectu $\beta\upsilon$, eR^2; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-eR+av}{v}$; à $\beta\upsilon$, $\frac{eR}{v}$. O. Q. P. Q.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Rectorum, ejusque partium expositarum, magnitudines, & momenta respectu rectarum aliquot expositarum; eorumque Centrorum gravitatis distantias ab illis rectis: Adeoque & ipsa gravitatis Centra, per suas à duabus saltem in eodem plano rectis non sibi mutuo parallelis distantias, determinavimus. R.

Atque hinc de Ungulis; Solidisve conversione factis, eorumve Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent, calculo debite adhibito, judicium fiet.

Quæque de portionibus hic expositis dicta sunt, possunt & aliis portionibus facile accommodari; aliasve multis modis ampliari.

Eademque (horum ope) ad $\alpha\varkappa\Gamma$ figuræ Sinuum rectorum unius quadrantis Complementum, facile transferentur.

Quæ autem de his Sinuum Versorum, Rectorumve, Figuris dicta sunt: ad easdem Protractas, vel Contractas, facile accommodantur. S.

Quæque de Figura Sinuum Rectorum unius quadrantis traduntur, eadem ad figuram Subtensarum sive Chordarum Semicirculi, similiter transferentur. Quod & de Solidis inde oriundis etiam intelligendum erit. T.

A. INtelligatur Circuli A α, (Fig. 169.) Semiperipheria A D α, in partes quotlibet æquales dividi, in punctis X, Z, D, E, &c. unde ducantur X O, Z V, D C, E Σ, &c. Sinus Recti arcuum arithmetice proportionalium, A X, A Z, A D, A E, &c. quorum Sinus Verſi A O, A V, A C, &c. adeoque arcuum reſiduorum ad Semicirculum Sinus verſi (ſeu punctorum X, Z, D, &c. altitudines ſupra τ α, tangentem,) O α, V α, C α, &c.

Fig.169.

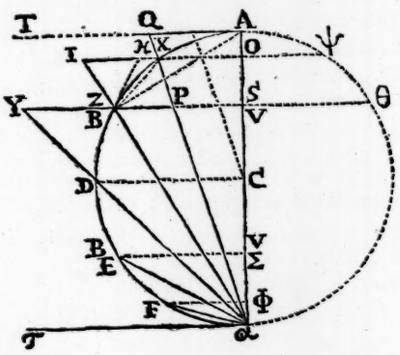
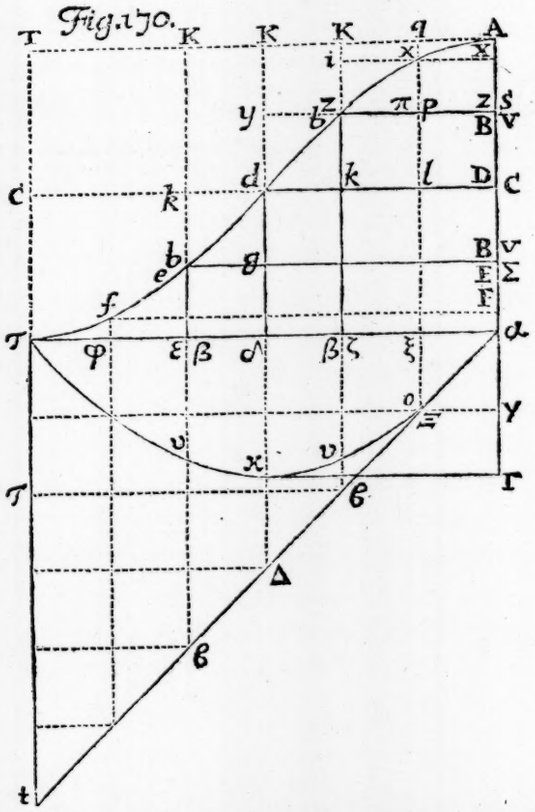


Fig.170.



Eique Semiperipheriæ in rectam expanſæ, æqualis ponatur (Fig. 170.) A T, ſeu α τ, ſimiliter diviſa, in punctis ξ, ζ, δ, ε, &c. quibus inſiſtant (ex una parte,) ξ o, ζ υ, δ κ, &c. ipſis X O, Z V, D C, &c. (Fig. 160.) æquales; figuram Sinuum Rectorum α κ τ (ſi numero infinitæ intelligantur) complentes, (juxta def. 1. Cap. 4.) & (ex parte contraria) ipſis O α, V α, C α, &c. æquales rectæ x ξ, z ζ, d δ, &c. ſimiliter complentes A τ α figuram Sinuum verſorum; ipſi A α circulo æqualem. Quæ

Quæ quidem A τ α *Figura Sinuum verſorum*, ſumptis arcubus arithmetice proportionalibus; eſt etiam, alia conſideratione, *Figura Arcuum*, ſumptis nempe Sinubus Verſis arithmetice proportionalibus. Sumptis utique A V, A C, A Σ, &c. Sinubus verſis arithmetice proportionalibus; (diviſa ſcilicet recta A α in partes quotlibet æquales) quæ ipſis occurrunt rectæ z V, d C, e Σ, &c. æqualibus intervallis diffitæ figuram A τ α complentes; hoc eſt, α ζ, α δ, α ι, &c. æquantur arcubus correſpondentibus, A Z, A D, A F, &c. & ſic ubique. Fig. 169, 170.

Ductis jam in Semicirculo rectis X α, Z α, D α, &c. dirimi intelligatur Semicirculus in totidem Sectores A α X, X α Z, Z α D, &c. quorum arcus A X, X Z, Z D, &c. ſint æquales; adeoque Sectorum X α A, Z α A, D α A, &c. arcus X A, Z A, D A, &c. arithmetice proportionales.

Quibus quidem arcuum æqualium Sectoribus A α X, X α Z, Z α D, &c. reſpondeant, in figura Sinuum verſorum, quadrilatera A α ξ x, x ξ ζ z, z ζ δ d, &c. baſium α ξ, ξ ζ, ζ δ, &c. æqualium, tum inter ſe, tum ipſis A X, X Z, Z D, &c. arcubus; (propter rectam α τ, Semiperipheriæ A D α, æqualem, & ſimiliter diviſam.) Adeoque arcuum arithmetice proportionalium Sectoribus, X α A, Z α A, D α A, &c. ſimiliter reſpondebunt quadrilinea x ξ α A, z ζ α A, d δ α A, baſium arithmetice proportionalium α ξ, α ζ, α δ, &c.

Suntque hæc Quadrilinea, Sectorum illorum, (Singula ſingulorum reſpective ſumptorum,) dupla. Quod ſic oſtenditur.

Intelligatur vel tota A D α Semiperipheria, vel ipſius arcus A B, in partes æquales numero infinitas dirimi; adeoque (ductis à diviſionum punctis ad α rectis X α, Z α, &c.) vel totus A D α Semicirculus, vel ipſius Sector B α A, in totidem Sectores dirimi. Ductiſque, à diviſionum punctis, rectis X O, Z P, &c. tangenti τ α parallelis, intelligatur Sectori Inſcribi figura ex totidem Triangulis, O X α, P Z α, &c. Ductiſque porro eidem tangenti parallelis, A Q, X I, &c. (productiſque α X, α Z, &c.) ſimiliter intelligatur Sectori Circumſcribi figura ex Triangulis A Q α, X I α, &c.

Et ſimiliter Figuræ Sinuum verſorum A τ α, vel tota, vel ipſius portio b β α A, (Sectori B α A correſpondens) in totidem Quadrilinea, baſium æqualium, (Sectoribus correſpondentia) diſtribui; (recta ſcilicet α τ, vel α β ſimiliter diviſa, prout dividitur A D α, vel A B, arcus; ductiſque rectis correſpondentibus, ξ x, ζ z, &c.) Ductiſque x O, z p, &c. ipſi τ α parallelis; inſcribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis O x ξ α, p z ζ ξ, &c. (Triangulis O X α, P Z α, &c. correſpondentibus.) Ductiſque eidem τ α parallelis A q, x ι, &c. (productiſque ξ x, ζ z, &c.) Circumſcribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis A q ξ α, x ι ζ α, &c. (Triangulis A Q α, X I α, &c. correſpondentibus.)

Suntque hæc Parallelogramma Triangulis illis, (propter rectas A α, x ξ, z ζ, &c. ipſis A α, O α, V α, &c. ex conſtructione æquales,) ſingula ſingulis reſpective ſumptis, æquealta: Tum quæ Circumſcriptas, tum quæ Inſcriptas figuras complent.

Sunt autem Inſcriptorum Parallelogrammorum Baſes, baſibus Triangulorum inſcriptorum correſpondentium, ubique majores; & propterea Parallelogramma Triangulorum, (ſingula ſingulorum reſpective, adeoque & omnia omnium,) pluſquam dupla. Eſt utique Parallelogrammi O x ξ α, baſis x o, ſeu ξ α recta, hoc eſt, (utpote ipſi æqualis ex conſtructione) arcus X A, major ſinu ſuo X O (baſe Trianguli correſpondentis;) ut patet. In reliquis autem; ut p z ζ ξ; Parallelogrammi baſis z p, ſeu ζ ξ, recta; (æqualis arcui Z X, ex conſtructione,) eſt major quam Z X chorda: ſed & hæc major eſt quam Z P, baſis trianguli correſpondentis P Z α; propter angulum Z P X (Trianguli P Z X) illi oppoſitum majorem angulo huic oppoſito Z X P. Eſt enim angulus Z P X, vel huic æqualis P X O, hoc eſt, α X O, angulus in Peripheria, arcum ſubtendens (in oppoſito Semicirculo) æqualem arcui X α; & angulus Z X P, hoc eſt, Z X α, angulus item in Peripheria, ſubtendens arcum z α, (arcu X α minorem;) eſt igitur angulus P X O, hoc eſt angulus Z P X, major angulo Z X P; adeoque Z X recta, major recta Z P; & multo magis Z X Curva, ſeu huic æqualis ζ ξ ſeu z p baſis Parallelogrammi, major erit quam eadem Z P baſis Trianguli: adeoque Parallelogrammum Trianguli pluſquam Duplum. Et ſic ubique. Eſt itaque Figura ex Parallelogrammis, ſive toti Figuræ Sinuum verſorum, ſive ipſius portioni A z ζ α inſcripta pluſquam dupla Figuræ ex Triangulis inſcriptæ ſive toti Semicirculo, ſive Sectori B α A.

Fig. 169, 170. Sed Circumſcriptorum Parallelogrammorum baſes, Baſibus Triangulorum circumſcriptorum correſpondentibus, minores ſunt. Eſt enim Parallelogrammi $Aq\xi\alpha$, baſis Aq ſeu $\xi\alpha$, hoc eſt arcus XA, minor Tangente QA; (cujus ſemiſſis, eſt tangens ſemiarcus, ſecanti ex Centro ductæ occurrens: adeoque ſemiarcu illo major.) In reliquis vero, ut $x i \zeta \xi$; Baſis Parallelogrammi xi, ſeu $\xi\zeta$, hoc eſt arcus ZX, minor eſt quam recta XI, baſis Trianguli correſpondentis. Ducta enim tangente $Z\chi$, (quæ rectæ XI occurrat in χ,) æquales erunt anguli (propter eundem arcum ZA interceptum) χZA, & $Z\alpha A$ (angulus in peripheria) ſeu $I\alpha O$: adeoque & horum ad rectum reſidui χZI & χIZ ſeu $OI\alpha$; (eſt utique, propter $AZ\alpha$ angulum in ſemicirculo, etiam AZI, hoc eſt $\chi ZA + \chi ZI$, rectus; &, propter $IO\alpha$ triangulum rectangulum, ad O, duo reliqui anguli $OI\alpha + I\alpha O$ rectum æquant.) Et propterea æquales ſunt $Z\chi$ & $I\chi$ rectæ; & (ſumpta communi χX,) recta IX, hoc eſt $I\chi + \chi X$, æqualis duabus ſimul $Z\chi + \chi X$; adeoque major arcu ZX. Eſt itaque ZX arcus, hoc eſt recta $\zeta\xi$, ſeu ix, baſis Parallelogrammi, minor quam IX baſis Trianguli correſpondentis: Et propterea Parallelogrammum Trianguli minus quam Duplum. Et ſic ubique. Eſt itaque, Figura ex Parallelogrammis, ſive toti $A\tau\alpha$ figuræ Sinuum verſorum, ſive ipſius portioni $b\beta\alpha A$, circumſcripta, minor quam Dupla Figuræ ex Triangulis correſpondentis, ſive toti Semicirculo, ſive ejuſdem Sectori $B\alpha A$ circumſcriptæ.

Cum itaque Figura ex Parallelogrammis inſcripta, ſit inſcriptæ ex Triangulis major quam dupla; & circumſcripta circumſcriptæ minor quam dupla: Cumque, multiplicatis ſectionibus, inſcriptæ & circumſcriptæ differentia continue decreſcat utrobique, donec tandem data quavis minor evadat: Nec tamen unquam Inſcripta inſcriptæ minor quam dupla, nec Circumſcripta circumſcriptæ major quam dupla eſſe poſſit: Continuata in infinitum ſectione, evaneſcet differentia; inſcriptis ſimul & circumſcriptis coincidentibus; illic, cum Figura $A\tau\alpha$, ejuſve Quadrilineo $b\beta\alpha A$; hic, cum Semicirculo ADA, ejuſve Sectore $B\alpha A$: Eritque illa Sinuum verſorum Figura $A\tau\alpha$, ejuſve Portio $b\beta\alpha A$; Dupla ſemicirculi $AD\alpha$, ejuſve Sectoris $B\alpha A$. Quod erat probandum.

Hoc eſt; Trilineum $A\tau\alpha$, duplum ſemicirculi $AD\alpha$; ejuſque portio $b\beta\alpha A$, dupla Sectoris $B\alpha A$; Et, propterea, portio reliqua $b\beta\tau$, ſegmenti $\alpha B\alpha$, dupla erit. Item, $d\delta\xi x$, dupla Sectoris correſpondentis $D\alpha X$; & ſic ubique.

B. Eſt autem, (retentis ſymbolis, ut in propoſitionibus duabus proxime præcedentibus,) Semicirculus $AD\alpha = \frac{1}{4}\mathcal{P}R$; ergo, Figura Sinuum verſorum ſeu Trilineum $A\tau\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P}R$. Item Sector $B\alpha A = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, (per § H pr. 15.) Ergo, (poſita $\alpha\beta = BA = a$; adeoque $\beta b = \alpha V = b$; & $bK = VA = v$;) portio $b\beta\alpha A$ (utpote Sectoris dupla) $aR + sR = fR$. Item, Segmentum $ABA = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$ (per § G. prop 15.) Ergo $AbK = aR - sR = eR$. (Eſt utique AzK: ſimile, & ſimiliter poſitum ad TA, ut τe ad $\tau\alpha$: ſicut &, in Semicirculo, Segmentum AZA ad TA, ut $\alpha E\alpha$ ad $\tau\alpha$: & ſic alibi.) Et ſimiliter Segmentum $\alpha B\alpha = \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}\mathcal{P}R - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}\mathcal{P}R - \frac{1}{2}fR$: Ergo portio $b\beta\tau = \alpha R - sR = \frac{1}{2}\mathcal{P}R - aR - sR = \frac{1}{2}\mathcal{P}R - fR$. Et ſic alibi.

Et conſequenter; ſi ex $b\beta\alpha A$ portione, auferatur Parallelogrammum $\beta bB\alpha = ab = 2aR - av$; erit Segmentum reſiduum $AbB = fR - ab = -aR + sR + av = -eR + av$. Et ſpeciatim in ſegmento AdC, (propter $a = \frac{1}{4}\mathcal{P}$, & $s = v = R$,) R^2.

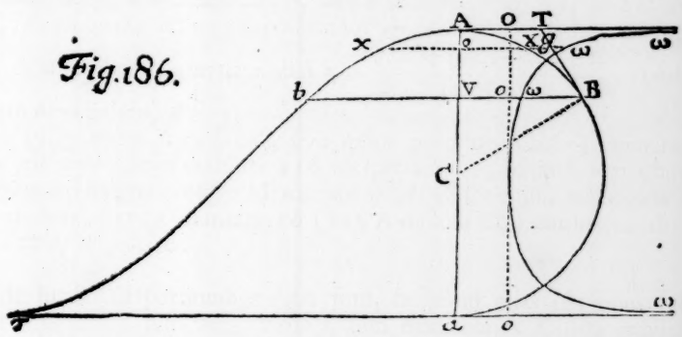
Item Quadrilineum $zkCA = z\zeta\alpha A - k\zeta\alpha C$ (propter $z\zeta\alpha A = aR + sR$, & $k\zeta\alpha C = aR$) eſt sR. Et $zkd = R^2 - sR$; Nempe, (propter $R - s$, differentium Radii & Sinus recti arcus ZA, æqualem ſinui verſo arcus ZD,) factum ex ſinu verſo arcus DZ in Radium ducto. (Dico autem $zkCA$, potius quam $bkCA$; ut diſtinguam punctum b ſupra Centrum, ab illo infra Centrum. Quanquam & alteri etiam b, re rite intellecta, idem accommodabitur: Nempe, ſi dkb infra Centrum hoc eſt dke, exponatur negative, utpote ad contrarias partes rectæ Cdc & extra figuram $A\tau\alpha$: Quippe ſic, utrovis ſitu, erit $b\beta\alpha A - k\beta\alpha C = bkCA$; id quod rectis bk, kC, CA, & curva Ab, comprehenditur; nempe, utrobique, $AdC - dkb$, & ſenſu poſitivo.)

Et ſimiliter de aliis portionibus utcunque recta abſciſſis, mutatis mutandis, fiet judicium.

Poteſt-

Poteſtque Trilinei A b B ſeu A b V fig. 170. (quod utique complent rectæ b V æquales arcubus B A = *a*, quorum Sinus verſi A V = *v* ſint arithmetice proportionales) magnitudo, ſic alias (ex arcuum ad ſinus verſos ratione) explicari.

Fig. 186.



Ductis enim B g T Semicirculum tangentibus, (Tangenti verticis T A in T occurrentibus;) diviſaque A α diametro in partes æquales infinite exiguas, quarum una intelligatur V o = *B*; (adeoque ſumptis A V = *v*, arithmetice proportionalibus;) ductaque recta o X g (rectæ B V parallela) quæ ſemicirculo in X occurrat, & tangenti proximæ B T in g: Erit ubique (per § A. propoſitionis 13.) ut B V = *s*, ad *R*; ſic V o = *B*, ad B g = $\frac{BR}{s}$. (Nempe, ut *Secantes complementi*, Sinibus rectis reciproce proportionales.) Et conſequenter; ſi intelligantur α O, vel V O, rectangulum A α O O complentes, ſingulis V o (rectam A α complentibus) æquales; & ſumantur ubique, ut B V = *s*, ad *R*; ſic V O, ad V ω: erunt ſingulæ V ω, (hoc eſt totidem $\frac{BR}{s}$, ſumptis *v* arithmetice proportionalibus,) ſingulis B g tangentibus (reſpective ſumptis,) hoc eſt, (in partibus infinite exiguis,) ipſis B X arcubus (totum B A complentibus) æquales. Adeoque, ut *Omnes* $\frac{BR}{s}$, ſeu rectæ V ω, complentes A V ω ω figuram interminabilem; ad *totidem B*, complentes A V O O rectangulum; (ſeu ut Figura illa, ad hoc rectangulum;) ſic *omnes* B X arcum B A complentes, ad *totidem* V o complentes rectam V A; ſeu Arcus A B, ad ejuſdem ſinum verſum A V. Fig. 186.

Cumque hoc ubique obtineat; erunt, *Omnes* A B arcus (ſuperficialem Ungulam Semiquadrantalem B A, cujus acies B V, complentes,) vel (his æquales) rectæ b V trilineum A b V complentes; ad *omnes* A V reſpectivos ſinus verſos arithmetice proportionales, vel A V Semiquadrantalem Ungulam aciem habentem V, hoc eſt, ad Semiquadratum A V; ut ſunt *omnes* A V ω ω figuræ interminabiles correſpondentes, hoc eſt, Ungula A V ω ω aciem habens V ω; ad *omnes* A V O O, hoc eſt, Ungulam A V O O aciem habentem V O.

(Et, eadem ratione; Momentum ſuperficialis iſtius Ungulæ, arcui B A inſiſtentis, ad momentum iſtius ſuperficialis Ungulæ ſeu Semiquadrati A V, reſpectu ejuſdem b V B; ut ejuſdem Ungulæ ſolidæ A V ω ω momentum, ad momentum correſpondentis Ungulæ Solidæ A V O O, reſpectu aciei V ω. Et ſimiliter ejuſmodi aliæ ſolidorum portiones huc ſpectantium, facile exhibentur.)

Verum, cum præcedens illa figuræ A τ α conſideratio, ſit calculo magis accommoda, quam hæc figuræ interminabilis, (*Secantium complementi*, ſinibus verſis arithmetice proportionalibus convenientium:) priorem potius proſequemur. Atque inde, ſi opus fuerit, interminabilis hujus figuræ dimenſio, reliquaque quæ eo ſpectant, deduci poterunt. Quod hic ſufficiat innuiſſe.

Porro; Si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. Cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus conſtitutus ut A α X, X α Z, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet,) ex infinitis numero Triangulis, figuram inſcriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. ſive, ex totidem Triangulis figuram circumſcriptam complentibus, ut Q α A, I α X, &c. C. Fig. 169. 170.

Fig. 169, 170. aut etiam figuram inſcriptæ & circumſcriptæ intermediam (utpote partim inſcriptam partim circumſcriptam) complentibus, ut Y α P, &c. (quæ rectis α X, α Z, &c. ut illorum axibus repræſententur:) Intelligenda erit ſimiliter Figura Sinuum verſorum A τ α, ex totidem conſtitui correſpondentibus Quadrilineis ut A α ξ x, x ξ ζ z, &c. Sectorum illorum duplis; vel etiam (quod eodem recidit, ſectione in infinitum continuata,) ex totidem Parallelogrammis, figuram inſcriptam complentibus, ut X x ξ α, p z ζ ξ; &c. aut circumſcriptam complentibus, ut A q ξ α, x i ζ ξ, &c. aut quæ figuram partim inſcriptam partim circumſcriptam complent, qualia p y ϑ ξ, &c. (quæ rectis x ξ, z ζ, &c. ut eorum axibus repræſententur; quæ triangulorum æquealtorum α X, α Z, &c. dupla intelligantur.)

Eſt autem Diſtantia Centri gravitatis in Parallelogrammis ξ x, ζ z, &c. ad Diſtantiam Centri gravitatis in Triangulis æquealtis, α X, α Z, &c. (à recta τ α;) ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{2}{3}$; ſeu, ut 3 ad 4, (per prop. 6. hujus.) Adeoque (propter magnitudines ut 2 ad 1;) Erunt momenta Parallelogrammorum (tum ſingulorum, tum ſimul omnium,) ad Triangulorum reſpectivorum momenta, (tum ſingulorum, tum ſimul omnium;) ut 3 ad 2, (propter $\frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$:) Adeoque Momentum Trilinei A τ α, ad momentum Semicirculi A D α; ejuſque portionis, (ut A b β α, ſeu x ξ ϑ d, ſeu b β τ,) momentum, ad momentum ſectoris correſpondentis, (ut B α A, ſeu X α D, ſeu ſegmenti α B α,) reſpectu rectæ τ α; ut 3 ad 2.

Eſt autem Semicirculi A D α reſpectu τ α momentum (propter magnitudinem $\frac{1}{4} PR$, & Centri gravitatis diſtantiam, R,) $\frac{1}{4} R^2 R$; ergo Trilinei A τ α, reſpectu τ α, momentum, (utpote ad illud Semicirculi, ut 3 ad 2,) $\frac{3}{8} R^2 \mathcal{P}$. (Hoc eſt, omnia $\frac{1}{2} b^2$, ſeu $\frac{1}{2} v^2$ totius ſemicirculi, ſeu ſemiſumma quadratorum ſinuum verſorum totius ſemicirculi, ſumptis arcubus arithmetice proportionalibus.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2} \mathcal{P} R$,) diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4} R$; adeoque à T A, $\frac{3}{4} R$; ejuſque momentum reſpectu T A, $\frac{5}{8} R^2 \mathcal{P}$.

Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens τ α, $\frac{3}{8} R^2 \mathcal{P}$; & aciem habens T A, $\frac{3}{8} R^2 \mathcal{P}$: Solidumque ejuſdem converſione circa τ α factum, $\frac{3}{8} R \mathcal{P}^2$; & Semiſolidum $\frac{3}{16} R \mathcal{P}^2$: &, circa T A, Solidum $\frac{3}{8} R \mathcal{P}^2$; & Semiſolidum $\frac{5}{16} R \mathcal{P}^2$.

Item; Sectoris B α A momentum reſpectu τ α (per § M. prop. 15.) $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{2}{6} s R^2 - \frac{1}{6} s v R = \frac{1}{2} f R^2 + \frac{1}{6} s b R$: Ergo, Portionis b β α A, momentum reſpectu τ α, $\frac{3}{4} a R^2 + \frac{2}{4} s R^2 - \frac{1}{4} s v R = \frac{3}{4} f R^2 + \frac{1}{4} s b R$; (idemque eſt Ungula Semiquadrantalis, portioni b β α A inſiſtens, aciem habens τ α:) Adeoque (propter magnitudinem, $aR + sR = fR$,) diſtantia Centri gravitatis portionis b β α A, à τ α, $\frac{3}{4} R + \frac{sb}{4f}$; & à T A, $\frac{5}{4} R - \frac{sb}{4f}$; & propterea ejuſdem reſpectu T A, momentum (ſeu Semiquadrantalis Ungula,) $\frac{5}{4} a R^2 + \frac{3}{4} s R^2 + \frac{1}{4} s v R = \frac{5}{4} f R^2 - \frac{1}{4} s b R$. Et conſequenter, Solidum, portionis b β α A converſione circa τ α factum, $\frac{3}{4} f R \mathcal{P} + \frac{1}{4} s b \mathcal{P}$; & Semiſolidum, $\frac{3}{8} f R \mathcal{P} + \frac{1}{8} s b \mathcal{P}$: &, circa T A, Solidum $\frac{5}{4} f R \mathcal{P} - \frac{1}{4} s b \mathcal{P}$; & Semiſolidum, $\frac{5}{8} f R \mathcal{P} - \frac{1}{8} s b \mathcal{P}$.

E. Item; Segmenti A B A, momentum reſpectu T A, (per § N. prop. 15.) eſt $\frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{6} s v R = \frac{1}{2} e R^2 - \frac{1}{6} s v R$; ergo, Trilinei A b K momentum reſpectu T A (vel ſemiquadrantalis Ungula aciem habens T A,) eſt $\frac{3}{4} e R^2 - \frac{1}{4} s v R$: (Hoc eſt, omnia $\frac{1}{2} v^2$; ſeu ſemiſumma quadratorum ſinuum verſorum arcuum arithmetice proportionalium, ab A, uſque ad A B.) Adeoque (propter magnitudinem eR) diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{4} R - \frac{sv}{4e}$ ideoque à τ α, $\frac{5}{4} R + \frac{sv}{4e}$; ejuſque reſpectu τ α momentum, $\frac{5}{4} e R^2 + \frac{1}{4} s v R$: Et conſequenter; Solidum ejuſdem converſione factum circa T A, $\frac{3}{4} e R \mathcal{P} - \frac{1}{4} s v \mathcal{P}$; & Semiſolidum, $\frac{3}{8} e R \mathcal{P} - \frac{1}{8} s v \mathcal{P}$: &, circa τ α, Solidum, $\frac{5}{4} e R \mathcal{P} + \frac{1}{4} s v \mathcal{P}$; & Semiſolidum, $\frac{5}{8} e R \mathcal{P} + \frac{1}{8} s v \mathcal{P}$.

Similiter; Segmenti α B α, momentum reſpectu τ α, $\frac{1}{2} \alpha R^2 - \frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{6} s b R = \frac{1}{4} R^2 \mathcal{P} - \frac{1}{2} a R^2 - \frac{2}{6} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$: Ergo, Trilinei b β τ, momentum reſpectu τ α, $\frac{3}{4} \alpha R^2 - \frac{3}{4} s R^2 - \frac{1}{4} s b R = \frac{3}{8} R^2 \mathcal{P} - \frac{3}{4} a R^2 - \frac{2}{4} s R^2 + \frac{1}{4} s v R$. Adeoque (propter magnitudinem $\alpha R - sR$) diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4} R - \frac{sb}{4\alpha - 4s}$: ideoque

ideoque à T A, $\frac{3}{4}R+\frac{sh}{4\alpha-4s}$; ejuſque reſpectu T A momentum (vel correſpondens Ungula) $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$. Et conſequenter, Solidum ejuſdem circa $\tau\alpha$ converſione factum, $\frac{3}{4}\alpha R\mathcal{P}-\frac{3}{4}sR\mathcal{P}-\frac{1}{4}sh\mathcal{P}$; & Semiſolidum, $\frac{3}{8}\alpha R\mathcal{P}-\frac{3}{8}sR\mathcal{P}-\frac{1}{8}sh\mathcal{P}$: Et, circa T A, Solidum $\frac{1}{4}\alpha R\mathcal{P}-\frac{3}{4}sR\mathcal{P}+\frac{1}{4}sh\mathcal{P}$; & Semiſolidum, $\frac{3}{8}\alpha R\mathcal{P}-\frac{3}{8}sR\mathcal{P}+\frac{1}{8}sh\mathcal{P}$. Fig. 169, 170.

Si vero ex momento Quadrilinei $b\beta\alpha A$, reſpectu $\tau\alpha$, vel T A; auferatur momentum Parallelogrammi $\beta b B\alpha$; habebitur (reſpectu earundem $\tau\alpha$, T A,) momentum Segmenti A b B. F.

Eſt autem Parallelogrammi $\beta b B\alpha$ (propter $\beta\alpha=a$, & $b\beta=h$) magnitudo ah; & (propter Centri gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantiam $\frac{1}{2}h$, adeoque à T A, $2R-\frac{1}{2}h$,) momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2=2aR^2-2avR+\frac{1}{2}av^2=2aR^2-avR-\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu T A, $2ahR-\frac{1}{2}ah^2=2aR^2-\frac{1}{2}av^2=2aR^2-avR+\frac{1}{2}as^2$.

Adeoque (ſubductione facta) Segmenti b B A, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (vel correſpondens Ungula Semiquadrantalis,) $-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2=-\frac{3}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR-\frac{1}{2}ah^2$; reſpectu T A, $-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}fR^2-2ahR-\frac{1}{4}shR+\frac{1}{2}ah^2$. Et (propter magnitudinem, $-aR+sR+av$,) diſtantia Centri gravitatis Segmenti AbB, à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; à T A, $\frac{3}{4}R+\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; à b V, $\frac{3}{4}R-h-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}=-\frac{3}{4}R+v-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$: Adeoque momentum reſpectu b V, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$. Et ſpeciatim, Segmenti A d C momentum reſpectu D C (propter $a=\frac{1}{4}\mathcal{P}$, & $s=v=R$,) $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}$: Ejuſque Centri gravitatis à D C diſtantia, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$. (Vel etiam, ex Trilinei A b B momento reſpectu $\tau\alpha$, ſubducto quod fit ex magnitudine in $\alpha V=h$, nempe $-ahR+shR+ahv=-2aR^2+2sR^2+avR-svR+as^2$; habetur Trilinei A b B momentum reſpectu b V vel Semiquadrantalis Ungula, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{4}as^2=\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; ut prius.)

Adeoque Solidum ejuſdem A b B converſione circa $\tau\alpha$ factum, eſt, $-\frac{3}{4}eR\mathcal{P}+avP-\frac{1}{4}svP+\frac{as^2\mathcal{P}}{2R}$; circa T A, $-\frac{3}{4}eR\mathcal{P}+avP+\frac{1}{4}svP-\frac{as^2\mathcal{P}}{2R}$; & circa b V, $\frac{3}{4}eR\mathcal{P}+\frac{3}{4}svP-\frac{as^2\mathcal{P}}{2R}$: Et ſemiſolida, ſemiſſes horum.

Habentur autem eorundem Planorum, Momenta reſpectu $A\alpha$, vel Semiquadrantales Ungulæ aciem habentes $A\alpha$, per prop. 18. Cap. 3. vel prop. 22. Cap. 4. vel prop. 10. hujus. G.

Si enim rectæ omnes $x\xi$, $z\zeta$, &c. complentes $A\tau\alpha$ Trilineum, (vel minuta quæ his repræſentantur parallelogramma, Trilineum illud complentia,) ducantur in ſuas ab $A\alpha$ diſtantias $\alpha\xi$, $\alpha\zeta$, &c. vel in his æquales $\xi\Xi$, $\zeta\Sigma$, &c. (triangulum $\alpha\tau t$ complentes;) Habetur Semiquadrantalis Ungula trilineo $A\tau\alpha$ inſiſtens, aciem habens $A\alpha$. Quam utique complent, ipſa $x\xi\alpha$, $z\zeta\alpha$, &c. ſeu $x\xi\Xi$, $z\zeta\Sigma$, &c. Parallelogramma (ſeu minuta Priſmata) ipſis $x\xi$, $z\zeta$, &c. (rectis, ſeu minutis parallelogrammis) inſiſtentia. Hoc eſt, omnia ah, facta ex arcubus arithmetice proportionalibus in reſiduorum ad ſemiperipheriam ſinus verſos ductis.

Aut etiam; ſi intelligatur $A\alpha$ in partes invicem æquales, in punctis Z, D, &c. dividi, (adeoque rectas Z z, D d, &c. hoc eſt $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$, &c. repræſentare non quidem arcus arithmetice-proportionales, ſed qui reſpondent ſinubus verſis AV, AC, &c. arithmetice proportionalibus, puta A Z, A D, &c. fig. 169. adeoque Trilineum $A\tau\alpha$ conſideretur non tam ut *Figura Sinuum Verſorum* arcubus arithmetice proportionalibus convenientium, ipſi $A\alpha$ parallelorum, quam ut *Figura Arcuum*, in rectas expanſorum, ſinubus verſis arithmetice prpportionalibus convenientium, ipſi $\alpha\tau$ parallelarum;) eandem Ungulam complebunt Arcuum illorum Semiquadrata, ſeu Triangula eiſdem Z z, D d, &c. inſiſtentia; ipſis ſcilicet $\alpha\zeta\Sigma$, $\alpha\delta\Delta$, &c. ſimilia & æqualia: Hoc eſt, Omnia $\frac{1}{2}a^2$, ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Si

Fig. 169, 170. Si vero eadem Ungula, tertiis adhuc planis (seu exiguis Prismatibus) componi intelligatur, Basi seu Trilineo $A\tau\alpha$ parallelis, Ungulam complentibus; erunt ea (propter Ungulæ Obliquam Sectionem, adeoque plana superiora continue magis magnisque ab $A\alpha$ deficientia,) Trilineis $A\tau\alpha$, $x\tau\xi$, $z\tau\zeta$, &c. (usque ad ultimum $f\tau\varphi$, ipsumve τ punctum ;) æqualia : Hoc est, totidem $A\tau\alpha$ planis, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. Hoc est ; Prismati altitudinem habenti $\alpha\tau$, dempta contraria Ungula, super eadem $A\tau\alpha$ base, aciem habente $T\tau$. Et similiter, quæ Ungulam portioni $b\beta\alpha A$ insistentem complent plana ; sunt ipsis $b\beta\alpha A$, $b\beta\xi x$, $b\beta\zeta z$, &c. (usque ad ipsam $b\beta$) æqualia : Hoc est, totidem $b\beta\alpha A$, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. seu Prismati ipsi $b\beta\alpha A$ insistenti altitudinem habenti æqualem ipsi $\zeta\beta = \beta\alpha$, seu arcui $BA = a$; dempta contraria Ungula, aciem habente $b\beta$.

Atque hanc tertiam Ungulæ compositionem, ut calculo magis opportunam, (cum perinde sit, Ungulæ magnitudinem quod spectat, planive momentum, sive hæc, sive illa, sive ista demum sumatur,) speciatim hic considerabimus.

Est autem (ut § A.) Trilineum $A\tau\alpha$, $\frac{1}{2}RP$; ergo, *omnia* $A\tau\alpha$; hoc est, $A\tau\alpha$, in $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, ducta ; $\frac{1}{4}RP^2$.

Item ; portio $b\beta\alpha A$, (per § A.) $aR + sR$; Adeoque omnia $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. (usque ad $\tau\alpha A$,) sunt *omnia* $aR + sR$. Suntque, omnia *a*, (hoc est, summa arcuum arithmetice proportionalium, quorum maximus $AD\alpha = \frac{1}{2}P$,) Semissis quadrati $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$; seu $\frac{1}{8}P^2$: (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn. a R*, $= \frac{1}{8}RP^2$. Et *omnia s*, (hoc est, summa Sinuum rectorum totius Semicirculi,) $= 2R^2$ (per § M. prop. 13. hujus.) Adeoque *Omn. s R*, $= 2R^3$. Ergo omnia $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. quadrilinea ; hoc est, *Omn.* $aR + sR$; (hoc est, Ungula Trilinei $A\tau\alpha$, aciem habens, τT ; seu correspondens Momentum ;) $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$.

Ergo ; Momentum ejusdem $A\tau\alpha$, respectu $A\alpha$; (seu correspondens Ungula aciem habens $A\alpha$;) hoc est, Omnia $A\tau\alpha$, $x\tau\xi$, $z\tau\zeta$, &c. seu, Totidem $A\tau\alpha$, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. Hoc est, Prisma Trilinei $A\tau\alpha$, (altitudinem habens $\tau\alpha$,) dempta contraria Ungula aciem habente τT ; Hoc est, totidem $\frac{1}{2}RP$ demptis omnibus $aR + sR$: Est $\frac{1}{4}RP^2 - \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3 = \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Atque hoc momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}RP$ divisum ; exhibet distantiam Centri gravitatis Trilinei $A\tau\alpha$, ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; adeoque à τT, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Vel etiam ; momentum ejusdem respectu τT, ($\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$) modo inventum ; per magnitudinem ($\frac{1}{2}RP$) divisum ; exhibet Centri gravitatis à τT distantiam $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$; adeoque ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; estque (restituendo magnitudinem) ejusdem momentum (seu semi-quadrantalis Ungula) respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Ut prius.

H. Similiter ; Portonis $b\beta\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$ (eadem ratione,) erit Aggregatum omnium $b\beta\alpha A$, $b\beta\xi x$, $b\beta\zeta z$, &c. usque ad ipsam $b\beta$: Hoc est, Totidem $b\beta\alpha A$ demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. Hoc est, Prisma ejusdem $b\beta\alpha A$ altitudinem habens $\beta\alpha$, dempta contraria Ungula (ejusdem $b\beta\alpha A$ Sectionis) aciem habente $b\beta$.

Est autem ejusmodi portio quævis ut $b\beta\alpha A$, (per § B.) $aR + sR$. Adeoque Omnes $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. usque ad maximum $b\beta\alpha A$; sunt *Omn.* $aR + sR$; sumptis *a* arcubus arithmetice proportionalibus usque ad maximum $\alpha\beta$, qui dicatur *A* ; ipsisque *s* sinubus rectis eorundem arcuum, quorum maximus $\beta\upsilon$ dicatur S.

Sunt autem *Omnes a*, usque ad *A*, (per prop. 1. hujus, utpote arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}A^2$ (seu $\alpha\beta\zeta$ triangulum ;) adeoque *Omn. a R*, $= \frac{1}{2}A^2R$. Et *Omnes s*, usque ad maximum $\beta\upsilon = S$, cui respondet Sinus versus $AV = v$; (hoc est, $\alpha\beta\upsilon$ trilineum ;) sunt vR (per § M, V. prop. 13 hujus) adeoque *Omn. s R*, $= vR^2$.

Ergo ; *Omn.* $aR + sR$: $= \frac{1}{2}A^2R + vR^2$, est aggregatum omnium $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. usque ad $b\beta\alpha A$: Hoc est, momentum portionis $b\beta\alpha A$ respectu ipsius $b\beta$; vel huic correspondens Ungula.

Ejusdem itaque momentum respectu $A\alpha$, (aut correspondens Ungula ;) hoc est, totidem $b\beta\alpha A$ minus omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. seu Prisma basis $b\beta\alpha A$ altitudinem habens $\beta\alpha = A$, dempta contraria Ungula $b\beta\alpha A$ aciem habente $b\beta$:

Est,

Eſt, A^2R+ASR minus, $\frac{1}{2}A^2R+vR^2$: Hoc eſt, $\frac{1}{2}A^2R+ASR-vR^2$; vel (reſtituto valore minuſcularum a, s,) $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$. Fig. 169, 170.

Adeoque (momentis per magnitudinem diviſis) Portionis $b\beta\alpha A$, diſtantia centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{a^2+2vR}{2a+2s}$; & ab $A\alpha$, $\frac{a^2+2as-2vR}{2a+2s}$. Vel à $b\beta$, $\frac{1}{2}a+\frac{2vR-as}{2a+2s}$; & ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{2vR-as}{2a+2s}$.

Eodem modo oſtendetur (propter $b\tau\beta=\alpha R-sR$,) momentum portionis $b\beta\tau$, reſpectu $b\beta$, (ungulamve correſpondentem cujus acies $b\beta$,) eſſe $\frac{1}{2}a^2R-bR^2$; & reſpectu τT, $\frac{1}{2}a^2R-asR+bR^2$: Et Centri gravitatis diſtantiam à $b\beta$, $\frac{a^2-2bR}{2a-2s}$; &, à τT, $\frac{a^2-2as+2bR}{2a-2s}$.

Aut etiam, (propter $AbK=aR-sR$,) momentum portionis AbK reſpectu bK (ungulamve correſpondentem,) eſſe $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; & reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$: Centrique gravitatis diſtantiam à bK, $\frac{a^2-2vR}{2a-2s}$; & ab $A\alpha$, $\frac{a^2-2as+2vR}{2a-2s}$.

Si vero, ex Portionis $b\beta\alpha A$, momentis reſpectu $b\beta$, & $A\alpha$; auferatur Parallelogrammi $Bb\beta\alpha$ momentum reſpectu utriuſvis (propter centrum gravitatis æqualiter ab utraque diſtans:) Hoc eſt, (propter $b\beta=V\alpha=b$, & $bB=a$, hujuſque ſemiſſem $\frac{1}{2}bB=\frac{1}{2}a$,) $\frac{1}{2}a^2b=a^2R-\frac{1}{2}a^2v$: Habetur Segmenti AbB, momentum reſpectu $b\beta$, $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; & reſpectu $A\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$: Hoc eſt, Semiſumma quadratorum arcuum ſinibus verſis arithmetice proportionalibus convenientium, portionem bBA complentium: Adeoque hujus duplum, eorundem quadratorum Summa. Et (momenta per magnitudinem dividendo, hoc eſt, per $-aR+sR+av$, ut § B.) Diſtantia centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a+\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$; & ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$. I.

Et, ſpeciatim, Segmenti AdC momentum reſpectu $d\delta$, (propter $v=R$) eſt R^3. Centrique gravitatis à $d\delta$ diſtantia eſt R.

Solidaque & Semiſolida converſione facta; ſunt ad reſpectivas Ungulas, (ut ſæpius dictum eſt,) ut $\mathcal{P}$, & $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ad R. Puta, K.

Solidum Trilinei $A\tau\alpha$ converſione circa τT factum, eſt $\frac{1}{8}\mathcal{P}^3+2R^2\mathcal{P}$; &, circa $A\alpha$, $\frac{1}{8}\mathcal{P}^3-2R^2\mathcal{P}$.

Solidum Portionis $b\beta\alpha A$ converſione circa $b\beta$ factum, eſt $\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}+vR\mathcal{P}$; &, circa $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}+as\mathcal{P}-vR\mathcal{P}$.

Solidum Portionis $b\beta\tau$ converſione circa $b\beta$ factum, eſt $\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}-bR\mathcal{P}$; &, circa τT, $\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}-as\mathcal{P}+bR\mathcal{P}$.

Solidum Portionis AbK converſione circa bK factum, eſt $\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}-vR\mathcal{P}$; & circa $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}-as\mathcal{P}+vR\mathcal{P}$.

Solidumque Segmenti AbB converſione circa βbK factum, eſt $-\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}+vR\mathcal{P}+\frac{a^2v\mathcal{P}}{2R}$; & circa $A\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2\mathcal{P}+as\mathcal{P}-vR\mathcal{P}+\frac{a^2v\mathcal{P}}{2R}$.

Et Semiſolida, horum ſemiſſes.

Si vero libeat hæc Quadrilineorum, & Sectorum correſpondentium, momenta reſpectu $A\alpha$, inter ſe comparare; (præterquam quod illud jam factum eſt, dum utrorumque momenta dantur;) Dicendum eſt, Momentum Quadrilinei $b\beta\alpha A$ reſpectu ſibi adjacentis $A\alpha$, ad momentum Sectoris $B\alpha A$ reſpectu $A\alpha$ adjacentis ſibi; eſſe ut, omnes $b\beta$ (illud complentes) in reſpectivas βC (complentes $\alpha\beta C$ Triangulum;) ad eaſdem $b\beta$ in reſpectivarum βv (complentium $\alpha\beta v$ Trilineum) Trientem. Hoc eſt, ut Omnia rectangula $b\beta C$ (eo ſpectantia) ad Trientem omnium $b\beta v$. Hoc eſt, ut Omnia ah, ad Omnia $\frac{1}{3}sh$. L.

Quippe Triangula ſingula ut αB (Sectorem complentia) ſunt (quoad magnitudinem) ad correſpondentia Parallelogramma $b\beta$ (Quadrilineum complentia)

Fig. 169, 170. ut 1 ad 2, (Intellige, in partibus infinite exiguis, dum Triangula Sectoribus, & Parallelogramma respectivis Quadrilineis coincidere reputantur.) Eorumque Triangulorum centra gravitatis in αB posita, ab α distant $\frac{2}{3}\alpha B$; ideoque, ab $A\alpha$, $\frac{2}{3}BV$; hoc est $\frac{2}{3}\beta\upsilon$. Ergo (propter $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,) Momenta singulorum αB Triangulorum respectu adjacentis $A\alpha$; hoc est, Triangulum $\alpha B=\frac{1}{2}b\beta$, in $\frac{2}{3}BV=\frac{2}{3}\beta\upsilon$; est ad $b\beta$ in $\beta\upsilon$; ut 1 ad 3. Et, consequenter, omnium Triangulorum, hoc est Sectoris $B\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$; ad momentum omnium $b\beta$ Parallelogrammorum quadrilineum $b\beta\alpha A$ complentium in respectivis distantiis $\beta\upsilon$ suspensorum; ut 1 ad 3. Est autem (per § S. prop. 15.) Sectoris $B\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$, seu correspondens Ungula, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$: Ergo, omnia $b\beta\upsilon$ Rectangula; seu Omnia bs, aut omnia $2sR-vs$, eo spectantia; (hoc est, Solidum Quadrilineo $b\beta\alpha A$ incumbens, altitudinem habens super singulas rectas $x\xi$, $z\zeta$, &c. æqualem respectivis ξo, $\zeta\upsilon$, &c.) $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$. Et de aliis istiusmodi Solidi portionibus, mutatis mutandis, simile fiet judicium. Puta, (propter Segmentum $ABA=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR$, ejusque respectu $A\alpha$, momentum $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R$, per § Q. prop. 15.) quæ portioni AbK incumbit ejusdem Solidi continuati portio (hoc est, omnia vs eo spectantia,) erit $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$. Et, similiter, quæ trilineo $\tau b\beta$ incumbit ejusdem Solidi portio (hoc est, omnia hs huc spectantia,) $hR^2-\frac{1}{2}s^2R$. Et sic alibi.

M. Atque his ita in *Figura Sinuum Versorum* $A\tau\alpha$ absolutis; idem etiam in *Figura Sinuum Rectorum* (totius Semicirculi) $\alpha\tau\varkappa$ absolvetur. Est utique hujus uterque Semissis $\alpha\delta\varkappa$, $\tau\delta\varkappa$, eadem plane figura atque dCA, (figuræ $A\tau\alpha$ segmentum,) vel $dc\tau$; alio situ posita. Cum enim $b\beta$ hoc est $V\alpha$ (& de reliquis similiter) sit arcus $B\alpha=\tau\beta$, sinus versus; erit propterea (ejusdem à Radio differentia) bk, hoc est VC, arcus BD sinus rectus. Et sic ubique. Est igitur, tum dCA, tum $dc\tau$, figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, (puta quadrantis DA, vel $D\alpha$, fig. 169. utrinque à D inchoando;) adeoque eadem plane figura cum $\alpha\delta\varkappa$, vel $\tau\delta\varkappa$, quæ itidem (per constructionem) sunt figuræ Sinuum Rectorum unius quadrantis integri, atque ad eundem Radium. Cum igitur tum ipsius dCA trilinei, tum partium ipsius, magnitudines, momenta & Centra gravitatis determinantur: Etiam figuræ $\alpha\tau\varkappa$ utriusque Semissis, adeoque & totius, ejusque partium, magnitudines momenta & Centra gravitatis determinantur.

N. Exempli gratia; $\alpha\delta\varkappa=\tau\delta\varkappa=dCA=-aR+sR+av$ (per § B.) id est, hoc casu, (propter $v=AC=R$, & $s=DC=R$, & arcum $a=DA=\frac{1}{4}\mathcal{P}$,) $-\frac{1}{4}R\mathcal{P}+R^2+\frac{1}{8}R\mathcal{P}=R^2$. Ejusque momentum respectu basis $\alpha\delta$, vel dC, (hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum unius quadrantis,) $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$ (per § F.) id est, in hoc casu, $\frac{3}{16}\mathcal{P}R^2-\frac{3}{4}R^3+\frac{3}{4}R^3-\frac{1}{8}\mathcal{P}R^2=\frac{1}{16}\mathcal{P}R^2$; (Adeoque, Summa quadratorum Sinuum rectorum, seu *omnia* s^2, totius quadrantis, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$; ut supra § V. prop. 13.) Centrique gravitatis à base $\alpha\delta$ seu dC distantia (momentum per magnitudinem dividendo) $\frac{1}{16}P$.

O. Similiter; portio $\varkappa\delta\beta\upsilon$, hoc est (sumpta $Cl=\delta\beta$) $ACl\varkappa$, est (ut § B.) sR, sumpto arcu xO hoc est XA, $=a$. Nempe factum ex Radio R, in s Sinum rectum arcus $XA=xO$; hoc est, in Sinum arcus $DB=\delta\beta$; hoc est, (posito $\alpha\beta=AB=a$; adeoque BD ejusdem complemento,) in $x=VC$. Hoc est, $\varkappa\delta\beta\upsilon=xR$.

Et consequenter, $\alpha\beta\upsilon=\alpha\delta\varkappa\mp\delta\varkappa\upsilon\beta$ (prout minor majorve quadrante fuerit arcus $\alpha\beta$ seu AB) erit $R^2\mp xR$; hoc est (propter $x=R-v$ si AB sit quadrante minor, & $x=-R+v$ si quadrante major; adeoque, utcunque, $R\mp x=v$,) $\alpha\beta\upsilon=R^2\overset{m}{\mp}xR=vR$.

Hinc item deducetur Momentorum ratio in Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ vel $\tau\delta\varkappa$ portionibus; ex momentis portionum Trilinei dCA; sed perplexiori aliquantum calculo, ob contrarium Figurarum situm. Cum enim, in priori situ, arcus ab A inchoavimus, (ut, verbi gratia, arcum AB diximus a; cujus sinus rectus s, & versus v; adeoque BD esset ejusdem arcus complementum, cujus sinus rectus $VC=x$:) jam, mutato situ, arcus inchoantur ab α, hoc est à D; (adeoque arcus $\alpha\beta$, hoc est DB, dicetur a, cujus sinus rectus $s=VC$; & sinus complementi $BV=x$, &c.) Verbi gratia,

Ex Parallelogrammi qlCA momento respectu TA, hoc est, (posito xX, hoc

hoc eſt X A, $=a$,) ex $\frac{1}{2}aR^2$; ſi auferatur momentum Trilinei A x q, hoc eſt, (per § E.) $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$; habetur quadrilinei x l C A momentum reſpectu T A, $-\frac{1}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem sR, per § B.) diſtantia centri gravitatis à T A, $\frac{-aR+3sR+sv}{4s}$; adeoque, à d C, $\frac{aR+sR-sv}{4s}$; ejuſque reſpectu d C momentum, $\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$ $=\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sxR$. Idemque eſt momentum portionis $v\beta\delta\varkappa$, reſpectu $\tau\alpha$, poſito $\delta\beta$ (= x X) $=a$: Sed, poſito $\alpha\beta=a$, adeoque (ejuſdem complementum ad quadrantem, aut etiam exceſſus ſupra quadrantem,) $\delta\beta=$ D B $=\frac{1}{4}\mathcal{P}\backsim a$, (arcus a differentiam à quadrante $\frac{1}{4}\mathcal{P}$,) quem arcum q dicemus; eritque hujus ſinus rectus, non s, ſed $x=$ O C (ſinus complementi arcus $a=$ X A.) Adeoque mutato a in q; permutatis etiam ſi opus s & x (ſed hic nihil opus, perinde enim eſt sx & xs;) pro $\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sxR$, habebitur quadrilinei $v\beta\delta\varkappa$ momentum reſpectu $\tau\alpha$, (poſito $\alpha\beta=a$,) $\frac{1}{4}qR^2+\frac{1}{4}xsR$; (hoc eſt, omnia $\frac{1}{2}s^2$, ſeu Semiſumma quadratorum Sinuum rectorum complentium portionem $v\beta\delta\varkappa$, ſeu arcus D B particulis reſpondentium.) Ejuſque à $\tau\alpha$ Diſtantia Centri gravitatis $\frac{qR+xs}{4x}$.

Fig. 169, 170.

Adeoque; (propter Trilinei $\alpha\delta\varkappa$, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, momentum $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}$, ut ſupra;) portionis $\alpha\beta v=\alpha\delta\varkappa\mp\delta\varkappa v\beta$ (prout $\alpha\beta$ minor majorve quadrante fuerit) momentum reſpectu $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}\mp\frac{1}{4}qR^2\mp\frac{1}{4}sxR$; Hoc eſt (propter $q=\frac{1}{4}\mathcal{P}-a$, & $x=R-v$, ſi $\alpha\beta$ ſit quadrante minor; vel $q=-\frac{1}{4}\mathcal{P}+a$, & $x=-R+v$; ſi $\alpha\beta$ quadrante major;) $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$: (Quæ itaque eſt, Semiſumma quadratorum Sinuum rectorum, complentium portionem $\alpha\beta v$; ſeu omnia $\frac{1}{2}s^2$ arcus A B particulis competentia, ſumptis a arithmetice proportionalibus.) Factaque, per magnitudinem $\alpha\beta v=vR$, diviſione; habetur diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{aR-sR+sv}{4v}=\frac{eR+sv}{4v}$.

Similiter, Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ momentum reſpectu A α (productæ,) Hoc eſt, Trilinei d C A momentum reſpectu δ d (productæ;) eſt, (per § I.) $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$. Hoc eſt, in præſenti caſu, (propter $v=R$,) R^3. (Hoc eſt, omnia as, totius quadrantis.) Atque hoc, per magnitudinem R^2 diviſum; exhibet R, diſtantiam Centri gravitatis trilinei d C A, à δ d; vel $\alpha\delta\varkappa$, ab A α. Adeoque Centri gravitatis illius ab A α, hujus à $\delta\varkappa$, diſtantia, eſt $\frac{1}{4}\mathcal{P}-R$. Et propterea, momentum correſpondens (ſeu Semiquadrantalis Ungula,) nempe Trilinei d C A reſpectu A α, vel $\alpha\delta\varkappa$ reſpectu $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}-R^3$. P.

Et ſimiliter in Portionibus, (licet perplexiori paulum calculo, ob mutandum ut prius, ſymbolorum valorem pro mutato ſitu figuræ,) idem obtinebitur.

Eſt utique (per § H.) quadrilinei x $\xi\alpha$ A momentum reſpectu A α, (poſito x X $=a$,) $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$: Adeoque (dempto Parallelogrammi ξ l C α momento reſpectu ejuſdem A α, $\frac{1}{2}a^2R$;) momentum quadrilinei x l C A, reſpectu ejuſdem A α, $asR-vR^2$. Atque tantundem erit momentum Quadrilinei $v\beta\delta\varkappa$ reſpectu $\delta\varkappa$, poſito $\delta\beta=$ x X $=a$: Centrique gravitatis à $\delta\varkappa$ (propter magnitudinem sR,) diſtantia, $\frac{as-vR}{s}$. Sed, poſito $\alpha\beta=a$; adeoque $\beta\delta=\frac{1}{4}\mathcal{P}\backsim a=q$: Et propterea mutatis s in x (ſinum complementi arcus q;) & v in $R-s$: Erit ejuſdem $v\beta\delta\varkappa$ momentum reſpectu $\delta\varkappa$, $qxR-R^3+sR^2$; & centri gravitatis à $\delta\varkappa$ diſtantia, $\frac{qx-R^2+sR}{x}$: Adeoque, ab A α, $\frac{1}{4}\mathcal{P}\mp\frac{qx-R^2+sR}{x}$; ejuſque momentum reſpectu A α, $\frac{1}{4}xR\mathcal{P}\mp qxR\pm R^3\mp sR^2=axR\pm R^3\mp sR^2$.

Et, propterea, Momentum portionis $\alpha\beta v=\alpha\delta\varkappa\mp\delta\varkappa v\beta$, reſpectu A α, (propter ipſius $\alpha\delta\varkappa$, reſpectu A α, momentum, R^3) erit $\mp axR+sR^2=-aR^2+sR^2+avR$. Centrique gravitatis ab A α diſtantia (propter magnitudinem, vR,) erit $\frac{-aR+sR+av}{v}=\frac{-eR+av}{v}$: Adeoque, à βv, $\frac{eR}{v}$; ejuſque reſpectu βv momentum eR^2.

Q. Verum hæc omnia quæ Trilineum $\alpha\tau\varkappa$, ejuſque portiones ſpectant; ſimplicius, ex ante traditis, per ſe eliciuntur, ſine ope Figuræ Sinuum verſorum.

Eſt utique (per § T. prop. 13.) poſito $\alpha\beta = a$ (ubicunque in $\alpha\tau$ ſit β punctum) reliquiſque ſymbolis proportionaliter; $\alpha\beta v = vR$, $\alpha\delta\varkappa = R^2$, $v\beta\delta\varkappa = xR$.

Item, Trilinei $\alpha\beta v$ momentum reſpectu $\tau\alpha$; hoc eſt, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum ſectionem illam complentium; hoc eſt, *omnia* $\frac{1}{2}s^2$, ſeu omnia $\frac{1}{2}vh$, eo ſpectantia, arcubus arithmetice proportionalibus ab α uſque ad $\alpha\beta$ convenientia; (per § V. prop. 13.) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$. (Nempe, quod fit ex Semi-Radio $\frac{1}{2}R$, ducto in correſpondens Semiſegmentum circulare $ABV = \frac{1}{2}aR \mp \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$.) Adeoque (propter magnitudinem vR,) diſtantia Centri gravitatis portionis $\alpha\beta v$ à $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$.

Et ſpeciatim, Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $v = R$,) momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P$. Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantia, $\frac{1}{16}P$.

Similiter (per prop. 10. hujus) ſumptis omnibus $\alpha\xi o, \alpha\zeta v$, &c. uſque ad $\alpha\beta v$; hoc eſt, omnibus vR eo ſpectantibus; Hoc eſt, facto ex R in omnes v, hoc eſt, in omnes AO &c. ſinus verſos arcuum arithmetice proportionalium ab A uſque ad maximum AV quem jam dicamus V; hoc eſt, facto ex R in trilineum AbK $= aR - sR = eR$ (per § B:) Habetur momentum Trilinei $\alpha\beta v$ reſpectu βv, nempe $aR^2 - sR^2 = eR^2$. Factaque per magnitudinem vR diviſione; diſtantia Centri gravitatis à βv, $\frac{aR - sR = eR}{v}$; adeoque ab A α, $a - \frac{eR}{v}$. Et, propterea, ejuſdem momentum reſpectu A α, $-eR^2 + avR$.

(Eademque de portione $\tau\beta v$; ſubſtitutis α pro a, & h pro v, item T τ pro A α; & vice verſa.)

Et, ſpeciatim, Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ (propter $s = v = R$) momentum reſpectu A α, R^3; reſpectu $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$: Centrique gravitatis diſtantia ab A α, R; atque à $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}P - R$.

S. Determinavimus itaque totius Figuræ, partiumque ejuſdem expoſitarum, tum magnitudines, tum momenta reſpectu expoſitarum aliquot rectarum; earumque Centrorum gravitatis diſtantias ab illis rectis. Adeoque, propter exhibitas eorundem à duabus ſaltem rectis non parallelis diſtantias; etiam ipſa Centra gravitatis (per prop. 26. cap. præced.) exhibentur.

Atque hinc de Ungulis, Solidiſque converſione factis aut Semiſolidis, aliiſque quæ hinc dependent, calculo rite adhibito, judicium fiet. Quæque de his dicta ſunt, ad alia facile poterunt multis modis ampliari.

Atque hæc quidem omnia quæ de $\alpha\delta\varkappa$ figura Sinuum rectorum unius quadrantis tradita ſunt; eadem ejuſdem complemento $\alpha\varkappa\Gamma$ facile accommodantur. Quippe ſi ex $\alpha\delta\varkappa\Gamma$ parallelogrammo, auferatur trilineum $\alpha\varkappa\delta$; reſtat trilineum $\alpha\varkappa\Gamma$: & ſimiliter, ſi ex parallelogrammi illius Momentis, Ungulis, & Ungularum Momentis; auferantur reſpectiva Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta; reſtabunt reſpectiva Trilinei $\alpha\varkappa\Gamma$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta: unde & Centrorum gravitatis Diſtantiæ ab expoſitis rectis colliguntur. Quodque de tota $\alpha\varkappa\Gamma$ dictum eſt; idem de partibus, ut $\alpha o\gamma$, mutatis mutandis, intelligendum eſt.

S. Si autem, in his Sinuum Verſorum, Rectorumque, Figuris: Manente, ut prius, A $\alpha = 2R$, & $\delta\varkappa = R$, reliquiſque hiſce parallelis in eadem qua nunc ratione; Recta $\tau\alpha$, Protracta ſit, vel Contracta, (puta, Major, vel Minor, quam $\frac{1}{2}P$;) reliquæque huic parallelæ, ſimiliter vel Protractæ vel Contractæ; (quas Figuras Sinuum Verſorum, Rectorumve, *Protractas*, dicamus; vel *Contractas*:) Eadem quæ jam tradita ſunt, etiam his conveniunt; cum hoc ſolo diſcrimine; Quod quoties rectæ bB in calculum veniunt; pro a, ſubſtituenda erit alia quantitas quæ ad hanc ſit in ea ratione quæ eſt $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$: Et ſimiliter, mutatis mutandis, pro earundem bB quadratis, cubis, reliquiſque poteſtatibus; nempe, pro a^2, a^3, &c. quantitates quæ ſint ad has in Duplicata, Triplicata, &c. ratione, illius quam habet $\tau\alpha$ ad $\frac{1}{2}P$.

Quæ-

Quæque de figura Sinuum rectorum unius quadrantis, (ut $\alpha \delta \varkappa$ fig. 170.) dicta sunt: eadem figuræ Sinuum Chordarum seu Subtensarum in semicirculo (ut $A \delta \varkappa$ fig. 183.) facile accommodantur: Sunt enim Chordæ Arcuum in semicirculo, ubique Duplæ Sinuum Rectorum, Semiarcuum in Quadrante correspondentium. Adeoque figura Chordarum in Semicirculo $A \delta \varkappa$ fig. 183. Ipsi $\alpha \delta \varkappa$ fig. 170, Figuræ Sinuum Rectorum Quadrantis, omnino similis; & partes partibus respective sumptis. Quod & de solidis inde oriundis pariter intelligendum est.) Qua de re videantur plura, ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit. T.

SCHOLIUM.

HÆc autem sive Sinuum versorum sive Arcuum figura $A \tau \alpha$, alia non est quam, Dimidia Semicylindri (plano oblique secti) Superficies curva in planum expansa: Seu Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindricæ Superficies curva in planum expansa. Eaque qua terminatur sinuosa curva $A d \tau$, est Semiellipseos linea curva, in planitiem item expansa. Fig. 170, 171

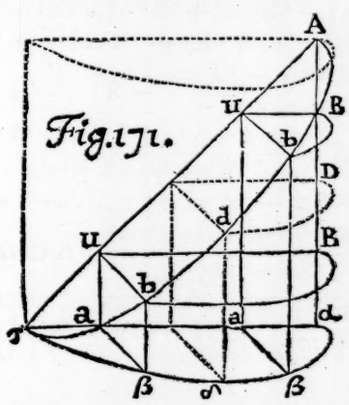


Fig. 171.

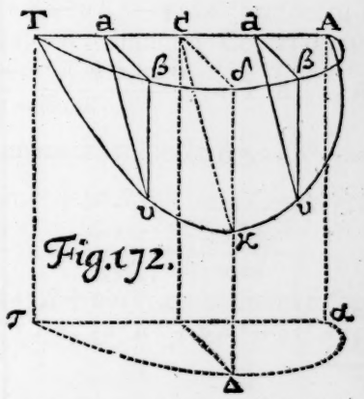


Fig. 172.

Intelligatur enim super Semicirculo $\alpha \tau \beta$ fig. 171. (qui sit ipsa $A \alpha B$ fig. 169. æqualis; adeoq; illius curva $\tau \beta \alpha$, fig. 171. curvæ hujus $A B \alpha$, fig. 169.) Semicylindrus rectus, altitudinem $A \alpha$, ipsi $A \alpha$ fig. 169, 170. æqualem habens. Quem secet planum ellipseos $\tau b A$, (quod ipsi per axem Cylindri plano $\tau \alpha A$ rectum sit,) abscindens Semiquadrantalem Ungulam $\tau b A \alpha$; cujus superficiem curvam compleant (juxta def. 1. cap. 4.) parallelæ rectæ βb &c. singulis curvæ $\tau \beta \alpha$ punctis insistentes: (ut & paralleli arcus $b B$, &c. singulis rectæ $A \alpha$ punctis occurrentes.)

Sumpto jam, in Trilinei basi $\tau \beta \alpha$, fig. 170. puncto quovis β, cui respondeat punctum β in curva $\tau \beta \alpha$ fig. 171. quæ huic in curva Ungulæ superficie insistit recta, sit βb. Dico rectam hanc βb in curva Ungulæ superficie, æqualem esse correspondenti rectæ βb in Trilinei plano. Est enim (per constructionem) arcus $\tau \beta$, æqualis $\tau \beta$ rectæ, hoc est arcui αB: Sed & huic similis (propter æquales circulorum Diametros:) Adeoque hujus sinui verso αV, fig. 169, 170. æqualis est illius sinus versus $\tau \alpha$; hoc est, (propter angulum semiquadrantalem,) perpendicularis $a v$; & (propter parallelas) ipsa βb in Ungulæ superficie curva. Sed & eidem αV fig. 170. æqualis est (ipsi parallela) βb in Trilineo. Æquales itaque sunt, quæ in Ungulæ superficie curva, & quæ in Trilineo plano, rectæ βb respective sumptæ. (Similiter ostendetur, arcus $b B$, $d D$, &c. fig. 171. æquales esse rectis $b B$, $d D$, &c. fig. 170. hoc est, arcubus $A B$, $A D$, &c. fig. 169.) Cumque hoc ubique obtineat: Expansa in planum superficies illa curva, Trilineo super-imposita congruet: adeoque tum tota toti, tum partes partibus respective sumptis æquales. (Puta, superficies curvæ $A b \beta \alpha$, $A b B$, ipsis $A b \beta \alpha$, $A b B$, planis: & sic ubique.) Ipsaque quæ, in superficie Cylindrica, erat semiellipseos curva $\tau b A$; eadem, in superficie expansa, est sinuosa curva $\tau b A$ terminans Trilineum $A \tau \alpha$, quam *Figuram Sinuum Versorum, Arcuumve*, diximus.

Eodem modo; si intelligatur idem τA semicylindrus, plano $A \varkappa T$ secari, Semiquadrantalem Ungulam $A T \varkappa$ abscindente, (cujus itaque altitudo $\delta \varkappa$ sit basis semidiametro æqualis:) Ostendetur, superficiem Ungulæ curvam $T \delta A \varkappa$, in planum Fig. 170, 172.

Fig. 170, 172. expansam, congruere Bilineo $\tau\delta\alpha\varkappa$ fig. 170. quam *Figuram Sinuum Rectorum* diximus. Quippe utrobique ostendetur $\beta\upsilon$, ipsi BV sinui recto correspondentis arcus AB, hoc est $\tau\beta$, æqualis: & sic ubique. Adeoque & $\tau\varkappa\alpha$ semiellipsis curvam in superficie Cylindri, expansa in planitiem superficie curva, curvæ $\tau\varkappa\alpha$ figuram Sinuum rectorum terminanti congruere; & partes partibus respective sumptis. Quæ pridem monuimus ad prop. 13.

PROP. XVIII.

PARS PRIMA.

A. Fig. 170. Si super $A\tau\alpha$ Figura Sinuum versorum, Arcuumve, Solidum insistat altitudinem habens in singulis $b\beta$ Sinibus versis, æqualem respectivis $\beta\upsilon$ Sinibus rectis eorundem arcuum: Solidum sic constructum, Triplum erit Semiquadrantalis Ungulæ Semicirculi, aciem habentis Semicirculi Diametrum. Et partes partium respective.

Unde; Solidi sic constructi, partiumque ejusdem, tum Magnitudines, tum Momenta, & Centra gravitatis, innotescent.

Nempe, (retentis Symbolis, ut in propositionibus aliquot præcedentibus;)

A. C. Solidi $A\tau\alpha$, sic constructi; Magnitudo, $2R^3$: Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$; momentum correspondens respectu $\tau\alpha$ in plano $A\tau\alpha$ erecto, $\frac{1}{8}R^3P$: Distantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{2}{3}R$;

E. H. momentum respectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\varkappa$ erecto, $\frac{4}{3}R^4$: Distantia Centri gravitatis à plano super $A\alpha$ erecto, $\frac{3}{16}\mathcal{P}$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{3}{8}R^3\mathcal{P}$.

A. C. Portionis, ejusdem Solidi, $Ab\beta\alpha$; Magnitudo, $\upsilon R^2+\frac{1}{2}s^2R$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}s\upsilon R^2+\frac{1}{6}s^3R$; distantia

E. Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{3eR^2+3s\upsilon R+2s^3}{12\upsilon R+6s^2}$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{2}{3}\upsilon R^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2\upsilon R$; distantia

H. Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{4\upsilon R^2+4s^2R-s^2\upsilon}{6\upsilon R+3s^2}$; Momentum respectu $A\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^3+a\upsilon R^2-\frac{1}{4}s\upsilon R^2+\frac{1}{2}as^2R$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-5eR^2+4a\upsilon R-s\upsilon R+2as^2}{4\upsilon R+2s^2}$.

A. I. Portionis, ejusdem Solidi, $b\beta\tau$; Magnitudo, $2R^3-\upsilon R^2-\frac{1}{2}s^2R$ $=bR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}b^2R$: Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{8}R^3\mathcal{P}-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}s\upsilon R^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani $\tau\alpha\varkappa$ erecti, $\frac{4}{3}R^4-\frac{2}{3}\upsilon R^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2\upsilon R$; respectu $A\alpha$, $\frac{3}{8}R^3\mathcal{P}+\frac{5}{4}eR^3-a\upsilon R^2+\frac{1}{4}s\upsilon R^2-\frac{1}{2}as^2R$; distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3R^2\mathcal{P}-6eR^2-6s\upsilon R-4s^3}{48R^2-24\upsilon R-12s^2}$; à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{8R^3-4\upsilon R^2-4s^2R+s^2\upsilon}{12R^2-6\upsilon R-3s^2}$; ab $A\alpha$, $\frac{3R^2\mathcal{P}+10eR^2-8a\upsilon R+2s\upsilon R-4as^2}{16R^2-8\upsilon R-4s^2}$.

A. I. Portionis AbK; Magnitudo, $\upsilon R^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}\upsilon^2R$: Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}s\upsilon R^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani $\tau\alpha\varkappa$ erecti, $\frac{4}{3}\upsilon R^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2\upsilon R=\frac{2}{3}\upsilon^2R^2+\frac{1}{6}s^2\upsilon R$; respectu TA, $\frac{2}{3}\upsilon R^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2\upsilon R=\frac{1}{6}\upsilon^3R$; respectu $A\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^3+a\upsilon R^2+\frac{1}{4}s\upsilon R^2-\frac{1}{2}as^2R$; distantia

distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR^2-2s^3R}{12vR^2-6s^2R=6v^2R}$; à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{4}{3}R+\frac{1}{3}b$; à TA, $\frac{2}{3}R-\frac{1}{3}b=\frac{1}{3}v$; ab $A\alpha$, $\frac{-3eR^2+4avR+svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

Portionis $AK\beta\alpha$; Magnitudo, $2vR^2$; distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum respectu ejusdem $A\tau\alpha$ plani (erecti) $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$; distantia Centri gravitatis à TA, vel $\tau\alpha$, (hoc est, à planis super rectas illas erectis,) R; momentum respectu TA, vel $\tau\alpha$, $2vR^3$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a-\frac{eR}{v}$; momentum respectu $A\alpha$, $2avR^2-2eR^3$. I.

Portionis AKbB; Magnitudo, v^2R; distantia Centri gravitatis à TA vel bB, $\frac{1}{2}v$; à $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{2}v$; ab $A\alpha$, $a-\frac{eR}{v}$; à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum respectu TA, vel bB, $\frac{1}{2}v^3R$; respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2-\frac{1}{2}v^3R$; respectu $A\alpha$, av^2R-evR^2; respectu plani (erecti) $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2+\frac{1}{4}sv^2R$. I.

Portionis $b\beta\alpha B$; Magnitudo, $vbR=s^2R$: Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ebR^2+\frac{1}{4}s^3R$: Distantia Centri gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{1}{2}b$; momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, $s^2R^2-\frac{1}{2}s^2vR=\frac{1}{2}s^2bR$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-eR+av}{v}$; momentum respectu $A\alpha$, $-2eR^3+evR+as^2R$. B. D. F. H.

Segmenti Solidi AbB; Magnitudo, $\frac{1}{2}v^2R$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}avR^2-\frac{1}{12}s^3R$; distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{-3eR^2+3avR-s^3}{6v^2}$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2+\frac{1}{3}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{2}{3}R+\frac{2}{3}b$; & à bB, $\frac{2}{3}R-\frac{1}{3}b=\frac{1}{3}v$; à TA, $\frac{2}{3}v$; momentum respectu bB, $\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{1}{6}v^3R$; respectu TA, $\frac{1}{3}v^3R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{3}{4}eR^3+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$. B. D. F. G.

Pars Secunda.

Porro; Si super $A\tau\alpha$, (Figura Sinuum versorum, Arcuumve,) Solidum insistat; altitudinem habens, in singulis bB rectis (seu arcubus in rectas expansis,) æqualem respectivis BV in Semicirculo, (eorum respective arcuum sinibus rectis:) Solidi sic constructi, partiumque ejusdem, tum magnitudines, tum momenta, & Centra gravitatis innotescunt. K. Fig. 169, 170.

Nempe; (retentis Symbolis, ut in propositionibus præcedentibus;)

Solidi totius $A\tau\alpha$ sic constructi; Magnitudo, $\frac{1}{16}RP^2$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{16}R^2P^2+\frac{4}{9}R^4$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2-\frac{4}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{64R^3}{9P^2}$: Momentum respectu K. M. N.

Fig. 169, 170.

reſpectu Aα, $\frac{1}{36}RP^3-\frac{1}{16}R^3P$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα,

O. $\frac{1}{6}P-\frac{R^2}{P}$: Momentum reſpectu plani A$\tau\alpha$ (erecti) $\frac{1}{6}R^3P$; Diſtantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{8R^2}{3P}$.

K. Portionis, ejuſdem Solidi, Ab$\beta\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R$

M. $=\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}efR$: Momentum reſpectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{5}{36}s^2R^2$ $+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{13}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3$ $-\frac{1}{9}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9aP-9ef}$;

N. à $\tau\alpha$, $R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9aP-9ef}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP-$ $\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}as^2R$; diſtantia Centri gravitatis ab

O. Aα, $\frac{3a^2P-3eR^2-3svR-4a^3+6as^2}{6aP-6ef}$: Momentum reſpectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{1}{3}fR^3+\frac{1}{18}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab A$\tau\alpha$ plano, $\frac{12fR^2+2s^3}{9aP-9ef}$.

M. Portionis AK$\beta\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}aRP$: Diſtantia Centri gravitatis à

N. TA, vel $\tau\alpha$, R; momentum reſpectu TA, vel $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P$: diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a$; momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{8}a^2RP$: Di-

O. ſtantia Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{8R^2}{3P}$; momentum reſpectu iſtius plani A$\tau\alpha$ (erecti) $\frac{2}{3}aR^3$.

L. Portionis, b$\beta\alpha$B; Magnitudo, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{2}a^2R+\frac{1}{2}asR-\frac{1}{2}asv=\frac{1}{4}aRP$

P. $-\frac{1}{2}eaR-\frac{1}{2}asv$: Momentum reſpectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{2}eaR^2$ $-\frac{1}{2}asvR+\frac{1}{3}as^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{2}eaR^2-\frac{1}{2}asvR-\frac{1}{3}as^3$; reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP-\frac{1}{4}a^3R+\frac{1}{4}a^2sR-\frac{1}{4}a^2sv$; reſpectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{2}{5}aR^3-\frac{1}{3}avR^2+\frac{1}{6}as^2R-\frac{1}{6}as^2v$; diſtantia Centri gravitatis, à TA, $R+\frac{4s^3}{3RP-6eR-6sv}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{4s^3}{3RP-6eR-6sv}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a$; à plano A$\tau\alpha$, $\frac{8R^3-4vR^2+2s^2R-2s^2v}{3RP-6eR-6sv}$.

L. M. Portionis, AKbB; Magnitudo $\frac{1}{2}eaR+\frac{1}{2}asv$: Momentum reſpectu TA, $\frac{1}{2}eaR^2+\frac{1}{2}asvR-\frac{1}{3}as^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2+\frac{1}{2}asvR+\frac{1}{3}as^3$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à $\tau\alpha$, $R+\frac{3s^3}{3eR+3sv}$:

N. Momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{4}a^3R-\frac{1}{4}a^2sR+\frac{1}{4}a^2sv$; diſtantia Centri

O. gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a$: Momentum reſpectu plani (erecti) A$\tau\alpha$, $\frac{1}{6}av^2R+\frac{1}{6}as^2v$; diſtantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{v^2R+s^2v}{3eR+3sv}$.

L. Portionis, AbB; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv=\frac{1}{4}e^2R$

M. $+\frac{1}{2}asv$: Momentum reſpectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{1}{2}asR^2+\frac{5}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3$ $+\frac{1}{2}asvR+\frac{1}{9}s^2vR-\frac{1}{3}as^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{1}{2}asR^2+\frac{13}{36}s^2R^2$ $-\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{2}asvR-\frac{1}{9}s^2vR+\frac{1}{3}as^3$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{4v^2R^2+4s^2vR-12as^3}{9e^2R+18asv}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{4v^2R^2+4s^2vR-12as^3}{9e^2R+18asv}$:

N. Momentum reſpectu Aα, $-\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}a^3R-$ $\frac{1}{4}a^2sR+\frac{1}{4}as^2R+\frac{1}{4}a^2sv$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα,

O. $\frac{-3eR^3-3svR^2+2a^3R-6a^2sR+6as^2R+6a^2sv}{6e^2R+12asv}$: Momentum reſpectu

plani

plani A τ α, $-\frac{1}{3}eR^3+\frac{1}{3}avR^2-\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{18}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$; distantia Centri gravitatis ab A τ α plano, $\frac{-12eR^3+12avR^2-6as^2R+2s^3R+6as^2v}{9e^2R+18asv}$.

Portionis A b K; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R=\frac{1}{4}efR$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$; respectu τ α, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à TA, $R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9ef}$; à τ α, $R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9ef}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{4}as^2R$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2+3svR+4a^3-6as^2}{6a^2-6s^2=6ef}$: Momentum respectu plani A τ α, $\frac{1}{3}eR^3-\frac{1}{18}s^3R$; distantia Centri gravitatis ab A τ α plano, $\frac{12eR^2-2s^3}{9ef}$. K. M. N. O.

Portionis b β τ; Magnitudo $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R$: Momentum respectu τ α, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}bR^3-\frac{1}{9}s^2bR$; respectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}bR^3+\frac{1}{9}s^2bR$; respectu T τ, $\frac{1}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}sbR^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{4}as^2R$; respectu plani A τ α, $\frac{1}{3}aR^3-\frac{1}{3}sR^3-\frac{1}{18}s^3R$; distantia Centri gravitatis à τ α, $R-\frac{4b^2R+4s^2b}{9a^2-9s^2}$; à TA, $R+\frac{4b^2R+4s^2b}{9a^2-9s^2}$; ab A α, $\frac{3aR^2-3sR^2+3sbR+4a^3-6as^2}{6a^2-6s^2}$; à plano A τ α, $\frac{12aR^2-12sR^2-2s^3}{9a^2-9s^2}$. K. Q.

Adeoque exhibentur, in utroque solido; tum eo quod fit ex A τ α figuræ Sinuum versorum rectis b β, in β υ Figuræ Sinuum rectorum respectivas rectas; tum eo quod fit ex A τ α Figuræ Arcuum rectis bB, in BV, respectivas Semicirculi rectas; eorumque partibus expositis; Tum Magnitudines; tum Momenta respectu planorum aliquot expositorum; & Centrorum gravitatis ab illis planis distantiæ. Et propterea, propter exhibitas Centrorum gravitatis distantias à tribus saltem planis non parallelis; exhibentur (per prop. 26. cap. præced.) ipsa Centra gravitatis. R.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia facile poterunt accommodari.

Et quidem quæ de his solidis traduntur; ad Protracta, & Contracta, facile transferentur.

Quæque de solidis Figuram Sinuum Rectorum unius Quadrantis respicientibus, traduntur; eadem ad Solida Figuram Chordarum Semicirculi similiter respicientia, transferentur.

SUper α τ κ Figura sinuum rectorum, erigi intelligatur Cylindri (Prismatisve) recti portio; ea ratione, ut super singulis β υ, figuram complentibus (arcuum arithmetice proportionalium sinibus rectis,) altitudinem habeat respectivis β b (eorundem arcuum, eorumve complementorum ad semicirculum sinibus versis) æqualem. Aut etiam (quod eodem recidit) super A τ α figura Sinuum versorum (Arcuumve) insistens ad angulos rectos, in τ α recta, Figura Sinuum rectorum α τ κ, promoveri intelligatur ad T A, solidum describens columnare (Cylindraceum dicas, Prismaticumve, perinde est,) Parallelogrammo T A α τ incumbens; quod sinuosa superficie sinuosæ curvæ A d τ ad angulos rectos insistente, secari porro intelligatur, Solidum A d τ α abscindente. A. Fig. 169, 170.

Manifestum est, ex constructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis b β insistentia, Parallelogramma esse rectangula; ipsis b β υ rectangulis ubique æqua-

Fig. 169, 170. lia ; hoc eſt, rectangulis hs ; factis nempe ex arcuum $\tau\beta$ (hoc eſt α B fig. 169.) ſeu complementorum arcuum $\alpha\beta$ (ſeu A B) ſinibus verſis ; in βv (hoc eſt B V fig. 169.) eorundem arcuum ſinibus rectis. Adeoque Solidum hoc ſive totum, ſive ipſius portio ut A b $\beta\alpha$, eſt aggregatum omnium hs, ſeu sh, figuram ſive totam, ſive ipſius aſſumptam portionem, ſpectantium ; diviſa $\alpha\tau$ in partes æquales ; hoc eſt, ſumptis a arcubus arithmetice proportionalibus.

Manifeſtum item eſt, Plana rectis b B inſiſtentia, ſolidum hoc complentia, æqualia eſſe reſpectivis $\alpha\beta v$ Figuræ ſinuum rectorum portionibus ; diviſa A α in partes æquales, hoc eſt, ſumptis v arithmetice proportionalibus. . Adeoque (propter $\alpha\beta v = vR$, per § Q. prop. 17.) Solidum hoc, ſive totum, ſive ipſius portio ut A b B, eſt aggregatum omnium vR, eo ſpectantium, ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Eſtque ſolidum hoc, Semiquadrantalis Ungulæ à Semicirculi A D α aciem habentis A α, (ſeu Momenti ſemicirculi A D α reſpectu A α rectæ,) Triplum : Et partes partium reſpective ſumptarum : Puta Solidi portio A b $\beta\alpha$, tripla correſpondentis Ungulæ B α A (aciem habentis A α,) & Portio b $\beta\tau$, tripla Ungulæ correſpondentis α B α, (aciem habentis A α ;) & ſic ubique. Sunt enim (per prop. 17.) ſingula α B triangula Semicirculum complentia, ad b β Parallelogramma, complentia figuram Sinuum verſorum, ut 1 ad 2 : Item Trianguli α B cujuſque Centrum gravitatis ab α diſtat $\frac{2}{3}\alpha$B, (per prop. 6. hujus ;) adeoque ab A α, $\frac{2}{3}$B V ; cujus itaque ad B V $= \beta v$ ratio, eſt ut 2 ad 3. Eſt ergo (propter $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,) Trianguli cujuſque momentum reſpectu A α, ſeu ſemiquadrantalis Ungula Pyramiſve (æqualis utique facto ex magnitudine, in illam diſtantiam ;) ad reſpectivum Parallelepipedum (factum ex b β in βv ;) ut 1 ad 3 : Et ſic ubique. Hoc eſt, B α A Ungula, quam illæ complent Pyramides ; ad ſolidum b $\beta\alpha$ A, ex Parallelepipedis conflatum ; ut 1 ad 3. Totumque A d $\tau\alpha$ Solidum, Triplum iſtius Ungulæ Semicirculi (aciem habentis A α :) Et partes partium reſpective ; Nempe A b $\beta\alpha$ Solidum, triplum ungulæ B α A aciem habentis A α.

Eſt autem illa Semicirculi Ungula (ſeu momentum reſpectu A α,) $\frac{2}{3}R^3$; & Sectoris B α A, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$; & Segmenti α B α, $\frac{1}{6}h^2R$; (per § Q, S, prop. 15.) Ergo totius A $\tau\alpha$ ſolidi, magnitudo $2R^3$; & portionis A b $\beta\alpha$, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & portionis b $\beta\tau$, $\frac{1}{2}h^2R = 2R^3 - vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = hR^2 - \frac{1}{2}s^2R$.

Et ſimiliter oſtendetur portionis A b K (extra trilineum) magnitudo ; ſeu *Omn.* sv ; (ſumptis a arith. propor.) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$.

B. Si vero ex hac portione Solidi A b $\beta\alpha$; auferatur pars b $\beta\alpha$ B (quæ nempe huic parallelogrammo incumbit ;) hoc eſt, factum ex plano A βv ($= vR$, per § Q. prop. 17,) in β b $= h$; hoc eſt $hvR = s^2R$; (propter s mediam proportionalem inter v & h ; hoc eſt, B V inter A V & V α :) Relinquitur Solidi ſegmentum A b B, $= vR^2 + \frac{1}{2}s^2R - hvR = vR^2 + \frac{1}{2}s^2R - s^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$. Quod eſt aggregatum Omnium vR eo ſpectantium, ſumptis v ſinibus verſis arithmetice proportionalibus : (Singulis enim b V rectis reſpective inſiſtit planum $\alpha\beta v = vR$.) Seu, quod tantundem valet, Omnium sv, ſumptis a arithmetice proportionalibus : (Ut ad § I. videbitur.) Hoc eſt factum ex omnibus βv in reſpectivas b K. Adeoque Sinuoſa ſuperficies, curvæ A d τ inſiſtens, biſecat K b B ſolidum, facitque ſolidum A b B & ſolidum A b K, invicem æqualia ; (quod merito obſervandum ;) utrumvis utique $\frac{1}{2}v^2R$: Eſt enim (propter $\alpha\beta v = vR$, & AV$=v$,) Solidum K b B A $= v^2R$.

Idemque per ſe, (ſine ope portionis A b $\beta\alpha$,) ſic colligitur. Cum ſingula plana (æqualibus intervallis ſumpta, Solidum complentia,) quæ rectis b B inſiſtunt, ſint reſpectivis $\alpha\beta v$ æqualia, (quod ex conſtructione manifeſtum eſt ;) ſintque plana illa $\alpha\beta v = vR$ reſpective, (per § P, Q, prop. 17.) Solidi ſegmentum A b B, aut etiam ſolidum integrum A $\tau\alpha$, eſt aggregatum Omnium vR, eo ſpectantium ; ſumptis v arithmetice proportionalibus, uſque ad eorum maximum V. Sunt autem *Omnes* v, (arithmetice proportionales, uſque ad maximum V,) $= \frac{1}{2}V^2$, (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $vR := \frac{1}{2}V^2R$; ſeu (reſtituto minuſculæ v valore) $\frac{1}{2}v^2R$; ut prius. (Adeoque ſolidum integrum, (propter $v = 2R$,) $= 2R^3$, ut prius.) Cui ſi addatur portio b $\beta\alpha$ B, habebitur portio A b $\beta\alpha$, eadem quam prius exhibuimus. Cumque Solidum A b B ſit (ut dictum eſt) $\frac{1}{2}v^2R$; ſitque ſolidum AKbB, v^2R (propter baſin $\alpha\beta v = vR$, & altitudinem A V $= v$,) erit etiam pars reſidua A b K, $\frac{1}{2}v^2R$, (ipſi A b B æqualis ;) adeoque Superficies curva, curvæ A b inſiſtens, biſecat ipſum A K b B ſolidum.

Porro ;

Porro; Si intelligatur Solidum integrum ita positum, ut $\tau\alpha\kappa$ planum sit in situ horizontali, adeoque A $\tau\alpha$ (super illo erectum) in plano ad Horizontem recto: Momentum solidi totius, respectu $\tau\alpha$ rectæ; erit Duplum momenti Ungulæ semicirculi aciem habentis A α, respectu ipsius A α. (Et similiter in partibus respective sumptis.) Sunt utique singula b $\beta\upsilon$ parallelepipeda Solidum hoc complentia (ut ostensum est § A,) ad respectivas Pyramides αB Ungulam illam complentes, ut 3 ad 1. Eorumque Parallelepipedorum à perpendiculari plano $\tau\alpha$A distantiæ Centri gravitatis, hoc est $\frac{1}{2}\beta\upsilon$ respective, (per prop. 2. hujus;) ad Pyramidum illarum distantias Centri gravitatis à perpendiculari plano A α, $\frac{3}{4}$B V, (distant utique ab α, $\frac{3}{4}\alpha$B, per prop. 6 hujus; adeoque, $\frac{3}{4}$B V, ab A α;) seu $\frac{3}{4}\beta\upsilon$; ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3. Ergo, (propter $\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{1}$,) momentum cujusque Parallelepipedi, (adeoque & simul omnium,) ad respectivæ Pyramidis (adeoque & simul omnium) momentum; est ut 2 ad 1. Quod quidem momentum, est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}s^2b$, sive totum Solidum, sive ipsius portionem, spectantium. (Sunt utique magnitudines, aggregatum Omnium sb; distantiæque Centrorum gravitatis respective, $\frac{1}{2}s$.) Est autem Ungulæ Semicirculi A Dα acem habentis Aα, momentum respectu Aα, $\frac{1}{16}R^3\mathcal{P}$; Ungulæque Sectoris B$\alpha$A, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; (per § P, R, prop. 16.) Ergo Totius Solidi A$\tau\alpha$ (situ illo positi) momentum respectu $\alpha\tau$, est $\frac{1}{8}R^3\mathcal{P}$; & portionis A b $\beta\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$. Atque hæc momenta, per respectivas magnitudines divisa, (hoc est, per $2R^3$, & $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$, ut ad § A.) exhibent Centrorum gravitatis ab A$\tau\alpha$ plano distantias; nempe totius Solidi, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$; & portionis Solidi Ab$\beta\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR+2s^3}{12vR+6s^2}$. C. Fig. 169, 170.

Si vero ex eo Solidi A b $\beta\alpha$ momento; auferatur momentum ipsius b$\beta\alpha$B: restat momentum Solidi A b B. D.

Est autem Solidi b$\beta\alpha$B magnitudo (per § B.) $s^2R=vhR$; ejusque Centri gravitatis ab A$\tau\alpha$ plano distantia, (quanta plani A$\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$, per § C. prop. 5.) est $\frac{eR+sv}{4v}$, per § Q. prop. 17. adeoque momentum (in eo situ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ehR^2+\frac{1}{4}svhR=\frac{1}{4}ehR^2+\frac{1}{4}s^3R=\frac{1}{2}eR^3-\frac{1}{4}evR^2+\frac{1}{4}s^3R=\frac{1}{2}eR^3-\frac{1}{4}avR^2+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{4}s^3R$: Hoc itaque, ex totius A b$\beta\alpha$ momento, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$, (§ C.) subductum; relinquit $-\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}avR^2-\frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B (super plano $\alpha\beta\upsilon$ erecti) respectu $\tau\alpha$. (Quæ est summa omnium vR solidum complentium in suas respective distantias $\frac{eR+sv}{4v}$ ductarum; seu, omnium $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$; sumptis v arithmetice proportionalibus.) Illudque momentum, per magnitudinem divisum (§ B. traditam) $vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$; exhibet ejusdem A b B, Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$ distantiam $\frac{-3eR^2+3avR-s^3}{12vR-6s^2=6v^2}$.

Idem etiam per se (absque ope portionis Ab$\beta\alpha$) sic colligitur. Cum singula plana rectis bB insistentia, Solidum complentia, æqualia sint ipsis respective $\alpha\beta\upsilon=vR$, (ut dictum est;) sintque eorum Centra gravitatis in eadem ab A$\tau\alpha$ plano distantia, qua ipsorum $\alpha\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$; hoc est $\frac{eR+sv}{4v}$ respective: Erunt singulorum momenta, respectu ipsius A$\tau\alpha$ perpendicularis plani, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$, seu $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$. Adeoque Solidi A b B momentum, erit Omnium Summa; hoc est, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$: sumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omnes a*, (sumptis v arithmetice proportionalibus,) ipsum A b B planum; hoc est, $-eR+av$, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2=-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}avR^2$.

Et similiter, *Omnes s*, (sumptis v arithmetice proportionalibus) sunt ipsum in semicirculo A B V planum; hoc est, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2:=\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$.

Item, *Omnia sv*, (hoc sensu,) sunt ipsius, in semicirculo, plani A B V, momentum respectu T A, (est enim singulorum s, à T A distantia v, respective;)

Fig. 169, 170. hoc est, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$ (per § F. prop. 15.) Adeoque, *Omn.* $\frac{1}{4}svR:=\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR:=-\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}avR^2-\frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B, respectu perpendicularis plani A $\tau\alpha$. Ut prius. Unde Centri gravitatis inde distantia habebitur. Atque huic momento, si addatur momentum Solidi b $\beta\alpha$ B, habebitur momentum Solidi A b $\beta\alpha$, idem quod alia methodo jam invenimus.

E. Deinde; Si intelligatur Solidum illud integrum A $\tau\alpha$, ita positum, ut sit A $\tau\alpha$ planum in situ horizontali, adeoque $\alpha\tau\varkappa$ planum, situ ad horizontem recto: Momentum Solidi totius, Duplum erit momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, respectu rectæ $\tau\alpha$. Et similiter in partibus respective sumptis. Sunt enim (ut prius dictum § A, C.) Singula Parallelepipeda Solidum hoc complentia, ad respectivas Pyramides complentes illam Ungulam, ut 3 ad 1: Eorumque parallelepipedorum rectis βb insistentium distantiæ Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}\beta b=\frac{1}{2}h$, respective; Pyramidum vero à $\tau\alpha$ plano, Distantiæ Centrorum gravitatis, respective, $\frac{3}{4}V\alpha=\frac{3}{4}h$. Cum igitur magnitudines sint ut 3 ad 1; & distantiæ, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3; erit (propter $\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{1}$) Momentorum ratio, ut 2 ad 1. Hoc est, Momentum Solidi A $\tau\alpha$ (hoc situ positi) respectu $\tau\alpha$ rectæ, duplum momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, respectu rectæ $\tau\alpha$: Et portionis Solidi A b $\beta\alpha$ momentum, duplum momenti Ungulæ correspondentis B α A, (aciem habentis A α,) respectu $\tau\alpha$. Est autem (per § C, F. prop. 16.) Ungulæ Semicirculi, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R^4$; Ungulæque Sectoris B α A, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$. Ergo Solidi A $\tau\alpha$ sic positi, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R^4$; & portionis A b $\beta\alpha$, $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$. (Quæ est summa, omnium $\frac{1}{2}sh^2$, eo spectantium; sumptis a arithmetice proportionalibus: Sunt enim magnitudines, summa omnium sh; & distantia $\frac{1}{2}h$ respective.) Eaque momenta per respectivas magnitudines, $2R^3$, & $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$, (per § A.) divisa; exhibent Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, distantias: Nempe, totius Solidi, $\frac{2}{3}R$; & portionis A b $\beta\alpha$ $\frac{4vR^2+4s^2R-s^2v}{6vR+3s^2}$.

F. Ex illo autem portionis A b $\beta\alpha$ momento; si eximatur momentum portionis b $\beta\alpha$ B: habetur momentum Segmenti A b B.

Est autem b $\beta\alpha$ B, (per § B.) vhR seu s^2R; distantia Centri gravitatis (per prop. 2 hujus,) $\frac{1}{2}b\beta=\frac{1}{2}h$: Ergo momentum (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}vh^2R=\frac{1}{2}s^2hR$, seu (propter $vh=s^2$, & $h=2R-v$,) $s^2R^2-\frac{1}{2}s^2vR$. Hoc itaque subductum ex Portionis Solidi A B $\beta\alpha$ momento, $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$ (§ præced.) Relinquit $\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2+\frac{1}{3}s^2vR$, momentum Solidi AbB (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$. Quod per magnitudinem, $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$, (§ B.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha\varkappa$ plano, $\frac{4vR^2-2s^2R+2s^2v}{6vR-3s^2}$: seu $\frac{4vR^2-2vhR+2v^2h}{6vR-3vh}=\frac{4R^2-2hR+2vh}{6R-3h=3v}=\frac{2vR+2vh}{3v}=\frac{2}{3}R+\frac{2}{3}h$: Adeoque, à bB, $\frac{2}{3}R-\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}v$: Et propterea momentum ejusdem A b B solidi (sic positi) respectu bB, $\frac{1}{3}v^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{1}{6}v^3R$.

Quod quidem momentum, est summa omnium planorum $\alpha\beta\upsilon$ eo spectantium, (hoc est, omnium vR, per § O, Q. prop. 17. sumptis v arithmetice proportionalibus usque ad V eorum maximum,) in suas respective à b B distantias ductorum, hoc est, in $V-v$ respective: Hoc est, *Omnium* vVR, minus *Omn.* v^2R. Adeoque, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}V^3R-\frac{1}{3}V^3R=\frac{1}{6}V^3R$, seu $\frac{1}{6}v^3R$: ut prius.

Idem per se habebitur, (sine ope portionis A b $\beta\alpha$.) Cum enim singula rectis b B insistentia plana Solidum complentia, æqualibus intervallis ab invicem dissita, sint æqualia ipsis $\alpha\beta\upsilon=vR$ respective, (ut dictum est:) Sintque in distantiis à vertice T A, ipsis v respective æqualibus; erit cujusque momentum respectu T A, v^2R; adeoque summa omnium (propter v arithmetice proportionales, usque ad V maximum,) $\frac{1}{3}V^3R$, (per prop. 1. hujus.) Seu, restituta v minuscula, $\frac{1}{3}v^3R$. Adeoque propter magnitudinem, $\frac{1}{2}v^2R$, (per § B.) Centri gravitatis à T A distantia $\frac{2}{3}v$: Ergo, à $\tau\alpha$, $2R-\frac{2}{3}v$, seu $\frac{2}{3}R+\frac{2}{3}h$; ut prius: Et propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $v^2R^2-\frac{1}{3}v^3R$, seu $\frac{1}{3}v^2R^2+\frac{1}{3}v^2bR$, hoc est $\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2$

$-\frac{1}{3}s^2R^2+\frac{1}{3}s^2vR$, ut prius. Atque huic momento, si addatur momentum portionis $b\beta\alpha B$, habebitur momentum portionis $Ab\beta\alpha$; eadem quæ prius. Fig. 169, 170.

Idemque Solidum AbB, eodem situ positum, si respectu rectæ $A\alpha$ considerentur; Momentum ejus est aggregatum omnium $\alpha\beta\upsilon$ planorum solidum complentium (hoc est, omnium vR, eo spectantium,) in suas respective centrorum gravitatis distantias ab $A\alpha$; (hoc est, in $\frac{-eR+av}{v}$ respective, per §, P, Q. prop. 17.) G.

Hoc est, Omnium $-eR^2+avR$, seu Omnium $-aR^2+sR^2+avR$; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad V eorum maximum.

Sunt autem *Omn. a*, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) ipsum planum AbB; hoc est, $-eR+av$, per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $aR^2=-eR^3+avR^2$.

Et, *Omn. s.* (hoc sensu,) ipsum Semicirculi segmentum ABV, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; per § F. prop. 15. Adeoque *Omn.* $sR^2:=\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$.

Item, *Omn. av*, sunt ipsæ bB rectæ, planum AbB complentes, in suas respective à TA distantias v; Hoc est, Plani AbB momentum respectu TA; Hoc est, $-\frac{2}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$: per § F. prop. 17. Adeoque *Omn.* $avR:=-\frac{2}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$.

Ergo, *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR:=\frac{3}{4}eR^3+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Quod itaque est momentum Solidi AbB respectu $A\alpha$.

Idemque momentum, per magnitudinem $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$ (§ B) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

Huic autem Solidi AbB momento sic reperto, si addatur momentum Solidi $b\beta\alpha B$; habetur momentum Solidi $Ab\beta\alpha$, respectu $A\alpha$. H.

Est autem $b\beta\alpha B$ Solidi magnitudo $s^2R=vhR$. per § B: Ejusque ab $A\alpha$ distantia Centri gravitatis, (idem quod ipsius $\alpha\beta\upsilon$ plani, per prop. 1, 5. hujus) est $\frac{-eR+av}{v}$, per § Q. prop. 17. Ergo ejusdem, respectu $A\alpha$, momentum est, $-ehR^2+avhR=-2eR^3+evR^2+as^2R=-2eR^3+avR^2-svR^2+as^2R$.

Hoc itaque, Solidi AbB momento (modo reperto) $\frac{3}{4}eR^3+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$, additum; exhibet Solidi $Ab\beta\alpha$ momentum respectu $A\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$. (Adeoque totius $A\tau\alpha$ Solidi, cum sit in hoc casu, $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, $v=2R$, $s=0$, & $e=a-s=a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, momentum respectu $A\alpha$, $-\frac{5}{8}R^3\mathcal{P}+R^3\mathcal{P}=\frac{3}{8}R^3\mathcal{P}$.) Et momento per magnitudinem $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$ (§ A) diviso; habetur ipsius $Ab\beta\alpha$ solidi, distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-5eR^2+4avR-svR+2as^2}{4vR+2s^2}$. (Adeoque in integro $A\tau\alpha$ Solido, $\frac{3}{16}\mathcal{P}$.)

Atque hoc (sive totius $A\tau\alpha$ Solidi, sive ipsius portionis $Ab\beta\alpha$) momentum respectu $A\alpha$, est aggregatum omnium ash eo spectantium; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus, usque ad maximum A. Sunt enim, rectangula seu parallelepipeda $b\beta\upsilon$, summa omnium sh (ut § A dictum est,) eorumque ab $A\alpha$ distantiæ, $\beta\alpha=a$, respective.

Quæque de his Solidi portionibus dicta sunt, facile ad alias ubi opus fuerit transferentur: Quarum tum magnitudines, tum momenta & Centra gravitatis, ab his quæ jam traduntur facile derivari poterunt: Puta, Portionis $b\beta\tau$, aut AbK, &c. I.

Si enim ex totius Solidi $A\tau\alpha$, magnitudine $2R^3$; Momento respectu $\tau\alpha$, in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^3\mathcal{P}$; respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{4}{3}R^4$; & respectu plani super $A\alpha$ erecti, $\frac{3}{8}R^3\mathcal{P}$; supra traditis: Auferantur Magnitudo, & respectiva momenta Solidi $Ab\beta\alpha$, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{2}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi $b\beta\tau$, magnitudo, $2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^3\mathcal{P}-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\varkappa$ erecto, $\frac{4}{3}R^4-\frac{2}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; respectu plani Fig. 170.

Fig. 169, 170. $A\alpha$ erecti, $\frac{3}{8}R^3P+\frac{5}{4}eR^3-avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc Momenta per Magnitudinem divisa; exhibent Solidi $b\beta\tau$ distantiam Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3R^2P-6eR^2-6svR-4s^3}{48R^2-24vR-12s^2}$; à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{8R^3-4vR^2-4s^2R+s^2v}{12R^2-6vR-3s^2}$; ab $A\alpha$ plano, $\frac{3R^2P+10eR^2-8avR+2svR-4as^2}{16R^2-8vR-4s^2}$.

Similiter, cum solidi portio $AK\beta\alpha$ parallelogrammo incumbens, Magnitudinem habeat (ex ductu $A\alpha=2R$, in $\alpha\beta\upsilon=vR$, factam,) $2vR^2$; & Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, (ex ductu Magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitaiis plani $\alpha\beta\upsilon$, à $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; per § O, Q. prop. 17.) $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$; & respectu $\tau\alpha\varkappa$ erecti plani, (ex ductu $\alpha C=R$, dimidii longitudinis prismatis, in magnitudinem $2vR^2$,) $2vR^3$; & respectu $A\alpha$ erecti plani, (ex ductu magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $\alpha\beta\upsilon$ ab $A\alpha$, hoc est, in $\frac{-eR+av}{v}$, per § P, Q. prop. 17.) $-2eR^3+2avR^2$ (est enim Prismatis centrum gravitatis in medio rectæ Centra gravitatis basium oppositarum jungente, per prop. 1, & 5 hujus:) Si ex his Solidi $AK\beta\alpha$ magnitudine & momentis; auferantur Magnitudo & Momenta respectiva Solidi $Ab\beta\alpha$; $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{5}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi AbK, magnitudo, (hoc est, aggregatum *Omnium* sv, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus,) $vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$, eo spectantia,) $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; Momentum respectu plani $\tau\alpha\varkappa$ erecti, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; Momentum respectu plani $A\alpha$, (hoc est, *Omnia asv*, eo spectantia,) $-\frac{3}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc momenta, per magnitudinem divisa; exhibent, Solidi AbK, distantiam Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{12vR-6s^2=6v^2}$; à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{16vR^2-8s^2R+2s^2v}{12vR-6s^2=6v^2}=\frac{4}{3}R+\frac{s^2=bv}{3v}$; (adeoque, à TA, $\frac{2}{3}R-\frac{s^2}{3v}=\frac{2}{3}R+\frac{1}{3}b=\frac{1}{3}v$; & propterea ejusdem respectu TA, momentum, hoc est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}sv^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus, $\frac{1}{6}v^3R=\frac{1}{3}v^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$;) distantiamque ab $A\alpha$ plano, $\frac{-3eR^2+4avR+svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

Item; Portionis AKbB, magnitudo & momenta, habentur ex Portionum AbK, & AbB, magnitudinibus & momentis (respective) additis: Vel subductis Portionis $b\beta\alpha$B magnitudine & momentis, ex magnitudine & momentis (respectivis) portionis $AK\beta\alpha$: Vel etiam eodem modo quo habentur ipsius $b\beta\alpha$B magnitudo & momenta. Nempe ex ductu plani $\alpha\beta\upsilon=vR$, in $AV=v$, habetur ipsius AKbB (prismatis) magnitudo v^2R. Atque ex hac magnitudine in $\frac{1}{2}v$ (ejusdem Centri gravitatis à TA vel bB distantiam,) habetur ejusdem, respectu TA vel bB, momentum, $\frac{1}{2}v^3R$. Ductaque in $b+\frac{1}{2}v=2R-\frac{1}{2}v$ (distantiam à $\tau\alpha$,) ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2-\frac{1}{2}v^3R$. Eademque magnitudine ducta in Centri gravitatis distantiam ab $A\alpha$, $\frac{-eR+av}{v}$; & à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$, (easdem utique quæ sunt, in $\alpha\beta\upsilon$ plano, distantiæ ab $A\alpha$, & $\tau\alpha$;) habentur ejusdem momenta, respectu $A\alpha$, av^2R-evR^2; & respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2+\frac{1}{4}sv^2R$.

Et similiter de portionibus aliis, mutatis mutandis, judicandum erit.

K. Super ADα Semicirculo, erigi intelligatur Cylindri recti portio; ea ratione, ut super singulas BV ordinatim applicatas, altitudinem habeat respectivis bB æqualem,

qualem, hoc eſt arcubus B A. Aut etiam (quod eodem recidit) ſuper *Trilinei* Fig. 169, *Reſtituti* A τ α, (quam *Figuram Sinuum verſorum, Arcuumve*, dicimus,) recta 170. A α, poſitus ad angulos rectos A D α Semicirculus, promoveri intelligatur uſque ad T τ, Semicylindrum deſcribens; qui Semicylindrus ſinuoſa ſuperficie, ſinuoſæ rectæ A d τ ad angulos rectos ubique inſiſtente, ſecari intelligatur, Solidum A d τ α terminante.

Manifeſtum eſt, ex conſtructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis b B directe inſiſtentia, Parallelogramma eſſe rectangula; ex rectis b B fig. 170. hoc eſt arcubus B A fig. 169. in B V eorundem ſinus rectos, ſeu ad diametrum circuli ordinatim-applicatas, ductis: Hoc eſt, rectangula b B V, fig. 166, 168. Hoc eſt, *a s* rectangula, ſumptis arcubus *a* non quidem arithmetice proportionalibus, ſed qui ſinibus verſis A V, &c. arithmetice proportionalibus conveniunt: quo plana Solidum hoc complentia ſint æqualibus intervallis diſſita. Adeoque A b V, Solidi fruſtum, eſt aggregatum omnium *a s*, eo ſpectantium, ſumptis *v* ſinibus verſis arithmetice proportionalibus.

Manifeſtum item eſt, ex conſtructione, Plana rectis b β directe inſiſtentia, Solidum idem complentia, (cum ſemicylindri portio ſit,) ſemicirculo rectæ A α inſiſtenti parallela, Segmenta eſſe Semicirculi, ut B V α fig. 169. ipſis b β rectis fig. 170. (arcuum arithmetice proportionalium ſinibus verſis) æquealta. Puta rectæ x ξ, Segmentum O X D α; rectæ z ζ, Segmentum S Z D α, & ſic deinceps; uſque ad ultimum Φ F α ſeu ipſum α punctum, ſi totum Solidum ſpectemus; vel uſque ad V B α ſegmentum, ſi ſolidi portionem A b β α, ſpectemus. Et ſic alibi. Adeoque A b β α, Solidi portio, eſt aggregatum omnium V B α Segmentorum Semicirculi, eo ſpectantium ſumptis *a* arcubus, (puta A X, A Z, &c.) arithmetice proportionalibus. Sunt autem Omnia Segmenta O X D α, S Z D α, &c. totidem Semicirculi demptis contrariis Segmentis O X A, S Z A, &c. Hoc eſt, Semicirculus A D α in rectam α τ ductus, ſeu A α τ T Semicylindrus, ſi totum Solidum ſpectemus; vel, ſi portionem A b β α ſpectemus, idem Semicirculus in α β ductus, (ſeu A α β K Semicylindrus:) Demptis utrobique omnibus O X A, S Z A, &c. hoc eſt omnibus A B V eo ſpectantibus; Hoc eſt, dempto Solido quod ipſi A τ T, vel A b K, trilineo inſiſtere deberet ad reſpectivum Semicylindrum complendum; (cui æquale eſt, quod ſimili portioni puncto τ adjacenti incumbit: Puta, quod A z K trilineo incumberet, incumbenti trilineo τ e ε; & ſic ubique.)

Eſt autem Segmentum B V A quodvis, (per § F. prop. 15.) $\frac{1}{2} e R + \frac{1}{2} s v = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v$. Adeoque ſumma omnium eo ſpectantium, ſunt *Omnia*, $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v$, uſque ad (eo ſpectantium) ultimum, quod dicamus impræſentiarum $\frac{1}{2} AR - \frac{1}{2} SR + \frac{1}{2} SV$.

Sunt autem *Omnes a*, (arcus arithmetice proportionales, uſque ad *A* maximum,) $= \frac{1}{2} A^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $\frac{1}{2} a R = \frac{1}{4} A^2 R$.

Item, *Omnes s*, (ſinus recti arcubus illis convenientes, uſque ad *S* maximum,) ſunt $= VR$, (per § Q. prop. 17.) adeoque *Omn.* $- \frac{1}{2} s R : = - \frac{1}{2} V R^2$.

Item, *Omnia s v*, uſque ad *SV* maximum; ſunt facta ex ſinibus rectis arcuum arithmetice proportionalium, puta X O, Z S, &c. fig. 169. hoc eſt ξ ο, ζ υ, &c. fig. 170. ductis in reſpectivos ſinus verſos, ut A O, A S, &c. fig. 169, 170. hoc eſt, x q, z K, &c. ſinuum verſorum ξ x, ζ z, &c. reſiduos ad diametrum A α = 2 *R*. (Nempe, Solidi prius conſtructi, portio A b K, § A, I, exhibita.) Hoc eſt, Omnes ξ ο, ζ υ, &c. rectæ, in 2 *R* ductæ; demptis eiſdem in ξ x, ζ z, &c. reſpective ductis. Sunt autem, Omn. ξ ο, ζ υ, &c. hoc eſt Omn. *s* uſque ad *S* maximum, hoc eſt α β υ trilineum, $= VR$; (ut modo dictum:) adeoque eædem Omnes in A α = 2 *R*, ſunt $2 VR^2$; Item eædem Omnes in reſpectivas ξ x, ζ z, &c. hoc eſt, *Omnes s h* uſque ad *SH* maximum, (ſeu Solidi, prius conſtructi, portio A b β α, § A exhibita;) ſunt Triplum momenti Sectoris correſpondentis B α A fig. 169. reſpectu rectæ A α, (ut § L. prop. 17. & § A. hujus oſtenſum eſt,) hoc eſt, $VR^2 + \frac{1}{2} S^2 R$; per § S. prop. 15. vel § A. hujus. Ergo, eædem omnes ξ ο, ζ υ, &c. in reſpectivas A O, A S, &c. ſeu x q, z K, &c. hoc eſt, *Omn. s v*, uſque ad maximum *SV*; ſunt, $2 VR^2$ minus $VR^2 + \frac{1}{2} S^2 R$; hoc eſt $VR^2 - \frac{1}{2} S^2 R$ ($= \frac{1}{2} V^2 R$, ut § A, I.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2} s v : = \frac{1}{2} VR^2 - \frac{1}{4} S^2 R$.

Omnia igitur, A X O, A Z S, &c. Semicirculi Segmenta, uſque ad maximum (eo ſpectantium) A B V, (Solidum A b K complentia;) hoc eſt *Omn.* $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v$: uſque ad $\frac{1}{2} AR - \frac{1}{2} SR + \frac{1}{2} SV$: ſunt; $\frac{1}{4} A^2 R$, minus $\frac{1}{2} VR^2$

plus

Fig. 169, 170. plus $\frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$: Hoc eſt, $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R = \frac{1}{4}efR$. (Nempe Solidi hujus portio AbK.)

Ergo, Omnia $OX\alpha$, $SZ\alpha$, &c. Segmenta; hoc eſt totidem Semicirculi, demptis ipſis AXO, AZS, &c. ſunt (propter Semicirculum $= \frac{1}{4}R\mathcal{P}$;) $\frac{1}{4}AR\mathcal{P}$, minus $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R$; Hoc eſt, $\frac{1}{4}AR\mathcal{P} - \frac{1}{4}A^2R + \frac{1}{4}S^2R$: ſeu (reſtitutis minuſcularum valoribus,) $\frac{1}{4}aR\mathcal{P} - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aR\mathcal{P} - \frac{1}{4}efR$: Quæ eſt, Portionis Solidi quadrilineo $Ab\beta\alpha$ incumbentis magnitudo.

Adeoque, totum $Ad\tau\alpha$ ſolidum, (propter $a = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $s = 0$;) eſt $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2 - \frac{1}{16}R\mathcal{P}^2 = \frac{1}{16}R\mathcal{P}^2$.

Sed & eadem totius Solidi magnitudo, ſic facilius colligitur. Sumptis in $A\alpha$ diametro, duobus punctis quibuſvis æqualiter à C Centro utrinque remotis, ut S, Σ: manifeſtum eſt, tum ſinus rectos SZ, ΣE, fig. 169. invicem æquales eſſe; tum rectas Sz, Σe, ſeu Zz, Ee, fig. 170. hoc eſt, arcus BA, EA, ſeu BA, $B\alpha$, fig. 169. ſimul æquales Semiperipheriæ $AB\alpha$, ſeu $\tau\alpha$ rectæ. Adeoque duo ſimul rectangula, $zZ \times ZS$, $eE \times E\Sigma$, æqualia uni $\tau\alpha \times SZ$. Hoc eſt, Omnes BV totius Semicirculi, in reſpectivas bB; tantundem eſſe atque Omnes BV unius quadrantis (hoc eſt ipſe quadrans $ADC = \frac{1}{8}R\mathcal{P}$,) in $\tau\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, ductæ. Hoc eſt, $\frac{1}{16}R\mathcal{P}^2$; totius Solidi magnitudo; ut prius.

Hinc etiam; Portionis Solidi $b\beta\tau$ magnitudo colligitur. Nam totum Solidum $= \frac{1}{16}R\mathcal{P}^2$; dempto ſegmento $Ab\beta\alpha = \frac{1}{4}aR\mathcal{P} - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: Relinquit Segmentum $\frac{1}{16}R\mathcal{P}^2 - \frac{1}{4}aR\mathcal{P} + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; Vel (ſumpto $\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P} - a$,) $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$. Quod ipſum in inquiſitione prius repertum erat. Quippe, Sumpto $AK = \tau\beta$, (adeoque reſtituto a pro α,) erit $\tau\beta b = AKb$, cujus magnitudo ſupra inventa eſt $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; ſeu $\frac{1}{4}efR$. Eſt enim, ef, hoc eſt $a - s$ in $a + s$, $= a^2 - s^2$.

L. Porro; Si ex Solido $Ab\beta\alpha = \frac{1}{4}aR\mathcal{P} - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: Auferatur Solidum $b\beta\alpha B$; Hoc eſt, $bB = a$, in Segmentum Semicirculi $VB\alpha = \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sb$ (per § F. prop. 15. quippe quod in BVA eſt a, v, idem in $BV\alpha$ eſt α, b; & s utrobique idem;) hoc eſt (propter $\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P} - a$, & $b = 2R - v$,) in $\frac{1}{4}R\mathcal{P} - \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$; Nempe $\frac{1}{4}aR\mathcal{P} - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, ſeu $\frac{1}{4}aR\mathcal{P} - \frac{1}{2}eaR - \frac{1}{2}asv$; Relinquitur Solidi portio $AbB = \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$: Seu ſumma rectangulorum omnium as ſolidum illud complentium; ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Aut etiam; Si, ex Semicylindri portione AKbB; hoc eſt, ex Semicirculi Segmento $ABV = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) in $bB = a$ ducto; hoc eſt, ex $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: auferatur Semicylindri portio $AbK = \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K,) reſtabit Semicylindri portio AbB, $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}s^2R + \frac{1}{2}asv$; ut prius.

M. Similiter de Momentis judicandum erit.

Nempe, Momentum Solidi AbK, reſpectu TA; idem eſt atque Momenta Omnium ABV Semicirculi Segmentorum illud complentium reſpectu ipſius (plani tangentis) TA: Hoc eſt, (per § L. prop. 15.) *Omn.* $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: ſeu *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a, (arithmetice proportionales uſque ad, a maximum,) $\frac{1}{2}a^2$ (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 := \frac{1}{4}a^2R^2$.

Item, Omnes s (eo ſpectantes,) ſunt ipſum $\alpha\beta v = vR$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}sR^2 := -\frac{1}{2}vR^3$.

Item, *Omnes* sv, ſunt ipſum AbK Solidum ex ductu rectarum, βv in bK; hoc eſt (per § I.) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}svR := \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}s^2R^2$.

Item, *Omn.* s^3: (per § V. prop. 13.) $=$ *Omn.* o^2R. Sunt autem *Omn.* o^2, hoc eſt, quadrata Ordinatim-applicatarum, Segmentum ABV complentium, ſeu *Omn.* s^2, ſumptis v arithmetice proportionalibus: *Duplum* Momenti Segmenti ABV (fig. 169.) reſpectu $A\alpha$: Hoc eſt (per § V. prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$: Adeoque *Omn.* o^2R: ($=$ *Omn.* s^3:) $= \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$: Et propterea *Omn.* $-\frac{1}{3}s^3 := -\frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2R^2 - \frac{1}{9}s^2vR$.

Ergo;

Ergo ; *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$: Hoc eſt, Momentum Solidi AbK, reſpectu TA ; eſt, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$. Fig. 169, 170.

Adeoque, propter ipſius magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R$, (per § K.) Diſtantia Centri gravitatis à TA, $R-\frac{8vR^2-4s^2R+4s^2v}{9a^2-9s^2}=R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9ef}$; & à $\tau\alpha$, $R+\frac{8vR^2-4s^2R+4s^2v}{9a^2-9s^2}=R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9ef}$; & propterea ejuſdem, reſpectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$.

Si autem Solidi hujus AbK momenta, ex reſpectivis Semicylindri AK$\beta\alpha$ momentis auferantur : Relinquuntur reſpectiva Solidi Ab$\beta\alpha$ momenta. Eſt autem Semicylindri hujus magnitudo (ex ductu Semicirculi AD$\alpha=\frac{1}{4}R\mathcal{P}$, in $\alpha\beta=a$,) $\frac{1}{4}aR\mathcal{P}$; Centrique gravitatis diſtantia à TA, vel $\tau\alpha$, AC vel C$\alpha=R$. Adeoque ipſius reſpectu TA, vel $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}aR^2\mathcal{P}$. Unde ſubductis, Solidi AbK momentis, modo traditis, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$; & $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi Ab$\beta\alpha$ momentum reſpectu TA, $\frac{1}{4}aR^2\mathcal{P}-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{5}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$; & reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2\mathcal{P}-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{13}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$: Hujuſque propterea Diſtantia Centri gravitatis (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aR\mathcal{P}-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R$, per § K.) à TA, $R+\frac{8vR^2-4s^2R+4s^2v}{9a\mathcal{P}-9a^2+9s^2}=R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9a\mathcal{P}-9ef}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{8vR^2-4s^2R+4s^2v}{9a\mathcal{P}-9a^2+9s^2}=R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9a\mathcal{P}-9ef}$.

Si vero eadem ſolidi AbK momenta, ex reſpectivis Segmenti Semicylindri AKbB, auferantur: habentur reſpectiva Momenta Solidi, AbB. Eſt autem ſegmenti ſemicirculi ABV magnitudo $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) quæ ducta in bB$=a$, exhibet magnitudinem ſegmenti Cylindri AKbB, $\frac{1}{2}eaR+\frac{1}{2}asv$: Centrique gravitatis diſtantia (utpote eadem quæ Segmenti Semicirculi ABV, per § C. prop. 5.) à TA, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à $\tau\alpha$, $R+\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Adeoque momentum reſpectu TA, $\frac{1}{2}eaR^2$ $(=\frac{1}{2}a^2R^2-\frac{1}{2}asR^2)+\frac{1}{2}asvR-\frac{1}{3}as^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2+\frac{1}{2}asvR+\frac{1}{3}as^3$; (eadem quæ plani ABV momenta, in a ducta.) Unde ſubductis reſpectivis ſolidi AbK momentis, modo exhibitis, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$, & $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi AbB, momentum reſpectu TA, (hoc eſt, *Omnia* asv, ſumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{1}{2}asR^2+\frac{5}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{2}asvR+\frac{1}{9}s^2vR-\frac{1}{3}as^3$; & reſpectu $\tau\alpha$, (hoc eſt, *Omnia* ash, ſumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{1}{2}asR^2+\frac{13}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{2}asvR-\frac{1}{9}s^2vR+\frac{1}{3}as^3$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv$, per § L.) Solidi AbB, diſtantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{8vR^2-4s^2R^2+4s^2vR-12as^3}{9a^2R-18asR+9s^2R+18asv}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{8vR^2-4s^2R^2+4s^2vR-12as^3}{9a^2R-18asR+9s^2R+18asv}=R-\frac{4v^2R^2+4s^2vR-12as^3}{9e^2R+18asv}$.

Totumque A$\tau\alpha$ Solidum, (ſive ſpectetur ut Ab$\beta\alpha$, ſive ut AbB, perinde eſt ;) momentum habet (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, $v=2R$, $s=0$,) reſpectu TA, $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}^2+\frac{4}{9}R^4$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}^2-\frac{4}{9}R^4$. Centrique gravitatis diſtantia à TA, eſt $R+\frac{64R^3}{9\mathcal{P}^2}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{64R^3}{9\mathcal{P}^2}$.

Porro ; eadem ABV Segmenta plana, Solidum AbK complentia ; ſeu, *Omnia*, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) ab Aα, diſtant ipſis bB$=a$ arcubus arithmetice proportionalibus: Adeoque eorundem omnium, hoc eſt ipſius AbK Solidi, Momentum reſpectu Aα, ſunt *Omn.* $\frac{1}{2}eaR+\frac{1}{2}asv$; ſeu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{2}asv$: Sumptis a arithmetice proportionalibus. N.

Sunt autem, *Omn.* $a^2:=\frac{1}{3}a^3$ (per prop. 1.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R:=\frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omn.* as: hoc eſt, Omnes s, trilineum $\alpha\beta v$ complentes, in a, eorundem

Fig. 170. ab Aα distantias ductæ; sunt ejusdem $\alpha\beta\upsilon$ momentum respectu Aα; hoc est (per § P, Q. prop. 17.) $-eR^2+av R$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}asR$: $=\frac{1}{2}eR^3-\frac{1}{2}av R^2$.

Item, *Omn.* asv: Sunt ipsum A b K præcedentis Solidi (ex ductu rectarum $\beta\upsilon$ in b K respective) momentum respectu Aα; hoc est, $-\frac{3}{4}eR^3+av R^2+\frac{1}{4}sv R^2-\frac{1}{2}as^2R$; per § I. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asv$: $=-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}av R^2+\frac{1}{8}sv R^2-\frac{1}{4}as^2R$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{2}asv$: Hoc est ipsius A b K Solidi Momentum respectu Aα; est, $\frac{1}{8}eR^3$ $(=\frac{1}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3)$ $+\frac{1}{8}sv R^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{4}as^2R$.

Hoc itaque per ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R$ (per § K.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2+3sv R+4a^3-6as^2}{6a^2-6s^2=6ef}$.

Illudque Solidi A b K momentum, ex momento Semicylindri A K $\beta\alpha$, Subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{4}aR\mathcal{P}$ (§ M. ostensa) in $\frac{1}{2}a$ distantiam Centri gravitatis ab Aα (per prop. 2.) ducta; hoc est, ex $\frac{1}{8}a^2R\mathcal{P}$ subductum: Relinquit Solidi A b $\beta\alpha$ momentum respectu ejusdem Aα, $\frac{1}{8}a^2R\mathcal{P}-\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}sv R^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}as^2R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aR\mathcal{P}-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R$, per § K.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3a^2\mathcal{P}-3eR^2-3sv R-4a^3+6as^2}{6a\mathcal{P}-6a^2+6s^2=6a\mathcal{P}-6ef}$.

Idemque Solidi A b K momentum, ex momento Solidi A K b B, subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{2}eaR+\frac{1}{2}asv$ (§ M. ostensa) in $\frac{1}{2}a$ (Distantiam Centri gravitatis ab Aα) ducta; hoc est, ex $\frac{1}{4}ea^2R+\frac{1}{4}a^2sv$: Relinquit Momentum Solidi A b B, respectu ejusdem Aα, (seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2s$: eo spectantia, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}sv R^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}ea^2R+\frac{1}{4}as^2R+\frac{1}{4}a^2sv$, seu (propter $e=a-s$,) $-\frac{1}{8}aR^3+\frac{1}{8}sR^3-\frac{1}{8}sv R^2+\frac{1}{12}a^3R-\frac{1}{4}a^2sR+\frac{1}{4}as^2R+\frac{1}{4}a^2sv$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, est $\frac{-3eR^3-3sv R^2+2a^3R-6a^2sR+6as^2R+6a^2sv}{6a^2R-12asR+6s^2R\ (=6e^2R)+12asv}$.

Totumque A$\tau\alpha$ solidum quod spectat; (sive consideretur ut A b $\beta\alpha$, sive ut A b B, perinde est,) Momentum ejus respectu Aα (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, $v=2R$, & $s=0$,) est $\frac{1}{96}R\mathcal{P}^3-\frac{1}{16}R^3\mathcal{P}$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{6}\mathcal{P}-\frac{R^2}{\mathcal{P}}$.

O. Denique; Eadem A B V segmenta plana, Solidum A b K fig. 170. complentia Centra gravitatis habent tantundem à plano A$\tau\alpha$ distantia, quantum ab Aα distant eorundem Centra in fig. 169. Eorumque omnium respectu Aα fig. 169. momenta; Hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$: (per § R. V. prop. 15.) sunt ipsum solidi A b K momentum respectu plani A$\tau\alpha$ erecti.

Sunt autem *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) Hoc est, arcuum arithmetice proportionalium Sinus versi, eo spectantes; idem atque A b K planum; hoc est, eR, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2$: $=\frac{1}{3}eR^3$.

Et, *Omnia* s^2, eo spectantia; *Duplum* Momenti ipsius $\alpha\beta\upsilon$ respectu $\tau\alpha$; hoc est, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}sv R$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{6}s^2R$: $=-\frac{1}{12}eR^3-\frac{1}{12}sv R^2$.

Item, *Omn.* s^2v; sunt *Duplum* Momenti Solidi A b K præcedentis, (ex ductu rectarum $\beta\upsilon$, in b K respective,) respectu Plani (erecti) A$\tau\alpha$; seu $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}sv R^2-\frac{1}{3}s^3R$; (per § I. prop. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v$: $=\frac{1}{12}eR^3+\frac{1}{12}sv R^2-\frac{1}{18}s^3R$.

Ergo *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$: $=\frac{1}{3}eR^3-\frac{1}{18}s^3R=\frac{1}{3}aR^3-\frac{1}{3}sR^3-\frac{1}{18}s^3R$. Quod itaque est Solidi A b K momentum respectu erecti plani A$\tau\alpha$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R=\frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, est $\frac{12aR^2-12sR^2-2s^3}{9a^2-9s^2}=\frac{12eR^2-2s^3}{9ef}$.

Illudque

Illudque Solidi A b K momentum; ex Semicylindri A K β α momento reſpectivo ſubductum; hoc eſt (propter magnitudinem $\frac{1}{4} a R \mathcal{P}$, atque Diſtantiam Centri gravitatis à plano A τ α, eandem quæ Semicirculi à ſua diametro, $\frac{8 R^2}{3 \mathcal{P}}$, per § Q. prop. 15.) ex $\frac{2}{3} a R^3$: Relinquit Momentum Solidi A b β α reſpectu plani A τ α (erecti,) $\frac{2}{3} a R^3 - \frac{1}{3} e R^3 + \frac{1}{18} s^3 R = \frac{1}{3} a R^3 + \frac{1}{3} s R^3 + \frac{1}{18} s^3 R = \frac{1}{3} f R^3 + \frac{1}{18} s^3 R$. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{4} a R \mathcal{P} - \frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{4} s^2 R = \frac{1}{4} a R \mathcal{P} - \frac{1}{4} e f R$, per § K.) Diſtantia Centri gravitatis à plano A τ α, $\frac{12 f R^2 + 2 s^3}{9 a \mathcal{P} - 9 e f} = \frac{12 a R^2 + 12 s R^2 + 2 s^3}{9 a \mathcal{P} - 9 a^2 + 9 s^2}$. Fig. 169, 170.

Idemque Solidi A b K momentum; ex Segmenti Semicylindri A K b B momento reſpectivo ſubductum; hoc eſt (propter magnitudinem $\frac{1}{2} e a R + \frac{1}{2} a s v$, & diſtantiam Centri gravitatis à plano A τ α, eandem quæ Segmenti Semicirculi A B V à diametro A α, $\frac{v^2 R + s^2 v}{3 e R + 3 s v}$, per § R. prop. 15.) ex $\frac{1}{6} a v^2 R + \frac{1}{6} a s^2 v = \frac{1}{3} a v R^2 - \frac{1}{6} a s^2 R + \frac{1}{6} a s^2 v$: Relinquit Solidi A b B momentum reſpectu ejuſdem plani A τ α, (hoc eſt, *Omn.* $\frac{1}{2} a s^2$: ſumptis v arithmetice proportionalibus,) $- \frac{1}{3} e R^3 + \frac{1}{6} a v^2 R + \frac{1}{18} s^3 R + \frac{1}{6} a s^2 v = - \frac{1}{3} a R^3 + \frac{1}{3} s R^3 + \frac{1}{3} a v R^2 - \frac{1}{6} a s^2 R + \frac{1}{18} s^3 R + \frac{1}{6} a s^2 v$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} a s v = \frac{1}{4} e^2 R + \frac{1}{2} a s v$, per § L.) Diſtantia Centri gravitatis à plano A τ α, $\frac{- 12 e R^3 + 12 a v R^2 - 6 a s^2 R + 2 s^3 R + 6 a s^2 v}{9 e^2 R + 18 a s v}$.

Totiuſque A τ α Solidi, (ſive conſideretur ut A b β α, ſive ut A b B,) Momentum reſpectu A τ α plani (propter $a = \frac{1}{2} \mathcal{P}$, & $v = 2 R$, & $s = 0$,) $\frac{1}{6} R^3 \mathcal{P}$; Diſtantia Centri gravitatis ab A τ α plano, $\frac{8 R^2}{3 \mathcal{P}}$. Nempe tantundem atque Semicylindri A K δ α: Tantundem utique ponderat reſpectu A τ α plani, atque tantundem inde diſtat; ſive ſit in ſitu A τ α, ſive intelligatur pars d δ τ in ſitum d K A replicata Semicylindrum complere.

Sed & eadem quæ jam Traduntur Solidi A b B momenta, ſimiliter haberi poterunt, ſi, ex Solidi A B β α momentis, auferantur Solidi b β α B momenta reſpectiva. P.

Eſt autem Solidi b β α B magnitudo, $\frac{1}{4} a R \mathcal{P} - \frac{1}{2} a^2 R + \frac{1}{2} a s R - \frac{1}{4} a s v$, (ut § L. oſtenſum eſt;) ejuſque Centri gravitatis ab A α diſtantia, $\frac{1}{2} a$; Atque à τ α, & T A, quantum inde diſtat Centrum gravitatis Segmenti Semicirculi B V α; atque ab A τ α plano, quantum ab A α diſtat ipſius B V α plani Centrum gravitatis; (eſt enim, per prop. 1. & 5 hujus, in medio rectæ centra gravitatis oppoſitarum baſium conjungente:) Hoc eſt, à τ α, $R - \frac{2 s^3}{3 a R - 3 s R + 3 s h} = R - \frac{4 s^3}{3 R \mathcal{P} - 6 a R + 6 s R - 6 s v}$; à T A, $R + \frac{4 s^3}{3 R \mathcal{P} - 6 a R + 6 s R - 6 s v}$; à plano A τ α, $\frac{h^2 R + s^2 h}{3 a R - 3 s R + 3 s h} = \frac{8 R^3 - 4 v R^2 + 2 s^2 R - 2 s^2 v}{3 R \mathcal{P} - 6 a R + 6 s R - 6 s v}$: Adeoque momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8} a^2 R \mathcal{P} - \frac{1}{4} a^3 R + \frac{1}{4} a^2 s R - \frac{1}{4} a^2 s v$; reſpectu τ α, $\frac{1}{4} a R^2 \mathcal{P} - \frac{1}{2} a^2 R^2 + \frac{1}{2} a s R^2 - \frac{1}{2} a s v R - \frac{1}{3} a s^3$; reſpectu T A, $\frac{1}{4} a R^2 \mathcal{P} - \frac{1}{2} a^2 R^2 + \frac{1}{2} a s R^2 - \frac{1}{2} a s v R + \frac{1}{3} a s^3$; reſpectu plani A τ α, $\frac{2}{3} a R^3 - \frac{1}{3} a v R^2 + \frac{1}{6} a s^2 R - \frac{1}{6} a s^2 v$.

Hæc itaque momenta, momentis reſpectivis Solidi A b β α ſubducta, Relinquunt Solidi A b B momenta reſpectiva: eadem quæ prius exhibentur.

Eademque Solidi b β α B momenta, momentis reſpectivis A b B addita; exhibebunt eadem quæ prius momenta Solidi A b β α reſpectiva.

Solidoque b β τ, eadem applicantur omnia quæ de b K A traduntur: Subſtitutis ubique α pro a, h pro v, τ α pro T A, & τ T pro A α. Similiter enim ipſis τ α, τ T, adjacet b β τ; atque b K A, ipſis A T, A α. Q.

Fig. 169, 170. R. Exhibuimus itaque, in utroque Solido; tum eo ſcilicet quod ex Figuræ Sinuum verſorum A τ α rectis b β, in β v, reſpectivas Figuræ Sinuum Rectorum rectas, ductis; tum eo quod ex Figuræ Arcuum A τ α rectis b B, in B V, reſpectivas Semicirculi rectas, ductis componitur; Eorumque partibus; tum Magnitudines, tum Momenta reſpectu planorum aliquot expoſitorum, & Centrorum gravitatis ab illis planis diſtantias. Et propterea, (per prop. 26. cap. præced.) propter exhibitas Centrorum gravitatis à tribus ſaltem planis, quorum ne duo quidem ſunt invicem parallela, (puta à plano A τ α, & duobus aliis quæ huic in rectis A α, τ α, ad rectos angulos inſiſtunt,) exhibentur ipſa gravitatis Centra. Quæque de his dicta ſunt; facile erit ad alia ampliare.

Et quidem, quæ de Solidis his tradidimus; eadem ad Protracta & Contracta facile transferuntur. Manentibus utique, (ut in propoſitione præcedente) A α = 2 R, adeoque A V = v, & V α = b: Si ſit τ α, major (ut in Solido Protracto) vel minor (ut in Contracto) quam $\frac{1}{2}P$, (reliquæque his parallelæ ſimiliter vel protractæ vel contractæ;) Quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a ſubſtituenda erit alia quantitas, quæ ad illam ſit in eadem ratione qua eſt τ α, ad $\frac{1}{2}P$.

Quæque de ſolidis figuram Sinuum Rectorum unius quadrantis α δ κ fig. 170. reſpicientibus, dicta ſunt; eadem omnia, ad ſolida figuram chordarum ſeu ſubtenſarum totius Semicirculi, ut A δ κ fig. 183. accommodanda erunt: Propter chordas ſubtenſarum in ſemicirculo, ubique duplas ſinuum rectorum arcuum dimidiatorum; adeoque figuras α δ κ fig. 170. & A δ κ fig. 183. omnino ſimiles. Qua de re plura videantur ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

PROP. XIX.

PARS PRIMA.

A. *Ungula* Figuræ Sinuum verſorum Arcuumve A τ α inſiſtens, Aciem habens τ α, eſt ad correſpondentem Ungulam Semicirculi, ut 3 ad 2; ſeu *Seſquialtera.*

Ejuſque *Momentum* reſpectu aciei ſuæ; eſt *Seſquitertium* Momenti Ungulæ reſpectivæ Semicirculo A D α inſiſtentis, aciem habentis τ α, reſpectu aciei ſuæ; ſeu ut 4 ad 3.

Idemque in reſpectivis Portionibus obtinet: puta, *Ungula* Quadrilineo b β α A inſiſtens, (aciem habens τ α) eſt *Seſquialtera* Ungulæ reſpectivæ, Sectori B α A inſiſtentis; ſeu ur 3 ad 2. Ejuſque *Momentum*, reſpectu aciei ſuæ τ α, eſt *Seſquitertium* momenti reſpectivæ Ungulæ inſiſtentis Sectori B α A, reſpectu aciei τ α; ſeu ut 4, ad 3.

Atque hinc, eadem reſpective determinantur, tum quoad Magnitudines, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Figuræ Sinuum verſorum, ejuſve portionibus, inſiſtentibus; atque in illis quæ Semicirculo, ejuſve portionibus reſpectivis inſiſtunt.

B. Nempe (retentis Symbolis ut in propoſitionibus præcedentibus,) Semiquadrantalis Ungulæ, Trilinei A τ α, aciem habentis τ α, Magnitudo $\frac{3}{8}R^2P$; momentum reſpectu τ α, $\frac{5}{12}R^3P$; reſpectu T A, $\frac{1}{3}R^3P$; di-

G. ſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{10}{9}R$; à T A, $\frac{8}{9}R$: Momentum reſpectu A α, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$; reſpectu T τ, $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$; a T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$.

B. Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{5}{8}R^2P$; momentum reſpectu τ α, $\frac{1}{3}R^3P$; reſpectu T A, $\frac{11}{12}R^3P$; diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{8}{15}R$; à T A,

à T A, $\frac{22}{15}R$: Momentum reſpectu Aα, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$; reſpectu T$\tau$, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{4}\mathcal{P}-\frac{16R^2}{5\mathcal{P}}$; à T$\tau$, $\frac{1}{4}\mathcal{P}+\frac{16R^2}{5\mathcal{P}}$. Fig. 169, 170. G.

Aciemque habentis Aα; Magnitudo $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2-2R^3$; momentum reſp. $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$; reſp. T A, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2-16R^2}$; à T A, $\frac{5}{4}R+\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2-16R^2}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{24}R\mathcal{P}^3-R^3\mathcal{P}$; reſpectu T$\tau$, $\frac{1}{48}R\mathcal{P}^3$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}\mathcal{P}-\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2-48R^2}$; à T$\tau$, $\frac{1}{6}\mathcal{P}+\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2-48R^2}$. G. K.

Aciemque habentis Tτ; Magnitudo, $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2+2R^3$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$; reſpectu T A, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R+\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2+16R^2}$ à T A, $\frac{5}{4}R-\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2+16R^2}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{48}R\mathcal{P}^3$, reſpectu T$\tau$, $\frac{1}{24}R\mathcal{P}^3+R^3\mathcal{P}$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{6}\mathcal{P}-\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2+48R^2}$; à T$\tau$, $\frac{1}{3}\mathcal{P}+\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2+48R^2}$. G. K.

Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Quadrilinei A b$\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{3}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R$; reſpectu T A, $\frac{2}{3}fR^3+\frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R+\frac{4sb^2}{27fR+9sb}$; à T A, $\frac{8}{9}R-\frac{4sb^2}{27fR+9sb}$: Momentum reſpectu b$\beta$, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; reſpectu A$\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis a bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^2-5asR+s^2R+asv}{6aR+10sR-2sv}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-5asR+s^2R+asv}{6aR+10sR-2sv}$. C. F.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{5}{4}fR^2-\frac{1}{4}sbR$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{3}fR^3+\frac{1}{9}s^3R$; reſpectu T A, $\frac{11}{6}fR^3-\frac{1}{2}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R+\frac{24sbR+20s^3}{225fR-45sb}$; à T A, $\frac{22}{15}R-\frac{24sbR+20s^3}{225fR-45sb}$: Momentum reſpectu b$\beta$, $\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; reſpectu A$\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{3}{4}asR^2+\frac{1}{4}asvR$; diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^2-s^2R-3asR-asv}{10aR+6sR+2sv}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-s^2R-3asR-asv}{10aR+6sR+2sv}$. C. F.

Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; reſpectu T A, $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{2vR^2-4asR+s^2R+2asv}{4a^2+8as-8vR}$; à T A, $\frac{5}{4}R+\frac{2vR^2-4asR+s^2R+2asv}{4a^2+8as-8vR}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $2eR^3-2avR^2+\frac{1}{3}a^3R+a^2sR$; reſpectu b$\beta$, $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{3}a^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{12eR^2-12avR+2a^3+6a^2s}{3a^2+6as-6vR}$; à b$\beta$, $\frac{-12eR^2+6avR+a^3}{3a^2+6as-6vR}$. F. K.

Aciemque habentis bβ; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R+vR^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; reſpectu T A, $\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; diſ- F. F. F. F. F. 3 ſtantia

Fig. 169, 170. K. ſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R+\frac{2vR+s^2}{4a^2+8vR}R$; à TA, $\frac{1}{4}R-\frac{2vR+s^2}{4a^2+8vR}R$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$; reſpectu b$\beta$, $2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $a-\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$; à b$\beta$, $\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei AbK, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{6}eR^2+\frac{1}{4}svR$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{6}eR^3+\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{5}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{3}{5}eR^3-\frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{22}{15}R+\frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$; à TA,

H. $\frac{8}{15}R-\frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$: Momentum reſpectu βbK, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}vR^3+\frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu A$\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}asR^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{5}{4}vR^3-\frac{1}{8}v^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a-\frac{10vR^2-v^2R-5asR+asv}{10eR+2sv}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a+\frac{10vR^2-v^2R-5asR+asv}{10eR+2sv}$.

D. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{3}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{5}eR^3-\frac{1}{9}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{1}{6}eR^3-\frac{1}{12}svR^2+\frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Cen-

H. tri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{9}R+\frac{4sv^2}{27eR-9sv}$; à TA, $\frac{10}{9}R-\frac{4sv^2}{27eR-9sv}$: Momentum reſpectu βbK, $\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{3}{4}vR^3-\frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu A$\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{3}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{3}{4}vR^3+\frac{1}{8}v^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a+\frac{3asR+asv-6vR^2-v^2R}{6eR-2sv}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{3asR+asv-6vR^2-v^2R}{6eR-2sv}$.

H. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$; momentum reſpectu TA, $\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{3}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{3}{4}vR^3+\frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}asR^2+\frac{5}{4}vR^3+\frac{1}{4}asvR-\frac{1}{8}v^2R^2$; diſtantia Centri gravita-

L. tis à TA, $\frac{3}{4}R+\frac{v^2R-2asv}{4a^2-8as+8vR}$; à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{v^2R-2asv}{4a^2-8as+8vR}$: Momentum reſpectu bK, $2eR^3-avR^2+\frac{1}{6}a^3R$; reſpectu A$\alpha$, $-2eR^3+2avR^2+\frac{1}{3}a^3R-a^2sR$; diſtantia Centri gravitatis à bK, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6as+6vR}$; ab A$\alpha$, $\frac{-12eR^2+12avR+2a^3-6a^2s}{3a^2-6as+6vR}$.

H. Aciemque habentis βbK; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; momentum reſpectu TA, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}vR^3-\frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}vR^3+\frac{1}{8}v^2R^2$; diſtantia Centri

I. gravitatis à TA, $\frac{3}{4}R-\frac{v^2R}{4a^2-8vR}$; à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R+\frac{v^2R}{4a^2-8vR}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $2eR^3-avR^2+\frac{1}{6}a^3R$; reſpectu bK, $-2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6vR}$; à bK, $\frac{-12eR^2+2a^3}{3a^2-6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei b$\beta\tau$, aciem habentis TA; Magnitudo, $\frac{5}{4}\alpha R^2-\frac{5}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$; momentum reſpectu TA, $\frac{11}{6}\alpha R^3-\frac{11}{6}sR^3+\frac{1}{3}shR^2+\frac{1}{9}s^3R$, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}\alpha R^3-\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{5}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{22}{15}R+\frac{24shR+20s^3}{225\alpha R-225sR+45sh}$; à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R-\frac{24shR+20s^3}{225\alpha R-225sR+45sh}$: Momen-

H. tum reſpectu bβ, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2-\frac{5}{4}hR^3+\frac{1}{8}h^2R^2$; reſpectu T$\tau$, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2-\frac{5}{4}\alpha sR^2+\frac{1}{4}\alpha shR+\frac{5}{4}hR^3-\frac{1}{6}h^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}\alpha-$

$\frac{1}{2}\alpha - \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; à T$\tau$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$. Fig. 169, 170.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; momentum reſpectu TA, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}\alpha R^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{8}{9}R + \frac{4sh^2}{27\alpha R - 27sR - 9sh}$; à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R - \frac{4sh^2}{27\alpha R - 27sR - 9sh}$: Momentum reſpectu b$\beta$, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$; reſpectu T$\tau$, $\frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$; à T$\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$. D. H.

Aciemque habentis Tτ; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8as + 8hR}$; à TA, $\frac{5}{4}R - \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8as + 8hR}$: Momentum reſpectu b$\beta$, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha hR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R$; reſpectu T$\tau$, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + 2\alpha hR^2 + \frac{1}{3}\alpha^3R - \alpha^2sR$; diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha hR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6as + 6hR}$; à T$\tau$, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 12\alpha hR + 2\alpha^3 - 6\alpha^2s}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6hR}$. H. L.

Aciemque habentis bβ; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{h^2R}{4\alpha^2 - 8hR}$; à TA, $\frac{5}{4}R + \frac{h^2R}{4\alpha^2 - 8hR}$: Momentum reſpectu T$\tau$, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha hR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R$; reſpectu b$\beta$, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + \frac{1}{3}\alpha^3R$; diſtantia Centri gravitatis à Tτ, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha hR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6hR}$; à b$\beta$, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 2\alpha^3}{3\alpha^2 - 6hR}$. H. L.

Ungulæ Parallelogrammi b$\beta\alpha$B, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ah^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}h$; à TA, $2R - \frac{2}{3}h$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3$; reſpectu TA, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$: Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, ſeu bβ, $\frac{1}{2}a$; momentum reſpectu Aα, vel bβ, $\frac{1}{4}a^2h^2$. E. I.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $2abR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$; momentum reſpectu TA, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, ſeu b$\beta$, $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2$; diſtantia Centri gravitatis, ab Aα, ſeu bβ, $\frac{1}{2}a$. E. I.

Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2h$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; à TA, $2R - \frac{1}{2}h$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; reſpectu TA, $ah^2R - \frac{1}{4}a^2h^2$: Diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{2}{3}a$; ab Aα, $\frac{2}{3}a$; momentum reſpectu bβ, $\frac{1}{6}a^3h$; reſpectu Aα, $\frac{1}{3}a^3h$. I. M.

Aciemque habentis bβ; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2h$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; à TA, $2R - \frac{1}{2}h$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; reſpectu TA, $ah^2R - \frac{1}{4}a^2h^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}a$; à bβ, $\frac{2}{3}a$; Momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{6}a^3h$; reſpectu bβ, $\frac{1}{3}a^3h$. I. M.

Eadem-

I. Eademque ab Ungulis b β α B, ad Ungulas b K A B, transferentur, fubſtitutis ubique v pro h, & T A pro $\tau\alpha$, & vice verſa.

Fig. 169, 170.

Ungulæ Segmenti b B A, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR-\frac{1}{2}ah^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{5}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}ah^3$; reſpectu T A, $\frac{2}{3}fR^3-ah^2R+\frac{1}{5}s^3R+\frac{1}{3}ah^3$; reſpectu b B, $\frac{5}{6}fR^3-\frac{3}{4}ahR^2-\frac{1}{4}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sh^2R+\frac{1}{6}ah^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{30fR^3+18shR^2-4s^3R-12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$; à T A, $\frac{24fR^3-36ah^2R+4as^3R+12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$; à b B,

I. $\frac{30fR^3+18shR^2-4s^3R-12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}-h=v-\frac{24fR^3-36ah^2R+4s^3R+12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$: Momentum reſpectu b β, $-\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu A α, $-\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; diſtantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$.

E. Aciemque habentis T A; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; Momentum reſpectu T A, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R^3+\frac{1}{3}as^2v$; reſpectu b B, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{-30eR^3+48avR^2+18svR^2-24as^2R-4s^3R-12as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$; à $\tau\alpha$, $\frac{-24eR^3+24avR^2-12as^2R+4s^3R+12as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$; à b B,

I. $\frac{30eR^3-3avR^2+27svR^2-12as^2R-5s^3R-6as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$: Momentum reſpectu b β, $-\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu A α, $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$; diſtantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-s^2R^2-3asR^2-asvR}{-6eR^2+8avR+2svR-4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-s^2R^2-3asR^2-asvR}{-6eR^2+8avR+2svR-4as^2}$.

E. Aciemque habentis b B; Magnitudo, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}eR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$; reſpectu T A, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; reſpectu b B, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{11}{18}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{24eR^3+3avR^2+27svR^2-24as^2R+5s^3R+6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$; à T A, $\frac{30eR^3-3avR^2+27svR^2-12as^2R-5s^3R-6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$; à

I. b B, $\frac{-30eR^3+30avR^2+12as^2R-22s^3R-12as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$: Momentum reſpectu b β, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu A α, $\frac{3}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{3}{4}asR^2+\frac{3}{4}asvR-\frac{1}{4}a^2s^2$; diſtantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-7s^2R^2+3asR^2-asvR}{6eR^2+6svR-4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-7s^2R^2+3asR^2-3asvR}{6eR^2+6svR-4as^2}$.

Aciem-

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R+\frac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$; à bB, $\frac{5}{4}R-b-\frac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$; momentum reſpectu bB, $\frac{3}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{3}{4}asR^2+\frac{3}{4}asvR-\frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum reſpectu b β, $-2eR^3+avR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{6}a^3v$; reſpectu A$\alpha$, $2eR^3-2avR^2-\frac{1}{3}a^3R+a^2sR+\frac{1}{3}a^3v$; diſtantia Centri gravitatis à b β, $\frac{-12eR^3+6avR^2-a^3R+a^3v}{-3a^2R+6asR-6vR^2+3a^2v}$; ab A$\alpha$, $\frac{12eR^3-12avR^2-2a^3R+6a^2sR+2a^3v}{-3a^2R+6asR-6vR^2+3a^2v}$. I. Fig. 169, 170. M.

Aciemque habentis b β; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{2vR^3+a^2vR-s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8vR^2+4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R+\frac{2vR^3+a^2vR-s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8vR^2+4a^2v}$; à bB, $\frac{5}{4}R-b-\frac{2vR^3+a^2vR-s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8vR^2+4a^2v}$; momentum reſpectu bB, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $-2eR^3+avR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{6}a^3v$; reſpectu b β, $2eR^3-\frac{1}{3}a^3R+\frac{1}{3}a^3v$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-12eR^3+6avR^2-a^3R+a^3v}{-3a^2R+6vR^2+3a^2v}$; à b β, $\frac{12eR^3-2a^3R+2a^3v}{-3a^2R+6vR^2+3a^2v}$. I. M.

Pars Secunda.

Eademque in Ungulis Figuram Sinuum Rectorum, ejuſque partes ſpectantibus; determinantur. N.

Nempe (retentis ſymbolis ut prius;)

Ungulæ $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo $\frac{1}{6}R^2\mathcal{P}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{5}R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{32R^2}{9\mathcal{P}}$; à T$\tau$, vel A$\alpha$, $\frac{1}{4}\mathcal{P}$; momentum reſpectu Tτ, vel Aα, $\frac{1}{32}R^2\mathcal{P}^2$. N.

Aciemque habentis Tτ, vel Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2\mathcal{P}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2\mathcal{P}^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$: Momentum reſpectu Aciei ſuæ, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}^2-4R^4$; reſpectu extremi oppoſiti, $4R^4$; diſtantia Centri gravitatis ab acie ſua, $\frac{1}{2}\mathcal{P}-\frac{8R^2}{\mathcal{P}}$; ab oppoſito extremo, $\frac{8R^2}{\mathcal{P}}$. N. O.

Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{16}R^2\mathcal{P}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{5}R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{32R^2}{9\mathcal{P}}$: Momentum N. P.

Fig. 169, 170. reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{128}R^2P^2-\frac{1}{8}R^4$; reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2+\frac{1}{8}R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{1}{8}P-\frac{2R^2}{P}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{8}P+\frac{2R^2}{P}$.

O. Aciemque habentis $\delta\kappa$; Magnitudo, $\frac{1}{4}PR^2-R^3$; momentum reſpectu Aα, $2R^4-\frac{1}{4}R^3P$; reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2-2R^4$; diſtantia Centri gra-

P. vitatis ab Aα, $\frac{8R^2-RP}{P-4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2-32R^2}{4P-16R}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2-\frac{1}{8}R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P+\frac{1}{8}R=\frac{P^2-16R^2}{32P-128R}$.

O. Aciemque habentis Aα; magnitudo, R^3; momentum reſpectu $\delta\kappa$, $2R^4-\frac{1}{4}R^3P$; reſpectu Aα, $\frac{1}{2}R^3P-2R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$,

P. $2R-\frac{1}{4}P$; ab Aα, $\frac{1}{2}P-2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2+\frac{1}{8}R^4$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R+\frac{P^2}{128R}$.

N. Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}sv R$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{9}v^2R^2+\frac{1}{5}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis

P. à $\tau\alpha$, $\frac{4v^2R+4s^2v}{9eR+9sv}$: Momentum reſpectu $\beta\upsilon$, $\frac{1}{8}efR^2$; reſpectu Aα, $\frac{1}{8}a^2R^2-\frac{1}{4}asR^2+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR=\frac{1}{8}e^2R^2+\frac{1}{4}asvR$; diſtantia Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{efR}{2eR+2sv}$; ab Aα, $\frac{e^2R+2asv}{2eR+2sv}$.

O. Aciemque habentis $\beta\upsilon$; Magnitudo, eR^2; momentum reſpectu Aα, $2vR^3-asR^2$; reſpectu $\beta\upsilon$, $a^2R^2-2vR^3$; diſtantia Centri gravitatis

P. ab Aα, $\frac{2vR-as}{e}$; à $\beta\upsilon$, $\frac{a^2-2vR}{e}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}efR^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}f$.

O. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-eR^2+avR$; momentum reſpectu $\beta\upsilon$, $2vR^3-asR^2$; reſpectu Aα, $-a^2R^2+2asR^2+a^2vR-2vR^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2-asR}{-eR+av}$; ab Aα, $a-\frac{2vR^2-asR}{-eR+av}$: Mo-

P. mentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}e^2R^2+\frac{1}{4}asvR$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{e^2R+2asv}{-8eR+8av}$.

Q. Adeoque in expoſitis Ungulis, tum quæ figuram Sinuum Verſorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, earumque partes ſpectant; determinavimus tum Magnitudines & Momenta, tum & ipſa gravitatis Centra.

Quæque de Ungulis dicta ſunt, ad ſolida converſione (perfecta vel imperfecta) deſcripta, facile transferentur.

Quodque in expoſitis factum eſt, ad alias portiones facile ampliabitur.

R. Quæque de Ungulis, Solidiſque converſione factis, ex his figuris oriundis traduntur; ad ea quæ ex Protractis Contractiſve figuris ſimiliter oriuntur facile accommodantur.

Et quæ de Solidis figuram Sinuum rectorum unius quadrantis traduntur; eadem ad Solida figuram Chordarum ſemicirculi ſimiliter reſpicientia, transferentur.

A. DIſtributis, (ut ad propoſitiones præcedentes,) tum Semicirculo A Dα, in Sectores ſeu Triangula; tum Figura Sinuum Verſorum A$\tau\alpha$, in Quadrilinea ſeu Parallelogramma, Sectoribus illis ſeu Triangulis correſpondentia: Intelligatur, utrique inſiſtere, Semiquadrantalis Ungula, aciem habens $\tau\alpha$.

Quarum quidem Ungularum, ea quæ vel toti ſemicirculo, vel ipſius ſectori ut BαA, inſiſtit; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis ſeu Pyramidulis, minutis

minutis illis Triangulis (ut αB, ſeu $Y\alpha P$, &c.) incumbentibus: quarum communis vertex ſit α punctum; Baſeſque ſuper Triangulorum illorum baſibus (ut YP, &c.) erectæ altitudines habeant ipſis $V\alpha$ reſpectivis æquales. Fig. 169, 170.

Quæque Trilineo ſive toti, ſive ipſius Portioni, ut $b\beta\alpha A$, (quæ Sectori $B\alpha A$ reſpondet) inſiſtit; ex totidem Ungulis, quæ reſpectivis Parallelogrammis, βb, ſeu $y\delta\xi p$, &c. incumbunt; acies habentibus in $\tau\alpha$ recta continue jacentes, altitudines vero ſuper ipſis ybp parallelogrammorum baſibus (pro ſemiquadrantalis ungulæ ratione) ipſis $V\alpha$ (reſpective) earundem à $\tau\alpha$ diſtantiis æquales. Quæ quidem Ungulæ, ſunt Cunei, ſeu Priſmata baſibus triangularibus (ipſis δy, ξp inſiſtentibus) interjecta.

Sunt autem hæc Minuta Priſmata, (utpote Semiquadrantales Ungulæ, parallelogrammorum quibus incumbunt, momentis reſpectu $\tau\alpha$, æquales, ſeu Parallelepipedorum dimidia;) Pyramidularum illarum (reſpectivis Triangulis incumbentium, horumque momentis reſpectivis æqualium,) tum ſingula ſingulorum, tum omnia omnium, Seſquialtera, (per § C. prop. 17.) ſeu ut 3 ad 2. (& quidem Pyramis illa, eſt ad Parallelepipedum ſuper eadem baſe æque altum, ut 1 ad 3; Cuneus vero, ut 1 ad 2: Eſtque $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ut 3 ad 2.)

Cunei vero ſeu Priſmatis cujuſque, Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ (intellige, perpendiculare planum ſuper $\tau\alpha$ erectum,) utpote eadem quæ eſt baſium Triangularium quibus interjacet (per prop. 5. hujus;) eſt ad diſtantiam inde Centri gravitatis Pyramidis correſpondentis (æque altæ) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, (per prop. 6. hujus.) Hoc eſt, ut 8 ad 9.

Ergo; (propter $\frac{3}{2}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{3}$) Momentum Ungulæ ſeu Priſmatis Parallelogrammo, ut βb, incumbentis; ad momentum correſpondentis Ungulæ ſeu Pyramidis incumbentis Triangulo, ut αB; (reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$;) eſt ut 4 ad 3, ſeu Seſquitertium. Et ſic ubique.

Eſt itaque illius, quæ ex Priſmatis componitur, Ungulæ, ſive toti $A\tau\alpha$ Trilineo, ſive ipſius Portioni, ut $b\beta\alpha A$ vel $b\beta\delta d$, vel $b\beta\tau$, &c. inſiſtentis momentum; ad illius, quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ, ſive toti Semicirculo, ſive ipſius correſpondenti ſectori, $B\alpha A$, vel $B\alpha D$, vel ſegmento $\alpha B\alpha$, inſiſtentis momentum; ut 4 ad 3, ſeu Seſquitertium.

Eſt autem toti Semicirculo inſiſtentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$; $\frac{5}{16}R^3\mathcal{P}$; (per § T. prop. 16.) Adeoque Trilineo $A\tau\alpha$ inſiſtentis Ungulæ, (aciem habentis $\tau\alpha$,) momentum reſpectu $\tau\alpha$, (utpote iſtius Seſquitertium) $\frac{5}{12}R^3\mathcal{P}$. Et (propter magnitudinem $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$, per § C. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R$: Adeoque, à TA, $\frac{8}{9}R$; ejuſque momentum reſpectu TA, $\frac{1}{3}R^3\mathcal{P}$. B.

Eademque momenta ex Ungulæ toti Parallelogrammo $AT\tau\alpha$ inſiſtentis momentis ſubducta, exhibent (mutatis mutandis) momenta Ungulæ aciem habentis TA; Nempe momentum Ungulæ totius Parallelogrammi $AT\tau\alpha$ (propter $A\alpha=2R$, & $\tau\alpha$ vel $TA=\frac{1}{2}\mathcal{P}$) aciem habentis $\tau\alpha$; reſpectu aciei ſuæ, eſt $\frac{1}{2}A\alpha q\times\frac{2}{3}A\alpha\times\tau\alpha=\frac{4}{3}R^3\mathcal{P}$: Unde ſubductum momentum Ungulæ Trilinei $A\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$; relinquit momentum Ungulæ Trilinei $A\tau T$, ungulam habentis $\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$; hoc eſt Ungulæ Trilinei $A\tau\alpha$ (ipſi $A\tau T$ ſimilis & æqualis, inverſo ſitu) aciem habentis TA, reſpectu ipſius TA, $\frac{11}{12}R^3\mathcal{P}$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{8}R^3\mathcal{P}$, per § C. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis ab acie ſua $\frac{22}{15}R$; atque ab extremo oppoſito, $\frac{8}{15}R$; &, reſpectu hujus, momentum, $\frac{1}{3}R^3\mathcal{P}$.

Item; Ungulæ Sectoris $B\alpha A$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (per § W. prop. 16.) eſt $\frac{3}{8}aR^3+\frac{11}{8}sR^3-\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R=\frac{3}{8}fR^3+\frac{3}{8}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$. Ergo Ungulæ quadrilinei correſpondentis $b\beta\alpha A$, reſpectu $\tau\alpha$, momentum (utpote iſtius Seſquitertium) $\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R=\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}shv R=\frac{5}{6}aR^3+\frac{11}{6}sR^3-\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis diſtantia à $\tau\alpha$ (propter magnitudinem $\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR$, per § D. prop. 17.) $\frac{30fR^2+18shR-4s^3}{27fR+9sh}=\frac{10}{9}R+\frac{8shR-4s^3}{27fR-9sh}=\frac{10}{9}R+\frac{8shR-4shv}{27fR+9sh}=\frac{10}{9}R+\frac{4sh^2}{27fR+9sh}$; Adeoque, à TA, $\frac{8}{9}R-\frac{4sh^2}{27fR+9sh}$; C.

ejuſque, reſpectu T A, momentum, $\frac{2}{3}fR^3+\frac{2}{9}shR^2-\frac{1}{9}sh^2R=\frac{2}{3}fR^3+\frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{2}{3}fR^3+\frac{1}{9}s^3R$, eſt momentum Ungulæ eidem b β α A inſiſtentis; aciem habentis T A, reſpectu τ α, (propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas;) & (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2-\frac{1}{4}shR$, per § D. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{24fR^2+4s^3}{45fR-9sh}=\frac{8}{15}R+\frac{24shR+20s^3}{225fR-45sh}$; & à T A, $\frac{66fR^2-18shR-4s^3}{45fR-9sh}=\frac{22}{15}R-\frac{24shR+20s^3}{225fR-45sh}$: Ejuſque reſpectu T A, momentum, $\frac{11}{6}fR^3-\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R$.

D. Eſt autem, Semiquadrantalis Ungulæ toti A α β K quadrilineo inſiſtentis aciem habentis τ α, (propter A α = 2 R, & A K = α β = a,) momentum reſpectu τ α, (aut etiam, aciem habentis T A, momentum reſpectu T A,) $\frac{8}{3}aR^3$. Unde, ſi demtur momentum Ungulæ quadrilinei b β α A, modo inventum, $\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R=\frac{5}{6}aR^3+\frac{11}{6}sR^3-\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{9}s^3R$; relinquitur momentum, reſpectu τ α, Ungulæ inſiſtentis Trilineo reliquo A b K, aciem habentis τ α, $\frac{11}{6}aR^3-\frac{11}{6}sR^3+\frac{1}{2}svR^2+\frac{1}{9}s^3R=\frac{11}{6}eR^3+\frac{1}{2}svR^2+\frac{1}{9}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{5}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$, per § E. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{66eR^2+18svR+4s^3}{45eR+9sv}=\frac{22}{15}R+\frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$; atque à T A, $\frac{8}{15}R-\frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$. Ideoque, ejuſdem A b K Ungulæ aciem habentis τ α, momentum reſpectu T A, $\frac{2}{3}eR^3-\frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{2}{3}eR^3-\frac{1}{9}s^3R$, eſt momentum Ungulæ eidem A b K inſiſtentis, aciem habentis T A, reſpectu τ α; (propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$, per § E. prop. 17.) Centri gravitatis à τ α diſtantia, $\frac{24eR^2-4s^3}{27eR-9sv}=\frac{8}{9}R+\frac{8svR-4s^3}{27eR-9sv}=\frac{8}{9}R+\frac{8svR-4svh}{27eR-9sv}$ $=\frac{8}{9}R+\frac{4sv^2}{27eR-9sv}$; Atque, à T A, $\frac{19}{9}R-\frac{4sv^2}{27eR-9sv}=\frac{30eR^2-18svR+4s^3}{27eR-9sv}$; Ideoque ejuſdem, reſpectu T A, momentum $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{2}svR^2+\frac{1}{9}s^3R$.

Similiter oſtendetur; Semiquadrantalis Ungulæ Trilineo b β τ, aciem habentis T A, momentum reſpectu aciei ſuæ T A, $\frac{11}{6}\alpha R^3-\frac{11}{6}sR^3+\frac{1}{2}shR^2+\frac{1}{9}s^3R$; & reſpectu τ α, $\frac{2}{3}\alpha R^3-\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis diſtantiam à T A eſſe $\frac{22}{15}R+\frac{24shR+20s^3}{225\alpha R-225sR+45sh}$; atque à τ α, $\frac{8}{15}R-\frac{24shR+20s^3}{225\alpha R-225sR+45sh}$.

Aciemque habentis τ α, momentum reſpectu T A, $\frac{2}{3}\alpha R^3-\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{9}s^3R$; & reſpectu τ α, aciei ſuæ, $\frac{5}{6}\alpha R^3-\frac{5}{6}sR^3-\frac{1}{2}shR^2+\frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis diſtantiam à T A, $\frac{8}{9}R+\frac{4sh^2}{27\alpha R-27sR-9sh}$: &, à τ α, $\frac{10}{9}R-\frac{4sh^2}{27\alpha R-27sR-9sh}$. Nam, eodem plane modo rectæ τ α adjacet Trilineum b β τ, atque (huic ſimile & æquale) Trilineum b K A rectæ A T: adeoque idem valet α, b, in illo, atque a, v, in hoc.

E. Deinde (per prop. 11. hujus § F.) ſi ex Ungulæ quadrilinei b β α A, aciem habentis τ α, momento reſpectu τ α, auferatur Ungulæ Parallelogrammi b β α B, aciem habentis τ α, momentum reſpectu τ α; relinquitur Ungula ſegmento b B A inſiſtentis aciem habentis τ α, momentum reſpectu τ α.

Illa autem Parallelogrammi b β α B Ungula, aciem habentis τ α, eſt Priſma, oppoſitarum baſium triangularium, rectis β b, α B inſiſtentium: Cujus itaque Centri gravitatis diſtantia à τ α (quippe eadem quæ baſium triangularium, per prop. 5. hujus,) eſt $\frac{2}{3}\alpha V=\frac{2}{3}h$; adeoque à T A, $2R-\frac{2}{3}h$; Quæ, ductæ in magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2$ (per § F. prop. 17.) exhibent ejuſdem momentum reſpectu aciei

ſuæ

ſuæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 4avR^2 + 2av^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 2as^2R - \frac{1}{3}av^3$ Fig. 169. $= \frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{4}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$: Et reſpectu TA, $ab^2R - \frac{1}{3}ab^3$. (Quod etiam erit momentum, reſpectu $\tau\alpha$, aciem habentis TA.) 170.

Illud itaque (Ungulæ $b\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$,) ex Momento Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, aciem item habentis $\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$, (nempe $\frac{5}{8}fR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$, per § C.) ſubductum: relinquit $-\frac{11}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 + \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v = \frac{3}{8}fR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ab^3$, momentum Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$; ejuſque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ab^2$ per § F. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit

$$\frac{-66eR^3 + 48avR^2 - 18svR^2 + 48as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-45eR^2 + 36avR - 9svR + 18as^2} = \frac{30fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12ab^3}{27fR^2 + 9shR - 18ab^2};$$

à TA, $\frac{24fR^3 - 36ab^2R + 4s^3R + 12ab^3}{27fR^2 + 9shR - 18ab^2}$; à bB, $\frac{30fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12ab^3}{27fR^2 + 9shR - 18ab^2} - h = v - \frac{24fR^3 - 36ab^2R + 4s^3R + 12ab^3}{27fR^2 + 9shR - 18ab^2}$. $= \frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{-45eR^2 + 45sR^2 + 36avR - 9svR + 18as^2}$: Adeoque ejuſdem reſpectu TA momentum, $\frac{2}{3}fR^3 - ab^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}ab^3 = -\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$; & reſpectu bB, $\frac{5}{6}fR^3 - \frac{3}{4}ahR^2 - \frac{1}{4}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{4}sb^2R + \frac{1}{6}ab^3 = \frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$.

Atque ex illo porro momento Ungulæ ipſi bBA inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ipſius $\tau\alpha$; ſi ſubducatur Priſmatis eidem bBA inſiſtentis, altitudinem habentis $V\alpha = b$, momentum reſpectu ipſius $\tau\alpha$; hoc eſt, ipſius bBA, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, momentum in $b = 2R - v$, ductum; hoc eſt (per § F. prop. 17.) $-\frac{1}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$ in $b = 2R - v$; hoc eſt, $-\frac{1}{4}ebR^2 + avbR - \frac{1}{4}svbR + \frac{1}{2}as^2b = -\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{4}evR^2 + 2as^2R - \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{2}as^2v$: Relinquitur Ungulæ eidem bBA inſiſtentis, aciem habentis bB momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter mag. $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, per § F. pr. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$

& à TA, $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$; atque à bB, $\frac{-30eR^3 + 30avR^2 + 12as^2R - 22s^3R - 12as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$: Ejuſque momentum reſpectu TA, $\frac{5}{8}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$: Et reſpectu bB, $-\frac{5}{8}eR^2 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{11}{18}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$.

Idemque $\frac{5}{8}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$, eſt momentum reſpectu bB, Ungulæ eidem bBA inſiſtentis aciem habentis TA, (propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, per § F. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à bB $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$: Adeoque à TA, $\frac{-30eR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$;

à $\tau\alpha$, $\frac{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$: Ejuſque reſpectu

Fig. 169, 170. TA momentum, $-\frac{2}{5}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{5}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{5}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{5}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$.

Illud autem, ejusdem Ungulæ, trilineo bBA insistentis aciem habentis TA, momentum, respectu ipsius TA, ex momento Ungulæ quadrilineo $b\beta\alpha A$ insistentis aciem item habentis TA, respectu ejusdem TA, subductum; hoc est, ex $\frac{11}{6}fR^3-\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{5}s^3R=\frac{11}{6}aR^3+\frac{4}{3}sR^3+\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{5}s^3R$, (per § C.) relinquit Ungulæ parallelogrammo $b\beta\alpha B$ insistentis, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{4}{3}avR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}as^2v=\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3$.

Idem habetur, si ex Ungulæ parallelogrammi $K\beta\alpha A$, aciem habentis TA, momento respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3$; subducatur parallelogrammi KbBA, (aciem item habentis TA,) momentum respectu TA, $\frac{1}{3}av^3$: Quippe quod restat, est Ungulæ Parallelogrammi $b\beta\alpha B$, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3$; ut prius.

Adeoque, (propter magnitudinem, $2ahR-\frac{1}{2}ah^2=2aR^2-\frac{1}{2}av^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{16R^3-2v^3}{12R^2-3v^2}$; atque à $\tau\alpha$, $2R-\frac{16R^3-2v^3}{12R^2-3v^2}=\frac{8R^3-6v^2R+2v^3}{12R^2-3v^2}$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{4}{3}aR^3-av^2R+\frac{1}{3}av^3=\frac{4}{3}aR^3-\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v=ah^2R-\frac{1}{3}ah^3$; ut etiam prius ostensum est.

Aut etiam ejusdem Ungulæ Parallelogrammo $b\beta\alpha B$ insistentis, aciem habentis TA, magnitudo, momenta, & Centrum gravitatis, per se facile determinantur; est utique solidum ex Prismate, eique super-impositio Cuneo constante; eidem $b\beta\alpha B$ super eminentibus: Quorum utriusque seperatim magnitudines, & Centra gravitatis, adeoque & momenta, facile determinantur; adeoque & aggregati ex utroque conflati.

F. Accedimus ad Ungularum Trilinei $A\tau\alpha$, ejusque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ aut huic parallelam, momenta respectu $A\alpha$: Aciemque habentium $A\alpha$, momenta respectu $\tau\alpha$ aut parallelarum huic; quæque hinc dependent.

Si *Trilineo restituto*, seu *Figuræ Sinuum versorum*, $A\tau\alpha$, insistat Semiquadrantalis Ungula aciem habens $\tau\alpha$: Quæ rectis $b\beta$, planum complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, sunt (propter angulum Semiquadrantalem) Triangula Rectangula Isoscelia; ipsarum $b\beta$, seu h, semiquadrata: Adeoque ipsa Ungula, (sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ ipsius portioni $Ab\beta\alpha$ insistit,) aggregatum omnium $\frac{1}{2}h^2$, eo spectantium. Eorumque ab $A\alpha$ distantia est $bB(=a)$ respective: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ momentum, respectu $A\alpha$, est Aggregatum omnium $\frac{1}{2}ah^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus: Hoc est, Arcuum Arithmetice proportionalium in Semiquadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum.

Quæ autem rectis bB, æqualiter ab invicem distantibus, planum similiter complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, totidem erunt parallelogramma, quorum bases $bB=a$, & altitudines (propter angulum Semiquadrantalem) æquales eorum à $\tau\alpha$ distantiis respectivis, hoc est ipsis $V\alpha=h$ respective: Adeoque Ungula, sive quæ toti $A\tau\alpha$ Trilineo insistit, sive quæ ipsius Portioni AbB; est Aggregatum omnium ah, eo spectantium; sumptis AB, seu AV, hoc est v, arithmetice proportionalibus. Eorumque ab $A\alpha$ distantia, $\frac{1}{2}bB=\frac{1}{2}a$ respective, (per prop. 2. hujus.) Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu $A\alpha$; Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2h$: Hoc est, Semiquadratorum arcuum sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentium, in sinus versos arcuum ad semicirculum residuorum.

Hujusque Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu $A\alpha$, idem est atque Ungulæ aciem habentis $A\alpha$ momentum respectu $\tau\alpha$; propter magnitudines & distantias reciprocatas. Ut ad § H. prop. 16. ostensum est.

Nempe, si eidem Trilineo Restituto $A\tau\alpha$, Ungula insistat semiquadrantalis, aciem habens $A\alpha$: Quæ rectis bB insistunt plana, Ungulam complentia, erunt (propter angulum ad $A\alpha$ semiquadrantalem) ipsarum bB Semiquadrata, seu $\frac{1}{2}a^2$; adeoque

adeoque ipſa Ungula, ſive quæ toti A τ α, ſive quæ illius Segmento A b B, inſiſtit, eſt aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2$; ſumptis A B, ſeu A V, hoc eſt *v*, arithmetice proportionalibus. Eorumque à τ α diſtantia eſt V α = *h*: Adeoque ſimul omnium, hoc eſt ipſius Ungulæ, momentum reſpectu τ α eſt aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2h$; ſumptis *v* arithmetice proportionalibus. Atque eadem ratione, ejuſdem reſpectu T A, erit Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2v$; propter ſingulorum planorum à T A diſtantiam, *v* reſpective. Fig. 169, 170.

Planaque ipſis b β inſiſtentia, eandem Ungulam complentia, erunt rectangula b β α, hoc eſt *a h* reſpective; eorumque à τ α diſtantia, $\frac{1}{2}h$: Adeoque Ungulæ aciem habentis A α, ſive quæ toti A τ α, ſive quæ ipſius portioni A b β α inſiſtit, eſt aggregatum omnium $\frac{1}{2}ah^2$, eo ſpectantium; ſumptis *a* arithmetice proportionalibus.

Sed & eadem Ungula, ſi tertiis adhuc planis ſecetur, baſi parallelis, æqualiter ab invicem diſtantibus: Erunt ea plana, (propter obliquam Ungulæ ſectionem, adeoque plana ſuperiora continue magis magiſque ab A α deficientia,) æqualia ipſis A α τ, x ξ τ, & ſic deinceps, uſque ad ultimum f φ τ, ſeu ipſum τ punctum; ſi Ungulam totius A τ α trilinei ſpectemus: Vel, ſi portionem A b β α ſpectemus; ipſis A α β b, x ξ β b, & ſic deinceps uſque ad ipſam β b. Hoc eſt, in totius Trilinei Ungula; æqualia totidem A α τ planis (hoc eſt, priſmati ipſi A τ α inſiſtenti altitudinem habenti τ α,) demptis omnibus A x ξ α, A z ζ α, &c. (hoc eſt, dempta contraria Ungula ſuper eodem plano aciem habente T τ.) Et ſimiliter, in portione A b β α; æqualia totidem A b β α planis (ſeu priſmati A b β α altitudinem habenti ipſi α β æqualem) demptis omnibus A x ξ α, A z ζ α, &c. eo ſpectantibus; hoc eſt, dempta Ungula contraria A b β α aciem habente b β. (Ut ſupra dictum eſt, § G. prop. 17.) Ergo, Ungulæ momentum, (ſive totius Trilinei, ſive portionis A b β α,) reſpectu τ α; eſt Aggregatum Momenti planorum horum omnium. Quæ calculo facile exquirentur.

Eſt utique ejuſmodi plani A b β α cujuſvis momentum reſpectu τ α, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; per § D. prop. 17. Adeoque priſmatis huic inſiſtentis, altitudinem habentis β α = *a*; $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR$.

Item, *Omnia* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$, uſque ad maximum $\frac{3}{4}AR^2 + \frac{3}{4}SR^2 + \frac{1}{4}SHR$, (ſumptis *a* arithmetice proportionalibus,) eſt ungulæ A b β α, aciem habentis b β, momentum reſpectu τ α; (adeoque & aciem habentis τ α, momentum reſpectu b β; propter altitudines & diſtantias reciprocatas, ut ſæpius ante dictum eſt.)

Sunt autem *omnes a*, (arcus arithmetice proportionales,) uſque ad *A* maximum, $\frac{1}{2}A^2$; per prop. 1. hujus. Ergo *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 := \frac{3}{8}A^2R^2$.

Item, *Omnes s*, (eorundem arcuum Sinus recti) ſunt ipſum α β υ Trilineum, hoc eſt *VR*, (per § O, Q, prop. 17.) Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}sR^2 := \frac{3}{4}VR^3$.

Et *Omnia sh*, ſunt $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$, (ut oſtenſum eſt ad § A. prop. 18.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}shR := \frac{1}{4}VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$: (hoc eſt, Ungulæ A b β α aciem habentis b β, momentum reſpectu τ α; vel aciem habentis τ α, momentum reſpectu b β;) ſunt $\frac{3}{8}A^2R^2 + VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$; ſeu (reſtitutis minuſcularum valoribus) $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

(Quod quidem, ex Priſmatis reſpectu τ α momento, modo reperto, $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR = \frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$, ſubductum; relinquit Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, momentum reſpectu τ α, (vel etiam aciem habentis τ α, momentum reſpectu A α;) Nempe, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Sed & idem (ſine ope Priſmatis) mox alio modo obtinebitur.)

Illud autem $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ Momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis b β, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$ (per § H. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem Diſtantiam Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; adeoque à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; ejuſque reſpectu T A momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Quod ipſum eſt aciem habentis T A, momentum reſpectu b β.

Idemque

Fig. 169, 170. Idemque $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis τ α, magnitudinem, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR=\frac{3}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$, (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^2-5asR+s^2R+asv}{6aR+10sR-2sv}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-5asR+s^2R+asv}{6aR+10sR-2sv}$; ejusque respectu A α, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$: Idemque est momentum Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, respectu τ α; prius exhibitum.

Quod quidem $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R-\frac{2vR^2+s^2R+2asv-4asR}{4a^2+8as-8vR}$; adeoque à TA, $\frac{5}{4}R+\frac{2vR^2+s^2R+2asv-4asR}{4a^2+8as-8vR}$; ejusque, respectu TA, Momentum $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR$: aciemve habentis T A, momentum respectu A α.

Atque hoc demum $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2-\frac{1}{4}shR=\frac{5}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$ (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-s^2R-3asR-asv}{10aR+6sR+2sv}$; adeoque à b β; $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^2-s^2R-3asR-asv}{10aR+6sR+2sv}$: Ejusque, respectu b β, momentum, $\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; idem quod prius repertum est momentum aciem habentis b β, respectu T A.

G. Adeoque; Si totius A τ α Ungulas spectemus; (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, $v=2R$, $s=0$;) Erit Ungulæ A τ α, aciem habentis T τ, magnitudo, $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2+2R^3$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$; respectu T A, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R+\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2+16R^2}$; à TA, $\frac{5}{4}R-\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2+16R^2}$.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2-2R^3$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$; respectu T A, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R-\frac{4R^3}{\mathcal{P}^2-16R^2}$ à T A, $\frac{5}{4}R+\frac{4R^2}{\mathcal{P}^2-16R^2}$.

Aciemque habentis τ α; Magnitudo, $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$; momentum respectu T τ; $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$; respectu A α, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$: Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}\mathcal{P}+\frac{16R^2}{3\mathcal{P}}$; ab A α, $\frac{1}{4}\mathcal{P}-\frac{16R^2}{3\mathcal{P}}$.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{5}{8}R^2\mathcal{P}$: Momentum respectu T τ, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2+2R^4$; respectu A α, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2-2R^4$: Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}\mathcal{P}+\frac{16R^2}{5\mathcal{P}}$; ab A α, $\frac{1}{4}\mathcal{P}-\frac{16R^2}{5\mathcal{P}}$.

Eademque per se poterant, eodem modo, calculo exquiri; quo Ungularum portionis A b β α momenta prius exquirebantur; quæque inde dependent.

H. Ex his item sic traditis, Ungularum portionis b β τ momenta (quæque hinc dependent) haberi poterunt. Nempe; ex Momentis Ungularum totius Trilinei A τ α, subductis respectivis Ungularum portionis A b β α, restant Momenta respectiva Ungularum b β τ; sive respectu ipsarum τ α, T A, sive respectu ipsarum A α, T τ, &c. Atque ex cognitis aliquibus reliqua facile derivantur.

Sed & eadem possunt per se eodem modo exquiri, quo in ipsis A b β α factum est.

Est utique (per § E. prop. 17.) plani cujusque b β τ, momentum respectu τ α, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR$; Adeoque *Omnia*, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR$; (hoc est, momenta planorum omnium Ungulam b β τ, aciem habentem b β, complentium;) sunt istius Ungulæ momentum.

Sed *Omnes* α, (arcus arithmetice proportionales, ab ipso α, usque ad maximum * seu τ β = α,) sunt, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}\alpha^2$. Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}\alpha R^2:=\frac{3}{8}\alpha^2R^2$.

Item

Item *Omnes s*, (eorundem arcuum Sinus recti,) ſunt ipſum Trilineum $\tau\beta v$ Fig. $= hR$ (per § Q. prop. 17.) Ergo *Omn.* $-\frac{3}{4}sR^2 := -\frac{3}{4}hR^3$. 169,

Item *Omnia sh* (ad $b\beta\tau$ ſpectantia) $\frac{1}{2}h^2R$, (per § A. prop. 18.) Ergo *Omn.* 170.
$-\frac{1}{4}shR := -\frac{1}{8}h^2R^2$.

Ergo ; *Omn.* $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$: (hoc eſt, Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, momentum reſpectu $\tau\alpha$; ſeu aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $b\beta$;) $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2 = \frac{3}{8}\alpha^2R^2 - hR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; ſeu (propter $\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P} - a$, & $h = 2R - v$,) $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{3}{8}aR^2\mathcal{P} + \frac{3}{8}a^2R^2 - 2R^4 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

Quod quidem, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$ (per § H. prop. 17.) diviſum ; exhibet ejuſdem centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{h^2R}{4\alpha^2 - 8hR}$; adeoque à à T A, $\frac{5}{4}R + \frac{h^2R}{4\alpha^2 - 8hR}$; ejuſque reſpectu T A momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$.

Idemque $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) diviſum ; exhibet hujus diſtantiam centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$.

Adeoque ejuſdem Ungulæ $b\beta\tau$ (aciem habentis $\tau\alpha$) momentum reſpectu $T\tau$, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$. Idemque eſt, aciem habentis $T\tau$, momentum reſpectu $\tau\alpha$.

Quod quidem $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $T\tau$, magnitudinem, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$ (per § H. prop. 17.) diviſum ; exhibet ejuſdem Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; adeoque à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; ejuſque, reſpectu T A, momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$. Idemque eſt, aciem habentis T A, momentum reſpectu $T\tau$.

Atque hoc demum $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$ aciem habentis T A, magnitudinem, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) diviſum ; exhibet ejuſdem diſtantiam Centri gravitatis à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; adeoque, à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; ejuſque, reſpectu $b\beta$, momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; idem quod aciem habentis $b\beta$, momentum reſpectu T A, modo repertum.

Quæque de Ungulis $b\beta\tau$ hic dicta ſunt ; eadem omnino Ungulis A b K conveniunt ; ſubſtitutis *a* pro α, *v* pro *h*, T A pro $\tau\alpha$, A α pro $T\tau$, & vice verſa. Quippe A b K portio, ſimiliter adjacet rectis T A, A α, atque $\tau b\beta$ rectis $\alpha\tau$, τ T.

Solidorum autem, ſive ſemiſolidorum, reſpondentium magnitudo, ad magnitudinem Ungulæ correſpondentis; eorumque momentum ad momentum hujus, (reſpectu ejuſdem plani ad converſionis axem aciemque Ungulæ, recti ;) eſt ut $\mathcal{P}$ vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ad *R*. Diſtantiaque à planis ad converſionis axem, aciemve Ungulæ, rectis, utrobique eadem reſpective.

Deinde : Si ex Ungularum A $b\beta\alpha$ momentis, § F traditis ; auferantur reſpectiva I.
Ungularum B $b\beta\alpha$ momenta : habentur reſpectiva Momenta Ungularum A b B : & quæ hinc dependent.

Eſt autem Ungulæ B $b\beta\alpha$, aciem habentis $b\beta$ vel A α, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}a^2h$, per § I. prop. 17. Centrique gravitatis, in media longitudine poſiti, per prop. 2. diſtantiam à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$:) Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; reſpectu T A, $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2$: Illudque $\frac{1}{4}a^2h^2$, (ob diſtantias & altitudines reciprocatas,) momentum etiam, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu $b\beta$ vel

Fig. 169, 170. $A\alpha$: Et $a^2hR-\frac{1}{4}a^2h^2$, momentum etiam aciem habentis T A, respectu $b\beta$ vel $A\alpha$. Estque utriusque horum, Distantia Centri gravitatis à $b\beta$ vel $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$, per prop. 2. Magnitudo autem, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$; aciemque habentis T A, $2ahR-\frac{1}{2}ah^2$; (per § F. prop. 17.) Adeoque Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$; $\frac{2}{3}h$; à T A, $R-\frac{2}{3}h$.

Si itaque ex Ungulæ $Ab\beta\alpha$, aciem habentis T A, momento respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momento respectu T A; $\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur respectivum Ungulæ $Bb\beta\alpha$ momentum, modo exhibitum, $a^2hR-\frac{1}{4}a^2h^2=a^2R^2-\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis T A, momentum respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momentum respectu T A; $-\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$. Quod per Ungulæ A b B, aciem habentis TA, magnitudinem, $-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-s^2R^2-3asR^2-asvR}{-6eR^2+8avR+2svR-4as^2}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-s^2R^2-3asR^2-asvR}{-6eR^2+8avR+2svR-4as^2}$.

Item; si ex Ungulæ $Ab\beta\alpha$, aciem habentis T A, momento respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momento respectu T A; $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum Ungulæ $Bb\beta\alpha$, modo exhibitum, $a^2hR-\frac{1}{4}a^2h^2=a^2R^2-\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis T A, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu T A; $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$.

Item; Si ex Ungulæ $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momento respectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum Ungulæ $Bb\beta\alpha$, modo exhibitum, $\frac{1}{4}a^2h^2=a^2R^2-a^2vR+\frac{1}{4}a^2v^2=a^2R^2-\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquitur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR-\frac{1}{2}ah^2=-\frac{5}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$. Idemque, per ungulæ A b B, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Ungulæ distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{2vR^3+a^2vR-s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8vR^2+4a^2v}$; à T A, $\frac{3}{4}R+\frac{2vR^3+a^2vR-s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8vR^2+4a^2v}$: Adeoque, à b B, $\frac{3}{4}R-h(=v-\frac{3}{4}R)-\frac{2vR^3+a^2vR-s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8vR^2+4a^2v}$. Et propterea ejusdem, respectu b B, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}a^2s^2$. Idemque est Ungulæ A b B, aciem habentis b B, momentum respectu $b\beta$. Quod itaque per hujus magnitudinem, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$ (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Ungulæ A b B, aciem habentis b B, distantiam Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-7s^2R^2+3asR^2-3asvR}{6eR^2+6svR-4as^2}$; adeoque ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-7s^2R^2+3asR^2-3asvR}{6eR^2+6svR-4as^2}$; ejusque respectu $A\alpha$ momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{3}{4}asR^2+\frac{3}{4}asvR-\frac{1}{4}a^2s^2$: quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est Ungulæ A b B, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu b B.

Item; si ex Ungulæ $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $A\alpha$, aciemve habentis $A\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$ (per § F.) Auferatur correspondens Ungulæ $Bb\beta\alpha$ momentum, modo exhibitum, $\frac{1}{4}a^2b^2=a^2R^2-\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu

respectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ A b B, aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R+\frac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$: Adeoque à bB, $\frac{5}{4}R-h\ (=v-\frac{3}{4}R)-\frac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$. Et propterea, ejusdem respectu bB momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{3}{4}asR^2+\frac{3}{4}asvR-\frac{1}{4}a^2s^2$; ut prius. Atque hinc etiam, regrediendo, reliqua quæ Ungulam A b B aciem habentem b B spectantia modo tradebantur, similiter derivari poterunt. Fig. 169, 170.

Sed & hæc omnia Momenta Ungularum A b B, (quæque hinc dependent,) similiter haberi possent, ex Ungulis A K b B, subductis respectivis Ungulis A b K. Habentur autem Ungularum A K b B momenta, reliquaque inde dependentia, eodem plane modo quo Ungularum $Bb\beta\alpha$: substitutis ubique v pro h, & TA pro $\tau\alpha$, & vice versâ. Quæ monuisse sufficiat.

Restat, ut Ungularum acies habentium $A\alpha$, (aut huic parallelas,) momenta respectu acierum suarum (rectarumque his parallelarum) ostendam; & Centrorum gravitatis inde distantias. K.

Si intelligatur portioni $Ab\beta\alpha$ semiquadrantalis Ungula insistere aciem habens $b\beta$; quæ hanc complent plana ipsi $A\tau\alpha$ parallela, sunt ipsa $Ax\xi\alpha$, $Az\zeta\alpha$, &c. usque ad $Ab\beta\alpha$; seu Omnia $Ab\beta\alpha$, eo spectantia, ut ad § F. ostensum est: Adeoque, & eorum omnium, respectu $A\alpha$, momenta; hoc est, (per § H. prop. 17.) *Omnia*, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$, eo spectantia, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ipsum Ungulæ $Ab\beta\alpha$ aciem habentis $b\beta$, momentum respectu $A\alpha$; aut etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $b\beta$.

Sunt autem *Omnia* a^2, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{3}a^3$; per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R:=\frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omnia* as, (hoc est, momentum respectu $A\alpha$ omnium $\beta\upsilon$, trilineum $\alpha\beta\upsilon$ complentium;) sunt, $-eR^2+avR$, per § Q. prop. 17. Adeoque, *Omn.* $asR:=-eR^3+avR^2$.

Item, *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) hoc est, ipsum AbK trilineum, est eR; per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $-vR^2:=-eR^3$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$; hoc est, momentum Ungulæ $Ab\beta\alpha$ aciem habentis $b\beta$ respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$ momentum respectu $b\beta$; est, $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+vR^2_{r}$, (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a-\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$: Adeoque, à $b\beta$, $\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$: Et propterea; ejusdem, respectu $b\beta$, momentum, $2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$.

Idemque $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$ momentum, divisum per Ungulæ $Ab\beta\alpha$ aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$ (per § H. prop. 17.) exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{-12eR^2+6avR+a^3}{3a^2+6as-6vR}$; Adeoque ab $A\alpha$, $\frac{12eR^2-12avR+2a^3+6a^2s}{3a^2+6as-6vR}$; & propterea, ejusdem, respectu $A\alpha$, momentum (seu *Omnia* a^2h eo spectantia,) $2eR^3-2avR^2+\frac{1}{3}a^3R+a^2sR$.

Et quidem si totius $A\tau\alpha$ Ungulam spectemus; erit (propter $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, & $s=0$;) aciem habentis $T\tau$, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$ momentum respectu $T\tau$, $\frac{1}{48}RP^3$. Adeoque (propter illius magnitudinem $\frac{1}{8}RP^2+2R^3$; hujusque $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$, per § G. prop. 17.) erit, Aciem habentis $T\tau$

Fig. 169, 170. Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{\mathcal{P}^3}{6\mathcal{P}^2+96R^2}=\frac{1}{6}\mathcal{P}-\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2+48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{3}\mathcal{P}+\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2+48R^2}$; ejuſque, reſpectu T τ, momentum, $\frac{1}{24}R\mathcal{P}^3+R^3\mathcal{P}$.

Aciemque habentis A α, Diſtantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{\mathcal{P}^3}{6\mathcal{P}^2-96R^2}=\frac{1}{6}\mathcal{P}+\frac{8R^2P}{3\mathcal{P}^2-48R^2}$; ab A α, $\frac{1}{3}\mathcal{P}-\frac{8R^2\mathcal{P}}{3\mathcal{P}^2-48R^2}$; hujuſque, reſpectu A α, momentum, $\frac{1}{24}R\mathcal{P}^3-R^3\mathcal{P}$.

L. Si autem ex Ungularum parallelogrammi A K $\beta\alpha$ momentis, auferantur reſpectiva momenta Ungularum A b $\beta\alpha$; habentur Ungularum A b K momenta reſpectiva.

Eſt autem Ungulæ A K $\beta\alpha$ aciem habentis K β, vel A α, (utpote Priſmatis, oppoſitarum baſium triangularium,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2\times 2R=a^2R$; ejuſque ab acie ſua Diſtantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino oppoſito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque Aciem habentis b β momentum reſpectu A α, vel aciem habentis A α momentum reſpectu b β, eſt $\frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis b β momentum reſpectu ipſius b β; aciemve habentis A α, reſpectu ipſius A α, momentum $\frac{2}{3}a^3R$.

Ex his itaque; ſi ſubducantur reſpectiva Ungularum A b $\beta\alpha$ momenta, § K. tradita: Relinquuntur Ungularum A b K momenta reſpectiva.

Nempe; Ungulæ A b K aciem habentis β b K; momentum reſpectu A α; aciemve habentis A α, momentum reſpectu β b K; $2eR^3-avR^2+\frac{1}{6}a^3R$. Adeoque (propter illius magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; hujus $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$; per § H. prop. 17.) Aciem habentis β b K, Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6vR}$; adeoque à β b K, $\frac{-12eR^2+2a^3}{3a^2-6vR}$: Aciemque habentis A α, Diſtantia Centri gravitatis à β b K, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6as+6vR}$; adeoque ab A α, $\frac{-12eR^2+12avR+2a^3-6a^2s}{3a^2-6as+6vR}$.

Aciemque habentis β b K, momentum reſpectu β b K, $-2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$; Aciemque habentis A α momentum reſpectu A α, $-2eR^3+2avR^2+\frac{1}{3}a^3R-a^2sR$.

Quæque de Ungulis A b K dicta ſunt; eadem Ungulis τ b β, accommodantur, ſubſtitutis α pro a, b pro v; & T τ, pro A α. Quippe ſimiliter adjacet rectis τT, $\tau\alpha$, ipſum τ b β; atque ipſum A b K, rectis A α, A T.

Nempe, Ungulæ τ b β, aciem habentis β b K, momentum reſpectu T τ; aciemve habentis T τ, momentum reſpectu β b K; $2\alpha R^3-2sR^3-\alpha bR^2+\frac{1}{6}a^3R$: Aciem habentis β b K momentum reſpectu β b K, $-2\alpha R^3+2sR^3+\frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis T τ, reſpectu ipſius T τ, $-2\alpha R^3+2sR^3+2\alpha bR^2+\frac{1}{3}a^3R-a^2sR$: Et Aciem habentis β b K, Diſtantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-6\alpha bR+a^3}{3a^2-6bR}$; à β b K, $\frac{-12\alpha R^2+12sR^2+2a^3}{3a^2-6bR}$; Aciemque habentis T τ, diſtantia Centri gravitatis à β b K, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-6\alpha bR+a^3}{3a^2-6as+6bR}$; à T τ, $\frac{-12\alpha R^2+12sR^2+12\alpha bR+2a^3-6a^2s}{3a^2-6as+6bR}$.

Sed & earundem Ungularum τ b β momenta, haberi poterunt; ex Ungularum totius A $\tau\alpha$ momentis, ſubductis momentis reſpectivis Ungularum A b $\beta\alpha$: Reſtabunt utique momenta reſpectiva Ungularum τ b β; quæ & ad alias, ut opus fuerit, rectas facile transferentur.

M. Ex momentis autem Ungularum A b $\beta\alpha$; ſi ſubducantur reſpectiva Ungularum b $\beta\alpha$B momenta; habentur momenta reſpectiva Ungularum A b B.

Eſt autem Ungulæ b $\beta\alpha$B, aciem habentis b β, vel B α, (utpote Priſmatis,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2\times b=\frac{1}{2}a^2b$; ejuſque ab acie ſua Diſtantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino oppoſito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque aciem habentis b β momentum reſpectu A α; aciemve

aciemve habentis A α, momentum reſpectu b β; $\frac{1}{6}a^3h = \frac{1}{3}a^3R - \frac{1}{6}a^3v$. Aciemque habentis b β, momentum reſpectu b β; aciemve habentis A α, reſpectu A α, momentum, $\frac{1}{3}a^3h = \frac{2}{3}a^3R - \frac{1}{3}a^3v$. Fig. 169, 170.

Hæc itaque, ex reſpectivis momentis Ungularum A b β α (§ K. inventis,) ſubducta; relinquunt reſpectiva Ungularum A b B momenta.

Nempe; Ungulæ A b B, aciem habentis b K, momentum reſpectu A α, aciemve habentis A α, momentum reſpectu b K; $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$: Aciemque habentis b K momentum reſpectu b K, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$: Aciemque habentis A α, momentum reſpectu A α, (hoc eſt, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$, eo ſpectantia,) $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$.

Adeoque, (propter illius magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; hujuſque $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; per § I. prop. 17.) Ungulæ A b B, aciem habentis b β, Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à b β, $\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$: Aciemq; habentis A α. Diſtantia Centri gravit. à b K, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$; ab A α, $\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$.

Atque his, in Figuræ Sinuum verſorum A τ α, ejuſve partium, Ungulis, ſic expeditis: Eadem opera, eadem in Figuræ Sinuum Rectorum $\alpha\tau\varkappa$ expediuntur. Eſt enim (ut § M. prop. 17. oſtenſum eſt,) Figura Sinuum Rectorum Unius quadrantis $\alpha\delta\varkappa$, eadem plane figura atque d D A, figuræ Sinuum verſorum portio. Adeoque ex magnitudine, Momentis, Ungulisque, figuræ d D A (quæ figuræ A τ α pars eſt,) & partium ejuſdem; facile erit figuræ $\alpha\delta\varkappa$, adeoque & $\alpha\tau\varkappa$, partiumque illius, Magnitudines, Momenta, Ungulaſque, quæque hinc dependent, derivare. N.

Vel etiam, ſine ope figuræ A τ α, ejuſve portionis d D A; poſſunt ipſius $\alpha\tau\varkappa$, partiumque hujus, Ungulæ, (ut § Q. prop. 17. oſtenſum eſt,) earumque momenta, facile obtineri.

Cum enim rectæ $\beta\upsilon$, trilineum $\alpha\beta\upsilon$ complentes, ſint arcuum arithmetice proportionalium (ipſis $\alpha\beta$ reſpective æqualium) ſinus Recti: Quæ Ungulam $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentem $\alpha\beta$ ſeu $\alpha\tau$, plana complent; ſunt eorundem ſinuum rectorum Semiquadrata; hoc eſt, *Omnia*, $\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia: Quorum Semiquadratorum ſumma, ſeu ipſa $\alpha\beta\upsilon$ ungula aciem habens $\alpha\tau$, ſeu plani momentum reſpectu rectæ $\alpha\tau$, eſt $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17. Atque eorundem ſemiquadratorum $\frac{1}{2}s^2$, ſeu planorum Triangulorum momentum reſpectu ipſius $\alpha\tau$, (propter $\frac{2}{3}s$, Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, per prop. 6. hujus) ſunt, *Omnia*, $\frac{1}{3}s^3$; (propter $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{3}s^3$.) Aut etiam (propter $s^2 = vh$,) *Omn.* $\frac{1}{3}svh$. Hoc eſt, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: ſumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* s^3; (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) idem atque *Omn.* v^2R: (per § V. prop. 13.) ſeu *Omn.* s^2R, ſumptis v arithmetice proportionalibus: Hoc eſt, duplum momenti (reſpectu A α) ſegmenti ſemicirculi A B V fig. 169. in R ductum; (ſunt enim *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$: ſumptis v arithmetice proportionalibus, momentum illud:) Hoc eſt, (per § R. prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR = \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$. Ergo; *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 := \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, ſeu $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, eſt Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\alpha\tau$, momentum reſpectu $\alpha\tau$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$.

Vel ſic etiam; Sunt *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 := $ *Omn.* $\frac{1}{3}svh$; (propter B V, mediàm proportionalem inter A V & V α; hoc eſt, s, inter v & h;) ſeu (propter $h = 2R - v$,) *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$.

Sunt autem *Omn.* sv: (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $\frac{2}{3}svR$: $= \frac{1}{3}v^2R^2 = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2$.

Fig. 169, 170. Item; *Omn.* $\frac{1}{2} s v^2 := \frac{1}{6} v^3 R = \frac{2}{3} v R^3 - \frac{1}{3} s^2 R^2 - \frac{1}{6} s^2 v R$, (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{3} s v^2 := -\frac{1}{9} v^3 R = -\frac{4}{9} v R^3 + \frac{2}{9} s^2 R^2 + \frac{1}{9} s^2 v R$.

Ergo, *Omn.* $\frac{2}{3} s v R - \frac{1}{3} s v^2$: ($= Omn. \frac{1}{3} s v h := Omn. \frac{1}{3} s^3$:) Hoc est, momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\alpha\tau$, respectu ipsius $\alpha\tau$ rectæ, est, $\frac{1}{3} v^2 R^2 - \frac{1}{9} v^3 R$, hoc est, $\frac{2}{9} v R^3 - \frac{1}{9} s^2 R^2 + \frac{1}{9} s^2 v R$. ut prius. Atque hinc Distantia Centri gravitatis ab $\alpha\tau$ colligitur, ut prius.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\varkappa$ aciem habentis $\alpha\tau$ momentum respectu ipsius $a\tau$, (propter $v = s = R$; & $a = \frac{1}{4}\mathcal{P}$,) est $\frac{2}{9} R^4$; ejusque magnitudo $\frac{1}{16} R^2 \mathcal{P}$; Centrique gravitatis ab $\alpha\tau$ distantia, $\frac{32 R^2}{9\mathcal{P}}$.

Ungulæque totius $\alpha\tau\varkappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{9} R^4$; (ipsius $\alpha\delta\varkappa$ duplum, propter duplam magnitudinem:) Distantiaque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ eadem, nempe $\frac{32 R^2}{9\mathcal{P}}$: Et quidem (per prop. 5.) super ipsa $\delta\varkappa$ recta; hoc est, à T τ, vel A α, $\frac{1}{4}\mathcal{P}$; & propterea ejusdem respectu A α, seu T τ momentum, (propter magnitudinem $\frac{1}{8} R^2 \mathcal{P}$,) est $\frac{1}{32} R^2 \mathcal{P}^2$: Quod itidem est aciem habentis T τ, vel A α, momentum respectu $\tau\alpha$; propter altitudines & distantias reciprocatas. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{2} R^2 \mathcal{P}$) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$.

O. Similiter; Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu A α; sunt omnium planorum $\alpha\xi o$, $\alpha\zeta\upsilon$, &c. usque ad $\alpha\beta\upsilon$, (ungulam illam complentium) momenta respectu A α; hoc est (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $-e R^2 + a v R$: seu *Omn.* $-a R^2 + s R^2 + a v R$, eo spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes a*, (arcus arithmetice proportionales, eo spectantes;) $\frac{1}{2} a^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $-a R^2 := -\frac{1}{2} a^2 R^2$.

Et *Omnes s* (eo spectantes) hoc est, ipsum $\alpha\beta\upsilon$ planum, est $v R$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $s R^2 := v R^3$.

Item *Omn.* $a v$ (sumptis a arithmetice proportionalibus,) sunt ipsius A b K plani, momentum respectu A α; hoc est, $\frac{1}{2} a^2 R - a s R + v R^2$, (per § H. prop. 17.) Adeoque, *Omn.* $a v R := \frac{1}{2} a^2 R^2 - a s R^2 + v R^3$.

Ergo; *Omn.* $-a R^2 + s R^2 + a v R := 2 v R^3 - a s R^2$. Quod itaque est Momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Quod quidem momentum, divisum per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, magnitudinem $e R^2$ seu $a R^2 - s R^2$, (per § Q. prop. 17.) exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{2 v R - a s}{a - s := e}$; adeoque à $\beta\upsilon$, $a - \frac{2 v R - a s}{a - s} = \frac{a^2 - 2 v R}{a - s := e}$; ejusque propterea respectu $\beta\upsilon$ momentum, $a^2 R^2 - 2 v R^3$.

Idemque $2 v R^3 - a s R^2$, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis A α, magnitudinem $-e R^2 + a v R$ (per § Q. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2 v R^2 - a s R}{-a R + s R + a v}$; adeoque ab A α, $a - \frac{2 v R^2 - a s R}{-a R + s R + a v} = \frac{-a^2 R + 2 a s R + a^2 v - 2 v R^2}{-a R + s R + a v := -e R + a v}$; hujusque propterea, respectu A α, momentum, $-a^2 R^2 + 2 a s R^2 + a^2 v R - 2 v R^3$.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\varkappa$, aciem habentis $\delta\varkappa$, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\delta\varkappa$; $2 R^4 - \frac{1}{4} R^3 \mathcal{P}$: Ungulæque $\alpha\delta\varkappa$ aciem habentis $\delta\varkappa$, momentum respectu $\delta\varkappa$, $\frac{1}{16} R^2 \mathcal{P}^2 - 2 R^4$: Aciemque habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{2} R^3 \mathcal{P} - 2 R^4$. Centrique gravitatis, Ungulæ $\alpha\delta\varkappa$, aciem habentis $\delta\varkappa$, distantia ab A α, $\frac{8 R^2 - R\mathcal{P}}{\mathcal{P} - 4R}$; à $\delta\varkappa$, $\frac{\mathcal{P}^2 - 32 R^2}{4\mathcal{P} - 16 R}$: Aciemque habentis A α, distantia Centri gravitatis à $\delta\varkappa$, $2 R - \frac{1}{4}\mathcal{P}$; ab A α, $\frac{1}{2}\mathcal{P} - 2 R$.

Ungulæ autem totius $\alpha\tau\varkappa$ figuræ sinuum rectorum totius semicirculi, aciem habentis sive A α, sive T τ, (propter $a = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, $v = 2 R$, $s = o$,) Magnitudo, $\frac{1}{2} R^2 \mathcal{P}$: Momentum

Momentum reſpectu aciei ſuæ, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}^2 - 4R^4$; reſpectu termini oppoſiti, $4R^4$: Fig. 169, 170.
Diſtantiaque Centri gravitatis ab acie ſua, $\frac{1}{2}\mathcal{P} - \frac{8R^2}{\mathcal{P}}$; ab oppoſito termino, $\frac{8R^2}{\mathcal{P}}$.

Ungulæque $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum reſpectu $\tau\alpha$; idem eſt atque P.
omnium $\alpha\beta\upsilon$ planorum, ipſam complentium, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$: Hoc eſt, (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$: ſeu *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: eo ſpectantia: ſumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes* a: (arithmetice proportionales,) $= \frac{1}{2}a^2$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 : = \frac{1}{8}a^2R^2$.

Et *Omn.* s: (ut modo oſtenſum,) $= vR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{4}sR^2 : = -\frac{1}{4}vR^3$.

Item *Omn.* sv: (per § A. prop. 18.) $= \frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}svR = \frac{1}{8}v^2R^2 = \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR : = \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$, ſeu $\frac{1}{8}efR^2$. Quod itaque eſt momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, reſpectu $\tau\alpha$; Idemque (propter diſtantias & altitudines reciprocatas,) etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\beta\upsilon$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$ magnitudinem (modo dictam) eR^2, diviſum; exhibet hujus, à $\tau\alpha$, diſtantiam Centri gravitatis, $\frac{1}{8}f = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}s$.

Idemque momentum, diviſum per magnitudinem Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$ (per § Q. prop. 17.) exhibet Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\tau\alpha$, Diſtantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{a^2R - s^2R = efR}{2aR - 2sR + 2sv}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{2aR - 2sR + 2sv} = \frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$; & propterea, ejuſdem reſpectu Aα momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: Quod ipſum (propter diſtantias & altitudines reciprocatas) eſt etiam momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis Aα, reſpectu $\tau\alpha$. Atque hoc demum per hujus magnitudinem (modo dictam) $-eR^2 + avR$, diviſum; exhibet Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis Aα, diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{-8aR + 8sR + 8av} = \frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$.

Et ſpeciatim, Ungulæ $\alpha\delta\varkappa$, aciem habentis $\delta\varkappa$, momentum reſpectu $\tau\alpha$; aciemve habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\delta\varkappa$; (propter $a = \frac{1}{4}\mathcal{P}$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{128}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{1}{8}R^4$. Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum reſpectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{128}R^2\mathcal{P}^2 + \frac{1}{8}R^4$. Item Aciem habentis $\delta\varkappa$, Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}\mathcal{P} + \frac{1}{8}R$: Aciemque habentis A$\alpha$, Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{\mathcal{P}^2 + 16R^2}{128R} = \frac{1}{8}R + \frac{\mathcal{P}^2}{128R}$: Aciemque habentis $\tau\alpha$, Diſtantia Centri gravitatis à $\delta\varkappa$, $\frac{\mathcal{P}^2 - 16R^2}{8\mathcal{P}} = \frac{1}{8}\mathcal{P} - \frac{2R^2}{\mathcal{P}}$; ab A$\alpha$, $\frac{\mathcal{P}^2 + 16R^2}{8\mathcal{P}} = \frac{1}{8}\mathcal{P} + \frac{2R^2}{\mathcal{P}}$.

In Ungulis igitur expoſitis, tum quæ figuram Sinuum Verſorum, tum quæ figu- Q.
ram Sinuum Rectorum, eorumque partes ſpectant; determinavimus tum Magnitudines, tum Momenta; & Centri gravitatis diſtantias, tum à plano per aciem perpendiculari, tum à plano ad aciem recto; atque in quo tertio per aciem plano conſtitutum ſit, conſtat ex prop. 12. nempe in eo quæ Ungulæ altitudinem biſecat. Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipſum in ſingulis gravitatis Centrum determinavimus.

Quæ autem de Ungulis traduntur, eadem & Solidis converſione factis, eorumve Semiſolidis, aliiſve imperfecta converſione factis, facile accommodantur: per prop. 12, & 14. hujus. Nempe Semiſolidi converſione facti, magnitudo, eſt ad correſpondentem Ungulam Semiquadrantalem, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R: Ejuſque Centri gravitatis diſtantia à plano quod converſionis Axi rectum ſit; eadem eſt quæ Ungulæ à Plano aciei ſuæ recto: Adeoque momenta illius ad reſpectiva momenta hujus, reſpectu iſtius plani, ſunt ut ipſæ magnitudines, nempe ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R: Centrique

gravitatis

Fig. 169, 170. gravitatis Semisolidi distantia à conversionis axe, ad illam Ungulæ ab acie sua; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$: Semisolidique momentum respectu axis sui, ad illud Ungulæ respectu aciei suæ, (in ratione quæ ex magnitudinum & distantiarum rationibus componitur,) ut 2 ad 1. Ut in suis locis passim ostensum est.

Quæque de expositis Ungulis (sive quæ figuram Sinuum Versorum, sive quæ figuram Sinuum Rectorum spectant, eorumve partes,) dicta sunt: eadem ad alias (calculo rite adhibito) facile accommodantur.

R. Si autem pro figuris jam expositis A τ α, α τ κ; Protractæ Contractæve considerandæ veniant: Quoties rectæ b B in Calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad illam sit, ut τ α, ad $\frac{1}{2}P$; ut ad Propositiones præcedentes monitum est.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum Unius Quadrantis traduntur; eadem etiam ad Solida figuram Chordarum in Semicirculo spectantia transferentur; uti ad propositiones præcedentes monitum est.

PROP. XX.

A. Semicyclois, est, correspondentis Semicirculi Generantis, *Tripla*: Et
Fig. Partes, Partium (respective sumptarum,) *Triplæ*. Puta A τ α = 3 AD α;
166. & b β α A = 3 B α A. Et sic ubique.

C. Illorum vero Momenta, ad Momenta horum, respectu ejusdem τ α Tangentis, ut 5 ad 2; seu *Dupla-sesquialtera*.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in Semicycloide; quæ supra in Semicirculo (prop. 15.) & in Figura Sinuum versorum, (prop. 17.) determinantur.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus)

B. Semicycloidis A τ α; magnitudo, $\frac{3}{4}RP$: Momentum respectu τ α,
C. $\frac{5}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{5}{6}R$;
H. à TA, $\frac{1}{6}R$: Momentum respectu A α, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$; respectu T τ, $\frac{3}{16}RP^2+\frac{4}{3}R^3$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P-\frac{16R^2}{9P}$; à T τ, $\frac{1}{4}P+\frac{16R^2}{9P}$.

B. Complementi Semicycloidis, A τ T; Magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Momentum
C. respectu τ α, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$; distantia Centri gravitatis
H. à τ α, $\frac{3}{2}R$; à TA $\frac{1}{2}R$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{16}RP^2+\frac{4}{3}R^3$; respectu T τ, $\frac{1}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P+\frac{16R^2}{3P}$; à T τ, $\frac{1}{4}P-\frac{16R^2}{3P}$.

B. Portionis Semicycloidis b β α A, magnitudo $\frac{3}{2}fR$: Momentum respe-
D. ctu τ α, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{5}{12}shR$; respectu TA, $\frac{1}{4}fR^2-\frac{5}{12}shR$; distantia
I. Centri gravitatis a τ α, $\frac{5}{6}R+\frac{5sh}{18f}$; à TA, $\frac{1}{6}R-\frac{5sh}{18f}$: Momentum respectu A α, $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}s-\frac{4vR+2s^2}{9a+9s}=\frac{1}{2}f-\frac{4vR+2s^2}{9f}$.

B. Segmenti Semicycloidis b β τ, Magnitudo $\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR$: Momentum re-
E. spectu τ α, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$; & respectu TA, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2$
$+\frac{5}{12}shR$.

$+\frac{5}{12}shR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R-\frac{5sh}{18\alpha-18s}$; à TA, Fig. 166.

$\frac{7}{6}R+\frac{5sh}{18\alpha-18s}$: à T$\tau$, $\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}s+\frac{2h^2}{9\alpha-9s}$; momentum reſpectu I.

Tτ, $\frac{3}{4}a^2R-\frac{3}{2}asR+\frac{3}{4}s^2R+\frac{1}{3}h^2R$.

Trapezii b$\beta\alpha$V; Magnitudo $ah+\frac{1}{2}sh$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$ B.
$+\frac{1}{3}sh^2$; reſpectu TA, $2ahR+shR-\frac{1}{2}ah^2-\frac{1}{3}sh^2$; diſtantia Centri F.
gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3a+2s}{6a+3s}h$; à TA, $2R-\frac{3a+2s}{6a+3s}h$: Momentum re- K.
ſpectu Aα, $\frac{1}{2}fah+\frac{1}{6}s^2h$; diſtantia Centri gravitatis ab Aα,
$\frac{3fa+s^2}{6a+3s}$.

Segmenti Semicycloidis, bVA; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv$: Mo- B.
mentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; reſpectu F.
TA, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu bV, $\frac{1}{4}eR^2$
$+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
$\frac{-9eR^2+12avR+3svR+6as^2+4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à TA, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$;
à bV, $\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6sv}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, K. L.
$-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$; diſtantia Cen-
tri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-3asR-s^2R-3asv-2s^2v}{-6aR+6sR+12av+6sv}$.

Trilinei AbK; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$: Momentum reſpectu TA, B.
$\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{6}s^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR+\frac{1}{6}s^3$; reſpectu bV, G.
$-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{3}s^3$: diſtantia Centri gravitatis à TA,
$\frac{1}{2}R-\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à bV, $v-\frac{1}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$:
Momentum reſpectu Aα, $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$; K.
diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8vR^2+3a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$.

Adeoque exhibentur tum totius Semicycloidis, tum ejuſdem Partium M.
expoſitarum, Magnitudines, & Momenta reſpectu rectarum expo-
ſitarum, ipſaque Centra gravitatis.

Quæ autem de Momentis hic tradita ſunt; ad Ungularum magnitu-
dines, & Solidorum converſione factorum, facile transferuntur. Et
planorum hic conſideratorum momenta, (propter data ipſa Cen-
tra gravitatis,) reſpectu rectarum aliarum, quocunque ſitu poſita-
rum, facile haberi poſſunt.

Eademque omnia quæ de his expoſitis Cycloidis portionibus tra-
duntur; ad alias item, variis modis abſciſſas, facile erit accommo-
dare; additionibus & ſubductionibus, prout res poſtulaverit, ad-
hibitis.

Quæque de Cycloide primaria jam traduntur; Ad Cycloides Pro- N.
tractas & Contractas, facile transferuntur.

SI ſuper $\tau\alpha$ recta, inſiſtens Circulus (quem *Circulum Generantem*, ſeu *Geni-* A.
torem dicimus,) puncto ſui b (quod *punctum lineans* appellabimus) rectam in Fig. 166.
τ tangens; qui ſuper eadem recta volvi intelligatur (motu continuo & æquabili)

Fig. 166. peripheria ſua (continua ad rectam applicatione) commenſurans æqualem rectam τατ, donec b punctum lineans, in ſublime latum, (adeoque curvam ſuo motu deſcribens b b,) circuitu facto, eandem τατ rectam, (in ejuſdem altero extremo τ,) iterum contingat: (dum interim Centrum ſuum c, rectam c C c deſcribat, ipſi τατ parallelam & æqualem:) Curvam b b deſcriptam, *Lineam Cycloidem* appellabimus: Rectam τα, *Cycloidis Baſin*: Figuram curva illa & Baſe comprehenſam, ττA, *Figuram Cycloidem*: Ejuſque ſemiſſem τα A, *Semicycloidem*: Et biſecantem rectam (baſi perpendicularem) α C A, *Cycloidis Axem*.

Cycloidis autem Nomen, quod ſpectat; Videtur (mihi ſaltem) *Cyclois* (hoc eſt, Græce Κυκλοὶς, Κυκλοίδ☞,) potius quam *Cycloides* (hoc eſt, Κυκλοειδὴς, Κυκλοειδέ☞, contracte Κυκλοειδῆς,) dicenda: utpote quæ non tam *Circulo ſimilem*, quam *ex circulo oriundam*, lineam vel figuram indicat.

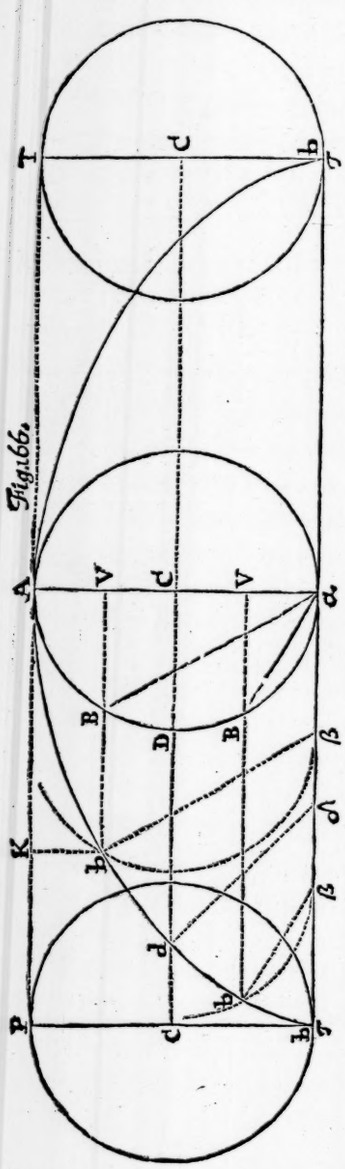


Fig. 166.

Fig. 167.

Manifeſtum autem eſt, (ex conſtructione Cycloidis,) non modo Peripheriam Circuli Generantis integram (propter continuam ſui quæ ſupponitur ad rectam τα applicationem) ipſi τα æqualem eſſe; (adeoque ſemiſſem ſemiſſi, &c. puta curvam Semicirculi α B A, rectæ τα, &c.) Sed &, particulatim, dum Circulus Genitor, Baſin in β contingens, puncto ſuo lineante deſignat Cycloidis punctum b; rectam τβ (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) curvæ b β æqualem eſſe; hoc eſt, (ducta recta b B V baſi parallela, quæ occurrat in B Circulo Genitori circa Cycloidis Axem conſtituto, Axique in V,) curvæ α B: Adeoque, & reliquam reliquæ; nempe rectam βα, hoc eſt b B, ipſi B A curvæ. Et ſic ubique.

Et propterea: Rectam b V, ubique æqualem eſſe, aggregato Arcus & Sinus recti, Sinui verſo V A competentium; puta (retentis Symbolis propoſitionum præcedentium) b V = B A + B V = *a* + *s*. Atque hoc indifferenter, ſive ſit V punctum, ſupra C Centrum circuli Generantis, ſive infra, ſive denique in ipſo C puncto.

Ductiſque B α, b β, rectis; ſunt (per 33. El. 6. *Euclidis*) Anguli B α A, proportionales ipſis quibus inſiſtunt Arcubus B A; hoc eſt, rectis b B, ſeu β α: Adeoque anguli B α τ, hoc eſt, b β τ, arcubus B α, ſeu b β; hoc eſt rectis β τ. Nempe, (propter angulum in centro duplum Anguli in Peripheria, per 20. El. 3.) Ut τ β recta, hoc eſt arcus, β b, ſeu α B, ad Semiperipheriam α B A, vel huic æqualem rectam τ α; ſic angulus b β τ, hoc eſt B α τ, ad A α τ rectum.

Diviſa itaque τ α in partes quotlibet æquales, in punctis φ, ε, δ, ζ, ξ, &c. ductiſque, ab his punctis contactus ad punctum lineans, rectis φ f, ε e, δ d, ζ z, ξ x, &c. (quibus parallelæ ſint in Semicirculo, α F, α E, α D, α Z, α X, &c. arcuum arithmetice proportionalium ſubtenſæ:) erunt, tum anguli f φ τ, e ε τ, d δ τ, z ζ τ, x ξ τ, &c. tum, his æquales, F α τ, E α τ, D α τ, Z α τ, X α τ, &c. arithmetice proportionales: Eorumque communis exceſſus, primo æqualis; puta f φ τ, vel F α τ; Nempe, ea pars anguli recti, quæ eſt τ φ, totius τ α; ſeu arcus F α, ſemiperipheriæ α F A.

Diviſis autem hoc modo, tum Semicycloide rectis f φ, e ε, d δ, &c. tum Semicirculo,

culo, rectis F α, E α, D α, &c. in ſegmenta numero æqualia, ſingula ſingulis reſpective correſpondentia: Ductiſque inſuper in Semicycloide, à punctis ξ, ζ, δ, &c. rectis ξ π, ζ ρ, δ σ, &c. quæ parallelæ ſint rectis ζ z, δ d, ε e, &c. Erunt anguli omnes x ξ π, z ζ ρ, d δ σ, &c. æquales, tum inter ſe, tum ipſi f φ τ, tum cuilibet angulorum τ α F, F α E, E α D, &c. qui item (propter æquales arcus α F, F E, E D, &c.) ſunt inter ſe æquales. Fig. 167.

Fig. 167.

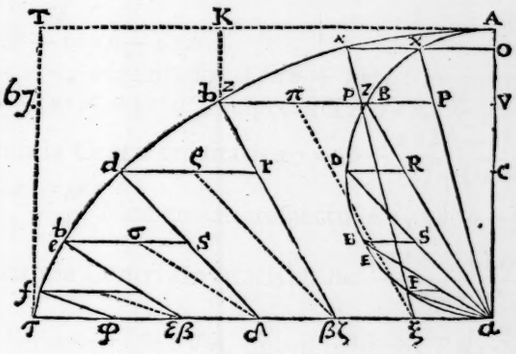
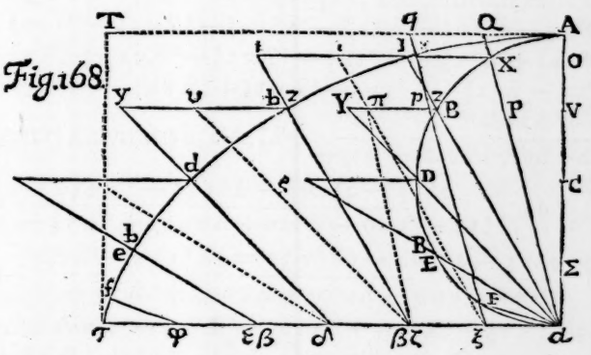


Fig. 168.



Ductis porro, tum in Semicycloide rectis x O, z p, d r, &c. tum in Semicirculo, X O, Z P, D R, &c. baſi τ α parallelis; inſcribatur, tum Semicycloidi, figura ex Trapeziis; tum Semicirculo, Figura ex Triangulis correſpondentibus conſtans.

Eruntque illa inſcripta Trapezia, Triangulorum inſcriptorum, ſingula ſingulorum reſpective ſumptorum, (adeoque & omnia omnium,) pluſquam Tripla.

Conſtat enim Trapeziorum illorum quodlibet, ex Triangulo ſimul & Parallelogrammo. Quorum illud eſt Triangulo ſibi correſpondenti in Semicirculo (fig. 167, ſeu 169.) ubique æquale; (quippe ſimili, & æque alto.) Hoc autem, illius pluſquam duplum; utpote correſpondenti in fig. 170. parallelogrammo æquale, (æque altum ſcilicet, & ſuper æquali baſe;) quod reſpectivi Trianguli pluſquam duplum eſſe, ad § A. prop. 17. oſtenſum eſt. Puta Triangulum π ξ p fig. 167, æquale Triangulo Z α P fig. 167 ſeu 169; & parallelogrammum z ζ ξ π, fig. 167, æquale (utpote æque altum & ſuper æquali baſe) Parallelogrammo correſpondenti z ζ ξ π fig. 170; quod Trianguli correſpondentis Z α P pluſquam duplum eſſe, ad § A. prop. 17. demonſtratur: Adeoque Totum z ζ ξ p Trapezium, ejuſdem π ξ p ſeu Z α p Trianguli pluſquam Triplum. Et ſic ubique.

Deinde continuatis rectis α X, α Z, α D, &c. ad Q, I, Y, &c. rectiſque ξ x, ζ z, δ d, &c. ad q, i, y, &c. rectiſque ξ π, ζ ρ, &c. ad ι, υ, &c. ductiſque rectis tum A Q q, X I, Z Y, &c. tum x ι ι, z υ y, &c. ipſi τ α parallelis: Circumſcribatur, tum Semicycloidi Figura ex Trapeziis, tum Semicirculo Figura ex Triangulis correſpondentibus conſtans. Fig. 168.

Eruntque illa circumſcripta Trapezia, circumſcriptorum Triangulorum, ſingula ſingulorum reſpective ſumptorum, (adeoque & omnia omnium,) minus quam Tripla.

Conſtat enim Trapeziorum horum quodlibet, ex Triangulo ſimul & parallelo-

Fig. 168, grammo. Quorum quidem illud est Triangulo ad Semicirculum posito, ubique æquale, (utpote simili, & æque alto :) Hoc autem, illius minus quam duplum ; utpote respectivo Parallelogrammo fig. 170. æquale, (cum æque altum sit, & super æquali base ;) quod Trianguli respectivi minus quam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostenditur. Puta, Triangulum ιξx fig. 168. æquale Triangulo Iαx fig. 168, seu 169. Et Parallelogrammum iζξι fig. 168. æquale Parallelogrammo iζξx fig. 170. adeoque minus quam Trianguli duplum, ut ad § A. prop. 17. ostenditur. Et propterea totum iζξx Trapezium, ejusdem IαX Trianguli minus quam Triplum. Ex sic ubique.

Fig. 166, 167, 168, 169. Cumque hæc ubique obtineant : Figura illa ex Trapeziis Inscripta sive toti Semicycloidi τbAα, sive ipsius portioni, ut τbβ, aut βbAα, aut etiam βbdδ ; (utrobique enim, sive de tota sive de parte, eodem modo procedit demonstratio ;) Major est quam Tripla Figuræ ex Triangulis correspondentis, Inscriptæ, sive toti Semicirculo αBA, sive ipsius correspondenti portioni, ut αBα, aut αBA, aut etiam αBDα : Circumscripta vero, Circumscriptæ, Minor quam Tripla.

Cumque, multiplicatis Sectionibus, Inscriptæ & Circumscriptæ Differentia continue decrescat utrobique, donec tandem data quavis minor evadat : Nec tamen unquam Inscripta Inscriptæ Minor quam Tripla, nec Circumscripta Circumscriptæ Major quam Tripla, esse possit : Continuata in infinitum sectione, evanescet differentia ; Inscriptis simul & Circumscriptis coincidentibus illic cum Semicycloide ejusve portione, hic cum Semicirculo hujusve portione correspondente : eritque propterea tum Semicyclois Semicirculi tripla, tum partes partium respective sumptarum.

Hoc est ; tum Semicyclois τbAα, Tripla Semicirculi αDA ; tum istius Portio, bβαVA, sectoris hujus BαA ; portioque reliqua τbβ, reliqui segmenti αβα ; portioque βbdδ, sectoris BαD, Tripla. Et sic ubique. Quod erat primo loco probandum.

Fig. 166, 169, 170. Est utique *Semicyclois*, Figura ex *Semicirculo* & *Figura Sinuum Versorum* (*Arcuumve*) composita. Quippe Recta quælibet bBV fig. 166. æqualis duabus simul bB, BV, fig. 170, 169. Et quidem, si ex Semicycloidis Trapeziis singulis (fig. 167. vel 168.) eximi intelligantur sua respective Triangula ; hoc est, ex Semicycloide quam constituunt illa numero infinita Trapezia, Semicirculus quem illa numero infinita Triangula, aut illis saltem æqualia, constituunt ; (protrusis rectis bB, ad rectam Aα ; ut puncta B, V, congruant : Reliqua Parallelogramma (prius inclinata, jam exemptis Triangulis erecta,) eadem erunt cum parallelogrammis (fig. 170.) correspondentibus, figuram Sinuum Versorum Arcuumve complentibus. Quod itaque *Trilineum Restitutum* dicimus ; propter parallelogramma, quæ in Semicycloide interpositis triangulis obliquabantur, in debitum situm restituta in Trilineo fig. 170. Quod quidem Trilineum aliud non est quam illud ipsum fig. 166, 167, 168. Trilineum Aτα D, (curva Cycloidis, & Semicirculi convexa, rectaque τα, comprehensum,) in debitum situm, exempto Semicirculo, restitutum.

Atque in partibus similiter : Puta, ex Trapeziis Quadrilineum βbAα in Semicycloide constituentibus, exemptis Triangulis Sectorem Trilineum BαA constituentibus (vel his æqualibus ;) reliqua Parallelogramma constituent Quadrilineum βbAα Trilinei restituti, aut huic æquale ; Hoc est, in Semicycloide, Quinquilineum bβαBA (tribus rectis bβ, βα, αB, & duabus curvis bA, BA, comprehensum ;) vel Quadrilineum bβαDA fig. 166. (tribus curvis bβ, bA, ADα, & recta βα, comprehensum ;) Sectoris BαA duplum : Adeoque (quod ex utrisque componitur) Quadrilineum Cycloidis βbAα, (rectis Aα, αβ, βb, curvaque bA, comprehensum,) ejusdem Sectoris BαA, triplum. Et sic ubique. Similiter ; Si ex Semicycloidis Segmento AbV, eximatur Segmentum Semicirculi ABV ; relinquitur AbB fig. 166. = AbB fig. 170. Et sic ubique. Quod & de eorum Momentis respectu rectarum τα, TA, aut aliarum hisce parallelarum, pariter intelligendum erit : Propter tum Magnitudines tum Distantias æquales. (Si vero ad Aα, aliamve rectam quæ ipsis τα, TA, parallela non sit, æstimentur momenta ; secus erit : Quippe tum, æqualium Magnitudinum, Distantiæ inæquales erunt. Ut infra dicendum erit.)

Et quidem, ut, in Cycloide, recta bBV (aggregatum arcus & sinus recti) ea quantitas est quam dicimus $f = a + s$: Sic, in Trilineo restituto (seu Figura Arcuum)

cuum) ſi Diametro A α deſcribatur circulus, quæ à b puncto ordinatim applicatur ad Axem A α, eſt a Arcus; quæ vero ad peripheriam ulteriorem continuetur eſt $a+s=f$; quæque peripheria propiore intercipitur eſt $a-s=e$, differentia arcus & ſinus recti ſinui verſo A V convenientium. (Puta, fig. 186, b B $=a+s=f$; fig. 185, b B $=a-s=e$; utrobique b V $=a$, B V $=s$.) Adeoque ſi, exempto illo Semicirculo, protruderentur illæ interceptæ rectæ uſque ad A α axem; quæ prodiret figura eſſet figura Differentiarum arcuum ſinuumque rectorum: Sicut, ex Semicycloide, exempto Semicirculo, figura Arcuum formabatur.

His ita conſtitutis; (Nempe Semicycloidem Semicirculi Triplam eſſe, & partes partium reſpective ſumptarum; vel quod eodem recidit, Semicycloidem Semicirculo & Figuræ Sinuum verſorum Arcuumve (hoc eſt, Trilineo reſtituto,) ſimul ſumptis æqualem, ejuſque partes partibus horum reſpective ſumptis:) ad calculum ſic procedimus: Retentis Symbolis propoſitionum præcedentium. B. Fig. 166, 170.

Eſt Semicirculus A D $\alpha=\frac{1}{4}RP$, (per § D. prop. 15.) & Trilineum reſtitutum τ A D α (iſtius duplum) $\frac{1}{2}RP$; per § B. prop. 17. Ergo Semicyclois (ejuſdem Triplum) τ A V $\alpha=\frac{3}{4}RP$. Adeoque Parallelogrammi reſiduum ſeu Semicycloidis complementum A τ T $=\frac{1}{4}RP$.

Item Sector B α A $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$ (per § H. prop. 15.) Trilinei reſtituti portio b $\beta\alpha$ B A $=aR+sR=fR$, per § B, prop. 17. Ergo Portio Cycloidis b $\beta\alpha$ V A $=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR=\frac{3}{2}fR$.

Item Segmentum Semicirculi reſiduum α B $\alpha=\frac{1}{4}RP-\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}\alpha R-\frac{1}{2}sR$, (per § G. prop. 15.) Ergo Segmentum Semicycloidis reſiduum b $\beta\tau=\frac{3}{4}RP-\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR=\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR$.

Item; Si, ex illa portione Semicycloidis b $\beta\alpha$ V A; auferatur tum parallelogrammum b $\beta\alpha$ B (= b $\beta\alpha$ B fig. 170.) $=ah$, tum Triangulum α B V $=\frac{1}{2}sh$; hoc eſt Trapezium b $\beta\alpha$ V $=ah+\frac{1}{2}sh=2aR-av+sR-\frac{1}{2}sv$: Relinquitur Semicycloidis ſegmentum A b V $=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv=\frac{3}{2}fR-ah-\frac{1}{2}sh$.

Vel etiam; propter A B V $=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) & A B b $=-eR+av$, (per § B. prop. 17.) erit A b V $=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv$.

Et, ſpeciatim, Segmentum A d C (propter $a=\frac{1}{4}P$, $s=v=R$,) $=R^2+\frac{1}{8}RP$.

Item, ſi ex Parallelogrammo A V b K $=fv$ (propter A V $=v$, & b V $=f$,) eximatur Segmentum illud A b V $=\frac{3}{2}fR-ah-\frac{1}{2}sh$: Relinquitur Trilineum A b K (ſeu ſegmenti A b V complementum) $fv-\frac{3}{2}fR+ah+\frac{1}{2}sh$; hoc eſt (reductione facta) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; Nempe, tantundem atque Semicirculi ſegmentum A B V, modo dictum. Fig. 166.

Porro, ſi intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus conſtitui, ut A α X, X α Z, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet) ex infinitis numero Triangulis figuram inſcriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. ſive ex C. Fig. 167, 168.

Fig. 173.

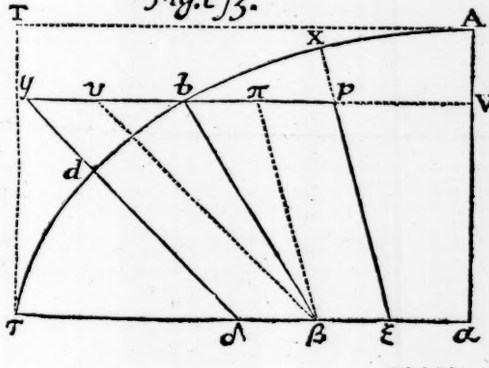


Fig. 174.

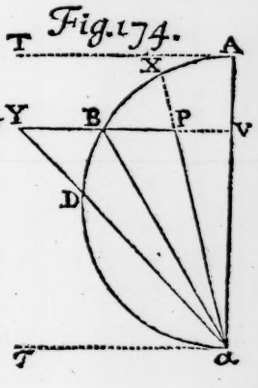


Fig. 167, 168, 173, 174. totidem Triangulis figuram circumſcriptam complentibus, ut $Q\alpha A$, $I\alpha X$, &c. aut etiam figuram inſcriptæ & circumſcriptæ intermediam (utpote partim inſcriptam, partim circumſcriptam) complentibus, ut $Y\alpha P$, &c. (quæ rectis αZ, &c. ut illorum axibus repræſententur:) Intelligenda erit ſimiliter Semicyclois ex totidem conſtitui Quadrilineis $A\alpha\xi x$, $x\xi\zeta z$, &c. vel etiam (quod eodem recidit, ſectione in infinitum continuata,) ex totidem Trapeziis figuram inſcriptam complentibus, ut $Ox\xi\alpha$, $pz\zeta\xi$, &c. aut circumſcriptam complentibus, ut $Aq\xi\alpha$, $xi\zeta\xi$, &c. aut quæ figuram partim inſcriptam partim circumſcriptam complent, ut $py\delta\xi$, &c. (quæ rectis $z\zeta$, &c. ut eorum axibus repræſententur.)

Cumque hæc Trapezia ſingula, ex Triangulo ſimul & Parallelogrammo conſiſtunt; quorum illud eſt reſpectivo Semicirculi Triangulo æquale, hoc autem reſpectivo Parallelogrammo Trilinei Reſtituti fig. 170. ſuntque in eiſdem ſive à $\tau\alpha$ ſive à TA diſtantiis: Trapezii cujuſque momentum ſive reſpectu rectæ $\tau\alpha$, ſive reſpectu rectæ TA, (aliarumve hiſce parallelarum,) æquabitur Momentis ſimul ſumptis eorundem quibus æquantur Trianguli Parallelogrammique.

Fig. 166, 167, 168, 170. Cumque hoc de ſingulis obtineat, obtinebit & de ſimul omnibus complentibus vel totam $A\tau\alpha$ Semicyloidem, vel ipſius portionem aliquam, ut $Ab\beta\alpha$, $b\beta\tau$, $b\beta\delta d$, &c. Puta Momentum Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, reſpectu rectæ $\tau\alpha$ vel TA, æquale erit momento Sectoris $B\alpha A$, & Quadrilinei fig. 170. $b\beta\alpha BA$, (reſpectu rectarum $\tau\alpha$ vel TA reſpective,) ſimul ſumptis.

Et ſimiliter oſtendetur, Momentum Segmenti Semicycloidis AbV, æquale momentis Segmenti Semicirculi ABV, & Segmenti Trilinei fig. 170. AbB, (reſpectu rectarum $\tau\alpha$, TA, vel hiſce parallelarum, reſpective,) ſimul. Æqualia ſiquidem ſunt, atque in eadem diſtantia.

Eſt autem Semicirculi $AD\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}$, (per §I. prop. 15.) Et momentum Trilinei Reſtituti, ejuſdem ſeſquialterum ſeu ut 3 ad 2, hoc eſt $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$. per §C. prop. 17. Semicycloidis igitur, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, momentum (utpote illis ſimul ſumptis æquale) ad illud Sectoris, ut 5 ad 2, hoc eſt $\frac{5}{8}R^2\mathcal{P}$. Cumque hujus magnitudo ſit (per §B.) $\frac{3}{4}R\mathcal{P}$; diſtantia centri gravitatis Semicycloidis à $\tau\alpha$, erit $\frac{5}{6}R$. Adeoque à TA, $\frac{7}{8}R$. Ejuſque reſpectu TA momentum (magnitudine in diſtantiam ducta) $\frac{7}{8}R^2\mathcal{P}$. (Quod æquale eſt momentis Semicirculi Trilineique Reſtituti, prop. 15. & 17. inventis, ſimul ſumptis) Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens $\tau\alpha$, eſt $\frac{5}{8}R^2\mathcal{P}$; aciemque habens TA, $\frac{7}{8}R^2\mathcal{P}$. Solidumque ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{5}{8}R\mathcal{P}^2$; & Semiſolidum, $\frac{5}{16}R\mathcal{P}^2$: Atque circa TA, Solidum $\frac{7}{8}R\mathcal{P}^2$: & Semiſolidum $\frac{7}{16}R\mathcal{P}^2$.

Atque ſi ex Parallelogrammi $AT\tau\alpha$ momento reſpectu $\tau\alpha$ vel TA, hoc eſt ex $R^2\mathcal{P}$, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{P}\times 2R = R\mathcal{P}$, diſtantiamque Centri gravitatis R;) auferatur Semicycloidis momentum jam inventum; habetur Complementi $A\tau T$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$; reſpectu TA, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$. Adeoque (propter magnitudinem modo inventam, $\frac{1}{4}R\mathcal{P}$,) Diſtantia Centri gravitatis ejuſdem à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R$; atque à TA, $\frac{1}{2}R$. Item Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$; aciemque habens TA, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$. Solidumque ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{3}{8}R\mathcal{P}^2$; & ſemiſolidum, $\frac{3}{16}R\mathcal{P}^2$: Atque circa TA, ſolidum $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2$; ſemiſolidum, $\frac{1}{16}R\mathcal{P}^2$.

D. Item Sectoris $B\alpha A$ momentum reſpectu $\tau\alpha$, eſt $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}sbR=\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$, per §M. prop. 15. Et Portionis Trilinei reſtituti $b\beta\alpha BA$, momentum $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR=\frac{3}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$, per §D. prop. 17. Ergo Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (utpote ex illis aggregatum,) $\frac{5}{4}fR^2+\frac{5}{12}sbR=\frac{5}{4}aR^2+\frac{25}{12}sR^2-\frac{5}{12}svR$. (Idemque eſt & Ungula Semiquadrantalis eidem inſiſtens, aciem habens $\tau\alpha$.) Adeoque (propter magnitudinem §B. inventam, $\frac{3}{2}fR=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR$) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt $\frac{5}{6}R+\frac{5sb}{18f}=\frac{15aR+25sR-5sv}{18a+18s}$: Atque à TA, $\frac{7}{8}R-\frac{5sb}{18f}=\frac{21aR+11sR+5sv}{18a+18s}$: Ejuſque reſpectu TA momentum, (vel Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens TA,) $\frac{7}{4}fR^2-\frac{5}{12}sbR=\frac{7}{4}aR^2+\frac{11}{12}sR^2+\frac{5}{12}svR$. Solidumque ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}aR\mathcal{P}+\frac{25}{12}sR\mathcal{P}-\frac{5}{12}sv\mathcal{P}$; & Semiſolidum $\frac{5}{8}aR\mathcal{P}+\frac{25}{24}sR\mathcal{P}-\frac{5}{24}sv\mathcal{P}$: Atque circa TA, Solidum

lidum $\frac{7}{4}aRP+\frac{11}{12}sRP+\frac{5}{12}svP$, & ſemiſolidum, $\frac{7}{8}aRP+\frac{11}{24}sRP+\frac{5}{24}svP$. Fig. 169, 170.

Similiter, Segmenti Semicirculi $\alpha B\alpha$, Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, eſt $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR$; & reſpectu TA, $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}shR$; per § N. prop. 15. Eſtque ſegmenti Trilinei Reſtituti $b\beta\tau$; Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR$; & reſpectu TA, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$; per § E. prop. 17. Ergo (quod ex utriſque aggregatum eſt) Segmenti Semicycloidis $b\beta\tau$, momentum (ſeu Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}\alpha R^2-\frac{5}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$; & reſpectu TA, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{5}{12}shR$. Hoc eſt (propter $\alpha=\frac{1}{2}P-a$, & $h=2R-v$,) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R^2P-\frac{5}{4}aR^2-\frac{25}{12}sR^2+\frac{5}{12}svR$; & reſpectu TA, $\frac{7}{8}R^2P-\frac{7}{4}aR^2-\frac{11}{12}sR^2-\frac{5}{12}svR$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR=\frac{3}{4}RP-\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR$,) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R-\frac{5sh}{18\alpha-18s}=\frac{5}{6}R-\frac{10sR-5sv}{9P-18a-18s}$: à TA, $\frac{7}{6}R+\frac{5sh}{18\alpha-18s}=\frac{7}{6}R+\frac{10sR-5sv}{9P-18a-18s}$. Solidumque ejuſdem circa $\tau\alpha$ converſione factum $\frac{5}{4}\alpha RP-\frac{5}{4}sRP-\frac{5}{12}shP=\frac{5}{8}RP^2-\frac{5}{4}aRP-\frac{25}{12}sRP+\frac{5}{12}svP$; & ſemiſolidum $\frac{5}{8}\alpha RP-\frac{5}{8}sRP-\frac{5}{24}shR=\frac{5}{16}RP^2-\frac{5}{8}aRP-\frac{25}{24}sRP+\frac{5}{24}svP$: Atque, circa TA, Solidum $\frac{7}{4}\alpha RP-\frac{7}{4}sRP+\frac{5}{12}shP=\frac{7}{8}RP^2-\frac{7}{4}aRP-\frac{11}{12}sRP-\frac{5}{12}svP$; & ſemiſolidum, $\frac{7}{8}\alpha RP-\frac{7}{8}sRP+\frac{5}{24}shP=\frac{7}{16}RP^2-\frac{7}{8}aRP-\frac{11}{24}sRP-\frac{5}{24}svP$.

Item, Segmenti Semicirculi BVA, Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu TA, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, & reſpectu bBV, $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$; per § L, R. prop. 15. Momentum autem Segmenti Trilinei bBA, reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu TA, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu bBV, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; per § F. prop. 17. Momentum igitur Segmenti Semicycloidis bVA, (vel Semiquadrantalis Ungula correſpondens,) reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu TA, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu bBV, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv$;) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^2+12avR+3svR+6as^2+4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à TA, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à bBV, $\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6sv}$. Solidum ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $-\frac{3}{4}eRP+avP+\frac{1}{4}svP+\frac{as^2P}{2R}+\frac{s^3P}{3R}$; & ſemiſolidum, $-\frac{3}{8}eRP+\frac{1}{2}avP+\frac{1}{8}svP+\frac{3as^2P}{12R}+\frac{2s^3P}{12R}$: Item circa TA, Solidum, $-\frac{1}{4}eRP+avP+\frac{3}{4}svP-\frac{as^2P}{2R}-\frac{s^3P}{3R}$; & ſemiſolidum, $-\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{2}avP+\frac{3}{8}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{6R}$: Denique circa bV, Solidum $\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{2}avP+\frac{3}{4}svP-\frac{as^2P}{2R}-\frac{s^3P}{6R}$; & ſemiſolidum, $\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{4}avP+\frac{3}{8}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{12R}$.

F.

Eadem habentur ope Trapezii $b\beta\alpha V$. Quippe ſi ex quadrilinei $b\beta\alpha A$ fig. 166. auferatur Trapezium $b\beta\alpha V$, reſtabit Semicycloidis ſegmentum bVA: Ejuſque momentum ex momento Quadrilinei ſubductum, relinquit ſegmenti bVA momentum, ſive reſpectu rectæ TA, ſive $\tau\alpha$; unde & reliqua conſequentur.

Eſt

Fig. 167, 168, 173, 174. totidem Triangulis figuram circumſcriptam complentibus, ut QαA, IαX, &c. aut etiam figuram inſcriptæ & circumſcriptæ intermediam (utpote partim inſcriptam, partim circumſcriptam) complentibus, ut YαP, &c. (quæ rectis αZ, &c. ut illorum axibus repræſententur:) Intelligenda erit ſimiliter Semicyclois ex totidem conſtitui Quadrilineis A$\alpha\xi$x, x$\xi\zeta$z, &c. vel etiam (quod eodem recidit, ſectione in infinitum continuata,) ex totidem Trapeziis figuram inſcriptam complentibus, ut O x$\xi\alpha$, p z$\zeta\xi$, &c. aut circumſcriptam complentibus, ut A q$\xi\alpha$, x i$\zeta\xi$, &c. aut quæ figuram partim inſcriptam partim circumſcriptam complent, ut p y$\delta\xi$, &c. (quæ rectis zζ, &c. ut eorum axibus repræſententur.)

Cumque hæc Trapezia ſingula, ex Triangulo ſimul & Parallelogrammo conſiſtunt; quorum illud eſt reſpectivo Semicirculi Triangulo æquale, hoc autem reſpectivo Parallelogrammo Trilinei Reſtituti fig. 170. ſuntque in eiſdem ſive à $\tau\alpha$ ſive à TA diſtantiis: Trapezii cujuſque momentum ſive reſpectu rectæ $\tau\alpha$, ſive reſpectu rectæ TA, (aliarumve hiſce parallelarum,) æquabitur Momentis ſimul ſumptis eorundem quibus æquantur Trianguli Parallelogrammique.

Fig. 166, 167, 168, 170. Cumque hoc de ſingulis obtineat, obtinebit & de ſimul omnibus complentibus vel totam A$\tau\alpha$ Semicyloidem, vel ipſius portionem aliquam, ut A b$\beta\alpha$, b$\beta\tau$, b$\beta\delta$d, &c. Puta Momentum Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, reſpectu rectæ $\tau\alpha$ vel TA, æquale erit momento Sectoris BαA, & Quadrilinei fig. 170. b$\beta\alpha$BA, (reſpectu rectarum $\tau\alpha$ vel TA reſpective,) ſimul ſumptis.

Et ſimiliter oſtendetur, Momentum Segmenti Semicycloidis A b V, æquale momentis Segmenti Semicirculi ABV, & Segmenti Trilinei fig. 170. AbB, (reſpectu rectarum $\tau\alpha$, TA, vel hiſce parallelarum, reſpective,) ſimul. Æqualia ſiquidem ſunt, atque in eadem diſtantia.

Eſt autem Semicirculi ADα, reſpectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}R^2\mathcal{P}$, (per §I. prop. 15.) Et momentum Trilinei Reſtituti, ejuſdem ſeſquialterum ſeu ut 3 ad 2, hoc eſt $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$. per §C. prop. 17. Semicycloidis igitur, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, momentum (utpote illis ſimul ſumptis æquale) ad illud Sectoris, ut 5 ad 2, hoc eſt $\frac{5}{8}R^2\mathcal{P}$. Cumque hujus magnitudo ſit (per §B.) $\frac{3}{4}R\mathcal{P}$; diſtantia centri gravitatis Semicycloidis à $\tau\alpha$, erit $\frac{5}{6}R$. Adeoque à TA, $\frac{7}{8}R$. Ejuſque reſpectu TA momentum (magnitudine in diſtantiam ducta) $\frac{7}{8}R^2\mathcal{P}$. (Quod æquale eſt momentis Semicirculi Trilineique Reſtituti, prop. 15. & 17. inventis, ſimul ſumptis) Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens $\tau\alpha$, eſt $\frac{5}{8}R^2\mathcal{P}$; aciemque habens TA, $\frac{7}{8}R^2\mathcal{P}$. Solidumque ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{5}{8}R\mathcal{P}^2$; & Semiſolidum, $\frac{5}{16}R\mathcal{P}^2$: Atque circa TA, Solidum $\frac{7}{8}R\mathcal{P}^2$: & Semiſolidum $\frac{7}{16}R\mathcal{P}^2$.

Atque ſi ex Parallelogrammi AT$\tau\alpha$ momento reſpectu $\tau\alpha$ vel TA, hoc eſt ex $R^2\mathcal{P}$, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{P}\times 2R = R\mathcal{P}$, diſtantiamque Centri gravitatis R;) auferatur Semicycloidis momentum jam inventum; habetur Complementi AτT, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$; reſpectu TA, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$. Adeoque (propter magnitudinem modo inventam, $\frac{1}{4}R\mathcal{P}$,) Diſtantia Centri gravitatis ejuſdem à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R$; atque à TA, $\frac{1}{2}R$. Item Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$; aciemque habens TA, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$. Solidumque ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{3}{8}R\mathcal{P}^2$; & ſemiſolidum, $\frac{3}{16}R\mathcal{P}^2$: Atque circa TA, ſolidum $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2$; ſemiſolidum, $\frac{1}{16}R\mathcal{P}^2$.

D. Item Sectoris BαA momentum reſpectu $\tau\alpha$, eſt $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}sbR=\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$, per §M. prop. 15. Et Portionis Trilinei reſtituti b$\beta\alpha$BA, momentum $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR=\frac{3}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$, per §D. prop. 17. Ergo Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (utpote ex illis aggregatum,) $\frac{5}{4}fR^2+\frac{5}{12}sbR=\frac{5}{4}aR^2+\frac{25}{12}sR^2-\frac{5}{12}svR$. (Idemque eſt & Ungula Semiquadrantalis eidem inſiſtens, aciem habens $\tau\alpha$.) Adeoque (propter magnitudinem §B. inventam, $\frac{3}{2}fR=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR$) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt $\frac{5}{6}R+\frac{5sb}{18f}=\frac{15aR+25sR-5sv}{18a+18s}$: Atque à TA, $\frac{7}{8}R-\frac{5sb}{18f}=\frac{21aR+11sR+5sv}{18a+18s}$: Ejuſque reſpectu TA momentum, (vel Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens TA,) $\frac{7}{4}fR^2-\frac{5}{12}sbR=\frac{7}{4}aR^2+\frac{11}{12}sR^2+\frac{5}{12}svR$. Solidumque ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}aR\mathcal{P}+\frac{25}{12}sR\mathcal{P}-\frac{5}{12}sv\mathcal{P}$; & Semiſolidum $\frac{5}{8}aR\mathcal{P}+\frac{25}{24}sR\mathcal{P}-\frac{5}{24}sv\mathcal{P}$: Atque circa TA, Solidum

lidum $\frac{7}{4}aRP+\frac{11}{12}sRP+\frac{5}{12}svP$, & ſemiſolidum, $\frac{7}{8}aRP+\frac{11}{24}sRP+\frac{5}{24}svP$. Fig. 169, 170. E.

Similiter, Segmenti Semicirculi $\alpha B\alpha$, Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, eſt $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR$; & reſpectu TA, $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}shR$; per § N. prop. 15. Eſtque ſegmenti Trilinei Reſtituti $b\beta\tau$; Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR$; & reſpectu TA, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{5}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$; per § E. prop. 17. Ergo (quod ex utriſque aggregatum eſt) Segmenti Semicycloidis $b\beta\tau$, momentum (ſeu Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}\alpha R^2-\frac{5}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$; & reſpectu TA, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{5}{12}shR$. Hoc eſt (propter $\alpha=\frac{1}{2}P-a$, & $h=2R-v$,) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R^2P-\frac{5}{4}aR^2-\frac{25}{12}sR^2+\frac{5}{12}svR$; & reſpectu TA, $\frac{7}{8}R^2P-\frac{7}{4}aR^2-\frac{11}{12}sR^2-\frac{5}{12}svR$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR=\frac{3}{4}RP-\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR$,) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R-\frac{5sh}{18\alpha-18s}=\frac{5}{6}R-\frac{10sR-5sv}{9P-18a-18s}$: à TA, $\frac{7}{6}R+\frac{5sh}{18\alpha-18s}=\frac{7}{6}R+\frac{10sR-5sv}{9P-18a-18s}$. Solidumque ejuſdem circa $\tau\alpha$ converſione factum $\frac{5}{4}\alpha RP-\frac{5}{4}sRP-\frac{5}{12}shP=\frac{5}{8}RP^2-\frac{5}{4}aRP-\frac{25}{12}sRP+\frac{5}{12}svP$; & ſemiſolidum $\frac{5}{8}\alpha RP-\frac{5}{8}sRP-\frac{5}{24}shR=\frac{5}{16}RP^2-\frac{5}{8}aRP-\frac{25}{24}sRP+\frac{5}{24}svP$: Atque, circa TA, Solidum $\frac{7}{4}\alpha RP-\frac{7}{4}sRP+\frac{5}{12}shP=\frac{7}{8}RP^2-\frac{7}{4}aRP-\frac{11}{12}sRP-\frac{5}{12}svP$; & ſemiſolidum, $\frac{7}{8}\alpha RP-\frac{7}{8}sRP+\frac{5}{24}shP=\frac{7}{16}RP^2-\frac{7}{8}aRP-\frac{11}{24}sRP-\frac{5}{24}svP$.

Item, Segmenti Semicirculi BVA, Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu TA, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, & reſpectu bBV, $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$; per § L, R. prop. 15. Momentum autem Segmenti Trilinei bBA, reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu TA, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu bBV, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; per § F. prop. 17. Momentum igitur Segmenti Semicycloidis bVA, (vel Semiquadrantalis Ungula correſpondens,) reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu TA, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu bBV, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv$;) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^2+12avR+3svR+6as^2+4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à TA, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à bBV, $\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6sv}$. Solidum ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $-\frac{3}{4}eRP+avP+\frac{1}{4}svP+\frac{as^2P}{2R}+\frac{s^3P}{3R}$; & ſemiſolidum, $-\frac{3}{8}eRP+\frac{1}{2}avP+\frac{1}{8}svP+\frac{3as^2P+2s^3P}{12R}$: Item circa TA, Solidum, $-\frac{1}{4}eRP+avP+\frac{3}{4}svP-\frac{as^2P}{2R}-\frac{s^3P}{3R}$; & ſemiſolidum, $-\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{2}avP+\frac{3}{8}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{6R}$: Denique circa bV, Solidum $\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{2}avP+\frac{3}{4}svP-\frac{as^2P}{2R}-\frac{s^3P}{6R}$; & ſemiſolidum, $\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{4}avP+\frac{3}{8}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{12R}$. F.

Eadem habentur ope Trapezii $b\beta\alpha V$. Quippe ſi ex quadrilinei $b\beta\alpha A$ fig. 166. auferatur Trapezium $b\beta\alpha V$, reſtabit Semicycloidis ſegmentum bVA: Ejuſque momentum ex momento Quadrilinei ſubductum, relinquit ſegmenti bVA momentum, ſive reſpectu rectæ TA, ſive $\tau\alpha$; unde & reliqua conſequentur.

Eſt

Fig. 166, 170. Eſt autem Trianguli B V α, magnitudo $\frac{1}{2}sh$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2$; reſpectu T A, $shR-\frac{1}{3}sh^2$; per § M. prop. 15. Et parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, magnitudo ah; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$; reſpectu T A, $2ahR-\frac{1}{2}ah^2$: per § F. prop. 17. Ergo Trapezii b $\beta\alpha$ V, magnitudo, $ah+\frac{1}{2}sh$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2+\frac{1}{3}sh^2$; reſpectu T A, $2ahR+shR-\frac{1}{2}ah^2-\frac{1}{3}sh^2$. Quæ reſpective ſubducta ex Quadrilinei b $\beta\alpha$ A, magnitudine & momentis § D. traditis: Relinquunt Segmenti b V A magnitudinem $\frac{3}{2}fR-ah-\frac{1}{2}sh=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, (vel correſpondens Ungula,) $\frac{5}{4}fR^2+\frac{5}{12}shR-\frac{1}{2}ah^2-\frac{1}{3}sh^2=-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+2avR+\frac{11}{12}svR-\frac{1}{2}av^2-\frac{1}{3}sv^2=-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; reſpectu T A, $\frac{7}{4}fR^2-\frac{5}{12}shR-2ahR-shR+\frac{1}{2}ah^2+\frac{1}{3}sh^2=-\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{12}svR+\frac{1}{2}av^2+\frac{1}{3}sv^2=-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$. Unde reliqua deducentur ut prius. Trapeziique Diſtantia Centri gravitatis (momento per magnitudinem diviſo) à $\tau\alpha$, $\frac{3a+2s}{6a+3s}h$; à T A, $2R-\frac{3a+2s}{6a+3s}h$.

G. Si vero, ex Parallelogrammi A V b K momentis, eximantur momenta ſegmenti A b V; relinquentur Momenta reſpectiva Trilinei A b K.

Eſt autem, (propter A V $=v$, b V $=f$, Diſtantiamque Centri gravitatis ab A α, vel b K, $\frac{1}{2}f$; ab A K, vel b V, $\frac{1}{2}v$; adeoque ab $\alpha\tau$, $\frac{1}{2}v+h=2R-\frac{1}{2}v$;) Parallelogrammi magnitudo, fv; momentum reſpectu A α vel b K, $\frac{1}{2}f^2v$; reſpectu A T vel b V, $\frac{1}{2}fv^2=fvR-\frac{1}{2}fs^2$; reſpectu $\alpha\tau$, $2fvR-\frac{1}{2}fv^2=\frac{1}{2}fv^2+fvh=\frac{1}{2}fv^2+fs^2=fvR+\frac{1}{2}fs^2$.

Si itaque ex $\frac{1}{2}fv^2=fvR-\frac{1}{2}fs^2=avR+svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{2}s^3$, auferatur ſegmenti A b V momentum reſpectu T A (modo inventum) $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; habetur $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{6}s^3$, momentum Trilinei AbK reſpectu T A. Ideoque, propter magnitudinem (§ B inventam) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{6eR+6sv}=\frac{1}{2}R-\frac{s^3}{3eR+3sv}$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à b V, $\frac{3}{2}R-h(=v-\frac{1}{2}R)+\frac{s^3}{3eR+3sv}$; & (reſtituendo magnitudinem) momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR+\frac{1}{6}s^3$; & reſpectu b V, $\frac{1}{2}evR+\frac{1}{2}sv^2-\frac{1}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{6}s^3=-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{3}s^3$ (propter $\frac{1}{2}evR=\frac{1}{2}avR-\frac{1}{2}svR$, & $\frac{1}{2}sv^2=svR-\frac{1}{2}s^3$.) Vel etiam, ex momentis Parallelogrammi A V b K, $fvR+\frac{1}{2}fs^2$ & $fvR-\frac{1}{2}fs^2$ (modo traditis,) hoc eſt, ex $avR+svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{2}s^3$, & $avR+svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{2}s^3$; ſubductis momentis ſegmenti A b V, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$, modo inventis; Habetur Momentum Trilinei A b K, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR+\frac{1}{6}s^3$; &, reſpectu b V, $-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{3}s^3$; ut prius.

H. Atque hactenus Semicycloidis, partiumque illius, Momenta & Ungulas, conſideravimus duntaxat prout ad rectas $\tau\alpha$, T A, aut huic parallelas reſpectum habent. Quæ quidem, (propter eandem à rectis illis diſtantiam Parallelogrammorum b $\beta\xi\pi$, ſive ut inclinata jacent in Semicycloide fig. 167, 168. ſive ut erecta in Trilineo reſtituto fig. 170. Et Triangulorum ſimiliter, ut $\pi\xi$ p ſeu B α P, fig. 167, 168. eiſque æqualium B α P, fig. 169.) alia non ſunt quam aggregata partium correſpondentium in Semicirculo, & Trilineo Reſtituto, fig. 169, 170. Et Momenta Ungulæque quæ Semicycloidem ſpectant, reſpectivorum Momentorum Ungularumque aggregata, Semicirculum Trilineumque illud reſpective ſpectantium.

Verum ſi ad rectam A α, aliamve ipſis $\tau\alpha$, T A, non parallelam exigantur; ſive ut Ungularum aciem ſive ut librationis axem: Quoniam alia eſt inde diſtantia Parallelogrammorum in Semicycloide inclinatorum, atque erectorum in Trilineo Reſti-

Reſtituto ; altiore adhuc indagine opus erit, quo diſtantiarum variatarum juſta ratio habeatur.

Intelligatur itaque, ut prius, tum Semicirculus in minuta Triangula, ut Y α P, tum Semicyclois in totidem Trapezia correſpondentia, ut y δ ξ p, diſtribui ; quæ figuram utrobique inſcriptæ & circumſcriptæ intermediam (utpote partim inſcriptam partim circumſcriptam) compleant. Quæ ſuis Axibus ſeu Diametris B α, b β repræſentari intelligantur. In quibus itaque rectis ſua reſpective Centra gravitatis conſtituta fore, conſtat (ex prop. 5. hujus,) ſaltem inde diſtare diſtantia quæ data quavis minor ſit ; quæque ſectione in infinitum continuata evaneſcet. Cumque ex præmonſtratis (§ A,) Trapeziorum illorum quodvis ex Triangulo conſtat, reſpectivo Semicirculi Triangulo æquali, & Parallelogrammo ejuſdem Trianguli duplo, (utpote æquali reſpectivo Trilinei reſtituti Parallelogrammo :) Intelligatur Trapezii Triangulum illud, ut υ β π, (ipſi Y α P ſimile & æquale,) utrinque ad b β poſitum, (per cujus itaque Centrum gravitatis tranſire intelligatur b β recta ;) adeoque Parallelogrammum (Trapezii reliquum) in duo Parallelogramma dimidia dirimere, ut υ β δ y, π β ξ p. Per cujus itaque bipartiti Parallelogrammi, ſeu duorum Parallelogrammorum ſimul ſumptorum, commune Centrum gravitatis non minus tranſibit b β recta, quam ſi, exempto Triangulo, (quod in Trilineo reſtituto fit,) utrinque eidem b β rectæ adjacerent dimidia illa Parallelogramma, utrinque jam æqualiter remota. Quanquam enim in ſectione definita, major ſit B Y quam B P, & b υ quam b π ; ſectione tamen in infinitum continuata ; differentia illa in æqualitatem ſenſim evaneſcit ; ut ex præmonſtratis patet. Fig. 166, 168, 173, 174.

Re ſic conſtructa ; Momentum Trapezii cujuſvis, ut y δ ξ P, ad momentum correſpondentis Trianguli, ut Y α P, reſpectu ejuſdem A α, (adeoque & Ungula ſuper illo, ad Ungulam ſuper hoc, quæ communem Aciem habeant A α ; Solidumque illius ad Solidum hujus converſione circa A α factum ;) eſt in ratione quæ componitur ex magnitudinis ad magnitudinem ratione, (hoc eſt, ſectione in infinitum continuata, ut 3 ad 1, per § A ;) atque ex ratione Diſtantiæ Centri gravitatis illius, ad Diſtantiam Centri gravitatis hujus, ab eadem A α recta.

Eſt autem Centrum gravitatis Trianguli Y α P, in ipſa α B ; ejuſque ab α diſtantia eſt $\frac{2}{3}$ α B, (per § C. prop. 6. hujus ;) adeoque ab A α diſtantia eſt $\frac{2}{3}$ B V = $\frac{2}{3}$ *s*, & à τ α, $\frac{2}{3}$ V α = $\frac{2}{3}$ *b*.

Trapezii vero y δ ξ p, Centrum gravitatis in b β poſitum, à β diſtat $\frac{2}{5}$ β b. Cum enim Trianguli υ β π centrum, à β diſtet $\frac{2}{3}$ β b ; & parallelogrammi bipartiti ſeu ex duobus compoſiti, β y, β p, centrum à β diſtet $\frac{1}{2}$ β b ; per 6 hujus ; ſitque utrumque in β b recta, ut modo oſtenſum eſt : Horum ab invicem diſtantia erit $\frac{1}{6}$ β b = $\frac{2}{3}$ β b − $\frac{1}{2}$ β b : Hæc itaque centrorum ab invicem diſtantia, diviſa in magnitudinum, quæ ſunt ut 1 ad 2, ratione reciproca ; pro communi utriuſque, hoc eſt ipſius Trapezii centro gravitatis, ſuperaddit diſtantiæ Centri Parallelogrammi à puncto β, trientem ipſius $\frac{1}{6}$ β b, hoc eſt $\frac{1}{18}$ β b ; per 27. cap. præced. Nam, ut 3 = 2 + 1, ad 1 ; ſic $\frac{1}{6}$ β b, ad $\frac{1}{18}$ β b. Adeoque, propter $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{18}$ = $\frac{10}{18}$ = $\frac{5}{9}$, Trapezii centrum gravitatis, in β b poſitum, à β diſtabit, $\frac{5}{9}$ β b.

Et propterea, ejuſdem à τ α diſtantia erit $\frac{5}{9}$ V α = $\frac{5}{9}$ *b* ; & ab A α diſtantia b B (= β α = B A) + $\frac{5}{9}$ B V, (ut ex Schematis inſpectu facile conſtabit ;) hoc eſt *a* + $\frac{5}{9}$ *s*.

Ratio itaque diſtantiarum Centrorum gravitatis Trapezii y δ ξ p, & Trianguli Y α P, ab eadem A α ; nempe b B + $\frac{2}{9}$ B V ad $\frac{2}{3}$ B V, ſeu *a* + $\frac{5}{9}$ *s* ad $\frac{2}{3}$ *s* ; cum ratione magnitudinum 3 ad 1 (multiplicando) compoſita ; exhibet rationem momentorum 3 b B + $\frac{2}{3}$ B V ad $\frac{2}{3}$ B V, ſeu 3 *a* + $\frac{5}{3}$ *s* ad $\frac{2}{3}$ *s*. Hoc eſt, Momentum Trapezii y δ ξ p, in ſuo ſitu, ad momentum Trianguli Y α P in ſuo, reſpectu ejuſdem A α rectæ ; eſt ut Trianguli illius in diſtantia 3 b B + $\frac{2}{3}$ B V ſuſpenſi momentum, ad ejuſdem ſuſpenſi in diſtantia $\frac{2}{3}$ B V, (hoc eſt, in ſuo ſitu,) momentum reſpectu ejuſdem A α. Hoc eſt (propter eandem Trianguli magnitudinem) ut diſtantia 3 b B + $\frac{2}{3}$ B V, ad diſtantiam $\frac{2}{3}$ B V. Hoc eſt, ut $\frac{2}{3}$ B V ad $\frac{2}{3}$ B V (ſeu ut 5 ad 2,) atque inſuper ut 3 b B ad $\frac{2}{3}$ B V, ſeu 9 b B ad 2 B V. Hoc eſt ; ut 5 ad 2, atque inſuper ut 9 *a* ad 2 *s*.

Quod quidem cum ubique fiat : Ratio momenti Trapeziorum ſimul omnium, ſive quæ totam Semicycloidem, ſive quæ ipſius Portionem ut b β α A, complent ; (quippe de partibus perinde procedit demonſtratio atque de totis ;) ad momentum omnium Triangulorum complentium vel totum Semicirculum, vel ipſius Portio-

Fig. 166, 168, 173, 174. nem, ut B α A, respective; ea est quam habent omnium illorum triangulorum ut Y α P, in distantiis respective 3 b B + $\frac{5}{3}$ B V suspensorum momenta, ad momenta eorundem in distantiis respective $\frac{2}{3}$ B V suspensorum; seu, ut omnia Y α P in $\frac{5}{3}$ BV, ad eadem in $\frac{2}{3}$ B V respective ducta, atque insuper ut eadem omnia Y α P in 3 b B, ad eadem in $\frac{2}{3}$ B V respective.

Cumque sit eadem ubique ratio trianguli, ut Y α P, in $\frac{5}{3}$ B V, ad idem in $\frac{2}{3}$ B V; adeoque & omnium ad omnia; nempe ut 5 ad 2: Sed non eadem ubique ratio Trianguli, ut Y α P, in 3 b B; ad idem in $\frac{2}{3}$ B V; propter tum Triangulorum super æquales bases inæqualem altitudinem, tum aliam atque aliam rationem b B ad B V, hoc est, arcus ad sinum: Propterea, rationi 5 ad 2; alia consocianda est; Quam nempe habeant omnia respective triangula ut Y α P in 3 b B, ad eadem in $\frac{2}{3}$ B V; seu, quam habent omnia in 9 b B, ad eadem in 2 B V, respective: Hoc est, Quam habet *Noncuplum omnium* b B, seu β α, (hoc est B A arcuum arithmetice proportionalium,) aut his æqualium β ζ Triangulum α τ t fig. 170. complentium, *in respectiva Triangula* Y α P, seu (propter æquales omnium bases) *Triangulorum altitudines* V α respectivas, (hoc est, sinus versos arcuum B α, qui cum B A complent Semicirculum,) seu in, ipsis æquales, b β, seu *minuta parallelogramma* his proportionalia figuram Sinuum Versorum seu Trilineum Restitutum fig. 170. complentia: Ad *Duplum omnium* B V (Sinuum Rectorum eorundem arcuum BA,) aut his æqualium β υ (complentium τ α υ figuram Sinuum rectorum totius Semicirculi fig. 170.) in *eadem respective Triangula* seu Triangulorum *Altitudines*, aut *minuta Parallelogramma* ipsis Proportionalia: Hoc est (in Trilineo Restituto fig. 170.) quam habet *Noncuplum* omnium b β in β ζ, ad *Duplum* eorundem b β in β υ, respective.

Fig. 170. At b β, in β ζ seu β α ducta, exhibet ipsius b β momentum respectu A α; adeoque omnes b β in respectivas β ζ seu β α, exhibent respectu ejusdem A α, momenta omnium b β, hoc est momentum Trilinei A τ α; Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ζ, est Noncuplum Momenti Trilinei A τ α respectu A α. Et similiter in portionibus: Puta, Noncuplum omnium b β portionem b β α B A complentium, in respectivas β ζ seu β α ductarum, (hoc est *omnia 9 a h*, portionem b β α B A spectantia,) est Noncuplum momenti portionis b β α B A, respectu ejusdem A α.

Fig. 168, 169, 170. Atque omnes eædem b β in β υ fig. 170. seu in B V fig. 168, 169. Exhibent *Triplum* Momenti Semicirculi A D α, aut ipsius Sectoris B α A, (prout de Triangulis totum Semicirculum, aut ipsius tantum Sectorem complentibus, intelligatur,) respectu Diametri A α; per § A. prop. 18.

Adeoque *Duplum* omnium b β in β υ, est *Sextuplum* momenti Semicirculi α D A respectu ipsius A α: Atque, in partibus similiter, respective sumptis.

Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ζ, ad *Duplum* earundem b β in β υ, est ut *Noncuplum* momenti Trilinei Restituti A τ α, (ejusve portionis b β α B A,) fig. 170. respectu rectæ A α; ad *Sextuplum* momentum Semicirculi A D α, (ejusve Sectoris respectivi B α A,) respectu Diametri A α: Vel, ut *Triplum* momenti illius, ad *Duplum* momenti hujus.

Est autem (per § G. prop. 17.) Trilinei Restituti A τ α fig. 170. momentum respectu A α, $\frac{1}{8} R P^2 - 2 R^3$; adeoque hujus Triplum $\frac{3}{8} R P^2 - 6 R^3$: Et momentum Semicirculi, respectu A α, per § Q. prop. 15. $\frac{2}{3} R^3$; hujusque Duplum $\frac{4}{3} R^3$. Est ergo Triplum illud ad Duplum hoc; ut $\frac{3}{8} R P^2 - 6 R^3$, ad $\frac{4}{3} R^3$; hoc est, $9 R P^2 - 144 R^3$, ad $32 R^3$: Seu ut $9 P^2 - 144 R^2$ ad $32 R^2$. Atque hæc demum ratio (ut supra ostensum est) rationi 5 ad 2, hoc est 80 R^2 ad 32 R^2 conjuncta; exhibet rationem momenti Semicycloidis A τ α, ad momentum Semicirculi A D α, respectu ejusdem A α rectæ; nempe, ut $9 P^2 - 64 R^2$ ad $32 R^2$. Cum itaque momentum illud Semicirculi sit $\frac{2}{3} R^3$: Erit Semicycloidis momentum respectu A α (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $\frac{9P^2 - 64R^2}{48} R = \frac{3}{16} R P^2 - \frac{4}{9} R^3$.

Atque hoc Momentum per Semicycloidis magnitudinem $\frac{3}{4} R P$ (§ B.) divisum; exhibet ejusdem ab A α Centri gravitatis distantiam, $\frac{1}{4} P - \frac{16 R^2}{9 P}$; adeoque, à τ T, $\frac{1}{4} P + \frac{16 R^2}{9 P}$; & (restituendo magnitudinem,) ejusdem respectu τ T momentum

$\frac{3}{16} R P^2$

$\frac{3}{16}RP^3+\frac{4}{3}R^3$. Solidumque converſione factum (utpote ad Ungulam ut P ad R,) circa Aα, $\frac{3}{16}P^3-\frac{4}{3}R^2P$; & circa τT, $\frac{3}{16}P^3+\frac{4}{3}R^2P$: Semiſolidaque horum dimidia. Fig. 168, 169, 170.

Eademque Momenta, ex reſpectivis Parallelogrammi A$\alpha\tau$T momentis, hoc eſt, (propter $\tau\alpha=\frac{1}{2}P$, & A$\alpha=2R$, diſtantiamque Centri gravitatis ſive à τT ſive ab Aα, $\frac{1}{2}\tau\alpha=\frac{1}{4}P$,) ex $\frac{1}{4}RP^2$, ſubducta; relinquunt Complementi Semicycloidis AτT, momentum reſpectu Aα (ſeu correſpondentem Ungulam Semiquadrantalem) $\frac{1}{16}RP^2+\frac{4}{3}R^3$; & reſpectu τT, $\frac{1}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$: (Et Solida Semiſolidaque correſpondentia, ad hæc Momenta Ungulaſve, ut P ſeu $\frac{1}{2}P$, ad R:) Eademque momenta Complementi Semicycloidis per magnitudinem, $\frac{1}{4}RP$ (per § B.) diviſa; exhibent ejuſdem ab Aα diſtantiam Centri gravitatis $\frac{1}{4}P+\frac{16R^2}{3P}$; & à τT, $\frac{1}{4}P-\frac{16R^2}{3P}$.

Similiter, in Semicycloidis portione b$\beta\alpha$V A. Momentum hujus, ad momentum Sectoris in Semicirculo correſpondentis, BαA, reſpectu ipſius Aα, (ut modo oſtenſum eſt,) eſt ut 5 ad 2; atque inſuper, ut *Triplum* momenti correſpondentis Portionis Trilinei reſtituti, b$\beta\alpha$BA, ad *Duplum* momenti Sectoris Semicirculi BαA; reſpectu Aα. I.

Eſt autem Momentum Portionis Trilinei Reſtituti b$\beta\alpha$BA, reſpectu Aα, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$, (per § H. prop. 17.) adeoque ejuſdem Triplum $\frac{3}{2}a^2R+3asR-3vR^2$; & momentum Sectoris B$\alpha$A, reſpectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. 15.) hujuſque Duplum $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{3}s^2R$. Ratio itaque quam habet Triplum illud ad hoc Duplum, hoc eſt $\frac{3}{2}a^2R+3asR-3vR^2$ ad $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{3}s^2R$; ſeu $9a^2+18as-18vR$, ad $4vR+2s^2$; rationi 5 ad 2, ſeu $10vR+5s^2$ ad $4vR+2s^2$ (addendo) conſociata; exhibet Momenti Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$V A, ad momentum correſpondentis Sectoris BαA, reſpectu Aα, rationem, $9a^2+18as-8vR+5s^2$ ad $4vR+2s^2$. Cum itaque Sectoris momentum illud ſit, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$ (ut modo dictum;) erit Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, momentum reſpectu Aα, (ſeu correſpondens Ungula Semiquadrantalis) $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$.

Atque hoc momentum, per Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$V A magnitudinem $\frac{3}{4}fR=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR$, (per § B.) diviſum; exhibet diſtantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{9a^2+18as-8vR+5s^2}{18a+18s}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}s-\frac{4vR+2s^2}{9a+9s}=\frac{1}{2}f-\frac{4vR+2s^2}{9f}$. Unde etiam ejuſdem à τT & bK diſtantia facile colligitur; & momentum reſpectu illarum. Item Solidum ejuſdem circa Aα converſione factum, $\frac{3}{4}a^2P+\frac{3}{2}asP-\frac{2}{3}vRP+\frac{5}{12}s^2P$; & ſemiſolidum, hujus dimidium.

Si autem ex totius Semicycloidis reſpectu Aα momento, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$, ſubducatur hoc portionis b$\beta\alpha$V A momentum $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$: Relinquitur Segmenti b$\beta\tau$ momentum reſpectu ejuſdem Aα, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3-\frac{3}{4}a^2R-\frac{3}{2}asR+\frac{2}{3}vR^2-\frac{5}{12}s^2R$; ſeu (propter $\alpha=\frac{1}{2}P-a$, & $b=2R-v$,) $\frac{3}{4}\alpha RP-\frac{3}{4}sRP-\frac{3}{4}\alpha^2R+\frac{3}{2}\alpha sR-\frac{2}{3}bR^2-\frac{5}{12}s^2R$: Quod per magnitudinem $\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR$, (§ B.) diviſum: Exhibet Centri gravitatis ab Aα diſtantiam, $\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}s-\frac{4bR-2s^2}{9\alpha-9s}=\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}s-\frac{2b^2}{9\alpha-9s}$: Adeoque à T$\tau$, $\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}s+\frac{2b^2}{9\alpha-9s}$: Ejuſque, reſpectu T$\tau$, momentum $\frac{3}{4}\alpha^2R-\frac{3}{2}\alpha sR+\frac{3}{4}s^2R+\frac{1}{3}b^2R$.

Ex illo autem Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$V A Momento (Ungulave) reſpectu Aα; ſi ſubducatur Trapezii b$\beta\alpha$V, reſpectu ejuſdem Aα, Momentum Ungulave: Relinquitur, reſpectu ejuſdem Aα, Momentum Ungulave Segmenti Semicycloidis A b V. K.

Componitur autem hoc Trapezium, ex Parallelogrammo b$\beta\alpha$B, & Triangulo αBV. Parallelogrammi magnitudo (propter baſin b$B=a$, & altitudinem V$\alpha=b$, eſt ab; Centrique gravitatis (utpote in ſui medio poſiti) ab Aα di-

Fig. 168, 169, 170. ſtantia, $\frac{1}{2}bB+\frac{1}{2}BV=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}f$: Adeoque momentum $\frac{1}{2}fah$. Trianguli magnitudo (propter $BV=s$, & $V\alpha=h$,) $\frac{1}{2}sh$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}BV=\frac{1}{3}s$: Adeoque momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}s^2h$. Momentum itaque Trapezii $b\beta\alpha V$ reſpectu $A\alpha$, eſt, $\frac{1}{2}fah+\frac{1}{6}s^2h=a^2R+asR-\frac{1}{2}a^2v-\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$. (Magnitudo autem, $ah+\frac{1}{2}sh$: Adeoque Centri gravitatis ab $A\alpha$ Diſtantia, $\frac{3fa+s^2}{6a+3s}=\frac{1}{2}a+\frac{3a+2s}{12a+6s}s$.)

Illud autem Trapezii Momentum, ex Portionis $b\beta\alpha VA$ momento (modo reperto) $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$ ſubductum; relinquit, $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$, Momentum Segmenti Semicycloidis bVA reſpectu $A\alpha$; Ungulamve correſpondentem. (Solidumque & Semiſolidum ejuſdem circa $A\alpha$ converſione factum, ad Ungulam illam, ut $\mathcal{P}$, & $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ad R.)

Quod quidem momentum, per magnitudinem (§ B. inventam) $-\frac{1}{2}eR$ $(=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR)+av+\frac{1}{2}sv$, diviſum; exhibet Centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantiam $\frac{-3a^2R+6asR+s^2R-8vR^2+6a^2v+6asv+2s^2v}{-6aR+6sR+12av+6sv}$;

hoc eſt $\frac{1}{2}a+\frac{3asR+s^2R-8vR^2+3asv+2s^2v}{-6eR+12av+6sv}$, ſeu $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-3asR-s^2R-3asv-2s^2v}{-6eR+12av+6sv}$. Unde habetur etiam ejuſdem à τT vel bK diſtantia; ejuſque reſpectu hujus Momentum, Ungulave: Solidumque & Semiſolidum ejuſdem circa τT vel bK converſione factum.

Si autem ex Parallelogrammi $AVbK$ momento reſpectu $A\alpha$ (§ G. tradito) $\frac{1}{2}f^2v$; hoc eſt, ex $\frac{1}{2}a^2v+asv+\frac{1}{2}s^2v$; auferatur momentum ſegmenti AbV reſpectu ejuſdem $A\alpha$, jam inventum, $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$: Relinquitur Trilinei AbK reſpectu ejuſdem $A\alpha$, momentum $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$: Adeoque, propter magnitudinem (§ B. traditam) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR^2+3a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$.

L.

Hæc eadem Momenta & Solida, alia adhuc methodo ſic inveſtigantur.

Fig. 166, 168. Omnia momenta rectarum bV, æqualibus intervallis ſumptarum, (ſive totam Semicycloidem, ſive ipſius ſegmentum ut bVA complentium,) reſpectu rectæ $A\alpha$; momentum integrum complentia: Vel omnia Triangula rectangula Iſoſcelia eiſdem inſiſtentia, Semiquadrantalem Ungulam, aciem habentem $A\alpha$, complentia: Sunt totidem Semiquadrata earundem bV rectarum: Hoc eſt, ſemiſumma quadratorum rectarum omnium $bV=bB+BV=a+s$: Hoc eſt, ſemiſumma omnium $a^2+2as+s^2$; ſeu ſumma *Omnium*, $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$; ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Fig. 170. Sunt autem *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$, ſeu ſemiſumma quadratorum omnium bB rectarum: Idem atque momentum Trilinei reſtituti $A\tau\alpha$, (quam figuram *Arcuum*, non minus quam Sinuum verſorum figuram eſſe, oſtendimus § A. prop. 17.) ejuſve ſegmenti bBA, reſpectu $A\alpha$. (Eſt enim magnitudo cujuſque $bB=a$, quæ itaque in ſui ſemiſſem, ſeu Centri gravitatis diſtantiam, $\frac{1}{2}a$, ducta; exhibet ejuſdem reſpectu $A\alpha$ momentum, $\frac{1}{2}a^2$.) Nempe Trilinei $A\tau\alpha$ momentum, $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2-2R^3$: Et Segmenti bBA, momentum, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$, per § G, I. prop. 17.

Fig. 168, 169. Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$; ſeu ſemiſumma Quadratorum rectarum BV (æqualibus intervallis ſumptarum) Semicirculum $AD\alpha$, ejuſve ſegmentum ABV complentium; eſt ejuſdem $AD\alpha$ Semicirculi, ejuſve Segmenti ABV, momentum reſpectu diametri ſuæ $A\alpha$. Nempe Semicirculi momentum, $\frac{2}{3}R^3$; & ſegmenti ABV momentum (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$; per § Q. R. prop. 15.

His autem jam inventis *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}s^2$; ſi addantur *Omn.* as, (ut modo oſtenſum eſt) habentur *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: Momentum Semicycloidis, ejuſve Segmenti bVA, reſpectu $A\alpha$.

Adeoque

Adeoque ſi admittamus Momentum illud Semicycloidis Segmentive ſui, per præcedentem methodum, jam inventum: Inde colligitur ſumma omnium as; hoc eſt, factum ex omnibus ordinatis in Semicirculo, ductis in reſpectivos arcus ipſis & vertice interceptos.

Quippe, ſi ex Momento Semicycloidis, reſpectu rectæ Aα, (§ H. invento,) $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$; auferamus tum $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$, tum $\frac{2}{3}R^3$, (hoc eſt, ſummam *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}s^2$;) Quod reſtat, $\frac{1}{16}RP^2$, eſt ſumma *Omn.* as.

Similiter; Si ex Momento Segmenti Semicycloidis bVA, reſpectu Aα, (§ K. invento,) $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$; auferamus, tum $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; tum $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$; (hoc eſt ſummam *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantium;) Quod reſtat, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv$, eſt ſumma *Omn.* as, eo ſpectantium.

Si vero Momentum illud integrum ſive Semicycloidis, ſive Segmenti ejus bVA, nondum ut inventum aſſumatur: Eadem ſumma *Omn.* as, per ſe habetur, per § K, L. prop. 18. (Completur utique Solidum AbBV, ibidem deſcriptum, ex ductu rectarum bB$=a$, in BV$=s$, reſpective.) Nempe, quæ totam Semicycloidem ſpectant $\frac{1}{16}RP^2$; Quæque ipſius Segmentum bVA, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv$.

Additis igitur, pro tota Semicycloide, tum $\frac{1}{8}RP^2-2R^3=$ *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{2}{3}R^3=$ *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$; tum $\frac{1}{16}RP^2=$ *Omn.* as: Habentur, quatenus totam Semicycloidem ſpectant, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: Hoc eſt Momentum Semicycloidis reſpectu Aα, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$. Ut ſupra § K. Fig. 166, 168.

Additiſque, pro Semicycloidis Segmento bVA, tum $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v=$ *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v=$ *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$; tum $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv=$ *Omn.* as: Habentur *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia; Hoc eſt, Momentum Segmenti Semicycloidis bVA, reſpectu Aα, $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$; ut prius § K. Unde Centra gravitatis, Solidaque converſione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Item, Si Momento Segmenti bVA reſpectu Aα, ſic invento; addatur Momentum Trapezii b$\beta\alpha$V (§ K. traditum,) Habebitur portionis b$\beta\alpha$VA Momentum reſpectu Aα; idem nempe quod alia methodo prius exhibitum eſt § I. Unde ejuſdem Centrum gravitatis, Solidaque converſione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Exhibuimus itaque tum ipſius Semicycloidis (adeoque & Cycloidis totius) ejuſque partium expoſitarum, tum Magnitudines, tum Momenta reſpectu rectarum aliquot expoſitarum; earumque Centrorum gravitatis ab illis rectis diſtantias: Et propterea ipſa earundem Centra gravitatis. Datis enim Centri gravitatis diſtantiis à duabus in eodem plano rectis (non invicem parallelis;) datur ipſum gravitatis Centrum, per prop. 26. cap. præced. M.

Atque his quidem ita traditis; non erit difficile in aliis item Cycloidis Segmentis, variis modis abſciſſis, tum Magnitudines, tum Momenta, adeoque & Centra gravitatis determinare: Additionibus ſcilicet, & Subductionibus factis prout res poſtulaverit.

Eademque Segmenta quæ nos ad aliquot rectas comparavimus, eorundem reſpectu illarum Momenta determinando, ipſaque Centra gravitatis (per diſtantias ſuas à duabus ſaltem non parallelis rectis) deſignando: Poterit quilibet ad alias quaſvis datas rectas (propter tum Magnitudines tum diſtantias Centrorum datas) ſimiliter comparare: Idemque & in aliis Segmentis (horum ope) præſtare.

Ex Momentis autem; Ungularum Magnitudines, & Solidorum converſione (perfecta aut imperfecta) deſcriptorum, obtineri poſſe; in præcedentibus ſæpe dictum eſt. Sunt utique Ungulæ Semiquadrantales, ipſis Momentis (ut à nobis deſignatis) æquales; (aliæque Ungulæ, ad has, in altitudinum ratione:) Solidaque integra converſione facta, ad correſpondentes Ungulas Semiquadrantales, ut P, ad R; & ſemiſolida, eorum dimidia: Et ſimiliter de aliis imperfectis converſionibus, ſervata ratione, judicandum. Ut ad hanc aliaſque propoſitiones ſæpius inſinuatum eſt.

N. Denique; quæ de Cycloide primaria jam tradidimus omnia, eadem ad Secundarias facile transferuntur, quas *Protractas Contractasque* appellant.

Fig. 175.

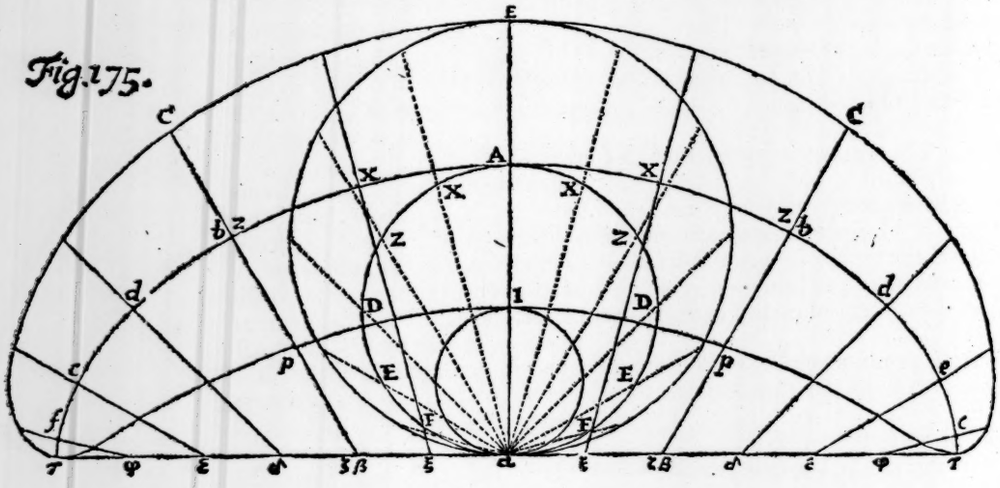
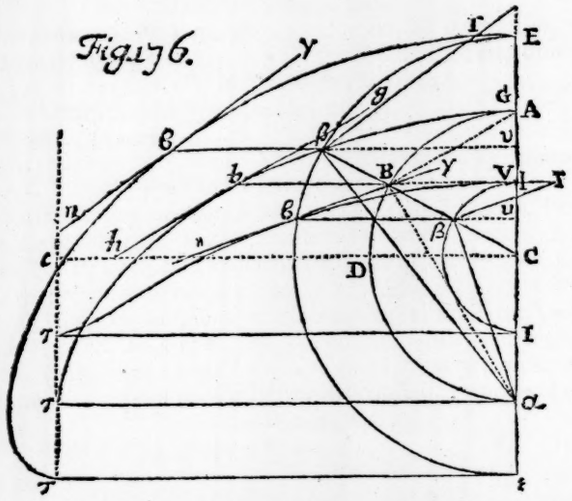


Fig. 176.



Cycloidem vero *Primariam* illam dicunt quam hactenus descripsimus; Quam scilicet volventis circuli Punctum aliquod in peripheria, describit, dum ipsa sibi Peripheria commensurat in subjecto plano æqualem rectam $\tau\alpha\tau$; Ejusve Centrum rectam describit c C c, peripheriæ æqualem. Puta τ A τ, fig. 166, 175, 176.

Si vero recta c C c, quam Centrum describit dum circulus unam conversionem facit, seu quæ huic subest in plano $\tau\alpha\tau$, quam Cycloidis Basem dicimus, Major fuerit quam Circuli Genitoris Peripheria, *Protractam* dicimus Cycloidem; ut τ I τ fig. 175. si Minor, *Contractam*, ut τ E τ.

Dumque Circulus A D α, aliquo peripheriæ suæ puncto, describit Cycloidem *primariam*, ut τ A; Fig. 166, 176. eodem tempore, Circuli Concentrici cujusque Minoris correspondens punctum describit Cycloidem *Protractam* ut τ I, fig. 176. Concentrici vero *Majoris* cujusque punctum correspondens, *Contractam* describit ut τ E. Quarum quidem Cycloidum *Protractæ Contractæque* Genitores, sunt illi *Minor*, *Majorque* Circulus.

Quæ autem de Cycloide Primaria traduntur omnia; eadem Secundariis accommodantur; cum hoc discrimine, Quod, cum in *Primaria* rectæ b B sint ipsis Genitoris sui arcubus B A Æquales; in *Protractis*, Majores sunt; in *Contractis* Minores; quam suorum respective Genitorum Correspondentes arcus B A; & quidem

dem in ea ratione Majores Minoresve, qua recta $\tau\alpha$, major est vel minor quam $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, Genitoris Circuli sui Semicircumferentia. Adeoque, quoties in calculum veniunt rectæ b B; pro *a*, substituenda erit quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$. Et similiter, mutatis mutandis, in earundem Quadratis, Cubis, reliquisque potestatibus: Ut in præcedentibus aliquot propositionibus monitum fuit.

PROP. XXI.

Ungula Semicycloidi A $\tau\alpha$ insistens aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera*, correspondentis Ungulæ Semicirculo A D α insistentis; seu ut 5 ad 2. A. Fig. 166.

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ, est *Duplum-sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo A D α insistentis, eandem aciem habentis, respectu aciei suæ; seu ut 7 ad 3.

Idemque in respectivis portionibus obtinet: Puta *Ungula* Quadrilineo b $\beta\alpha$ A in Semicycloide insistens, aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera* respectivæ Ungulæ Sectori B α A insistentis; seu ut 5 ad 2.

Ejusque *Momentum* est *Duplum-sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori B α A; respectu aciei suæ $\tau\alpha$; seu ut 7 ad 3.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Semicycloidi, ejusve portionibus, insistentibus; atque in illis quæ Semicirculo, ejusque portionibus respectivis insistunt.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,)

Semiquadrantalis Ungulæ, Semicycloidis A $\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo est $\frac{5}{8}R^2\mathcal{P}$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{48}R^3\mathcal{P}$; respectu T A, $\frac{25}{48}R^3\mathcal{P}$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R$; à T A, $\frac{5}{6}R$: Momentum respectu A α, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{16}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}\mathcal{P} - \frac{128R^2}{45\mathcal{P}}$. B. H.

Aciemque habentis T A; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2\mathcal{P}$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3\mathcal{P}$; respectu T A, $\frac{29}{48}R^3\mathcal{P}$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; à T A, $\frac{29}{42}R$: Momentum respectu A α, $\frac{7}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{8}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis ab A α; $\frac{1}{4}\mathcal{P} - \frac{64R^2}{63\mathcal{P}}$. B. H.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{3}{16}R\mathcal{P}^2 - \frac{4}{3}R^3$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{16}{9}R^4$; respectu T A, $\frac{7}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{8}{9}R^4$; distantia Centri Gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R - \frac{32R^3}{9\mathcal{P}^2 - 64R^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{32R^3}{9\mathcal{P}^2 - 64R^2}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{16}R\mathcal{P}^3 - \frac{25}{48}R^3\mathcal{P}$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3\mathcal{P}^3 - 35R^2\mathcal{P}}{9\mathcal{P}^2 - 64R^2}$. H. M.

Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Portionis Semicycloidis b $\beta\alpha$ V A, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}fR^3 + \frac{7}{8}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; respectu T A, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; distantia C.

Fig. 166. distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R+\frac{14shR-7s^3}{45fR+15sh}$; à TA, $\frac{1}{8}R$

G. $-\frac{14shR-7s^3}{45fR+15sh}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{25}{12}asR^2-\frac{3}{12}asvR$ $-\frac{8}{9}vR^3+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $a-\frac{45a^2R+64vR^2-41s^2R+14s^2v}{90aR+150sR-30sv}$.

C. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{4}fR^2-\frac{5}{12}shR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{24}fR^3-\frac{1}{24}shR^2+\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{52}{24}fR^3-\frac{19}{24}shR^2$ $-\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{25}{43}R+\frac{52shR+49s^3}{441fR-105sh}$; à TA,

G. $\frac{25}{43}R-\frac{52shR+49s^3}{441fR-105sh}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2+\frac{11}{12}asR^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{19}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $a-\frac{32vR^2+63a^2R-19s^2R-14s^2v}{126aR+66sR+30sv}$.

G. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{8}asR-\frac{3}{8}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{25}{12}asR^2-\frac{5}{12}asvR-\frac{8}{9}vR^3+\frac{41}{72}s^2R^2$ $-\frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{8}a^2R^2+\frac{11}{12}asR^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{19}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R-\frac{12vR^2-30asR-8s^2R+15asv+7s^2v}{27a^2+54as-24vR+15s^2}$;

M. à TA, $\frac{1}{8}R+\frac{12vR^2-30asR-8s^2R+15asv+7s^2v}{27a^2+54as-24vR+15s^2}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{6}svR^2+\frac{1}{2}a^3R+\frac{3}{2}a^2sR+\frac{5}{6}as^2R+\frac{1}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{87eR^2-96avR-9svR+36a^3+108a^2s+60as^2+14s^3}{54a^2+108as-48vR+30s^2}$.

D. Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{5}{4}\alpha R^2-\frac{5}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{24}\alpha R^3-\frac{25}{24}sR^3-\frac{7}{8}shR^2+\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}\alpha R^3-\frac{25}{24}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{8}R-\frac{7sh^2}{45\alpha R-45sR-15sh}$; à

I. TA, $\frac{7}{8}R+\frac{7sh^2}{45\alpha R-45sR-15sh}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2$ $-\frac{16}{9}R^4-\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{8}{9}vR^3-\frac{25}{12}asR^2-\frac{41}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis ab Aα; $a+\frac{45RP^2-180aRP+180a^2R-512R^3+256vR^2-164s^2R+56s^2v}{180RP-360aR-600sR+120sv}$.

D. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{5}{12}shR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{24}\alpha R^3-\frac{25}{24}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{29}{24}\alpha R^3-\frac{29}{24}sR^3+\frac{19}{24}shR^2+\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{25}{43}R$

I. $-\frac{52shR+49s^3}{441\alpha R-441sR+105sh}$; à TA, $\frac{29}{42}R+\frac{52shR+49s^3}{441\alpha R-441sR+105sh}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2-\frac{8}{9}R^4+\frac{4}{9}vR^3-\frac{7}{8}a^2R^2-\frac{11}{12}asR^2-\frac{19}{72}s^2R^2$ $-\frac{5}{12}asvR-\frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $a+\frac{63RP^2-252aRP-256R^3+128vR^2+252a^2R-76s^2R-56s^2v}{252RP-504aR-264sR-120sv}$.

I. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3+\frac{2}{3}vR^2-\frac{3}{4}a^2R-\frac{3}{8}asR-\frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2-\frac{16}{9}R^4+\frac{8}{9}vR^3-\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{25}{48}asR^2-\frac{41}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2-\frac{8}{9}R^4+\frac{4}{9}vR^3-\frac{7}{8}a^2R^2$

$-\frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P - \frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{9P^3 - 105R^2P - 174eR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}$. Fig. 166. N.

F. Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}sh^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $ah^2R + \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ah^3 - \frac{1}{4}sh^3$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}h$; à TA, $2R - \frac{4a+3s}{6a+4s}h$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2 + \frac{1}{3}ash^2 + \frac{1}{8}s^2h^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{4as+3s^2}{12a+8s} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a+24s}$. K.

F. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $2ahR + shR - \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $ah^2R + \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ah^3 - \frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $4ahR^2 + 2shR^2 - 2ah^2R - \frac{4}{3}sh^2R + \frac{1}{3}ah^3 + sh^3$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h + \frac{2shR - fh^2}{24aR + 12sR - 6ah - 4sh}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}h - \frac{2shR - fh^2}{24aR + 12sR - 6ah - 4sh}$: Momentum respectu A$\alpha$, $fahR + \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2 - \frac{1}{3}ash^2 - \frac{1}{8}s^2h^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s + \frac{2s^2R - fsh}{48aR + 24sR - 12ah - 8sh}$. K.

K. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}fah + \frac{1}{6}s^2h$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2 + \frac{1}{3}ash^2 + \frac{1}{8}s^2h^2$; respectu TA, $fahR + \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2 - \frac{1}{3}ash^2 - \frac{1}{8}s^2h^2$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h + \frac{2ash + s^2h}{12fa + 4s^2}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}h - \frac{2ash + s^2h}{12fa + 4s^2}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}a^3h + \frac{1}{2}a^2sh + \frac{1}{3}as^2h + \frac{1}{12}s^3h$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4a^2 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$. O.

E. Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis TA; Magnitudo, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu TA, $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{9}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu bV, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{5}{6}R + \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R - \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à bV, $v - \frac{5}{6}R$ $(= \frac{1}{6}R - h) - \frac{6fvR^2 - 3fs^2R\,(= 3fv^2R) - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$: Momentum respectu A$\alpha$, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{7}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; distantia Centri gravitatis ab K.

Fig. 166. A α, $\frac{1}{2}a + \frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR + 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$.

E. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu TA, $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{29}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu bV, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;

à $\tau\alpha$, $\frac{-87eR^3 + 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;

à bV, $\frac{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R + 12as^2v + 6s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;

K. Momentum respectu Aα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{5}{32}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$.

K. Aciemque habentis bV; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; momentum respectu TA, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; respectu bV, $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{8}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis a TA, $\frac{2}{3}R - \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: à

K. L. bV, $\frac{1}{6}R - b\,(= v - \frac{5}{6}R) + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$.

K. L. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; respectu bV, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

à TA, $\frac{1}{2}R + \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

à bV, $\frac{3}{2}R - b - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

O. P. Momentum respectu Aα, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis ab Aα,

$$\frac{87eR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2sv + 24as^2v + 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 36asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}.$$

Adeoque

Adeoque exhibuimus, in expositis Ungulis, tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa Gravitatis Centra. Quæque de Ungulis tradita sunt; ad Solida conversione facta facile transferentur. Quæque de expositis dicta sunt; facile est ad alia, calculo rite adhibito, accommodare: Puta, Ungulas Trilinei A b K; aliasve ejusmodi. Q.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam spectantibus tradita sunt; eadem omnia ad Ungulas Solidaque, Semicycloides Secundarias (sive Protractas sive Contractas) spectantia facile transferentur. R.

DIstributis, (ut ad propositionem præcedentem) Tum Semicirculo A D α, in minuta Triangula, numero infinita: Tum Semicycloide A τ α, in totidem Trapezia correspondentia: Intelligatur utrique insistere Semiquadrantalis Ungula, aciem habens $\tau\alpha$. A. Fig. 166, 168, 170, 173, 174.

Quæ autem vel toti Semicirculo, vel ipsius Sectori, ut B α A, insistit Ungula; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis, seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P,) incumbentibus: Quarum communis vertex sit α punctum; Basisque super Triangulorum illorum Basibus (ut Y P, &c.) erectæ, altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Semicycloidi sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α V A (quæ Sectori B α A respondet,) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Trapeziis β b, seu y δ ξ p, &c. incumbant; acies habentibus in τ α recta continue jacentes, altitudines vero super ipsis y b p Trapeziorum basibus (pro Semiquadrantalis Ungulæ ratione) ipsis V α (respective) earundem à τ α distantiis, æquales.

Quæ quidem Minutis illis Trapeziis insistentes Ungulæ (propter Trapezia illa æqualia, respectivis tum Semicirculi Triangulis, tum Trilinei Restituti fig. 170. Parallelogrammis simul sumptis,) æquales erunt respectivis Pyramidulis Cuneisque simul sumptis, quæ respectivis Semicirculi Triangulis Trilineique restituti Parallelogrammis, incumbunt; adeoque ad pyramidulas illas, ut 5 ad 2; (ut ad prop. præced. ostensum est.) Suntque in eisdem respective sive à τ α, sive T A, (aut hisce parallelis,) distantiis (ut patet.) Adeoque & Momenta Momentis æqualia habebunt, sive respectu rectæ τ α, sive T A, sive cujusvis hisce parallelæ rectæ.

Cumque hoc in singulis respective obtineat, (adeoque in simul omnibus:) Illius, quæ ex Ungulis hisce, minutis Trapeziis incumbentibus, componitur, (sive toti A τ α Semicycloidi, sive ipsius portioni, ut b β α A, vel b β δ d, vel b β τ, &c. fig. 166. insistentis,) Ungulæ Momentum; æquale est Momentis, simul sumptis, tum illius quæ ex Pyramidulis componitur Ungulæ, (sive toti Semicirculo A D α, sive ipsius portioni respectivæ, ut B α A, B α D, B α B, &c. insistentis,) tum illius quæ ex Cuneis componitur, (sive toti Trilineo restituto, sive ipsius portioni respectivæ, ut b β α A, b β δ d, b β τ, &c. fig. 170. insistentis,) simul sumptis.

Est autem illius quæ ex Cuneis, ad illius quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ momentum, respectu rectæ τ α; ut 4, ad 3, (per § A. prop. 19.) Est itaque illius quæ ex Ungulis Trapeziorum componitur (sive toti Semicycloidi A τ α, sive ipsius Portioni, ut b β α A, b β δ d, b β τ, &c. insistentis) momentum (utpote utrisque illis æquale) ad momentum illius quæ ex pyramidulis componitur (sive toti Semicirculo A D α, sive ipsius respectivæ portioni B α A, B α D, B α B, &c. insistentis;) ut 7 ad 3.

Et quidem, ea quæ Trilineo restituto A τ α, fig. 170. insistit Ungula sive aciem habeat $\tau\alpha$, sive T A, sive aliam quamvis rectam hisce parallelam; alia non est quam quæ Trilineo distorto A τ α D (Cycloidis curvæ, & Semicirculi convexæ interjecto) insistit, in situm debitum restituta: Et Ungularum Momenta, respectu rectarum $\tau\alpha$, T A, aut hisce parallelarum, (propter tum Magnitudines tum Distantias æquales,) sunt æqualia. Quod & in partibus respective comparatis, perinde obtinet: Puta, quæ curvæ rectæque A b, A B, fig. 170. & quæ curvis A b, A B, fig. 166. interjacet; item quæ rectis B α, b β, fig. 170. quæque duabus sive rectis sive curvis B α, b β, fig. 166. interjacet; (& similiter alibi;) propter

Fig. 166, 170. tum Magnitudines tum Distantias utrobique æquales. (Si vero vel Ungularum acies, vel rectæ ad quas momenta æstimantur, sint Aα; aliave quæ ipsis $\tau\alpha$, TA, parallela non sit; secus erit: Propter vel Magnitudines, vel Distantias, vel utrasque variatas. Ut post dicendum erit.)

B. Est autem, toti Semicirculo insistentis, Semiquadrantalis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu ejusdem $\tau\alpha$ rectæ, $\frac{5}{16}R^3\mathcal{P}$; & respectu rectæ TA, $\frac{3}{16}R^3P$; per § T. prop. 16. Totique Trilineo insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{5}{12}R^3\mathcal{P}$; respectu TA, $\frac{1}{3}R^3\mathcal{P}$; per § B. prop. 19.

Ergo Semicycloidi insistentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{48}R^3\mathcal{P}$; & respectu TA, $\frac{25}{48}R^3\mathcal{P}$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{8}R^2\mathcal{P}$, per § C. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R$; à TA, $\frac{3}{8}R$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, Magnitudo. (quippe ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R, seu $\mathcal{P}$ ad $2R$,) $\frac{5}{16}R\mathcal{P}^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ (quippe ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, seu $4R$ ad $\mathcal{P}$,) $\frac{14R^2}{3\mathcal{P}}$; Semisolidique momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ ut 2 ad 1; (propter magnitudinem ut $\mathcal{P}$ ad $2R$; & distantiam ut $4R$ ad $\mathcal{P}$; per prop. 12. & 14. estque $\frac{\mathcal{P}}{2R}\times\frac{4R}{\mathcal{P}}=\frac{2}{1}$:) hoc est, $\frac{35}{24}R^3\mathcal{P}$.

Similiter; Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis TA, Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{16}R^3\mathcal{P}$; & respectu TA, $\frac{5}{16}R^3\mathcal{P}$; (per § T. prop. 16.) Trilineoque Restituto insistentis, aciem habentis TA, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3\mathcal{P}$, (idem utique atque aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu TA, propter magnitudines & distantias reciprocatas,) & respectu TA, $\frac{11}{12}R^3\mathcal{P}$; per § B. prop. 19.

Ergo, Semicycloidi insistentis, aciem habentis TA, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3\mathcal{P}$; & respectu TA, $\frac{59}{48}R^3\mathcal{P}$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{7}{8}R^2\mathcal{P}$, per § C. prop. præced.) Distantia Centri à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; & à TA, $\frac{59}{42}R$. Semisolidique circa TA, magnitudo, $\frac{7}{16}R\mathcal{P}^2$; Distantia Centri gravitatis ab axe conversionis TA, $\frac{118R^2}{21\mathcal{P}}$; Momentum respectu ejusdem TA, $\frac{59}{24}R^3\mathcal{P}$.

C. Item Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}fR^3+\frac{3}{8}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{3}{8}fR^3-\frac{1}{24}shR^2+\frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulaque portionis Trilinei restituti b$\beta\alpha$BA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{6}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R$; respectu TA, $\frac{2}{3}fR^3+\frac{1}{9}s^3R$; per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}fR^3+\frac{7}{8}shR^2-\frac{7}{36}s^3R=\frac{35}{24}aR^3+\frac{77}{24}sR^3-\frac{7}{8}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}fR^3-\frac{1}{24}shR^2+\frac{7}{36}s^3R=\frac{25}{24}aR^3+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2+\frac{5}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R+\frac{14shR-7s^3}{45fR+15sh}$; & à TA, $\frac{3}{8}R-\frac{14shR-7s^3}{45fR+15sh}$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, magnitudo $\frac{3}{8}fR\mathcal{P}+\frac{5}{24}sh\mathcal{P}$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{12}fR^3+\frac{7}{4}shR^2-\frac{7}{18}s^3R$; Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{14R^2}{3\mathcal{P}}+\frac{56shR^2-28s^3R}{45fR\mathcal{P}+15sh\mathcal{P}}$.

Similiter, Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis TA; Momentum respectu TA, est $\frac{5}{8}fR^3-\frac{7}{24}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulæque in Trilineo correspondentis b$\beta\alpha$BA, $\frac{11}{6}fR^3-\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R$, per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, aciem habentis TA, momentum respectu ipsius TA, $\frac{59}{24}fR^3-\frac{19}{24}shR^2-\frac{7}{36}s^3R=\frac{59}{24}aR^3+\frac{7}{8}sR^3+\frac{19}{24}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA; propter magnitudines & distantias reciprocatas,) $\frac{25}{24}fR^3-\frac{1}{24}shR^2+\frac{7}{36}s^3R=\frac{25}{24}aR^2+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2-\frac{5}{18}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{59}{42}R-\frac{52shR}{}$

$\frac{52shR+49s^3}{441fR-105sh}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R+\frac{52shR+49s^3}{441fR-105sh}$. Semisolidique circa TA, magnitudo $\frac{1}{8}fR\mathcal{P}-\frac{5}{24}sh\mathcal{P}$; momentum respectu TA, $\frac{49}{12}fR^3-\frac{19}{12}shR^2-\frac{7}{18}s^3R$; Centrique gravitatis inde distantia $\frac{118R^2}{21\mathcal{P}}-\frac{208shR+196s^3}{441fR\mathcal{P}-105sh\mathcal{P}}R$. Fig. 166, 170.

Item, Ungulæ Segmenti $\alpha B\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est $\frac{5}{8}\alpha R^3-\frac{5}{8}sR^3-\frac{3}{8}shR^2+\frac{1}{12}s^3R$, & respectu TA, $\frac{3}{8}\alpha R^3-\frac{3}{8}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque respectivæ in Trilineo Restituto $b\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}\alpha R^3-\frac{5}{6}sR^3-\frac{1}{2}shR^2+\frac{1}{9}s^3R$; & respectu TA, $\frac{2}{3}\alpha R^3-\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19. D.

Ergo, Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}\alpha R^3-\frac{35}{24}sR^3-\frac{7}{8}shR^2+\frac{7}{36}s^3R=\frac{35}{48}R^3\mathcal{P}-\frac{35}{24}aR^3-\frac{77}{24}sR^3+\frac{7}{8}svR^2+\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}\alpha R^3-\frac{25}{24}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{7}{36}s^3R=\frac{25}{48}R^3\mathcal{P}-\frac{25}{24}aR^3-\frac{23}{24}sR^3-\frac{1}{24}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$, per § E. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{105\alpha R^2-105sR^2-63shR+14s^3}{90\alpha R-90sR-30sh}=\frac{7}{6}R-\frac{14shR-7s^3}{45\alpha R-45sR-15sh}=\frac{7}{6}R-\frac{14shR-7svh}{45\alpha R-45sR-15sh}=\frac{7}{6}R-\frac{7sh^2}{45\alpha R-45sR-15sh}$; à TA, $\frac{75\alpha R^2-75sR^2+3shR-14s^3}{90\alpha R-90sR-30sh}=\frac{5}{6}R+\frac{7sh^2}{45\alpha R-45sR-15sh}$. Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, magnitudo, $\frac{5}{8}\alpha R\mathcal{P}-\frac{5}{8}sR\mathcal{P}-\frac{5}{24}sh\mathcal{P}$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{35}{12}\alpha R^3-\frac{35}{12}sR^3-\frac{7}{4}shR^2+\frac{7}{18}s^3R$; indeque Distantia Centri gravitatis, $\frac{14R^2}{3\mathcal{P}}-\frac{28sh^2R}{45\alpha R\mathcal{P}-45sR\mathcal{P}-15sh\mathcal{P}}$.

Similiter; Ungulæ segmenti $\alpha B\alpha$, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est $\frac{5}{8}\alpha R^3-\frac{5}{8}sR^3+\frac{7}{24}shR^2+\frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque correspondentis in Trilineo Restituto $b\beta\tau$, $\frac{11}{6}\alpha R^3-\frac{11}{6}sR^3+\frac{1}{2}shR^2+\frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19.

Ergo, Ungulæ $b\beta\tau$ in Semicycloide, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{59}{24}\alpha R^3-\frac{59}{24}sR^3+\frac{19}{24}shR^2+\frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA,) $\frac{25}{24}\alpha R^3-\frac{25}{24}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{5}{12}shR$, per § E. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{177\alpha R^2-177sR^2+57shR+14s^3}{126\alpha R-126sR+30sh}=\frac{59}{42}R+\frac{52shR+49s^3}{441\alpha R-441sR+105sh}$; à $\tau\alpha$, $\frac{75\alpha R^2-75sR^2+3shR-14s^3}{126\alpha R-126sR+30sh}=\frac{25}{42}R-\frac{52shR+49s^3}{441\alpha R-441sR+105sh}$. Semisolidique correspondentis circa TA, magnitudo $\frac{1}{8}\alpha R\mathcal{P}-\frac{1}{8}sR\mathcal{P}+\frac{5}{24}sh\mathcal{P}$: Momentum respectu TA, $\frac{59}{12}\alpha R^3-\frac{59}{12}sR^3+\frac{19}{12}shR^2+\frac{7}{18}s^3R$: Centrique gravitatis à TA distantia, $\frac{118R^2}{21\mathcal{P}}+\frac{208shR^2+196s^3R}{441\alpha R\mathcal{P}-441sR\mathcal{P}+105sh\mathcal{P}}$.

Item, Ungulæ Segmenti Semicirculi, BVA, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $-\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; per § T. prop. 16. E.

Et Ungulæ Trilinei bBA aciem item habentis TA, momentum respectu TA, est $-\frac{1}{6}eR^3+\frac{1}{3}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$,

Fig. 166, 170. $-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$; & respectu bBV, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis TA, momentum respectu TA, est $-\frac{5}{24}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{9}{8}svR^2-\frac{2}{5}as^2R-\frac{19}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{12}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{2}{9}s^3R-\frac{1}{6}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{-15eR^3+96avR^2+81svR^2-48as^2R-38s^3R-24as^2v-18s^3v}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}$; $=\frac{5}{6}R+\frac{6fvR^2-3fs^2R\,(=3fv^2R)-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}$; à $\tau\alpha$, $\frac{-21eR^3+48avR^2+27svR^2-24as^2R-10s^3R+24as^2v+18s^3v}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}$ $=\frac{7}{6}R-\frac{3fv^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}$; à bBV, $\frac{15eR^3+30avR^2+45svR^2-24as^2R-16s^3R-12as^2v-6s^3v}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}$ $=v-\frac{5}{6}R-\frac{3fv^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}=\frac{7}{6}R-b-\frac{3fv^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}$. Semisolidique correspondentis circa TA, magnitudo ad illud Ungulæ aciem habentis TA, ut $\frac{1}{2}P$ ad R. Momentum Semisolidi ad Momentum Ungulæ, ut 2 ad 1; Centrique gravitatis distantia in semisolido, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi BVA, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{11}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; per § T. prop. 16.

Ungulæque Trilinei bBA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}ah^3=-\frac{11}{6}eR^3+\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{2}svR^2+\frac{4}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; & respectu bBV, $\frac{5}{8}fR^3-\frac{3}{4}ahR^2-\frac{1}{4}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sh^2R+\frac{1}{6}ah^3=\frac{2}{3}eR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Adeoque Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{29}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $\frac{7}{24}eR^3+\frac{7}{12}avR^2+\frac{7}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{6}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$; & respectu TA, (idem quod aciem habentis TA, momentum respectu $\tau\alpha$,) $-\frac{7}{24}eR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{-87eR^3+96avR^2+9svR^2+96as^2R+58s^3R-24as^2v-18s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3}$; à bBV, $\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3}$; à TA, $\frac{-21eR^3+48avR^2+27svR^2-24as^2R-10s^3R+24as^2v+18s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3}$. Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, Magnitudo ad illud Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi BVA, aciem habentis bBV, momentum

tum reſpectu bBV, eſt, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; per § V. prop. 16. Et Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis bBV, reſpectu bBV, eſt $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{11}{18}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19. Fig. 166. 170.

Ergo, Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis bBV, momentum reſpectu bBV, eſt $-\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{6}as^2R-\frac{19}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$: Ejuſque momentum reſpectu TA (idem atque aciem habentis TA, reſpectu bBV,) $\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{12}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{2}{9}s^3R-\frac{1}{6}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$; & reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu bBV,) $\frac{7}{24}eR^3+\frac{7}{12}avR^2+\frac{7}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{6}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$. Ergo (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$; per § F. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à bBV, $\frac{-15eR^3+60avR^2+45svR^2-12as^2R-38s^3R-24as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$;

$=\frac{7}{8}R-b\left(=v-\frac{5}{8}R\right)+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}$; à TA,

$\frac{15eR^3+30avR^2+45svR^2-24as^2R-16s^3R-12as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$

$=\frac{5}{8}R-\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}$; à $\tau\alpha$,

$\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$

$=\frac{7}{8}R+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}$. Semiſolidique correſpondentis circa bV; magnitudo, ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R, nempe $\frac{1}{8}eR\mathcal{P}+\frac{1}{4}av\mathcal{P}+\frac{3}{8}sv\mathcal{P}-\frac{as^2\mathcal{P}}{4R}-\frac{s^3\mathcal{P}}{12R}$: Momentum, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1, adeoque $-\frac{5}{12}eR^3+\frac{5}{3}avR^2+\frac{5}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{19}{18}s^3R-\frac{2}{3}as^2v-\frac{1}{6}s^3v$: Diſtantia Centri gravitatis à bV (utpote ad illam Ungulæ ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$,) $\frac{-30eR^4+120avR^3+90svR^3-24as^2R^2-76s^3R^2-48as^2vR-12s^3vR}{9eR^2\mathcal{P}+18avR\mathcal{P}+27svR\mathcal{P}-18as^2\mathcal{P}-6s^3\mathcal{P}}$.

Eademque habentur ope Trapezii bβαV, & Ungularum huic inſiſtentium. Quippe ſubductis Ungulis Trapezii bβαV, ex reſpectivis Ungulis portionis bβαA; reſtant Ungulæ Segmenti bVA. Et de momentis ſimiliter. F.

Eſt autem Ungulæ Trianguli BαV aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sh^3$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{4}sh^3$; per § W. prop. 16. Ungulæque correſpondentis Parallelogrammi bβαB, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3$; reſpectu TA, $ah^2R-\frac{1}{3}ah^3$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii bβαV, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3+\frac{1}{4}sh^3=\frac{8}{3}aR^3+2sR^3-\frac{4}{3}avR^2-svR^2-\frac{4}{3}as^2R-s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $ah^2R+\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{3}ah^3-\frac{1}{4}sh^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}ah^2+\frac{1}{3}sh^2$, per § G. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}h$; atque à TA, $2R-\frac{4a+3s}{6a+4s}h$.

Eademque momenta, ex reſpectivis correſpondentis Ungulæ portionis bβαVA momentis, $\frac{35}{24}aR^3+\frac{11}{24}sR^3-\frac{7}{8}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$, & $\frac{25}{24}aR^3+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; relinquunt Ungulæ Segmenti bVA aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}aR^3+\frac{29}{24}sR^3\left(=-\frac{29}{24}eR^3\right)+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{29}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $-\frac{7}{24}aR^3+\frac{7}{24}sR^3\left(=-\frac{7}{24}eR^3\right)+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

Similiter;

Fig. 166, 170. Similiter; Ungulæ Trianguli BαV, aciem habentis TA; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA,) $\frac{2}{3}shR^2-\frac{1}{4}sh^3=\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $2shR^2-\frac{4}{3}sh^2R+\frac{1}{4}sh^3=\frac{1}{3}shR^2+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3h=\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; per § W. prop. 16. Ungulæque correſpondentis Parallelogrammi b$\beta\alpha$B, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA,) $ah^2R-\frac{1}{3}ah^3=\frac{4}{3}aR^3-\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v$; reſpectu TA, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3=\frac{4}{3}ahR^2+\frac{4}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2h=\frac{8}{3}aR^3-\frac{4}{3}avR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA,) $ah^2R+\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{3}ah^3-\frac{1}{4}sh^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $\frac{8}{3}aR^3+2shR^2-\frac{4}{3}sh^2R-\frac{1}{3}av^3+\frac{1}{4}sh^3=\frac{4}{3}ahR^2+\frac{1}{3}shR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{2}{6}s^3R-\frac{1}{3}as^2h-\frac{1}{4}s^3h=4ahR^2+2shR^2-2ah^2R-\frac{4}{3}sh^2R+\frac{1}{3}ah^3+\frac{1}{4}sh^3=\frac{8}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem $2ahR+shR-\frac{1}{2}ah^2-\frac{1}{3}sh^2=2aR^2+\frac{2}{3}sR^2-avR-\frac{1}{3}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; per § G. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{12aR+8sR-4ah-3sh}{24aR+12sR-6ah-4sh}h=\frac{1}{2}h+\frac{2sR-fh}{24aR+12sR-6ah-4sh}h$; à TA, $2R-\frac{1}{2}h-\frac{2sR-fh}{24aR+12sR-6ah-4sh}h$.

Eademque Momenta, ex reſpectivis Momentis correſpondentis Ungulæ portionis b$\beta\alpha$VA, $\frac{25}{24}aR^3+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{7}{36}s^3R$, & $\frac{29}{24}aR^3+\frac{7}{8}sR^3+\frac{19}{24}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; Relinquunt Ungulæ Segmenti bVA, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{24}aR^3+\frac{1}{24}sR^3(=-\frac{1}{24}eR^3)+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $-\frac{5}{24}aR^3+\frac{5}{24}sR^3(=-\frac{5}{24}eR^3)+\frac{4}{3}avR^2+\frac{9}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{19}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$. Ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

G.

Fig. 166, 168, 170, 173, 174. Accedimus ad conſiderationem Momenti Ungularum Semicycloidis, ejuſque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ vel huic parallelam, reſpectu rectæ Aα, aut parallelæ huic: Adeoque & (propter diſtantias & altitudines reciprocatas,) aciem habentium Aα aut huic parallelam, momenti reſpectu $\tau\alpha$, aut parallelæ huic: Eorumque quæ hinc dependent.

Diſtributis itaque (ut ad § H. prop. præced. & alibi,) tum Semicirculo in ſua minuta Triangula αB, ſeu YαP; tum Semicycloide in reſpectiva Trapezia βb, ſeu y$\delta\xi$p, fig. 168. quæ reſpective æqualia ſint ipſis YαP Triangulis, & parallelogrammis y$\delta\xi$p fig. 170. ſimul ſumptis: Erigi intelligantur, ut prius, Ungulæ Semiquadrantales aciem habentes $\tau\alpha$; quas compleant iiſdem Triangulis, Trapeziiſque minutis, inſiſtentes minutæ Ungulæ. Quæ itaque Trapeziorum Ungulæ, æquales erunt reſpectivis Triangulorum & Parallelogrammorum Ungulis ſimul ſumptis: Ut ad § C. jam oſtenſum eſt.

Ungulæ Trianguli YαP (Pyramis cum ſit) adeoque & huic æquales ſimiliterque poſitæ Trianguli (in Trapezio intermedii) $\upsilon\beta\pi$, Centrum gravitatis (illic in αB, hic in βb, poſitis,) à $\tau\alpha$ diſtabit Dodrante altitudinis, (per prop. 6. hujus,) hoc eſt, $\frac{3}{4}V\alpha=\frac{3}{4}h$. Adeoque ipſius Y$\alpha$P pyramidis (ſed non & ipſius $\upsilon\beta\pi$) diſtantia ab Aα, $\frac{3}{4}BV=\frac{3}{4}s$.

Ungulæque parallelogrammi y$\delta\xi$p fig. 170. (utpote Priſmatis, duabus baſibus Triangularibus interjecti,) centrum gravitatis à $\tau\alpha$ diſtat, altitudinis Beſſe, (quantum ſcilicet inde diſtat Trianguli centrum,) per prop. 5, 6. hujus; hoc eſt, $\frac{2}{3}V\alpha=\frac{2}{3}h$. Atque tantundem inde diſtat bipartitæ Ungulæ, parallelogrammis $\upsilon\delta$, $\pi\xi$, (utrinque à bβ æqualiter remotis,) fig. 168. Centrum gravitatis, in ipſa bβ poſitum. Ejuſque Centri, à Centro Ungulæ $\upsilon\beta\pi$ modo indicati in eadem bβ, diſtantia, (altitudinem quod ſpectat, ſeu diſtantiam à $\tau\alpha$,) eſt $\frac{3}{4}h-\frac{2}{3}h=\frac{1}{12}h$. Adeoque, propter Priſmatis magnitudinem ad magnitudinem Pyramidis, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ſeu 3 ad 2, (eſt utique Priſma dimidium correſpondentis Parallelepipedi,

&

& Pyramis ejuſdem Triens,) altitudini centri Priſmatis additis duabus quintis differentiæ altitudinum, hoc eſt $\frac{2}{5} \times \frac{1}{12} h = \frac{1}{30} h$, habetur Ungulæ Trapezii $y \delta \xi p$ (ex utriſque conſtantis) altitudo Centri gravitatis, ſeu diſtantia à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} h + \frac{1}{30} h = \frac{7}{10} h$. Adeoque ejuſdem ab $A\alpha$ diſtantia, $bB + \frac{7}{10} BV = a + \frac{7}{10} s$. Fig. 166, 168, 170.

Cum itaque Ungula Trapezii cujuſque $y \delta \xi p$, ad reſpectivam Trianguli $Y\alpha P$ Ungulam ſit, magnitudine, ut 5 ad 2, (ut ad § A. oſtenſum eſt:) Sitque illius Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, ad hujus diſtantiam, ut $a + \frac{7}{10} s$ ad $\frac{3}{4} s$; erit Ungulæ Trapezii cujuſque $y \delta \xi p$ momentum ad momentum correſpondentis Ungulæ Trianguli $Y\alpha P$, reſpectu ejuſdem $A\alpha$, ut $5a + \frac{1}{2} s$ ad $\frac{3}{2} s$.

Cumque hoc ubique obtineat; (ſitque eadem ubique magnitudinis Ungulæ Trapezii ad magnitudinem Ungulæ Trianguli ratio, ut 5 ad 2:) Erit momentum Ungulæ Totius Semicycloidis, ejuſve portionis $Ab\beta\alpha$, aut $b\beta\delta d$, aut $b\beta\tau$, &c. (nam in partibus perinde procedit demonſtratio atque in totis,) ad correſpondens Momentum Ungulæ Semicirculi, ejuſve ſectoris $B\alpha A$, aut $B\alpha D$, aut $\alpha D\alpha$ ſegmenti, &c. (quarum acies ſint $\tau\alpha$,) reſpectu rectæ $A\alpha$: Ut omnes illæ Trianguli Ungulæ, Pyramideſve, eo ſpectantes, in diſtantias reſpective $5a + \frac{1}{2} s$; ad eaſdem in $\frac{3}{2} s$, ductas; ſeu ut omnia quadrata $V\alpha$ (quibus, propter YP ubique æquales, proportionales ſunt illæ pyramides) in $5a + \frac{1}{2} s$, ad eadem quadrata $V\alpha$ in $\frac{3}{2} s$: Hoc eſt, ut *Omnia* $5ah^2 + \frac{1}{2} sh^2$ eo ſpectantia, ad *Omnia* $\frac{3}{2} sh^2$ reſpectiva; ſeu, ut *Omnia* $10ah^2 + 7sh^2$, ad *Omnia* $3sh^2$, eo ſpectantia: Hoc eſt, ut 7 ad 3, atque inſuper ut *Omnia* $10ah^2$, ad *Omnia* $3sh^2$, eo ſpectantia; ſumptis *a* arcubus arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro $Ab\beta\alpha$ portione) *Omnia* ah^2 (ſumptis *a* arithmetice proportionalibus;) hoc eſt, *Omnes a* arcus arithmetice proportionales, in quadrata Sinuum verſorum, arcuum ad Semicirculum reſiduorum; idem atque *Duplum* Momenti correſpondentis Ungulæ $Ab\beta\alpha$ fig. 170. aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu rectæ $A\alpha$; (propter Triangula ſingulis $b\beta$ rectis ibidem inſiſtentia, $\frac{1}{2} h^2$; eorumque ab $A\alpha$ diſtantiam, *a*; adeoque momenta, $\frac{1}{2} ah^2$:) Hoc eſt, Duplum ipſius $\frac{3}{8} a^2R^2 + \frac{5}{4} asR^2 - \frac{1}{4} asvR - vR^3 - \frac{1}{8} s^2R^2$; per § F. prop. 19. Adeoque eorundem Decuplum, ſeu *Omn.* $10ah^2$; eſt hujus Momenti Vigecuplum; hoc eſt, $\frac{15}{2} a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{5}{2} s^2R^2$.

Suntque *Omnia* sh^2, eo ſpectantia; hoc eſt, eorundem arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, in Sinuum verſorum, arcuum ad ſemicirculum reſiduorum, quadrata: Idem atque Duplum Momenti Solidi, quadrilineo $Ab\beta\alpha$ fig. 170. incumbentis, ex ductu rectarum $b\beta$, in βv facti, reſpectu rectæ $\tau\alpha$: Hoc eſt, Duplum ipſius, $\frac{2}{3} vR^3 + \frac{2}{3} s^2R^2 - \frac{1}{6} s^2vR$ per § E. prop. 18. Adeoque eorundem Triplum, ſeu *Omn.* $3sh^2$; eſt hujus momenti ſextuplum, hoc eſt, $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Ergo *Omn.* $10ah^2$: ad *Omn.* $3sh^2$: (portionem $Ab\beta\alpha$ ſpectantia;) ſunt, ut $\frac{15}{2} a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{5}{2} s^2R^2$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Cui ſi adjungatur, prius memorata, ratio 7 ad 3; ſeu $\frac{28}{3} vR^3 + \frac{28}{3} s^2R^2 - \frac{7}{3} s^2vR$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Habetur ratio momenti ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, ad momentum Ungulæ Sectoris $B\alpha A$, (quarum acies $\tau\alpha$,) reſpectu ipſius $A\alpha$; $\frac{15}{2} a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - \frac{32}{3} vR^3 + \frac{41}{6} s^2R^2 - \frac{7}{3} s^2vR$, ad $4vR^2 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Cum itaque momentum illud Ungulæ Sectoris $B\alpha A$ ſit (conſequentis ſubduodecuplum) $\frac{1}{3} vR^3 + \frac{1}{3} s^2R^2 - \frac{1}{12} s^2v$, (per § L. prop. 16.) erit, Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum reſpectu $A\alpha$, (ſubduodecuplum antecedentis,) $\frac{5}{8} a^2R^2 + \frac{25}{12} asR^2 - \frac{5}{12} asvR - \frac{8}{9} vR^3 + \frac{41}{72} s^2R^2 - \frac{7}{36} s^2vR$. Idemque eſt, Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $A\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$.

Quod quidem Momentum, diviſum per Ungulæ illius $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $\frac{5}{4} fR^2 + \frac{5}{12} shR = \frac{5}{4} aR^2 + \frac{25}{12} sR^2 - \frac{5}{12} svR$, (per § D. prop. præced.) exhibet Diſtantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2} a - \frac{64vR^2 - 75asR - 41s^2R + 15asv + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv} = a - \frac{45a^2R + 64vR^2 - 41s^2R + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}$.

Idemque Momentum, diviſum per Ungulæ ejuſdem $Ab\beta\alpha$ portionis Semicycloidis, aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4} a^2R + \frac{3}{2} asR - \frac{2}{3} vR^2 + \frac{5}{12} s^2R$, per § I. prop. præced. exhibet hujus Diſtantiam Centri gravita-

Fig. 166, 168, 170. tis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R - \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$; à TA, $\frac{7}{8}R + \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$. Adeoque ejuſdem reſpectu TA, momentum, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$.

Quod ipſum, eſt etiam Momentum Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis TA, reſpectu $A\alpha$. Adeoque, ſi per hujus Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$ (per § D. prop. præced.) dividatur: Habetur ejuſdem Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a + \frac{33asR + 19s^2R - 32vR^2 + 15asv + 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv} = a - \frac{63a^2R - 19s^2R + 32vR^2 - 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv}$.

H. Si igitur totius Semicycloidis $A\tau\alpha$, Ungulas ſpectemus: Quoniam hoc caſu eſt $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$; erit Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{5}{8}R^2P$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.

Aciemque habentis $A\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Centrique gravitatis diſtantia à $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA, $\frac{7}{8}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; Momentum reſpectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$.

Aciemque habentis TA, momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P$; Diſtantia Centri gravitatis, ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.

I. Si autem ex Ungularum Totius Semicycloidis $A\tau\alpha$ Magnitudinibus & Momentis; auferantur reſpective Magnitudines & Momenta Ungularum $Ab\beta\alpha$: Habentur Ungularum $b\beta\tau$, Magnitudines & Momenta.

Puta, ſi ex Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudine $\frac{5}{8}R^2P$; & Momento reſpectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; modo exhibitis: Auferantur reſpectivæ Ungulæ $Ab\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$; & momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; ſupra tradita § G. Habetur Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{8}R^2P - \frac{5}{4}aR^2 - \frac{25}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$, ſeu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$; ejuſque, reſpectu $A\alpha$, momentum, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{16}{9}R^4 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{25}{12}asR^2 + \frac{5}{12}asvR - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia, $a + \frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{180RP - 360aR - 600sR + 120sv}$.

Si ex Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis TA, magnitudine, $\frac{7}{8}R^2P$; & momento reſpectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$, modo traditis: Auferantur reſpectivæ Ungulæ $Ab\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$; & momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; ſupra tradita § G. Habetur Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis TA, magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P - \frac{1}{4}aR^2 - \frac{11}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR = \frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$; ejuſque momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia, $a + \frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}$.

Si ex Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis $A\alpha$, magnitudine, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Momento reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; & reſpectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; modo traditis:

traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ A b β α, Magnitudo $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu τα, $\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{25}{12}asR^2-\frac{5}{12}asvR-\frac{8}{9}vR^3+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{7}{36}s^2vR$; & respectu TA, $\frac{7}{8}a^2R^2+\frac{11}{12}asR^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{19}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$: Habetur Ungulæ b β τ, aciem habentis A α magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3-\frac{3}{4}a^2R-\frac{3}{2}asR+\frac{2}{3}vR^2-\frac{5}{12}s^2R$; Momentum respectu τα, $\frac{5}{32}R^2P^2-\frac{16}{9}R^4-\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{25}{12}asR^2+\frac{8}{9}vR^3-\frac{41}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2-\frac{8}{9}R^4-\frac{7}{8}a^2R^2-\frac{11}{12}asR^2+\frac{4}{9}vR^3-\frac{19}{72}s^2R^2-\frac{5}{12}asvR-\frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{5}{8}R-\frac{192R^3-96vR^2+240asR+64s^2R-120asv-56s^2v}{54P^2-384R^2-216a^2-432as+192vR-120s^2}$; à TA, $\frac{7}{8}R+\frac{192R^3-96vR^2+240asR+64s^2R-120asv-56s^2v}{54P^2-384R^2-216a^2-432as+192vR-120s^2}$. Fig. 166, 170.

Atque hinc facile derivabitur, Ungulæ b β τ aciem habentis T τ, Momentum respectu τα, vel TA, Centrique gravitatis inde distantia.

Sed & hæc omnia quæ Ungulas b β τ in Semicycloide (fig. 166.) spectant, possunt etiam per se exquiri, sine ope Ungularum A b β α. Nam & hic etiam perinde valet, quod § G. demonstratur: Nempe Momentum Ungulæ b β τ, aciem habentis τα, respectu Aα; ad momentum respectivæ Ungulæ segmenti αBα, aciem habentis τα, respectu Aα; esse ut 7 ad 3, atque insuper ut *Omn.* 10 ah^2, ad *Omn.* 3 sh^2; seu, ut 7 ad 3, atque insuper ut *Vigecuplum* Momenti Ungulæ b β τ in figura Sinuum versorum fig. 170. aciem habentis τα, respectu Aα; ad *Sextuplum* Momenti Ungulæ Segmenti circularis αBα fig. 169. aciem habentis τα, respectu Aα. Idemque erit, Ungulæ b β τ fig. 166, 168. aciem habentis Aα, momentum respectu τα. Unde & cætera eo spectantia derivari poterunt; eadem quæ prius.

Deinde; Si ex Momentis Ungularum A b β α, auferantur respectiva Momenta Ungularum Trapezii b β α V; restabunt respectiva Ungularum A b V Momenta. K.

Constat autem Ungula Trapezii b β α V, fig. 166: aciem habentis τα; ex duabus Ungulis; Nempe Trianguli BαV, & Parallelogrammi b β α B.

Est autem Ungulæ Trianguli BαV, aciem habentis τα; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}s^2h^2$, per § M. prop. 16.

Ungulæque Parallelogrammi b β α B, magnitudo (quippe eadem quæ respectivæ Ungulæ b β α B fig. 170.) $\frac{1}{2}ah^2$, per § F. prop. 17. Centrique gravitatis à τα distantia, $\frac{2}{3}h$, (per § C. prop. 5.) adeoque ab Aα, $\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}s$, (ut ex schematis aspectu facile colligitur:) Et propterea, ejusdem respectu Aα, momentum, $\frac{1}{4}a^2h^2+\frac{1}{3}asb^2$.

Ergo; Ungulæ Totius Trapezii b β α V, aciem habentis τα, momentum respectu Aα, est $\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{3}asb^2+\frac{1}{8}s^2h^2$, seu (propter $h=2R-v$, adeoque $h^2=4R^2-4vR+v^2=4R^2-2vR-s^2$,) $a^2R^2-\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2+\frac{4}{3}asR^2-\frac{2}{3}asvR-\frac{1}{3}as^3+\frac{1}{2}s^2R^2-\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$. Idemque est Ungulæ b β α V, aciem habentis Aα, momentum respectu τα; propter Distantias & Altitudines reciprocatas.

Quod itaque momentum, per Ungulæ aciem habentis τα magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2+\frac{1}{3}sh^2$ (ut § F. ostensum est) divisum, exhibet ejusdem Centri gravitatis ab Aα distantiam, $\frac{1}{2}a+\frac{4as+3s^2}{12a+8s}=\frac{1}{2}a+\frac{4a+3s}{12a+8s}s=\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}s+\frac{s^2}{36a+24s}$.

Idemque momentum, per Ungulæ aciem habentis Aα, magnitudinem $\frac{1}{2}fah+\frac{1}{6}s^2h=\frac{1}{2}a^2h+\frac{1}{2}asb+\frac{1}{6}s^2h$ (per § K. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Ungulæ Distantiam Centri gravitatis à τα, $\frac{6a^2+8as+3s^2}{12a^2+12as+4s^2}h=\frac{1}{2}h+\frac{2as+s^2}{12fa+4s^2}h$: Adeoque à TA, $2R-\frac{1}{2}h(=R+\frac{1}{2}v)-\frac{2a+s}{12fa+4s^2}sh$. Et propterea ejusdem respectu TA, momentum, $fahR+\frac{1}{3}s^2hR-\frac{1}{4}a^2h^2-\frac{1}{3}asb^2-\frac{1}{8}s^2h^2$. Quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est momentum Ungulæ b β α V, aciem habentis TA, respectu Aα: Adeoque per Ungulæ b β α V aciem habentis TA, magnitudinem $2ahR+shR-\frac{1}{2}ah^2-\frac{1}{3}sh^2$

(per § G. prop. præced.) divisum ; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab

$$A\alpha, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}s+\frac{2s^2R-fsh}{48aR+24sR-12ah-8sh}=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}s+\frac{fsv-2asR}{24aR+8sR+12av+8sv}.$$

Fig. 166. Si itaque ex Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis τ α, Momento respectu A α ; seu, aciem habentis A α, momento respectu τ α ; $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{25}{12}asR^2+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{8}{9}vR^3-\frac{5}{12}asvR-\frac{7}{36}s^2vR$ (per § G.) auferatur respectivum Ungulæ b β α V momentum modo traditum, $a^2R^2+\frac{4}{3}asR^2+\frac{1}{2}s^2R^2-\frac{1}{2}a^2vR-\frac{2}{3}asvR-\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2-\frac{1}{5}as^3-\frac{1}{8}s^4$: Habetur Ungulæ A b V, aciem habentis τ α, momentum respectu A α ; aciemve habentis A α, momentum respectu τ α ; $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2+\frac{5}{72}s^2R^2-\frac{8}{9}vR^3+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{18}s^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2+\frac{1}{5}as^3+\frac{1}{8}s^4$.

Quod per Ungulæ A b V, aciem habentis τ α, magnitudinem, $-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$, (per § F, G. prop. præced.) divisum ; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a+$

$$\frac{27asR^2+5s^2R^2-64vR^3+9asvR+4s^2vR+12as^3+9s^4}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3}.$$

Idemque momentum per Ungulæ A b V, aciem habentis A α, magnitudinem, $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum ; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R-$

$$\frac{4s^2R^2-8vR^3+18a^2vR+36asvR+14s^2vR-18a^2s^2-24as^3-9s^4}{-18a^2R+36asR+6s^2R-48vR^2+36a^2v+36asv+12s^2v}:$$

Adeoque à T A, $\frac{1}{2}R+$

$$\frac{4s^2R^2-8vR^3+18a^2vR+36asvR+14s^2vR-18a^2s^2-24as^3-9s^4}{-18a^2R+36asR+6s^2R-48vR^2+36a^2v+36asv+12s^2v};$$

à b V, $\frac{3}{2}R-h\ (=v-\frac{1}{2}R)-$

$$\frac{4s^2R^2-8vR^3+18a^2vR+36asvR+14s^2vR-18a^2s^2-24as^3-9s^4}{-18a^2R+36asR+6s^2R-48vR^2+36a^2v+36asv+12s^2v}.$$

Ejusque propterea respectu T A, momentum, $-\frac{1}{8}a^2R^2+\frac{1}{4}asR^2+\frac{7}{72}s^2R^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{3}{4}asvR+\frac{5}{18}s^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2-\frac{1}{3}as^3-\frac{1}{8}s^4$: Et respectu b V, (factum ex v in magnitudinem, dempto momento respectu T A,) $\frac{1}{8}a^2R^2-\frac{1}{4}asR^2-\frac{7}{72}s^2R^2+\frac{4}{9}vR^3-\frac{3}{4}a^2vR-\frac{1}{4}asvR-\frac{7}{36}s^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2+\frac{1}{3}as^3+\frac{1}{8}s^4-\frac{2}{3}v^2R^2+\frac{1}{2}a^2v^2+\frac{1}{2}asv^2+\frac{1}{6}s^2v^2$; seu (propter $v^2=2vR-s^2$,) $\frac{1}{8}a^2R^2-\frac{1}{4}asR^2+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{8}{9}vR^3+\frac{1}{4}a^2vR+\frac{3}{4}asvR+\frac{5}{36}s^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2-\frac{1}{6}as^3-\frac{1}{24}s^4$. Quæ duo, sunt etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) momenta, respectu A α, Ungularum A b V, acies habentium T A, & b V : Adeoque per harum respective magnitudines, $-\frac{1}{4}eR^2\ (=-\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sR^2)+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2\ (=\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2)+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$, (per § F, G. prop præced.) divisa ; exhibent earum distantiam centri gravitatis ab A α : Nempe, Ungulæ A b V, aciem habentis TA, distantiam ab A α, $\frac{1}{2}a+\frac{9asR^2+7s^2R^2-32vR^3+27asvR+20s^2vR-12as^3-9s^4}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}$;

aciemque habentis b V, ab eadem A α distantiam $\frac{1}{2}a+$

$$\frac{41s^2R^2-9asR^2-64vR^3+27asvR+10s^2vR-6as^3-3s^4}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}.$$

L. Eadem Momenta, Ungulas A b V spectantia (& quæ hinc dependent,) sic adhuc alias investigantur, absque ope Ungularum A b β α.

Ungulam A b V, aciem habentem b V, (si planis ipsi A b V plano parallelis, æqualibus ab invicem distantiis remotis, sectam intelligamus,) constituent, omnia A b V plana, eo spectantia ; sumptis AV, hoc est v, arithmetice proportionalibus, usque ad A V, seu V, maximum. Adeoque eorum momenta respectu A α ; hoc est (per § K, L. prop. præced.) *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{3}asR+\frac{1}{15}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v$

$\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$: (ſumptis v arithmetice proportionalibus;) complent ejuſdem A b V Ungulæ, aciem habentis b V, momentum reſpectu A α; ſeu (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) aciem habentis A α, momentum reſpectu b V. Fig. 166.

Sunt autem, *Omnia* $\frac{1}{2}a^2$ eo ſpectantia, (ſumptis v arithmetice proportionalibus;) hoc eſt, momentum ipſius A b B fig. 170. plani, reſpectu A α; (per § I. prop. 17.) $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$. Adeoque, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R:=\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{1}{2}asR^2+\frac{1}{2}vR^3-\frac{1}{4}a^2vR$.

Item, *Omnia as*, eo ſpectantia; hoc eſt Solidum A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in B V (fig. 169.) reſpective; (per § L. prop. 18.) $\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{2}asv$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asR:=\frac{1}{8}a^2R^2+\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asR^2+\frac{1}{4}asvR$.

Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia; hoc eſt, Momentum Segmenti Semicirculi A B V fig. 169. reſpectu A α; (per § R. prop. 15.) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{12}s^2R^2:=\frac{1}{18}vR^3-\frac{1}{36}s^2R^2+\frac{1}{36}s^2vR$.

Item, *Omn. v* (arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}v^2$, (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $-\frac{2}{3}vR^2:=-\frac{1}{3}v^2R^2=-\frac{2}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2v$; hoc eſt, Momentum Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, reſpectu T A; (per § I. prop. 19.) $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}asv$; hoc eſt, Semimomentum, reſpectu T A, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in b V fig. 169. (per § M. prop. 18.) $\frac{1}{8}a^2R^2-\frac{1}{4}asR^2+\frac{5}{72}s^2R^2+\frac{1}{9}vR^3+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{18}s^2vR-\frac{1}{6}as^3$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$; hoc eſt, Momentum Ungulæ A B V fig. 169. aciem habentis A α, reſpectu T A: (per § E. prop. 16.) $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v:=\frac{1}{9}vR^3-\frac{1}{18}s^2R^2+\frac{1}{18}s^2vR-\frac{1}{24}s^4$.

Ergo, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$: Hoc eſt, Ungulæ A b V, aciem habentis b V, momentum reſpectu A α; aciemve habentis A α, momentum reſpectu b V; $\frac{1}{8}a^2R^2-\frac{1}{4}asR^2+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{8}{9}vR^3+\frac{1}{4}a^2vR+\frac{3}{4}asvR+\frac{5}{36}s^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2-\frac{1}{6}as^3-\frac{1}{24}s^4$. Idem quod prius.

Atque hoc momentum diviſum per Ungulæ aciem habentis b V magnitudinem: Exhibet diſtantiam centri gravitatis ab A α.

Idemque per Ungulæ aciem habentis A α magnitudinem diviſum; exhibet hujus diſtantiam Centri gravitatis à b V; & conſequenter, à TA, & $\tau\alpha$; ejuſque propterea momentum reſpectu TA, & $\tau\alpha$: Quæ eadem etiam ſunt Momenta, reſpectu A α, aciem habentium T A, & $\tau\alpha$: Quæ per magnitudines diviſa, exhibebunt & harum diſtantias centri gravitatis ab A α. Eadem quæ prius.

Atque, his demum Momentis, ſi addantur reſpectiva Ungularum b $\beta\alpha$ B momenta: Habentur Ungularum A b $\beta\alpha$ momenta reſpectiva; eadem quæ ſuperius alia methodo inventa ſunt. Atque hinc, diſtantiæ centrorum gravitatis; ut prius.

Supereſt tandem, ut Ungularum aciem habentium A α, momenta reſpectu ejuſdem A α, inveſtigemus; & quæ hinc dependent. M.

Diſtributis igitur, ut prius, tum Semicirculo in minuta Triangula Y α P, tum Semicycloide in Minuta Trapezia y $\delta\xi$ p: Semiquadrantalem Ungulam, Semicycloidi inſiſtentem, aciem habentem A α, complebunt Solida his Minutis Trapeziis inſiſtentia; ſicut & Ungulam Semicirculo inſiſtentem, eandem aciem habentem, complent Solida Triangulis illis inſiſtentia. Fig. 166, 168, 173, 174.

Triangulo Y α P inſiſtens ſolidum, Pyramis eſt, cujus centrum gravitatis in α B poſitum, abſcindit inde, verſus α, $\frac{3}{4}\alpha$ B, (per prop. 6. hujus;) adeoque ipſius ab A α diſtantia erit $\frac{3}{4}$ B V $=\frac{3}{4}s$.

Trapezio y $\delta\xi$ p inſiſtens ſolidum; Componitur ex Truncato Cuneo, ſeu Priſmate duobus ſimilibus Trapeziis y d ξ p interjecto, altitudinem habente ipſi $\alpha\beta=a$ æqualem: Atque, ex Cuneo ei ſuperimpoſito altitudinem habente, in β, nullam; ſed, in b, ipſi B V $=s$ æqualem; tantam ſcilicet quanto altius eſt ſolidum illud in b, quam in β, hoc eſt, quanto longior eſt b V, quam $\beta\alpha$.

Fig. 166, 168, 173, 174. (Nec quemquam interim morari debeat, quod (propter aciem A α;) altitudo in Y, y, δ, major sit; atque in P, p, ξ, minor, quam in B, b, β, respective. Quamquam enim illud omnino verum sit; atque, in sectione determinata, alicujus sit Momenti: Continuata tamen in infinitum sectione, (quod supponimus,) differentia evanescit in data quavis minorem: Quæ non modo in methodo indivisibilium, sed in omni per figurarum inscriptionem & circumscriptionem demonstrandi methodo, negligenda erit. Neque enim aliud producit, quam quod centrum gravitatis quod in B α, b β, rectis supponimus; promovendum erit ultra illas, intervallo quod dato quovis minus sit. Quod autem ab alio, differentia quæ data quavis minor sit, differre demonstratur; pro æquali habendum erit. Dumque easdem supponimus, tum in Y, y, δ, tum in P, p, ξ, altitudines quæ in B, b, β: Solidum ex minutis adscriptum (partim inscriptum, partim circumscriptum,) pro vero Solido substituimus, quod ab illo differat, non nisi differentia quæ data minor sit.)

Cuneus autem Truncatus ille, quem diximus; seu Prisma parallelis Trapeziis interjectum: Constat ex Cuneo intermedio, seu Prismate Triangulo $\upsilon\beta\pi$ insistente; & bipartito Parallelepipedo, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta$ y & $\pi\beta\xi$ p insistente.

Qui quidem Cuneus intermedius, propter formam, est, ad Pyramidem æque altam ejusdem baseos, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Cuneus illæ parallelepipedi illius Semis, cujus Pyramis Triens est:) Cumque porro altitudo Cunei, in β vel b, sit ad altitudinem baseos Pyramidis in B; ut $\beta\alpha$ seu b B, ad B V; hoc est, ut a ad s: Erit Cunei Triangulo $\upsilon\beta\pi$ insistentis, ad Pyramidem simili & æquali Triangulo Y α P incumbentem, ratio, (ex illis composita) ut $3a$ ad $2s$. Cumque Cunei centrum gravitatis sit in β b, abscindens, versus β, $\frac{2}{3}\beta$ b, (per prop. 5, 6.) adeoque ipsius ab A α distantia sit, b B $+\frac{2}{3}$ B V, seu $a+\frac{2}{3}s$, (ut ex schematis inspectu facile colligitur;) Centrique gravitatis Pyramidis Y α P (ut dictum est) inde distantia sit $\frac{3}{4}s$: Adeoque distantiarum ratio, ut $a+\frac{2}{3}s$, ad $\frac{3}{4}s$: Ratio hæc, cum ratione magnitudinum ($3a$ ad $2s$) composita; exhibet rationem Momenti Cunei illius, ad Momentum Pyramidis (respectu ejusdem A α,) ut $3a^2+2as$, ad $\frac{3}{2}s^2$, seu $6a^2+4as$ ad $3s^2$.

Et parallelepipedum (bipartitum) cum sit, propter formam, ad Pyramidem æqualtam, ejusdem basis, ut 3 ad 1: Sitque baseos in β vel b altitudo, ad altitudinem in B, ut a ad s: Erit Parallelepipedi ad Pyramidem ratio $3a$ ad s. Cumque Parallelepipedi (utut bipartiti) commune centrum gravitatis sit in medio β b: Adeoque ejusdem ab A α distantia, $a+\frac{1}{2}s$: (Sitque centri gravitatis Pyramidis, ut dictum est, distantia $\frac{3}{4}s$:) Distantiarum ratio, $a+\frac{1}{2}s$ ad $\frac{3}{4}s$; cum ratione magnitudinum, $3a$ ad s, composita; exhibet rationem Momentorum, $3a^2+\frac{3}{2}as$ ad $\frac{3}{4}s^2$, seu $12a^2+6as$ ad $3s^2$.

Cuneusque, Truncato illi Cuneo superimpositus; Componitur ex Pyramide intermedia, triangulo $\upsilon\beta\pi$ supereminente, (Pyramidi in Y α P simili & æquali;) & Cuneo bipartito, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta$ y, $\pi\beta\xi$ p, supereminente.

Pyramidisque Trianguli $\upsilon\beta\pi$ centrum gravitatis, cum intelligatur in b β situm, (saltem in plano super hanc erecto,) abscindens, versus β, $\frac{3}{4}\beta$ b; adeoque ipsius ab A α distantia (ut ex schematis inspectu facile colligitur,) $a+\frac{3}{4}s$: Erit (propter magnitudines æquales) momenti ejus ratio, ad momentum Pyramidis Y α P, (respectu ejusdem A α,) eadem quæ distantiarum; hoc est, ut $a+\frac{3}{4}s$ ad $\frac{3}{4}s$; seu ut $4a+3s$, ad $3s$; hoc est, ut $4as+3s^2$, ad $3s^2$.

Cuneique bipartiti, cum (propter æquales bases & altitudines,) sit ad Pyramidem, ut 3 ad 2; Centrique distantia illius, ad centri hujus distantiam, ut $a+\frac{2}{3}s$ ad $\frac{3}{4}s$: Erit momentum bipartiti Cunei, ad momentum Pyramidis Y α P, (respectu ejusdem A α,) ut $3a+2s$ ad $\frac{3}{2}s$; seu $6as+4s^2$ ad $3s^2$.

Ergo, Solidi totius, minuto Trapezio y δ ξ p incumbentis, (quod ex partibus jam expositis componitur,) ad momentum Pyramidis correspondentis, incumbentis Triangulo Y α P, (respectu ejusdem A α,) est ut $6a^2+4as$ plus $12a^2+6as$ plus $4as+3s^2$ plus $6as+4s^2$, ad $3s^2$: Hoc est, ut $18a^2+20as+7s^2$, ad $3s^2$. Vel (ductis omnibus in communem altitudinem V $\alpha = h$,) ut $18a^2h+20ash+7s^2h$, ad $3s^2h$. Et sic ubique. Adeoque momentum Solidi ex illis conflati (sive quod totam A $\tau\alpha$, sive quod ipsius partem ut A b $\beta\alpha$, spectat;) ad momentum correspondentis solidi ex his conflati, (quod vel totum A D α, vel ipsius

ipsius partem B α A, spectat ;) ut *Omnia*, $18a^2h + 20ash + 7s^2h$: ad *Omnia*, $3s^2h$: eo spectantia. Fig. 166, 168.

Eademque ratio, sic alias colligitur : ad methodum nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*.

Sunto rectæ complentes Y α P Triangulum (utpote arithmetice proportionales,) $h, 2h, 3h$, &c. usque ad maximum Y P $= B$. Quarum puncta media, seu gravitatis Centra, in α B posita, habebunt (in Ungula Semiquadrantali aciem habente A α) altitudines distantiis suis ab A α æquales, puta $s, 2s, 3s$, &c. usque ad maximam B V $= S$. Quæ distantiæ, in rectas illas respective ductæ, exhibent seriem magnitudinum rectis illis insistentium (ungulam complentium,) bs, $4bs$, $9bs$, &c. usque ad maximum BS. Quæ quidem series Magnitudinum, Pyramidem Y α P complentium, (utpote Series Secundanorum ;) erit ad Seriem totidem maximæ æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut 1 ad 2 + 1 ; (per prop. 1. hujus :) Hoc est ut 1 ad 3. Puta, $\frac{1}{3}hBS$.

b	$2b$	$3b$. &c.	usque ad B
s	$2s$	$3s$. &c.	usque ad S.
bs	$4bs$	$9bs$. &c.	usque ad BS. $= \frac{1}{3}hBS$.

Eademque Series magnitudinum (quarum omnium Centra gravitatis sunt in α B, planove super hanc erecto ; saltem inde distant intervallo quod dato quovis minus sit ;) in suas iterum distantias, $s, 2s, 3s$, &c. ductæ ; exhibent momentorum earundem, respectu ipsius A α, seriem $bs^2, 8bs^2, 27bs^2$, &c. usque ad BS^2 maximum. Quæ quidem series, (utpote Tertianorum,) est ad seriem totidem maximo æqualium ; puta hBS^2 : (Hoc est, ad Parallelepipedi Momentum in B suspensi ;) ut 1 ad 3 + 1 ; hoc est, ut 1 ad 4 : (per prop. 1. hujus.) Adeoque $\frac{1}{4}hBS^2$.

bs	$4bs$	$9bs$. &c.	usque ad BS.
s	$2s$	$3s$. &c.	usque ad S.
bs^2	$8bs^2$	$27bs^2$. &c.	usque ad BS^2. $= \frac{1}{4}hBS^2$

Trapezium vero complentes rectæ, (quarum minima $\delta\xi$ = Y P $= B$,) erunt $B+b$, $B+2b$, $B+3b$, &c. usque ad $P+B$, seu $2B$. Quarum itaque summa, æquabit $hB + \frac{1}{2}hB = \frac{3}{2}hB$, per prop. 1.

	B.	B.	B. &c.		$= hB$ }
plus	b	$2b$.	$3b$. &c.	usque ad B.	$= \frac{1}{2}hB$ } $= \frac{3}{2}bB$.

Eademque series in distantias suas ab A α ductæ ; hoc est (propter gravitatis centra singulorum in β b,) in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$: Exhibent Seriem Magnitudinum eisdem insistentium (solidum complentium) $BA + bA + sB + sb$, $BA + 2bA + 2sB + 4sb$, $BA + 3bA + 3sB + 9sB$, &c. Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $hBA + \frac{1}{2}bBA + \frac{1}{2}hSB + \frac{1}{3}hSB$, seu $\frac{3}{2}hBA + \frac{1}{6}hSB$.

$B+b$, in $A+s$, $= BA + bA + sB + sb$.
$B+2b$, in $A+2s$, $= BA + 2bA + 2sB + 4sb$.
$B+3b$, in $A+3s$, $= BA + 3bA + 3sB + 9sb$.
&c. usque ad,
$B+B$, in $A+S$, $= BA + BA + SB + SB$.
$hBA + \frac{1}{2}hBA + \frac{1}{2}hSB + \frac{1}{3}hSB$.
seu $\frac{3}{2}hBA + \frac{1}{6}hSB$.

Eademque Magnitudinum series, in distantias iterum ducta ; hoc est, in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. exhibet seriem Momentorum, (respectu ejusdem A α.)

Quorum

Fig. 166, 168. Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) eſt $bBA^2 + \frac{1}{2}hBA^2 + hSBA + \frac{2}{3}hSBA + \frac{1}{3}hS^2B + \frac{1}{4}hS^2B$, ſeu $\frac{3}{2}bBA^2 + \frac{5}{3}hSBA + \frac{7}{12}hS^2B$.

$BA^2 + bA^2 + 2sBA + 2sbA + s^2B + s^2b.$
$BA^2 + 2bA^2 + 4sBA + 8sbA + 4s^2B + 8s^2b.$
$BA^2 + 3bA^2 + 6sBA + 18sbA + 9s^2B + 27s^2b.$
&c. uſque ad,
$BA^2 + BA^2 + SBA + SBA + S^2B + S^2B.$
$hBA^2 + \frac{1}{2}hBA^2 + \frac{2}{3}hSBA + \frac{2}{3}hSBA + \frac{1}{3}hS^2B + \frac{1}{4}hS^2B.$
ſeu $\frac{3}{2}hBA^2 + \frac{5}{3}hSBA + \frac{7}{12}hS^2B.$

Adeoque Solidi Trapezio $y\delta\xi p$ incumbentis magnitudo, ad magnitudinem Pyramidis Triangulo $Y\alpha P$ incumbentis, eſt ut, $\frac{3}{2}hBA + \frac{5}{6}hSB$, ad $\frac{1}{3}hBS$. Atque momentum illius, ad momentum hujus, (reſpectu ejuſdem $A\alpha$,) ut $\frac{3}{2}hBA^2 + \frac{5}{3}hSBA + \frac{7}{12}hS^2B$, ad $\frac{1}{4}hS^2B$. Seu, extrito B ubique, (utpote infinite exiguo, & ubique æquali;) ductiſque omnibus in 6 (pro magnitudinibus,) ſeu (pro momentis) in 12, (quo fractiones tollantur:) Magnitudo ad magnitudinem erit, ut $9bA + 5hS$, ad $2hS$: Et momentum illius, ad Momentum hujus, ut $18hA^2 + 20hAS + 7hS^2$, ad $3hS^2$. Seu (reſtitutis minuſcularum valoribus) Magnitudo ad Magnitudinem, ut $9ah + 5sh$, ad $2sh$: Et momentum ad momentum, ut $18a^2h + 20ash + 7s^2h$, ad $3s^2h$.

Cumque hoc ubique obtineat; erit Solidorum omnium Trapeziis $y\delta\xi p$ inſiſtentium, (ſive quæ totam Semicycloidem ſpectant, ſive quæ ſpectant ipſius portionem, $Ab\beta\alpha$, $b\beta\tau$, $b\beta\delta d$, &c.) magnitudo; ad magnitudinem omnium Triangulis $Y\alpha P$ inſiſtentium, (ſive quæ totum ſpectant Semicirculum, ſive ipſius reſpectivam portionem, ut $B\alpha A$, $\alpha B\alpha$, $B\alpha D$, &c.) ut *Omnia* $9ah + 5sh$: ad *Omn.* $2sh$: eo ſpectantia. (De quo non ultra ſoliciti ſumus, utpote quod in capite præcedente tractavimus.) Eorumque omnium Momentum, ad Momentum horum; ut *Omn.* $18a^2h + 20ash + 7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: eo ſpectantia. (Quod & ſupra inventum erat.)

Hoc eſt, ut *Omn.* $7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: (ſeu 7 ad 3:) atque inſuper ut *Omn.* $18a^2h + 20ash$: ad *Omn.* $3s^2h$. Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a^2h: (puta, quæ portionem $Ab\beta\alpha$ ſpectant,) hoc eſt, Ungulæ $Ab\beta\alpha$ fig. 170. aciem habentis $A\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, (per § K. prop. 19.) $2eR^3 - 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$. Adeoque *Omn.* $18a^2h$: $= 36eR^3 - 36avR^2 + 6a^3R + 18a^2sR$.

Item, *Omn.* ash: eo ſpectantia; hoc eſt, Solidi $Ab\beta\alpha$ fig. 170. ex ductu rectarum $b\beta$ in $b\upsilon$ facti, momentum reſpectu $A\alpha$, (per § H. prop. 18.) $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$. Adeoque *Omn.* $20ash$: $= -25eR^3 + 20avR^2 - 5svR^2 + 10as^2R$.

Ergo, *Omn.* $18a^2h + 20ash$: $= 11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$.

Similiter; *Omn.* $\frac{1}{2}s^2h$: hoc eſt; Solidi $Ab\beta\alpha$, fig. 170. ex ductu rectarum $b\beta$ in $\beta\upsilon$ facti, momentum reſpectu plani $A\tau\alpha$, (per § C. prop. 18.) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Adeoque *Omn.* $3s^2h = \frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$.

Momentum igitur Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $A\alpha$, reſpectu ejuſdem $A\alpha$; eſt ad Momentum reſpectivæ Ungulæ portionis Semicirculi $B\alpha A$, aciem habentis $A\alpha$, reſpectu ejuſdem $A\alpha$: ut $11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$ ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$; atque inſuper (ut modo dictum) ut 7 ad 3; hoc eſt, ut $\frac{7}{2}eR^3 + \frac{7}{2}svR^2 + \frac{7}{3}s^3R$, ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$: Adeoque omnino, ut $\frac{29}{2}eR^3 - 16avR^2 - \frac{3}{2}svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R + \frac{7}{3}s^3R$, ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$. Cumque hoc poſterius ſit (per § R prop. 16.) duodecuplum Momenti Ungulæ $B\alpha A$, aciem habentis $A\alpha$, reſpectu ipſius $A\alpha$: Erit & prius illud, duodecuplum momenti

menti Ungulæ A b β α (portionis Semicycloidis) aciem habentis A α, reſpectu ejuſdem A α: Adeoque ipſum illius momentum, $\frac{29}{24} e R^3 - \frac{4}{3} a v R^2 - \frac{1}{8} s v R^2 + \frac{1}{2} a^3 R + \frac{3}{2} a^2 s R + \frac{5}{8} a s^2 R + \frac{7}{36} s^3 R$: (Hujuſque Duplum, eſt Semiſolidi circa A α converſione facti, Momentum reſpectu ipſius axis A α: ut ſupra ſæpius oſtenſum eſt.) Fig. 166, 168.

Illudque Ungulæ Momentum, per magnitudinem ſuam, $\frac{3}{4} a^2 R + \frac{3}{2} a s R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{5}{12} s^2 R$, (per § I. prop. 20.) diviſum; exhibet ipſius A b β α Ungulæ, aciem habentis A α, diſtantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87 e R^2 - 96 a v R - 9 s v R + 36 a^3 + 108 a^2 s + 60 a s^2 + 14 s^3}{54 a^2 + 108 a s - 48 v R + 30 s^2}.$$

(Semiſolidique correſpondentis, diſtantia centri gravitatis ab axe A α, eſt ad hanc Ungulæ; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$.)

Speciatim vero, Ungulæ totius Semicycloidis A τ α, aciem habentis A α, Momentum reſpectu A α, (propter $a = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, $v = 2R$, & $s = 0$,) $\frac{1}{16} R \mathcal{P}^3 - \frac{25}{48} R^3 \mathcal{P}$. Centrique gravitatis ab A α diſtantia, eſt $\frac{3\mathcal{P}^3 - 35 R^2 \mathcal{P}}{9\mathcal{P}^2 - 64 R^2}$.

Similiter oſtendetur, Ungulæ Segmenti Semicycloidis b β τ, aciem habentis A α, Momentum reſpectu A α; ad momentum Ungulæ ſegmenti ſemicirculi α B α, aciem habentis A α, reſpectu ejuſdem A α; eſſe, ut 7 ad 3; atque inſuper, ut *Omn.* $18 a^2 b + 20 a s b$: ad *Omn.* $3 s^2 b$: eo ſpectantia; ſumptis a arithmetice proportionalibus. Quæ ſimiliter, mutatis mutandis, ad calculum reducentur. Cumque Ungulæ Segmenti Semicirculi Momentum illud per § S. prop. 16. innoteſcat: Habebitur & correſpondens Ungulæ Segmenti Semicycloidis Momentum; & quæ hinc dependent. N.

Vel etiam; ex totius A τ α Ungulæ momento, (modo tradito,) ſi auferatur (modo traditum) momentum Ungulæ A b β α: Reſtabit $\frac{1}{16} R \mathcal{P}^3 - \frac{25}{48} R^3 \mathcal{P} - \frac{29}{24} e R^3 + \frac{1}{3} a v R^2 + \frac{1}{8} s v R^2 - \frac{1}{2} a^3 R - \frac{3}{2} a^2 s R - \frac{5}{8} a s^2 R - \frac{7}{36} s^3 R$, Momentum Ungulæ b β τ aciem habentis A α, reſpectu ipſius A α.

Atque hoc, per ipſius magnitudinem (§ I. traditam) $\frac{3}{16} R \mathcal{P}^2 - \frac{4}{3} R^3 + \frac{2}{3} v R^2 - \frac{3}{4} a^3 R - \frac{3}{2} a s R - \frac{5}{12} s^2 R$, diviſum; exhibet ejuſdem, ab A α, diſtantiam centri gravitatis,

$$\frac{9\mathcal{P}^3 - 105 R^2 \mathcal{P} - 174 e R^2 + 192 a v R + 18 s v R - 72 a^3 - 216 a^2 s - 120 a s^2 - 28 s^3}{27\mathcal{P}^2 - 192 R^2 + 96 v R - 108 a^2 - 216 a s - 60 s^2}.$$

Si vero ex Ungulæ A b β α (portionis Semicycloidis) momento illo, modo reperto; auferatur Momentum Ungulæ b β α V, (aciem habentis A α,) reſpectu A α: Relinquitur Ungulæ A b V (aciem habentis A α,) momentum reſpectu A α. O.

Componitur autem Ungula illa b β α V, ex Pyramide Triangulo B α V incumbente, & ſolido incumbente Parallelogrammo b β α B.

Pyramidis iſtius momentum (per § R. prop. 16.) eſt, $\frac{1}{12} s^3 b = \frac{1}{6} s^3 R - \frac{1}{12} s^3 v$.

Solidum Parallelogrammo b β α B incumbens; altitudinem habet, in α, nullam; in β, α β = a; in B, B V = s; in b, b V = $s + a$. Adeoque componitur ex priſmate, triangulares baſes habente, α β, vel B b, = $\frac{1}{2} a^2$; (quarum itaque centra gravitatis à B, & α, ſunt $\frac{2}{3} a$; &, propter altitudinem V α = b, magnitudo priſmatis $\frac{1}{2} a^2 b$; centrique gravitatis ab A α diſtantia $\frac{2}{3} a + \frac{1}{2} s$, propter centrum priſmatis in medio rectæ centra baſium conjungente; adeoque momentum ejus reſpectu A α, $\frac{1}{3} a^3 b + \frac{1}{4} a^2 s b$:) Atque ex cuneo, altitudinem habente in α β, nullam; in b B, æqualem ipſi B V = s: Adeoque (propter b B = a, & V α = b,) magnitudinem habebit $\frac{1}{2} a s b$, (ſemiſſem Priſmatis, ejuſdem baſis & altitudinis:) Centrique gravitatis ab A α diſtantiam, $\frac{1}{2} a + \frac{2}{3} s$: Ejuſque propterea reſpectu A α momentum, $\frac{1}{4} a^2 s b + \frac{1}{3} a s^2 b$. Solidique propterea totius parallelogrammo incumbentis momentum, reſpectu A α, $\frac{1}{3} a^3 b + \frac{1}{2} a^2 s b + \frac{1}{3} a s^2 b$.

Adeoque Solidi Trapezio b β α V incumbentis, momentum reſpectu A α, $\frac{1}{3} a^3 b + \frac{1}{2} a^2 s b + \frac{1}{3} a s^2 b + \frac{1}{12} s^3 b$. Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2} f a b + \frac{1}{6} s^2 b$ (per § K. prop. 20.) diviſum; exhibet ipſius b β α V Ungulæ, aciem habentis A α, diſtantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{4 a^3 + 6 a^2 s + 4 a s^2 + s^3}{6 f a + 2 s^2}$.

Fig. 166, 168. Vel etiam sic colligitur, ejusdem $b\beta\alpha V$ Ungulæ, aciem habentis $A\alpha$, respectu ipsius $A\alpha$, Momentum.

Rectæ Trapezium complentes, ab $\alpha\beta$ incipiendo, usque ad bV; sunt A, $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$. Earumque puncta media, seu gravitatis centra, distantias habent, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$. Quæ in rectas illas ductæ, exhibent earundem momenta, seu Triangula rectis illis insistentia Ungulam complentia, $\frac{1}{2}A^2$, $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$. Eademque Triangula, ducta in earundem respective distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, nempe $\frac{2}{3}A$, $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, &c. usque ad $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$; exhibent seriem Momentorum, eorundem Triangulorum, respectu $A\alpha$; $\frac{1}{3}A^3$, $\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$, &c. usque ad $\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$. Quarum omnium aggregatum (per prop. 1.) propter $V\alpha=h$, est, $\frac{1}{3}hA^3+\frac{1}{2}hSA^2+\frac{1}{3}hS^2A+\frac{1}{12}hS^3$. Seu (restituto valore minuscularum,) $\frac{1}{3}a^3h+\frac{1}{2}a^2sh+\frac{1}{3}as^2h+\frac{1}{12}s^3h$. Ut prius.

$A+s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$.
$A+2s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$.
$A+3s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$.
&c. usque ad
$A+S$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$, $=\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$
$\frac{1}{2}hA^2+\frac{1}{2}hSA+\frac{1}{6}hS^2$.

$\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$.
$\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$.
$\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$.
&c. usque ad
$\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$, in $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$, $=\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$.
$\frac{1}{3}hA^3+\frac{1}{2}hSA^2+\frac{1}{3}hS^2A+\frac{1}{12}hS^3$.

Quod quidem Ungulæ $b\beta\alpha V$ momentum, $\frac{1}{3}a^3h+\frac{1}{2}a^2sh+\frac{1}{3}as^2h+\frac{1}{12}s^3h$, seu (propter $h=2R-v$,) $\frac{2}{3}a^3R-\frac{1}{3}a^3v+a^2sR-\frac{1}{2}a^2sv+\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; ex Ungulæ $Ab\beta\alpha$ momento, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{2}a^3R+\frac{3}{2}a^2sR+\frac{5}{6}as^2R+\frac{7}{36}s^3R$, (modo tradito,) subductum; Relinquit Ungulæ AbV, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{36}s^3R+\frac{1}{3}a^3v+\frac{1}{2}a^2sv+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$.

Atque hoc, per hujus Ungulæ magnitudinem, $-\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum; exhibet Ungulæ AbV, aciem habentis $A\alpha$, distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$,

$$\frac{87eR^3-96avR^2-9svR^2-12a^3R+36a^2sR+12as^2R+2s^3R+24a^3v+36a^2sv+24as^2v+6s^3v}{-48vR^2-18a^2R+36asR+6s^2R+36a^2v+36asv+12s^2v}:$$

Semisolidique correspondentis Momentum respectu axis conversionis suæ, duplum est Momenti Ungulæ respectu aciei suæ: Illiusque distantia centri gravitatis ab axe, ad hujus distantiam ab acie; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$. Ut sæpius ostensum est.

P. Eademque Momenta & Distantiæ, sic adhuc alias investigantur. Nempe, Momento Ungulæ AbV per se invento, sine ope Ungulæ $Ab\beta\alpha$: Hinc ipsius $Ab\beta\alpha$ Ungulæ Momentum, reliquaque deducuntur.

Divisa recta $A\alpha$ in partes infinite exiguas, invicem æquales, in punctis S, C, Σ, &c. hoc est, sumptis v arithmetice proportionalibus: Quæ Semicycloidem $A\tau\alpha$, ejusve segmentum AbV, complent rectæ bV; sunt *Omnes* $a+s$, eo spectantes.

Quæque

Quæque Semiquadrantalem Ungulam eidem insistentem, aciem habentem A α, complent plana, eisdem rectis insistentia; sunt Triangula Isoscelia, earundem rectarum semiquadrata: hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: eo spectantia. Horumque Triangulorum centra gravitatis, ab A α distant earundem rectarum b V bessẽ, hoc est $\frac{2}{3}$b V $=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}s$. Adeoque Triangulorum illorum Momenta, (ductis magnitudinibus in respectivas distantias,) sunt *Omn.* $\frac{1}{3}a^3+a^2s+as^2+\frac{1}{3}s^3$: (seu, Triens cuborum omnium b V,) sumptis *v* arithmetice proportionalibus. Fig. 166, 168.

Sunt autem, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$: (sumptis *v* arithmetice proportionalibus,) hoc est, Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α, (per § M. prop. 19.) $2eR^3-2avR^2-\frac{1}{3}a^3R+a^2sR+\frac{1}{3}a^3v$.

Et *Omn.* a^2s: (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti respectu A α, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B in b V respective, (per § N. prop. 18.) $-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{2}a^2sv$.

Item *Omn.* as^2: (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti ejusdem A b B Solidi, respectu plani A τ α, (per § O. prop. 18.) $-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$.

Et *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$; (eo spectantia,) hoc est, Momentum Ungulæ A B V aciem habentis A α, respectu A α; $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$: per § Q. prop. 16.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3+a^2s+as^2+\frac{1}{3}s^3:=\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}a^2sR+\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{36}s^3R+\frac{1}{3}a^3v+\frac{1}{2}a^2sv+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$. Quod igitur est Momentum Ungulæ segmenti semicycloidis A b V, aciem habentis A α, respectu ipsius A α. (Idem quod prius inventum erat.) Quod itaque per magnitudinem divisum, exhibebit distantiam centri gravitatis ab A α: ut prius.

Atque huic quidem Momento, si addatur Momentum Ungulæ b β α V, (modo traditum,) habebitur Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, Momentum respectu A α: ut prius.

Exhibuimus igitur in expositis Ungulis Semicycloidis, ejusque partium, tum Magnitudines, & Momenta; tum Centri gravitatis in singulis distantias à duobus saltem planis non sibi invicem parallelis; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, ex § G. prop. 12. constat, (eo nempe quod Ungulæ altitudinem bisecat;) Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis centra determinavimus. Q.

Quæque de Ungulis dicta sunt; eadem ad solida conversione facta facile transferuntur, ope prop. 12. & 14. ut suis locis sæpius ostensum.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia, calculo rite administrato, facile applicantur: Ut ad præcedentes aliquot propositiones admonuimus.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam (hactenus traditam) dicta sunt; eadem omnia ad Ungulas, Solidaque, Secundarias (sive Protractas sive Contractas) similiter spectantia, facile transferentur. Nempe, quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro *a*, substituenda erit alia quantitas, quæ, ad illam, eam habet rationem, quam habet recta τ α, ad $\frac{1}{2}P$, semiperipheriam circuli generantis. Et similiter, mutatis mutandis, de earundem Quadratis, Cubis, cæterisque potestatibus; ut ad calcem propositionis præcedentis ostensum est. R. Fig. 175, 176.

PROP. XXII.

Fig. 177. A. Quæ Cycloidem contingit recta, eſt correſpondenti Circuli genitoris (circa cycloidis axem poſiti) Chordæ, ad verticem terminatæ, parallela.

B. Curvaque Semicycloidis, eſt Dupla Diametri circuli Genitoris.

C. Ejuſque portio quævis (ad verticem terminata) Dupla ſubtenſæ correſpondentis Arcus circuli genitoris.

Adeoque ſecabitur Cycloidis curva, in ratione data.

Atque hinc Momenta & Magnitudines, ipſaque gravitatis Centra, exhibentur; Tum Curvæ Cycloidis, partiumque ejuſdem; tum ſuperficierum, earundem converſione, factarum.

Nempe (retentis ſymbolis ut in propoſitionibus præcedentibus, poſitoque $\chi = \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \alpha B$.)

B. D. F. G. K. Curvæ Semicycloidis $A\tau$, magnitudo $4R$: Momentum reſpectu TA, $\frac{8}{3}R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{16}{3}R^2$; diſtantia Centri gravitatis, à TA, $\frac{2}{3}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $2RP - \frac{16}{3}R^2$; reſpectu $T\tau$, $\frac{16}{3}R^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$; à $T\tau$, $\frac{4}{3}R$.

C. D. F. G. K. Curvæ Ab; magnitudo, $2c$: Momentum reſpectu TA, $\frac{2}{3}cv$; reſpectu bV, $\frac{4}{3}cv$; reſpectu $\tau\alpha$, $2cb + \frac{4}{3}cv = 4cR - \frac{2}{3}cv$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{1}{3}v$; à bV, $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

D. F. E. F. H. L. Ungulæ Superficialis (Semiquadrantalis) ipſi $A\tau$ curvæ inſiſtentis, aciem habentis TA, Magnitudo, $\frac{8}{3}R^2$: Momentum reſpectu TA, $\frac{16}{5}R^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{22}{15}R^3$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{6}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; reſpectu $T\tau$, $\frac{64}{45}R^3$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$; à $T\tau$, $\frac{8}{15}R$.

D, F. E, F. H, L. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{16}{5}R^2$: Momentum reſpectu TA, $\frac{32}{15}R^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{128}{15}R^3$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{2}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$: à $T\tau$, $\frac{26}{15}R$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$; momentum reſpectu $T\tau$, $\frac{416}{45}R^3$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

G, K. H, L. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $2RP - \frac{16}{3}R^2$: Momentum reſpectu TA, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$; diſtantia Centri

I, M. gravitatis à TA, $\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $RP^2 - \frac{1024}{45}R^3$; reſpectu $T\tau$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; à $T\tau$, $\frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$.

G, K. H, L. I, M. Aciemque habentis $T\tau$; Magnitudo; $\frac{16}{3}R^2$: Momentum reſpectu TA, $\frac{64}{45}R^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{416}{45}R^3$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{4}{15}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{26}{15}R$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; reſpectu $T\tau$, $\frac{16}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{64}{15}R - \frac{1}{2}P$; à $T\tau$, $P - \frac{64}{15}R$.

D, F. E, F. Ungulæ Superficialis Ab, aciem habentis TA; Magnitudo $\frac{2}{3}cv$: Momentum reſpectu TA, $\frac{2}{5}cv^2$; reſpectu bV, $\frac{4}{15}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$

$-\frac{2}{5}cv^2$; distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{2}{5}v$; à b V, $\frac{2}{5}v$; à $\tau\alpha$, $h+\frac{8}{5}v=2R-\frac{3}{5}v$: Momentum reſpectu A α, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{90R^2}$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{60cvR^2=30c^3R}$. Fig. 177. H. L.

Aciemque habentis bV; Magnitudo, $\frac{4}{3}cv$, Momentum reſpectu T A, $\frac{4}{15}cv^2$; reſpectu bV, $\frac{16}{15}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$; diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{5}v$; à b V, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $h+\frac{4}{5}v=2R-\frac{1}{5}v$: Momentum reſpectu A α, $\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{90R^2}$. diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{120cvR^2=60c^3R}$. D, F. E, F. H, L.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $2ch+\frac{4}{3}cv=4cR-\frac{2}{3}cv$: Momentum reſpectu T A, $\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $8cR^2-\frac{8}{3}cvR+\frac{2}{5}cv^2$; reſpectu b V, $\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$; diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{10vR-3v^2}{30R-5v}$; à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2-20vR+3v^2}{30R-5v}$; à b V, $\frac{20vR-2v^2}{30R-5v}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{90R^2}$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{360cR^3-(60cvR^2=)30c^3R}$. D, F. E, F. H, L.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $2ac-\frac{16}{3}R^2+(4\chi R-\frac{2}{3}b\chi=)\frac{8}{3}\chi R+\frac{2}{3}v\chi$: Momentum reſpectu TA, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{90R^2}$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{90R^2}$; reſpectu bV, $\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{90R^2}$; diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+(60v\chi R^2=)30c^2\chi R}$; à $\tau\alpha$, $\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+30c^2\chi R}$; à b V, $\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+30c^2\chi R}$: Momentum reſpectu A α, $2a^2c+\frac{2}{3}c^3-\frac{112}{9}cR^2+\frac{4}{9}c\chi^2+8a\chi R-\frac{2a\chi^3}{3R}-\frac{c^5}{10R^2}$; diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{180a^2cR^2+60c^3R^2-1120cR^4+40c\chi^2R^2+720a\chi R^3-60a\chi^3R-9c^5}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+30c^2\chi R}$. G, K. H, L. I, M.

Adeoque exhibuimus, tum rectas Cycloidem (Primariam) tangentes; tum ipſius curvæ, partiumque ejuſdem, longitudines, & Centra gravitatis; earumque Momenta reſpectu expoſitarum rectarum; Ungularum item ſuperficialium, (adeoque & ſuperficierum converſione factarum,) magnitudines, momenta, & Centra gravitatis. N.

Quæque de expoſitis dicta ſunt, ad alia facile transferentur.

O. **Poſſunt etiam & Cycloidum Secundariarum (Contractarum ſcilicet & Protractarum) Tangentes exhiberi; earumque Curvis Semiellipſes æquales; & partes partibus reſpective ſumptis.**

A. Fig. 177. SUmpto, in Semicycloidis curva A τ, puncto quovis b; duci intelligatur baſi τ α, parallela b B; Circulo genitori, circa Cycloidis axem A α conſtituto, occurrens in B: Junctaque Chorda A B; ducatur huic parallela, per punctum b, recta g b h. Dico rectam g b h, Semicycloidem in b contingere.

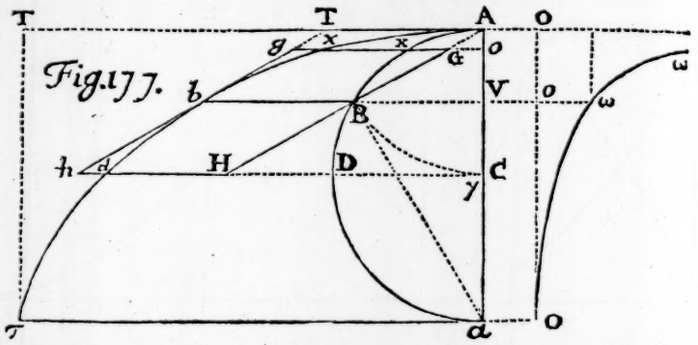


Fig. 177.

Sumptis in recta g b h, ſupra b, puncto g; &, infra, puncto h: ducantur, ipſi b B parallelæ, rectæ g x X G, h d H D, Semicycloidi occurrentes in x, d; Semicirculo in X, D; chordæque A B (productæ) in G, H.

Oſtenſum eſt (§ A. prop. 20.) arcui B A, æqualem eſſe rectam b B; adeoque & (propter parallelas) g G, & h H. Item arcui X A, rectam x X; & arcui D A, rectam d D.

Cumque ibidem demonſtratum ſit rectas B P, (fig. 167, 168, 169.) arcubus B X, ubique minores eſſe; rectaſque B Y, arcubus B D majores: Similiter oſtendetur, (fig. 177.) rectam X G minorem arcu B X; rectamque H D, majorem eſſe arcu B D. (Nam ſimiliter, hic, ducitur A B, ab A; atque illic, α B, ab α.)

Adeoque; propter totam g G rectam, toti B A curvæ æqualem; & ablatam X G, ablata X B minorem: Erit reliqua X g recta, major quam reliqua X A curva, ſeu recta x X. Et propterea, punctum g, extra Cycloidem cadet.

Item; propter h H rectam, ipſi B A curvæ æqualem; & H D adjectam, majorem adjecta B D: Erit tota D h recta, major quam tota curva D A, ſeu D d recta. Et, propterea, punctum h eſt extra Cycloidem.

Cum itaque, tum g (punctum quodvis ſupra b,) tum h (punctum quodvis infra b,) ſit extra Cycloidem; (adeoque unicum b punctum Cycloidi commune;) recta g b h Cycloidem in b tangit.

B. Eſtque (propter parallelas) b g = B G, b h = B H, g h = G H; & (producta b g, donec tangenti verticis A T occurrat in T,) b T = B A = $c = \sqrt{2vR}$; (propter A V, A B, A α, hoc eſt, *v. c. 2R.* continue proportionales; ut ſæpe dictum eſt.) Item, (ductis g X O, b B V, h D C, ipſi T A parallelis, Axi A α occurrentibus in O, V, C, rectam V O, vel C O, intercipientibus; quam dicamus *B*;) erit, ut A V = *v*, ad A B = $\sqrt{2vR}$; ſic V O, vel C O, = *B*; ad B G, vel H G; hoc eſt, ad b g, vel h g, $= \frac{B\sqrt{2vR}}{v} = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$.

Fig. 177, 178. Si itaque intelligatur recta A α = 2 *R*, in partes æquales numero infinitas, dividi, quarum una intelligatur V O, vel O C; adeoque omnes A V, hoc eſt omnes *v*, eo ſpectantes, arithmetice proportionales: Quæ his reſpondent ſubtenſæ totidem A B, hoc eſt, totidem $\sqrt{2vR}$ correſpondentes; (ſeries utique ſubſecundanorum;) ſunt ut totidem rectæ V p ſemiparabolam A p P α (fig. 178.) complentes; cujus tum Axis A α, tum baſis α P, (adeoque & latus rectum,) ſit = 2 *R*.

Rectæque b g, ſeu g h, tangentes; hoc eſt, (in partibus infinite exiguis) ipſæ b x,

b x, ſeu x d, curvæ; ſunt totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſeu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, correſpondentes; (hoc eſt, ſeries ſeriei ſubſecundanorum reciproca.) Fig. 177, 178.

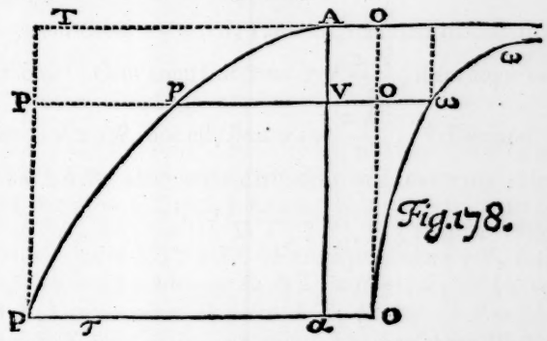


Fig. 178.

Adeoque; ſi rectæ V O, vel O C, ſingulæ; hoc eſt, totidem B; intelligantur ipſis α O ſeu V O totidem, fig. 177, 178. rectangulum A α O O complentibus: æquales; & ſumantur ubique, ut V p, ad α P, ſeu V P; ſic α O, ſeu V O, ad V ω, hoc eſt, ut $\sqrt{2vR}$, ad $2R$; ſic B, ad $\frac{2BR}{\sqrt{2vR}} = \frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}} = V\omega$: Erunt omnes illæ b g, ſeu g h; hoc eſt, (in partibus infinite exiguis,) omnes illæ b x, ſeu x d, curvam A τ complentes; ad omnes illas V O, ſeu O C, complentes rectam A α; hoc eſt, ipſa A τ curva, ad rectam A α: ut omnes illæ V ω figuram interminabilem A α O ω complentes, ad omnes illas V O complentes Rectangulum A α O O; Hoc eſt, ut figura illa interminabilis, ad inſcriptum parallelogrammum; Hoc eſt, ut Reciproca Secundanorum Series, cujus index eſt $-\frac{1}{2}$; ad congruam Æqualium ſeriem, cujus Index eſt ± 0, (per def. 1, 2. hujus.) hoc eſt (per prop. 1. hujus.) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$, ſeu ut 2 ad 1. Adeoque A τ curva, eſt dupla rectæ A α.

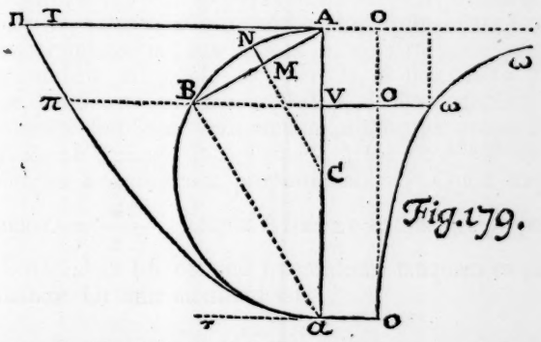


Fig. 179.

Vel etiam; eadem Parabola inverſo ſitu poſita, ut α π Π, fig. 179. ductoque ad eandem diametrum Semicirculo A B α: Si ſumatur, ubique, ut V B ad V π, ſic V O ſeu α O ad V ω; (hoc eſt, ut $s = \sqrt{vh}$ ad $\sqrt{2hR}$, ſic B ad $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$:) habebitur eadem quæ prius figura interminabilis A α O ω: Reliquaque conſequentur ut prius.

Similiter oſtendetur (in partibus,) curvam A b, ad A V rectam; eſſe, ut eſt figura A V ω ω interminabilis ad A V O O rectangulum C. Fig. 177, 178, 179.

Et, conſequenter, ſi intelligatur A α O ω (figura interminabilis) recta V ω ſecari in ratione data: in eadem ratione ſecabitur, in b, curva A τ.

Quo autem ſecetur A α O ω in ratione data; ſecanda erit A α recta in ejuſdem ratione duplicata. Intellige, ſi ratio data ſit r ad R; ſitque A V ad A α, ut r^2 ad R^2; erit A V ω ω, ad A α O ω, (adeoque A b curva, ad curvam A τ,) in data ratione r ad R. Eſto enim A V $(=v) = \frac{2r^2}{R}$, (hoc eſt, ad A α $= 2R$, in ratione

Fig. 177, 178, 179. tione r^2 ad R^2:) Erit propterea $Vp\ (=AB=\sqrt{2vR})=\sqrt{4r^2}=2r$: Et $V\omega\ (=B\sqrt{\frac{2R}{v}})=B\sqrt{\frac{R^2}{r^2}}=\frac{BR}{r}$. Adeoque Rectangulum $AV\omega\ (=vB\sqrt{\frac{2R}{v}})=2rB$. Hujus itaque duplum $4rB$, erit ipsa $AV\omega\omega$ interminabilis.

(Nam, qua ratione $A\alpha O\omega$ est dupla inscripti parallelogrammi $A\alpha OO$; eadem est $AV\omega\omega$ interminabilis, dupla huic inscripti parallelogrammi $AV\omega$; nempe per prop. 1. hujus.) Est autem (propter $A\alpha=2R$, & $\alpha O=B$,) Rectangulum $A\alpha OO=2RB$; hujusque propterea duplum $A\alpha O\omega=4RB$. Ergo $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque & Ab, ad $A\tau$,) ut $4rB$, ad $4RB$; hoc est, ut r ad R.

Cum itaque Sinus versi AV ad $A\alpha$, (hoc est v ad $2R$;) sint in duplicata ratione subtensarum AB ad $A\alpha$; (hoc est, $\sqrt{2vR}$ ad $2R$ seu $\sqrt{4R^2}$; vel $\sqrt{v}$ ad $\sqrt{2R}$:) sintque item eædem AV ad $A\alpha$ in duplicata ratione curvarum Ab ad $A\tau$, (ut modo demonstratum est:) Eadem erit ratio Ab curvæ ad curvam $A\tau$, quæ est rectæ AB ad $A\alpha$ rectam. Adeoque, ut $A\tau$ curva ad rectam $A\alpha$, sic curva Ab ad AB rectam. Est autem (uti jam demonstravimus) curva $A\tau$ dupla rectæ $A\alpha$; ergo & Ab curva, dupla est rectæ AB. Et sic ubique. Hoc est, $A\tau=2A\alpha=4R$; & $Ab=2AB=2c=2\sqrt{2vR}=\sqrt{8vR}$.

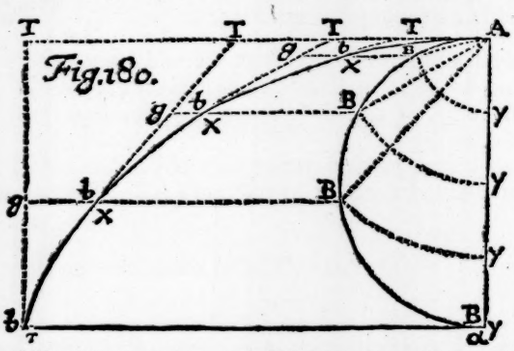


Fig. 177, 180. Vel etiam; sic habetur, curvæ $A\tau$ divisio in ratione data. Divisa scilicet $A\alpha$ in ratione data, in γ; aptetur $AB=A\gamma$: Ductaque Bb rectæ AT parallela, in eadem ratione dividetur $A\tau$ in b. Ut ex dictis patet. Nempe $R.r::A\alpha.A\gamma=AB::A\tau.Ab$.

D. Fig. 177. Porro; rectarum $V\omega$, hoc est, BG, bg, vel GH, gh, hoc est, (in partibus infinite exiguis) bx, vel xd; à Tangente verticis TA, distantiæ, sunt ipsæ $AV=v$, respectivæ. Quæ itaque in magnitudines $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$ (modo inventas) ductæ; exhibent earundem respectu TA momenta, $B\sqrt{2vR}$ (seu cB.) Adeoque (sumptis v arithmetice proportionalibus) curvæ $A\tau$, vel Ab, momentum respectu AT; vel Semiquadrantalis Ungula superficialis ipsi $A\tau$ vel Ab curvæ insistens, aciem habens TA; est aggregatum omnium $B\sqrt{2vR}$ eo spectantium; vel (omissis B) omnium $\sqrt{2vR}$, hoc est, omnium Vp rectarum, Semiparabolam $A\alpha P$, vel AVp, fig. 178. complentium: (est enim B, ut ex ipsius origine patet, nihil aliud quam ipsius $A\alpha$ vel AV pars infinitesima; quæ omnes simul sumptæ ipsam $A\alpha$ vel AV conficiunt; atque hic nihil innuit aliud quam rectarum illarum, planum complentium, crassitiem.) Et propterea, superficialis Ungula ipsi $A\tau$ vel Ab curvæ insistens, (aciem habens AT,) æquatur ipsi $A\alpha P$, vel AVp, semiparabolæ; hoc est (propter latus rectum $2R$, axemque $A\alpha=2R$, vel $AV=v$,) erit Ungula $A\tau$, $=A\alpha P=\frac{8}{3}R^2$; & Ungula Ab, $=AVp=\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}vc$. per prop. 1, vel 6. hujus. Adeoque quæ conversione curvæ $A\tau$ vel Ab circa TA, describitur superficies; est $\frac{8}{3}RP$, vel $\frac{2P}{3R}v\sqrt{2vR}=\frac{2vcP}{3R}$; & semiconversione, $\frac{4}{3}RP$, vel $\frac{P}{3R}v\sqrt{2vR}=\frac{vcP}{3R}$.

Illudque

Illudque momentum, $\frac{8}{3}R^2$, vel $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}cv$, per ipſius curvæ $A\tau$ vel Ab magnitudinem, $4R$ vel $2\sqrt{2vR}=2c$ (modo inventam,) diviſum; exhibet, centri gravitatis à TA, diſtantiam; nempe, ipſius $A\tau$, $\frac{3}{5}R$; ipſiuſque Ab, $\frac{1}{5}v$. Fig. 177.

Adeoque; ipſius $A\tau$ diſtantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit $\frac{4}{5}R$; ejuſque propterea reſpectu $\tau\alpha$ momentum, ſeu ſemiquadrantalis Ungula, $\frac{16}{5}R^2$: Ipſiuſque Ab, Diſtantia Centri gravitatis à bV, $\frac{2}{3}v$; & à $\tau\alpha$, $b+\frac{2}{3}v=2R-\frac{1}{5}v$; adeoque ejuſdem momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu bV, $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}vc$; & reſpectu $\tau\alpha$, $2b\sqrt{2vR}+\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=2bc+\frac{4}{3}vc$, vel $4R\sqrt{2vR}-\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=4cR-\frac{2}{3}cv$. Et ſuperficies converſione vel ſemiconverſione factæ, ad hæc momenta; ut $\mathcal{P}$ vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R.

Deinde: Eorundem omnium $\sqrt{2vR}$ (Ungulam $A\tau$ vel Ab, aciem habentem TA, complentium,) diſtantiæ à TA, ſunt $AV=v$ reſpective: Adeoque eorundem reſpectu TA momenta, ſunt omnia $v\sqrt{2vR}$ ſeu $\sqrt{2v^3R}$ (vel vc;) hoc eſt, ipſa rectarum Vp ſemiparabolam $A\alpha P$ vel AVp conſtituentium momenta reſpectu TA. Hoc eſt, (per prop. 1. vel 6. hujus,) Semiquadrantalis Ungulæ ſuperficialis, ipſi $A\tau$, vel Ab, inſiſtentis, aciem habentis TA, reſpectu ejuſdem TA, momentum, eſt $\frac{16}{5}R^3$, vel $\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}=\frac{2}{5}cv^2$. Adeoque, ſuperficiei ſemiconverſione circa TA factæ momentum reſpectu ipſius TA, (quippe duplum momenti correſpondentis Ungulæ Semiquadrantalis, propter magnitudinum rationem, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R, ſeu $\mathcal{P}$ ad $2R$, & diſtantiarum ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ſeu $4R$ ad $\mathcal{P}$; ut ſæpe oſtenſum eſt;) $\frac{32}{5}R^3$, vel $\frac{4}{5}cv^2=\frac{4}{5}v^2\sqrt{2vR}$; prout de tota $A\tau$, parteve Ab, intelligitur. E.

Illudque Ungulæ Momentum $\frac{16}{5}R^3$ vel $\frac{2}{5}cv^2$, per magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ vel $\frac{2}{3}cv$ diviſum; exhibet diſtantiam centri gravitatis iſtius $A\tau$ vel Ab ſuperficialis Ungulæ (aciem habentis TA) ab ipſa TA, $\frac{6}{5}R$ vel $\frac{3}{5}v$; (adeoque correſpondentis Superficiei Semiconverſione factæ, centri inde diſtantiam, $\frac{24R^2}{5\mathcal{P}}$, vel $\frac{12vR}{5\mathcal{P}}$; nempe, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ſeu $4R$ ad $\mathcal{P}$.) Et propterea, diſtantiam centri gravitatis ejuſdem Ungulæ $A\tau$ (aciem habentis TA) à $\tau\alpha$, $\frac{4}{5}R$ (ejuſque igitur reſpectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{32}{15}R^3$;) Ungulæque Ab (aciem item habentis TA) diſtantiam centri gravitatis à bV, $\frac{2}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{3}{5}v=2R-\frac{3}{5}v$; adeoque ipſius, reſpectu bV, momentum, $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$; & reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}vb\sqrt{2vR}+\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}s^2c+\frac{4}{15}v^2c$, vel $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR}-\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$.

Sed & idem $\frac{32}{15}R^3$ (propter magnitudinum & diſtantiarum reciprocationem) eſt etiam Ungulæ ſuperficialis $A\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu TA; quod itaque per magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (modo inventam) diviſum, exhibet diſtantiam centri gravitatis à TA, $\frac{2}{5}R$; adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$, ejuſque propterea reſpectu aciei ſuæ $\tau\alpha$ momentum, $\frac{128}{15}R^3$: Superficiei vero ſemiconverſione circa $\tau\alpha$ deſcriptæ, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, Momentum, (utpote Momenti Ungulæ duplum,) $\frac{256}{15}R^3$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantiam, (utpote ad illam Ungulæ ut $4R$ ad $\mathcal{P}$,) $\frac{32R^2}{5\mathcal{P}}$.

Item (propter eandem magnitudinum & diſtantiarum reciprocationem) $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$, momentum etiam erit Ungulæ Ab aciem habentis bV, reſpectu ipſius TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cv$ diviſum, exhibet diſtantiam centri gravitatis à TA, $\frac{1}{5}v$; adeoque à bV, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{4}{5}v=2R-\frac{1}{5}v$; ejuſque propterea reſpectu ipſius bV (aciei ſuæ) momentum $\frac{16}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{16}{15}cv^2$; & reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}chv+\frac{16}{15}cv^2=\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero ſemiconverſione circa bV factæ, momentum reſpectu ipſius bV, $\frac{32}{15}cv^2$; ejuſque inde diſtantiam centri gravitatis $\frac{16vR}{5\mathcal{P}}$.

Itemque (ob eandem cauſam) $\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$, eſt etiam Momentum Ungulæ ſuperficialis Ab, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $4cR-\frac{2}{3}cv$ diviſum, exhibet illius à TA diſtantiam centri

Fig. 177. gravitatis $\frac{10R-3v}{30R-5v}v$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2-20vR+3v^2}{30R-5v}$; à bV, $\frac{20vR-2v^2}{30R-5v}$: Ejuſque propterea momentum reſpectu $\tau\alpha$, $8cR^2-\frac{8}{3}cvR+\frac{2}{5}cv^2$; & reſpectu bV, $\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero ſemiconverſione ipſius Ab circa $\tau\alpha$ deſcriptæ, momentum reſpectu ipſius $\tau\alpha$, $16cR^2-\frac{16}{3}cvR+\frac{4}{3}cv^2$; centrique gravitatis inde diſtantiam $\frac{240R^3-80vR^2+12v^2R}{30RP-5P}$.

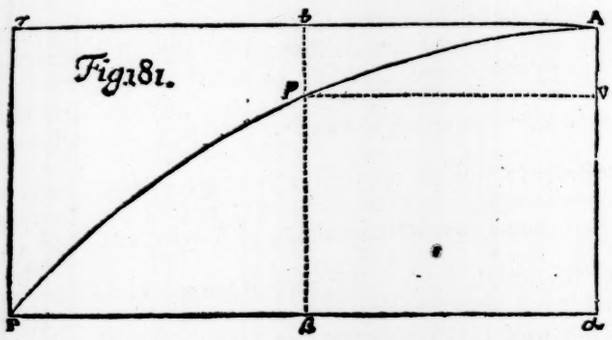


Fig. 181.

F. Fig. 177, 181. Eadem etiam ſic habentur. Sumptis Subtenſis $AB=c$, (adeoque & curvis $Ab=2c$) arithmetice proportionalibus; adeoque (per § C.) diviſa $A\tau$ curva in partes æquales; erit ſingulorum b punctorum à TA diſtantiæ $AV\,(=v)=\frac{c^2}{2R}$; (hoc eſt, ut ſeries ſecundanorum, ſeu ordinatim-applicatæ in ſemiparabolæ complemento;) eorumque à $\tau\alpha$ diſtantiæ $V\alpha=2R-\frac{c^2}{2R}$. Adeoque ſi intelligatur $Ab\tau$ curva fig. 177. in rectam expandi, vel huic æqualem rectam ſumi $Ab\tau$, vel $\alpha\beta P$, fig. 181; Ejuſque b punctis, æqualiter ab invicem diſtantibus, inſiſtentes rectæ bp ipſis AV reſpectivis æquales, figuram $AP\tau$ complentes: Exhibebunt hæ rectæ ſingulorum b punctorum, ſeu particularum minutarum, momenta reſpectu ipſius TA fig. 177. (ſicut & reliduæ $p\beta$, earundem momenta reſpectu $\tau\alpha$; nam propter $bp=AV$, erit $p\beta=V\alpha$:) Et propterea, tum planum $A\tau P$, totius $A\tau$ curvæ; tum planum Abp, curvæ Ab, momentum reſpectu TA: Et ſimiliter planum $AP\alpha$, curvæ $A\tau$; & $Ap\beta\alpha$, curvæ Ab, momentum exhibebit, reſpectu $\tau\alpha$; & ApV, ejuſdem Ab momentum reſpectu bV. Eſt autem, (propter ordinatas $bp=\frac{c^2}{2R}$, in duplicata ratione diametrorum $Ab=2c$,) Trilineum $AP\tau$ ſemiparabolæ complementum; ipſumque $AP\alpha$, Parabola: Adeoque (propter $A\tau=4R$, & $\tau P=2R$,) $AP\tau=\frac{8}{3}R^2$; & $AP\alpha=\frac{16}{3}R^2$; (per prop. 6. hujus:) Quæ itaque ſunt curvæ $A\tau$ momenta reſpectu TA & $\tau\alpha$. Similiter; propter $Ab=2c$, & $bp=\frac{c^2}{2R}$; erit curvæ Ab momentum reſpectu TA, $\frac{c^3}{3R}$; & reſpectu bV, $\frac{2c^3}{3R}$; & $Ap\beta\alpha\,(=Ab\beta\alpha-Apb)=4cR-\frac{c^3}{3R}$ ejuſdem, reſpectu $\tau\alpha$, momentum. Hoc eſt, (propter $c^2=2vR$) $\frac{2}{3}cv$, & $\frac{4}{3}cv$, & $4cR-\frac{2}{3}cv$. Ut prius. Quæ quidem momenta, eadem ſunt atque correſpondentes Ungulæ; ut ſæpius dictum eſt.

Cumque quæ has ſuperficiales Ungulas conſtituunt rectæ, ſunt ipſarum ab acicibus ſuis diſtantiis æquales; adeoque momenta, ut ipſarum quadrata: Erit ſuperficialis Ungulæ $A\tau$ aciem habentis TA, momentum reſpectu TA, omnia rectarum bp quadrata, hoc eſt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ uſque ad eorum maximum, hoc eſt quadratum

$\tau P = \frac{16R^4}{4R^2} = 4R^2$; adeoque ad maximum toties ſumptum, ut 1 ad 5: hoc eſt (propter $A\tau = 4R$,) $\frac{1}{5} \times 4R \times 4R^2 = \frac{16}{5}R^3$ per prop. 1. hujus. Fig. 177, 181.

Et ſimiliter, Superficialis Ungulæ A b, aciem item habentis T A, (fig. 177.) reſpectu ejuſdem T A momentum; erunt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ uſque ad eorum maximum, puta $\frac{C^4}{4R^2}$; adeoque (propter $Ab = 2C$,) momentum illud erit $\frac{1}{5} \times 2C \times \frac{C^4}{4R^2} = \frac{C^5}{10R^2}$; vel (reſtituendo c minuſculam) $\frac{c^5}{10R^2}$; hoc eſt, propter $c^2 = 2vR$, adeoque $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{2}{5}cv^2$.

Similiter, Superficialis Ungulæ A b, aciem habentis b V, fig. 177. momentum reſpectu ejuſdem b V; erunt omnia quadrata rectarum, ipſi A V parallelarum, ſemiparabolam A p V complentium; hoc eſt, quadrata rectarum $\frac{C^2}{2R} - \frac{c^2}{2R}$; hoc eſt, omnia $\frac{C^4 - 2c^2C^2 + c^4}{4R^2}$; hoc eſt, per prop. 1. hujus, (propter $Ab = 2C$, & quadratum b p, $= \frac{C^4}{4R^2}$,) $\frac{2C^5 - \frac{4}{3}C^5 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2} = \frac{\frac{16}{15}C^5}{4R^2}$; vel (reſtituto valore c minuſculæ) $\frac{4c^5}{15R^2}$; hoc eſt, (propter $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{16cv^2}{15}$; ut prius.

Item; Superficialis Ungulæ A b aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, ſunt omnia quadrata $p\beta$ eo ſpectantia; hoc eſt, quadrata rectarum $p\beta$, parabolæ portionem $A\,p\beta\alpha$ complentium; hoc eſt, omnium $b\beta - bp$; hoc eſt, omnia $2R - \frac{c^2}{2R}$, ſeu $\frac{4R^2 - c^2}{2R}$; hoc eſt omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{4R^2}$; hoc eſt, per prop. 1. hujus (propter $Ab = \alpha\beta = 2C$,) $\frac{32CR^4 - \frac{16}{3}C^3R^2 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2}$; hoc eſt, (propter $c^2 = 2vR$, & $c^4 = 4v^2R^2$; item, reſtituta c minuſcula;) $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$: Ut prius.

Atque hinc, centrorum gravitatis à T A, b V, $\tau\alpha$, diſtantiæ; reliquaque deducentur; eadem quæ prius.

G.

Porro; ſi intelligatur curva $A\tau$ fig. 177, in minutas partes æquales (ut prius) dividi; Erit ſingulorum b punctorum, ſeu partium minutarum, ab A α, diſtantia $bV = bB + BV = a + s$: Sumptis $AB = c$, (adeoque & $Ab = 2c$) arithmetice proportionalibus. Fig. 177, 182, 183.

Adeoque; ſi intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in rectam $A\tau$ fig. 182. expandi; cui ordinatim applicentur, (in ſingulis b punctis,) ex una parte, rectæ b B (trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. complentes) ipſis b B fig. 177. æquales; &, ex altera parte, rectæ, $b\upsilon$ (complentes bilineum $A\tau\upsilon$) æquales ipſis B V fig. 177. ſingulæ Rectæ $B\,b\upsilon$ fig. 182. ſingulorum b punctorum, ſeu minutarum partium, momenta reſpectu rectæ A α fig. 177. exhibebunt; adeoque & omnes omnium; ſive quæ totam $A\tau$, ſive quæ ipſius partem A b ſpectant. Hoc eſt, Tota $A\alpha\tau\upsilon$, totius $A\tau$ curvæ; ejuſque pars $A\,B\,b\upsilon$, partis A b; momentum reſpectu rectæ A α fig. 177. exhibebunt; vel correſpondentem Ungulam Semiquadrantalem.

Sunt utique rectæ B b, trilineum $A\alpha\tau$ fig. 182. complentes; hoc eſt, rectæ B b 177. ut arcus chordarum in ſemicirculo, vel ſinuum rectorum in Quadrante, arithmetice proportionalium; hoc eſt, ut rectæ γo fig. 170, complentes trilineum $a\times\Gamma$; (quod eſt, figuræ ſinuum rectorum unius quadrantis $\alpha\times\delta$, complementum ad parallelogrammum.)

Quippe ſumptis $\alpha\gamma$; ſeu ξo, ſinibus rectis arithmetice proportionalibus; erunt, quæ his reſpondent, γo, ſeu $\alpha\xi$, eorundem arcubus æquales: quorum duplis, æquantur, chordarum in ſemicirculo reſpondentium arcus; ſeu rectæ B b, fig. 182. Puta, rectis γo complentibus $A\times\alpha$ trilineum fig. 183. ipſi $\alpha\times\Gamma$ fig. 170. ſimile. Neque aliter differt trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. ab $A\alpha\times$ fig. 183. quam quod (retentis

Fig. 177, 182, 183. eiſdem latitudinibus $bB = \gamma o$) altitudinem duplam habeat, nempe $A\tau = 2A\alpha$.

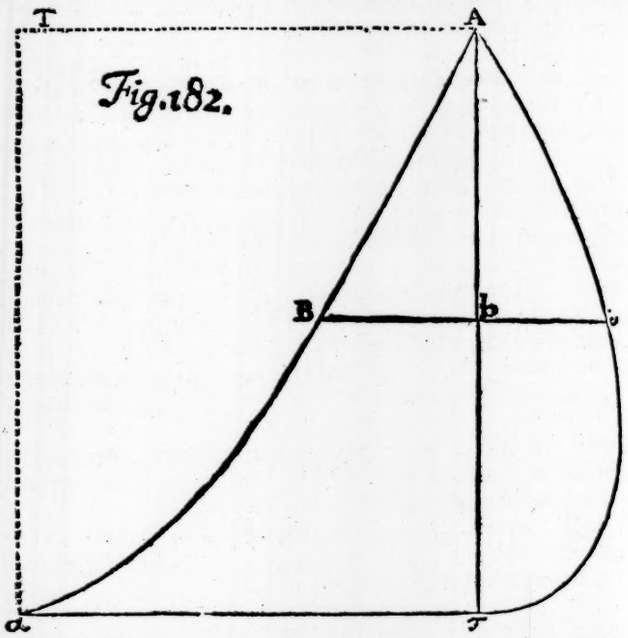


Fig. 182.

Adeoque cum trilineo $\alpha\times\Gamma$, fig. 170. comparatum, latitudinem habet duplam ($bB = 2\gamma o$) altitudinem quadruplam, $A\tau = 4\alpha\Gamma$. Cum itaque Latitudo Dupla ſit, & Altitudo Quadrupla; Figura figuræ eſt Octupla: Nempe $A\tau\alpha$ fig. 182. $= 8\alpha\Gamma\times$ fig. 170. Et $ABb = 8\alpha o\gamma$; ſimiliter diviſis $A\tau$ in b, & $\alpha\Gamma$ in γ.

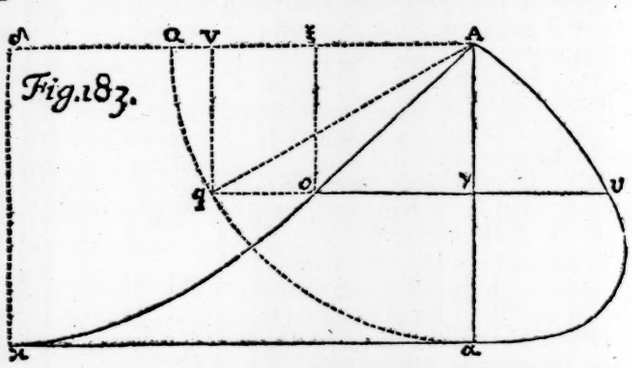


Fig. 183.

Eſt autem $\alpha\delta\times\Gamma = \frac{1}{4}R\mathcal{P}$ (propter $\alpha\delta = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $\alpha\Gamma = R$;) & $\alpha\times\delta = R^2$, (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha\times\Gamma = \frac{1}{4}R\mathcal{P} - R^2$. Adeoque $A\alpha\tau$ (fig. 182.) $= 2R\mathcal{P} - 8R^2$.

Similiter, (in partibus,) $\alpha\xi o\gamma = as$, (poſitis $\alpha\xi = a$; & $\xi o = s$;) & $\alpha o\xi = vR$ (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha o\gamma = as - vR$. Adeoque ABb (fig. 182.) $= 8as - 8vR$, Hoc eſt, Octuplum facti ex s ſemiſubtenſa, ſeu ſinu ſemiarcus, in ejuſdem ſinus arcum, ſeu ſemiarcum ſubtenſæ; minus, Octuplo ſinus verſi ejuſdem ſemiarcus, in Radium ducti. Hoc eſt (fig. 179.) $8AN\times AM - 8MN\times NC$: Hoc eſt, $2ANB\times AMB - 8MN\times NC$: Hoc eſt (propter $MN = CN - \frac{1}{2}\alpha B$) $2ANB\times AMB - 8NC\times NC + 4\alpha B\times NC$: Hoc eſt (poſitis $ANB = a$, $AMB = c$, $\alpha B = \chi$, & $NC = R$,) $2ac - 8R^2 + 4\chi R$.

Deinde; rectæ bv fig. 182. (Bilineum $A\tau v$ complentes,) hoc eſt BV fig. 177. (ſumptis $AB = c$, adeoque & $Ab = 2c$, arithmetice proportionalibus,) ſunt ſinus recti Arcuum quorum ſubtenſæ ſunt arithmetice proportionales. Eſt autem (propter ſimilia Triangula fig. 177.) ut $A\alpha = 2R$ ad $AB = c$; ſic $\alpha B = \sqrt{:} 4R^2 - c^2 : = \chi$.

$= \chi$, ad $BV = s = \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R} = \frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omnes $b\upsilon$ complentes vel totam $A\tau\upsilon$, vel ipsius partem $Ab\upsilon$, sunt Omnia $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R}$ vel $\frac{c\chi}{2R}$, eo spectantia; sumptis c arithmetice proportionalibus. Quarum aggregatum sic colligitur. Fig. 177, 182, 183.

Si intelligatur $A\alpha Q$ (fig. 183.) Circuli quadrans; qui Radium habeat $A\alpha = 2R$ æqualem circuli genitoris Diametro; in quo sumantur $A\gamma = c$ arithmetice proportionales; rectæque γq, ipsi AQ parallelæ. Erit ubique $\gamma q = \sqrt{:4R^2 - c^2} := \chi$. (Nam quadratum qA, hoc est $A\alpha$, dempto quadrato $A\gamma$, æquatur quadrato γq.) Adeoque Omnes γq, sive quæ totam $A\alpha Q$ quadrantem, sive quæ ipsius partem $A\gamma qQ$ complent, sunt Omnes $\sqrt{:4R^2 - c^2}$: (seu omnes χ) eo spectantes. Cumque harum ab AQ distantiæ sint $A\gamma = c$ respective: Erunt Omnia $c\sqrt{:4R^2 - c^2}$: (seu Omnia $c\chi$,) idem atque istius $A\alpha Q$ quadrantis, ejusve $A\gamma qQ$ segmenti, momentum respectu AQ rectæ.

Quadrantis autem $A\alpha Q$, si poneretur radius $= R$, momentum respectu AQ, esset $\frac{1}{3}R^3$ (per § Q. prop. 15.) ergo, posito radio $A\alpha = 2R$, erit $\frac{8}{3}R^3$: Quod itaque est aggregatum omnium $c\sqrt{:4R^2 - c^2}$: eo spectantium. Adeoque $\frac{4}{3}R^2 = Omn.\ \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}:}{2R}$ ipsum $A\alpha\upsilon$ Bilineum fig. 183. (sumptis ubique, ut $A\alpha$ ad $A\gamma$, sic γq ad $\gamma\upsilon$.) Ejusque duplum (propter duplam altitudinem) $\frac{8}{3}R^2$, est Bilineum $A\tau\upsilon$ fig. 182. Quod ab $A\alpha\upsilon$ fig. 183. non aliter differt, quam quod (retentis eisdem latitudinibus respectivis $b\upsilon = \gamma\upsilon$) altitudinem duplam habeat, $A\tau = 2A\alpha$.

Item, Sectoris qAQ, momentum respectu AQ, posito Radio $= R$, esset (per § Q. prop. 15.) $\frac{1}{3}\upsilon R^2$; hoc est, Triens facti ex arcus sinu verso in quadratum Radii; hoc est, in præsenti casu, ex $QV = AQ - \gamma q = 2R - \sqrt{:4R^2 - c^2}: = 2R - \chi$, in quadratum $A\alpha$, $= 4R^2$: Hoc est, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2 - c^2}: = \frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2$. Cui si addatur Momentum (respectu ejusdem AQ) Trianguli $Aq\gamma$; hoc est (propter $\gamma q = \sqrt{:4R^2 - c^2}: = \chi$, & $A\gamma = c$; centrique gravitatis ab AQ distantiam $\frac{2}{3}c$;) $\frac{1}{3}c^2\sqrt{:4R^2 - c^2}: = \frac{1}{3}c^2\chi$. Habetur totius $A\gamma qQ$ momentum respectu AQ, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2 - c^2}: + \frac{1}{3}c^2\sqrt{:4R^2 - c^2}:$ vel $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2 + \frac{1}{3}\chi c^2$: Hoc est (propter $4R^2 - c^2 = \chi^2$,) $\frac{8}{3}R^3 - \frac{1}{3}\chi^3$. Quod itaque itaque est Omnium $c\sqrt{:4R^2 - c^2}$: eo spectantium aggregatum: Adeoque $\frac{4}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{6R} = Omn.\ \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}:}{2R}$ est ipsum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. Ejusque duplum $\frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, (propter duplam altitudinem) est ipsum $Ab\upsilon$ fig. 182.

Est itaque (propter $A\alpha\tau = 2RP - 8R^2$, & $A\tau\upsilon = \frac{8}{3}R^2$,) totum $A\alpha\tau\upsilon$ fig. 182. $= 2RP - \frac{16}{3}R^2$. Quod itaque est curvæ Semicycloidis $A\tau$ fig. 177. momentum respectu rectæ $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens aciem habens $A\alpha$. (Adeoque superficies curva ejusdem circa $A\alpha$ conversione descripta, $2P^2 - \frac{16}{3}RP$; &, semiconversione, $P^2 - \frac{8}{3}RP$.) Illudque curvæ $A\tau$ momentum, per magnitudinem ($4R$) divisum; exhibet ejusdem $A\tau$ curvæ distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$: Adeoque à $T\tau$, $\frac{4}{3}R$, tantundem scilicet quantum à $\tau\alpha$ (§ D.) atque tantundem est ejusdem respectu utriusvis Momentum, nempe $\frac{16}{3}R^2$; & æquales utrobique superficies conversione exhibitæ, $\frac{16}{3}RP$; & semiconversione $\frac{8}{3}RP$.

Item (propter $AbB = 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; & $Ab\upsilon = \frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$,) totum $ABb\upsilon$ fig. 182. $= 2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{\chi^3}{3R}$; vel (propter $\chi^2 = 2bR$; cum sint αA, αB, αV; hoc est, $2R, \chi, b$, continue proportionales;) $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}\upsilon\chi$. Quod itaque, est ipsius Ab curvæ momentum respectu $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens

Fig. 177, 182, 183. bens A α. (Adeoque ſuperficies curva ejuſdem circa A α converſione facta, $\frac{2acP}{R} - \frac{16}{5}RP + (\frac{8}{3}\chi P + \frac{2v\chi P}{3P} =) \frac{4}{3}\chi P - \frac{2b\chi P}{3R}$: Et, ſemiconverſione facta, hujus ſemiſſis) Illudque momentum, per magnitudinem ($2c$) diviſum; exhibet, ejuſdem A b curvæ, diſtantiam centri gravitatis ab A α, $a - \frac{8R^2}{3c} + \frac{2\chi R}{c} - \frac{b\chi}{3c} = a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

H. Deinde; (Divisa ut prius A τ, curva fig. 177, 180. in minutas partes æquales:)
Fig. 177, 180. Cum quæ ſingulis b punctis (ſeu minutis particulis) inſiſtunt, ſemiquadrantalem ungulam, cujus acies T A, complentes, ſint (per § F.) $\frac{c^2}{2R}$; ſintque illarum ab A α diſtantiæ (per § G.) $a+s$; erunt ſingularum momenta $\frac{a+s}{2R}c^2 = \frac{f}{2R}c^2$, (ſumptis c arithmetice proportionalibus.) Adeoque momentum ſimul omnium, (ſive quæ totam A τ, ſive quæ partem A b ſpectant,) eſt Aggregatum omnium $\frac{fc^2}{2R}$ eo ſpectantium; hoc eſt, *Omnia* $\frac{ac^2}{2R} + \frac{sc^2}{2R}$.

Fig. 170, 182, 183. Sunt autem *Omnes a* (ſumptis c arithmetice proportionalibus) æquales reſpectivis rectis b B fig. 182. vel γ o fig. 183. (ut § G. oſtenſum eſt) harumque ab A δ diſtantiæ ſunt ipſæ A γ = c reſpectivæ; adeoque quæ illis inſiſtunt plana Ungulam Semiquadrantalem complentia (aciem habentem A δ) ſunt *Omn.* ac: Horumque planorum ab A δ diſtantiæ ſunt itidem A γ = c: Ergo eorum omnium momenta ſunt *Omn.* ac^2.

Sunt itaque *Omnia* ac^2 eo ſpectantia, idem atque Momentum Ungulæ Semiquadrantalis A × α, vel A o γ, (aciem habentis A δ,) reſpectu ipſius A δ. Hoc eſt, *Sexdecuplum* momenti ſimilis Ungulæ α × Γ, vel α o γ, fig. 170. (aciem habentis α δ,) reſpectu ipſius α δ. Nempe in ratione *Quadruplicata* laterum homologorum, A α ad α Γ, (quæ dupla eſt;) propter tum ſingulas trium ſolidi dimenſionum, tum diſtantiam ab axe converſionis; Duplas in A × α, earum quæ in α × Γ.

Eſt autem Momentum Ungulæ α × Γ fig. 170. reſpectu aciei ſuæ α δ, idem atque Momentum Ungulæ α δ × Γ, dempto momento Ungulæ α × δ reſpectu communis aciei α δ. Hoc eſt, $\frac{1}{12}R^3P$ (propter α Γ = R, & α δ = $\frac{1}{4}P$,) dempto $\frac{2}{9}R^4$ (per § N. prop. 19.) Hoc eſt, $\frac{1}{12}R^3P - \frac{2}{9}R^4$. Adeoque Momentum ſimilis Ungulæ A × α fig. 183. reſpectu aciei A δ, (utpote illius Sedecuplum) $\frac{4}{3}R^3P - \frac{32}{9}R^4$. Quod itaque eſt aggregatum omnium ac^2 totam A α fig. 183. ſpectantium. Adeoque $\frac{2}{3}R^2P - \frac{16}{9}R^3$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo ſpectantium. Et (propter A τ fig 182. = 2 A α. fig. 183.) ejuſdem duplum $\frac{4}{3}R^2P - \frac{32}{9}R^3$ eſt aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, ſpectantium A τ rectam fig. 182. curvamve A τ fig. 177.

Item Momentum Ungulæ α o γ fig. 170. reſpectu aciei ſuæ α ξ, idem eſt atque Momentum Ungulæ α ξ o γ, dempto momento Ungulæ α o ξ, reſpectu communis aciei α ξ. Hoc eſt, $\frac{1}{3}as^3$ (poſitis α ξ = a, & α γ = ξ o = s,) dempto $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$ (per § N. prop. 19.) Hoc eſt, $\frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{9}v^2R^2 - \frac{1}{9}s^2vR$; ſumptis s, pro ſemiſubtenſa, ſeu ſinu dimidii arcus; & a, v, pro illo arcu dimidio ejuſque ſinu verſo; hoc eſt, a = A N, s = A M, v = M N, fig. 179. Adeoque Momentum ſimilis Ungulæ A o γ fig. 183. (utpote illius ſexdecuplum,) $\frac{16}{3}as^3 - \frac{16}{9}v^2R^2 - \frac{16}{9}s^2vR$ (ſumptis a, s, v, eodem ſenſu;) Hoc eſt (ſumptis a = A N B, c = 2 s = A M B, v = M N = C N − C M = C N − $\frac{1}{2}$ α B = $R - \frac{1}{2}\chi$, adeoque & $v^2 = R^2 - \chi R + \frac{1}{4}\chi^2 = R^2 - \chi R + R^2 - \frac{1}{4}c^2 = 2R^2 - \chi R - \frac{1}{4}c^2$;) $\frac{1}{3}ac^3 - \frac{32}{9}R^4 + \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{4}{9}c^2R^2 - \frac{4}{9}c^2R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi R, = \frac{1}{3}ac^3 - \frac{32}{9}R^4 + \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{2}{9}c^2\chi R$. Quod itaque eſt aggregatum *Omnium* ac^2 rectam A γ ſpectantium. Adeoque $\frac{ac^2}{6R} - \frac{16}{9}R^3$

$\frac{16}{9}R^3+\frac{8}{9}\chi R^2+\frac{1}{9}c^2\chi$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo ſpectantium. Et (propter Aτ fig. 182. figuræ altitudinem, duplam altitudinis Aα fig. 183.) ejuſdem duplum, nempe $\frac{ac^3}{3R}-\frac{32}{9}R^3+\frac{16}{9}\chi R^2+\frac{2}{9}c^2\chi$, eſt aggregatum *Omnium* $\frac{ac^2}{2R}$, rectam A b fig. 182, curvamque A b fig. 177. ſpectantium. Fig. 177, 180, 182, 183.

Inſuper *Omnes s* (ſumptis c arithmetice proportionalibus,) ſunt idem atque omnes bυ fig. 182. ſeu duplum *Omnium* $s=\gamma\upsilon$ fig. 183. (ut § G. oſtenſum eſt.) Sed Omn. s (= *Omn.* $\gamma\upsilon$) ſunt Omn. $\frac{c\sqrt{:}\,4R^2-c^2}{2R}$: ſeu Omn. $\frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omn. sc, (ſeu ipſius A$\alpha\upsilon$, vel A$\gamma\upsilon$, momentum reſpectu AQ, vel correſpondens Ungula) ſunt Omn. $\frac{c^2\sqrt{:}\,4R^2-c^2}{2R}$: (Idem atque Ungulæ AQq$\alpha$ vel AQqγ, aciem habentis AQ, momentum reſpectu AQ, per $2R$ diviſum:) Et Omn. sc^2; (hoc eſt, momentum Ungulæ A$\alpha\upsilon$, vel A$\gamma\upsilon$, fig. 183. aciem habentis AQ, reſpectu ejuſdem AQ,) ſunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:}\,4R^2-c^2}{2R}$: ſeu Omn. $\frac{c^3\chi}{2R}$. Et propterea, Omn. $\frac{sc^2}{2R}$, ſunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:}\,4R^2-c^2}{4R^2}$: ſeu Omn. $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

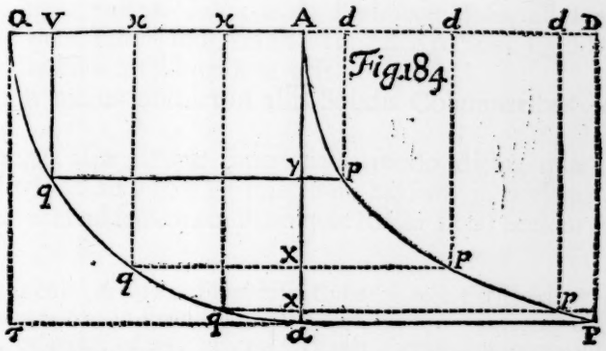


Fig. 184.

Sunt autem Omnes $\sqrt{:}\,4R^2-c^2$: ſeu Omnes χ; (ſumptis c arithmetice proportionalibus,) ſigillatim æquales rectis γq, complentibus quadrantem AαQ fig. 183. (per § G.) Quibus æquales intelligantur rectæ γq quadrantem AαQ fig. 184. ſimiliter complentes. Cui adjacere intelligatur Semiparaboloeidis Cubicalis complementum APα, quadrato AαPD inſcriptum; verticem habens A. Cujus itaque Paraboloeideos Latus rectum erit $4R^2$ (quod utique in diametrum AD$=2R$, ductum, efficiat $8R^3$ Cubum ordinatim in Paraboloeide applicatæ DP$=2R$;) per quod itaque $4R^2$, ſi dividatur rectæ DP$=$A$\alpha=2R$, cubus $8R^3$; habebitur Diameter in Paraboloeide, vel Ordinatim in Complemento applicata, AD$=\alpha$P$=\frac{8R^3}{4R^2}=2R$: Et ſimiliter, ſi per idem $4R^2$, dividatur, rectæ pd$=$A$\gamma=c$, Cubus c^3; habebitur diameter in Paraboloeide, vel ordinatim applicata, in complemento, Ad$=\gamma$p$=\frac{c^3}{4R^2}$; & ſic ubique. (Sunt utique Ordinatim-applicatæ in Semiparaboloeidis hujus complemento, in diametrorum interceptarum complementi ratione triplicata, ſeu ut earum Cubi.) Fig. 183, 184.

Cum itaque quæ quadrantem AαQ fig. 184. complent rectæ γq, ſint ipſæ, $\chi=\sqrt{:}\,4R^2-c^2$: quæque Semiparaboloeideos Cubicalis complementum AαP, complent rectæ γp, ſint ipſæ $\frac{c^3}{4R^2}$; quæ ex his fiunt rectangula ſunt ipſa $\frac{c^3\sqrt{:}\,4R^2-c^2:}{4R^2}$ ſeu $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Si

Fig. 177, 184. Si itaque intelligatur ex hujuſmodi rectangulis compleri Solidum, ipſi $A\alpha Q$ quadranti incumbens, altitudinem habens, in ſingulis γq rectis, æqualem reſpectivis rectis γp; Solidum hoc integrum $A\alpha Q$, ejuſve ſegmentum $A\gamma q$; erit aggregatum omnium $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ quæ vel totam $A\alpha$, vel ipſius partem $A\gamma$, ſpectant. Vel etiam (quod eodem recidet) ſi intelligatur $A\alpha P$ complementi Semiparaboloeidis planum, ſuper circuli plano, in $A\alpha$, ad angulos rectos erectum, moveri (invariato angulo) ab $A\alpha$ ad $Q\tau$, motu ſuo deſcribens ſolidum Priſmaticum ſeu columnare, circuli plano incumbens, duobus Trilineis ipſi $A\alpha P$ ſimilibus & æqualibus interjectum; quod ſecet Cylindri recti ſuperficies arcui $Qq\alpha$ inſiſtens, ſolidum inde abſcindens $AQq\alpha$: Solidum ſic abſciſſum, complebunt iſtiuſmodi rectangula. Quippe γp recta, ſic mota, ſuper γq rectam deſcribet $q\gamma p$ rectangulum. Et ſic ubique.

Idemque Solidum, alia adhuc complebunt plana, rectis $\varkappa q$, (ipſi $A\alpha$ parallelis, & æqualiter ab invicem diſtitis,) inſiſtentia; ipſis $A\chi p$ reſpectivis ſimilia & æqualia. Quippe, dum $A\alpha P$, motu jam dicto latum, ad $\varkappa q$ pervenit; ejuſdem pars $A\chi p$, eidem $\varkappa q$, inſiſtens, plano ſolidi ſic deſcripti, eidem $\varkappa q$ inſiſtenti, congruit. Et ſic ubique. Adeoque, Omnia $A\chi p$ plana, totidem $\varkappa q$ rectis inſiſtentia totum $AQq\alpha$ ſolidum complent.

Sumptis autem in $AQ\ (=2R,)$ rectis $A\varkappa\ (=c)$ arithmetice proportionalibus; quæ his reſpondent $\varkappa q$, ſunt totidem $\sqrt{:4R^2-c^2:}$ hoc eſt, totidem χ. Ductiſque $q\chi p$ (ipſi QA parallelis,) rectæ in complemento Paraboloeidis eiſdem $\varkappa q$, ſeu $A\chi$, reſpondentes χp, ſunt totidem $\frac{\chi^3}{4R^2}$; (ſunt utique in Paraboloeidis cubicalis complemento, Ordinatim-applicatæ, in triplicata ratione diametrorum; puta, χp recta, ad rectam αP, ut cubus $A\chi$ ad cubum $A\alpha$; & ſic ubique.) Adeoque $A\chi pd$ rectangulum, (utpote factum ex $A\chi=\varkappa q=\chi$, in $\chi p=\frac{\chi^3}{4R^2}$,) eſt $\frac{\chi^4}{4R^2}$; hoc eſt (propter $\chi=\sqrt{:4R^2-c^2:}$) $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{4R^2}$. Adeoque $A\chi p$ paraboloeidis Cubicalis complementum (utpote ad circumſcriptum parallelogrammum ut 1 ad 4, per prop. 6. hujus;) eſt $\frac{\chi^4}{16R^2}=\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^2}$. Et ſic ubique. Adeoque omnia $A\chi p$ Trilinea, hoc eſt, Omnia $\varkappa q$ plana, ſolidum complentia, ſunt Omnia $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^4}$ eo ſpectantia; ſive totum $AQq\alpha$ ſolidum ſpectemus, ſive ipſius portionem aliquam ut $AVq\alpha$.

Sunt autem (per prop. 1. hujus) ſi totum $AQq\alpha$ ſpectemus, (propter $AQ=2R,$) *Omn.* c^2, $=\frac{8}{3}R^3$; & *Omn.* c^4, $=\frac{32}{5}R^5$. Adeoque *Omn.* $16R^4-8c^2R^2+c^4:=32R^5-\frac{64}{3}R^5+\frac{32}{5}R^5=\frac{256}{15}R^5$, & *Omn.* $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^2}:=\frac{16}{15}R^3$. Hoc eſt, Omnia $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ ſeu Omnia $\frac{5c^2}{2R}$, rectam $A\alpha$ fig. 184. vel planum $A\varkappa\upsilon$ fig. 183. ſpectantia. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $=2A\alpha$ fig. 183.) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3$, erit Aggregatum Omnium $\frac{5c^2}{2R}$ ſpectantium planum $A\tau\upsilon$, vel rectam $A\tau$ fig. 182. vel curvam $A\tau$ fig. 177.

Si vero ſolidi portionem $AVq\alpha$ ſpectemus; ut ſit rectarum $A\varkappa=c$, maxima $AV=\gamma q=x$; erunt (per eandem prop. 1. hujus) *Omn.* c^2, $=\frac{1}{3}x^3$; & *Omn.* c^4, $=\frac{1}{5}x^5$: Adeoque *Omn.* $16R^4-8c^2R^2+c^4:=16xR^4-\frac{8}{3}x^3R^2+\frac{1}{5}x^5$, & *Omn.* $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^2}:=xR^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{x^5}{80R^2}$.

Hoc autem $AVq\alpha$ ſolidum, ex ſolido $AQq\alpha=\frac{16}{15}R^3$ (modo reperto) ſubductum; relinquit ſolidum VqQ, $=\frac{16}{15}R^3-xR^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{x^5}{80R^2}$.

Huic vero VqQ ſolido; ſi addatur ſolidum $AVq\gamma$; hoc eſt (propter planum

num $Vq = A\gamma p = \frac{C^4}{16R^2}$, & $AV = x$,) $\frac{xC^4}{16R^2}$ (posito $A\gamma = C$:) Habetur Fig. 177, 184. solidum $A\gamma qQ = \frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{x^5}{80R^2}$: Hoc est, (propter $x^2 = 4R^2 - C^2$, adeoque $x^4 = 16R^4 - 8C^2R^2 + C^4$;) $\frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{2}{3}xR^2 - \frac{1}{6}xC^2 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{1}{5}xR^2 + \frac{1}{10}xC^2 - \frac{xC^4}{80R^2} = \frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}xR^2 - \frac{1}{15}xC^2 + \frac{xC^4}{20R^2}$: Vel (restituto valore minuscularum, $A\gamma = c$, & $AV = \gamma q = \chi = \surd: 4R^2 - c^2:$) $\frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}\chi R^2 - \frac{1}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{20R^2}$. Quod itaque est aggregatum Omnium $\frac{c^3\surd: 4R^2 - c^2:}{4R^2}$ seu Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, rectam $A\gamma$ fig. 184. vel planum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. spectantium. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2A\alpha$ fig. 183. & consequenter $Ab = 2A\gamma$;) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{2}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$ aggregatum Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, spectantium planum $Ab\upsilon$, vel rectam Ab fig. 182. vel curvam Ab fig. 177. vel (propter $c^2 = 4R^2 - \chi^2$,) $\frac{32}{15}R^3 - \frac{2}{3}\chi^3 + \frac{\chi^5}{10R^2}$.

Cum itaque sint, quæ totam $A\tau$ spectant, *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, $= \frac{4}{3}R^2\mathcal{P} - \frac{32}{9}R^3$, Fig. 177. (ut modo ostensum erat;) & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}$, $= \frac{32}{15}R^3$, (ut jam ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2: = \frac{4}{3}R^2\mathcal{P} - \frac{64}{45}R^3$. Quod itaque (per modo demonstrata) est semiquadrantalis Ungulæ superficialis, toti $A\tau$ fig. 177. insistentis, aciem habentis AT, momentum respectu $A\alpha$; Aut etiam (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem,) aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu TA.

Hoc itaque Momentum, per Ungulæ $A\tau$, aciem habentis TA, magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ (§ D, F. ostensam,) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantiam, $\frac{1}{2}\mathcal{P} - \frac{8}{15}R$. (Eademque erit inde distantia centri gravitatis correspondentis superficiei conversione vel semiconversione circa TA factæ; eadem utique quæ superficialis Ungulæ: Momentorum vero ratio, eadem quæ magnitudinum; nempe ad illud Ungulæ, ut $\mathcal{P}$ vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R. Et sic alibi; nempe quoties axis libræ est, ad axem conversionis, ad angulos rectos: Ut sæpius insinuatum est:) Adeoque ejusdem à $T\tau$ distantia, est $\frac{8}{15}R$; Ejusque propterea, respectu $T\tau$, momentum, $\frac{64}{45}R^3$.

Quod itidem est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $T\tau$, momentum respectu TA. Hoc itaque per magnitudinem (§ G. traditam) $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet hujus, à TA, distantiam centri gravitatis $\frac{4}{15}R$: Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{26}{15}R$; ipsiusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{416}{45}R^3$. Atque hoc itidem est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$ momentum, respectu $T\tau$. Quod itaque per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet centri gravitatis à $T\tau$ distantiam, item $\frac{26}{15}R$: Adeoque ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}\mathcal{P} - \frac{26}{15}R$; ejusque respectu $A\alpha$ momentum $\frac{8}{3}R^2\mathcal{P} - \frac{416}{45}R^3$.

Idemque (quod modo dictum est) momentum $\frac{4}{3}R^2\mathcal{P} - \frac{64}{45}R^3$, per Ungulæ $A\tau$ aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem, $2R\mathcal{P} - \frac{16}{3}R^2$, (§ G. ostensum,) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{30\mathcal{P} - 32R}{45\mathcal{P} - 120R}R$: Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{60\mathcal{P} - 208R}{45\mathcal{P} - 120R}R$. Et propterea ejusdem respectu $\tau\alpha$ Momentum $\frac{8}{3}R^2\mathcal{P} - \frac{416}{45}R^3$.

Sed & hoc ipsum (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$. Per hujus itaque

Fig. 177. que magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}\mathcal{P} - \frac{26}{15}R$. Ut modo dictum est.

Similiter; Cum quæ portionem A b spectant, sint *Omn.* $\frac{ac^2}{2R} := \frac{ac^3}{3R} - \frac{32}{9}R^3 + \frac{16}{9}\chi R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$; & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R} := \frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{2}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$; (ut modo ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2 := \frac{ac^3}{3R} - \frac{64}{45}R^3 + \frac{32}{45}\chi R^2 + \frac{4}{45}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2} = \frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b, aciem habentis T A, respectu A α; vel etiam (ob altitudinum & distantiarum reciprocationem) aciem habentis A α, Momentum respectu T A.

Hoc itaque Momentum; per Ungulæ A b, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{2}{3}cv$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet ejusdem ab A α distantiam centri gravitatis $\frac{ac^2}{2vR} - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c^3\chi}{20vR^2}$; vel (propter $2vR = c^2$,) $a - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c\chi}{10R}$: Hoc est, $\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{60cvR^2 = 30c^3R}$.

Idemque Momentum, per Ungulæ A b, aciem habentis A α, magnitudinem, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$ (§ G. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à T A,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =)\ 30c^2\chi R}.$$

Adeoque à τ α, $\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}$. Et à b V (subducendo ex A V = v ejusdem à T A distantiam,)

$$\frac{180acvR^2 - 480vR^4 + 240v\chi R^3 + 30c^2v\chi R - 30ac^3R + 128R^5 - 64\chi R^4 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R},$$

vel (propter $2vR = c^2$,) $\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}$.

Et consequenter, ejusdem momentum respectu τ α, (magnitudine in distantiam ducta) erit $\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2}$. Quod etiam (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est momentum Ungulæ A b aciem habentis τ α, respectu A α: Adeoque (momentum illud per hujus magnitudinem dividendo; hoc est, per $4cR - \frac{2}{3}cv$, ut § D, F. ostenditur,) hujus distantia centri gravitatis ab A α, est

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =)\ 30c^3R}.$$

Similiter, ejusdem Ungulæ A b aciem habentis A α, momentum respectu b V, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2}.$$ Quod itaque (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Momentum Ungulæ A b aciem habentis b V, respectu A α. Adeoque (per magnitudinem $\frac{4}{3}cv$, § D, F. inventam, dividendo;) erit hujus distantia centri gravitatis ab A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R}.$$

Supereſt

Supereſt tandem, ut ſuperficialis Ungulæ A τ vel A b, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α inveſtigemus. I.

Fig. 177, 182, 183, 170.

Diviſa itaque, ut prius, A τ in minutas partes æquales : Adeoque ſumptis A b = 2 c fig. 177, 182. arithmetice proportionalibus : Erit cujuſque b puncti, ſeu partis minutæ, ab A α diſtantia, b B V fig. 177. hoc eſt B b υ fig. 182. Adeoque omnes rectæ punctis b inſiſtentes, Ungulam complentes, ſunt totidem B b υ rectæ, trilineum A α τ υ fig. 182. complentes ; hoc eſt, bis Omnes ο γ υ fig. 183. hoc eſt, totidem $a+s$, ſubtenſis c arithmetice proportionalibus reſpondentes. Quæ itidem in $a+s$ diſtantiam ductæ, exhibent earum reſpectu A α momenta, totidem $a^2+2as+s^2$.

Sunt autem, Omnia a^2 ; ſeu omnia quadrata γ ο fig. 183. *Duplum* Semiquadrantalis Ungulæ, ſeu momenti trilinei A ϰ α, ſeu A ο γ, (prout vel totum vel pars conſideratur,) reſpectu A α fig. 183. Hoc eſt (propter figuras ſimiles A ϰ α fig. 183. & α ϰ Γ fig. 170.) *Sexdecuplum* momenti trilinei α ϰ Γ vel α ο γ, fig. 170. reſpectu rectæ α Γ, (nempe in triplicata ratione laterum Homologorum, A α = 2 R, ad α Γ = R.)

Eſt autem, Momentum Trilinei α ο γ, fig. 170. hoc eſt, α ξ ο γ — ξ ο α, (reſpectu α Γ,) $\frac{1}{2}a^2s$, minus, $-eR^2+avR$; (per § O. prop. 19.) ſeu $\frac{1}{2}a^2s+eR^2-avR$, hoc eſt $\frac{1}{2}a^2s+aR^2-sR^2-avR$, (poſito $a=\alpha\xi$ fig. 170. pro arcu AN fig. 179. ſemiſſe arcus A B ; adeoque $s=AM$, & $v=MN=CN-\frac{1}{2}\alpha B=R-\frac{1}{2}\chi$:) Adeoque Momentum trilinei A ο γ fig. 183. (utpote iſtius Octuplum,) $4a^2s+8aR^2-8sR^2-8avR$, (ſumptis a, s, v, eodem ſenſu :) Hoc eſt, (poſito $a=AB$, $=2AN$; & $c=2s$; & $R-\frac{1}{2}\chi=v$;) $\frac{1}{2}a^2c+4aR^2-4cR^2-4aR^2+2a\chi R=\frac{1}{2}a^2c-4cR^2+2a\chi R$: Adeoque Omnia a^2 eo ſpectantia (utpote momenti duplum) $a^2c-8cR^2+4a\chi R$; hoc eſt Omnia quadrata γ ο fig. 183. Adeoque (propter A τ fig. 182. = 2 A α fig. 183.) Omnia quadrata B b fig. 182. ſeu *Omnia* a^2, (eo ſpectantia) $=2a^2c-16cR^2+8a\chi R$. Et propterea, ſi totam A τ ſpectemus ; (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, $c=2R$, & $\chi=0$,) erit $R\mathcal{P}^2-32R^3=Omn.\,a^2$.

Item, omnia s^2, hoc eſt, omnia quadrata b υ fig. 182. ſeu, bis Omnia quadrata γ υ fig. 183. Idem ſunt (propter $\gamma\upsilon=b\upsilon=\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$) atque totidem $\frac{4c^2R^2-c^4}{4R^2}$. Sunt autem (ſumptis c arithmetice proportionalibus, uſque ad maximam $C=AB$,) *Omn.* $c^2:=\frac{1}{3}C^3$; & *Omn.* $c^4:=\frac{1}{5}C^5$ (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $\frac{4c^2R^2-c^4}{4R^2}:=Omn.\,c^2-\frac{c^4}{4R^2}:=\frac{1}{3}C^3-\frac{C^5}{20R^2}$: Nempe Omnia quadrata γ υ, ſeu Omn. s^2 : fig. 183. Ergo (propter A τ = 2 A α,) Omnia quadrata b υ fig. 182. *Omn.* $s^2=\frac{2}{3}C^3-\frac{C^5}{10R^2}$. Et propterea, ſi totam A τ ſpectemus, propter $C=2R$,) *Omn.* $s^2:=\frac{16}{3}R^3-\frac{16}{5}R^3=\frac{32}{15}R^3$.

Item, (propter $s=\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$,) Omnia as, ſunt totidem $\frac{ac\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$: Adeoque (propter ο γ = a, & q γ = √ : $4R^2-c^2$: & A γ = c :) *Omnia as* ; hoc eſt, Omnia Rectangula ο γ υ fig. 183. ſunt Momentum, reſpectu A δ, omnium q γ ο rectangulorum, (ſolidive ex his conflati,) per 2 R diviſum. Hoc eſt (propter figuras ſimiles A ϰ α fig. 183. & α ϰ Γ ſeu d τ δ, fig. 170. item A Q q α fig. 183. & C D E α fig. 169. rationemque laterum homologorum A α ad α Γ, ut 2 ad 1 ;) *Sexdecuplum* Momenti (per 2 R diviſi) ſolidi α ο γ vel d e g fig. 170. altitudines habentis reſpectivis E Σ fig. 169. æquales, reſpectu rectarum α δ vel d c.

Eſt autem portio ſolidi hujuſmodi b τ β, ſeu e τ ε, fig. 170. $=\frac{1}{4}\alpha^2R-\frac{1}{4}s^2R$, per § K. prop. 18. (poſito τ ε = α ;) Hoc eſt (poſito e g ſeu ε δ = ξ, adeoque $\alpha=\frac{1}{4}\mathcal{P}-\xi$,) $\frac{1}{64}\mathcal{P}^2R-\frac{1}{8}\xi\mathcal{P}R+\frac{1}{4}\xi^2R-\frac{1}{4}s^2R$: Adeoque d τ δ (propter $\xi=0$, & $s=R$,) $=\frac{1}{64}\mathcal{P}^2R-\frac{1}{4}R^3$. Et propterea d e ε δ (d τ δ — e τ ε) $=\frac{1}{8}\xi\mathcal{P}R-\frac{1}{8}\xi^2R+$

Fig. 177, 182, 183, 170. $\frac{1}{4}s^2R-\frac{1}{4}R^3$. Unde si subducatur portio e ε δ g; hoc est, factum ex e g $=\xi$, in E Σ α (fig. 169.) hoc est, (per § F. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sh$ (posito $\alpha=\tau\varepsilon=\frac{1}{4}$E arcui, & $h=\alpha\Sigma=e\varepsilon$;) hoc est (posito $\alpha=\frac{1}{4}P-\xi$, & $h=R-x$;) in $\frac{1}{8}PR-\frac{1}{2}\xi R-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sR-\frac{1}{2}sx$; hoc est, in $\frac{1}{8}PR-\frac{1}{2}\xi R-\frac{1}{2}sx$; Nempe, $\frac{1}{8}\xi PR-\frac{1}{2}\xi^2R-\frac{1}{2}\xi sx$: Relinquitur portio d e g $=\frac{1}{4}\xi^2R+\frac{1}{2}\xi sx+\frac{1}{4}s^2R-\frac{1}{4}R^3$.

Et portionis solidi b τ β seu e τ ε, respectu τ α, momentum est, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}hR^3-\frac{1}{9}s^2hR$, per § Q. prop. 18. (posito $\tau\varepsilon=\alpha$, & $\alpha\Sigma=h$;) Hoc est, (positis $\alpha=\frac{1}{4}P-\xi$, & $h=R-x$,) $\frac{1}{64}P^2R^2-\frac{1}{8}\xi PR^2+\frac{1}{4}\xi^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}R^4+\frac{2}{9}xR^3-\frac{1}{9}s^2R^2+\frac{1}{9}s^2xR$; seu $\frac{1}{64}P^2R^2-\frac{1}{8}\xi PR^2+\frac{1}{4}\xi^2R^2-\frac{1}{4}s^2R^2-\frac{2}{9}R^4+\frac{2}{9}xR^3+\frac{1}{9}s^2xR$. Adeoque momentum solidi d τ δ (propter $\xi=0$, & $x=0$, & $s=R$,) $\frac{1}{64}P^2R^2-\frac{1}{4}R^4-\frac{2}{9}R^4$, seu $\frac{1}{64}R^2P^2-\frac{17}{36}R^4$. Et propterea, Momentum portionis d e δ (respectu ejusdem τ α) est $\frac{1}{8}\xi PR^2-\frac{1}{4}\xi^2R^2-\frac{1}{4}R^4+\frac{1}{4}s^2R^2-\frac{2}{9}xR^3-\frac{1}{9}s^2xR$. Unde si auferatur momentum portionis e ε δ g; hoc est, factum ex e g $=\xi$, in momentum segmenti semicirculi E Σ α (fig. 169.) respectu ipsius τ α; hoc est (per § L. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}shR-\frac{1}{3}s^3$ (posito $\tau\varepsilon=\alpha$, & $\alpha\Sigma=h$;) hoc est, (posito $\alpha=\frac{1}{4}P-\xi$, & $h=R-x$,) in $\frac{1}{8}PR^2-\frac{1}{2}\xi R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{2}sxR-\frac{1}{3}s^3$, seu, in $\frac{1}{8}PR^2-\frac{1}{2}\xi R^2-\frac{1}{2}sxR-\frac{1}{3}s^3$; Nempe $\frac{1}{8}\xi R^2P-\frac{1}{2}\xi^2R^2-\frac{1}{2}\xi sxR-\frac{1}{3}\xi s^3$: Relinquitur portionis d e g, Momentum (respectu ejusdem τ α) $\frac{1}{4}\xi^2R^2-\frac{1}{4}R^4+\frac{1}{4}s^2R^2-\frac{2}{9}xR^3-\frac{1}{9}s^2xR+\frac{1}{2}\xi sxR+\frac{1}{3}\xi s^3$.

Fig. 170. Hoc itaque, per magnitudinem, (modo inventam,) divisum; exhibet ipsius d e g (portionis solidi) distantiam centri gravitatis à τ α,

$$\frac{9\xi^2R^2-9R^4+9s^2R^2-8xR^3-4s^2xR+18\xi sxR+12\xi s^3}{9\xi^2R+18\xi sx+9s^2R-9R^3}=R-\frac{8xR^3+4s^2xR-12\xi s^3}{9\xi^2R+18\xi sx+9s^2R-9R^3}$$

: Adeoque à c d, $\frac{8xR^3+4s^2xR-12\xi s^3}{9\xi^2R+18\xi sx+9s^2R-9R^3}$. Quod in magnitudinem ductum, exhibet solidi d e g momentum respectu c d, $\frac{2}{9}xR^3+\frac{1}{9}s^2xR-\frac{1}{3}\xi s^3$ (positis, $\xi=$ DE fig. 169. $=$ e g $=o\gamma=\alpha\xi$ fig. 170. & $x=C\Sigma=\xi o=\alpha\gamma$; & $s=E\Sigma$;) Vel (substituto σ pro s, qui sit sinus arcus B α fig. 169. $=\xi\delta$ fig. 170.) momentum similis solidi α o γ respectu α δ, $\frac{2}{9}xR^3+\frac{1}{9}\sigma^2xR-\frac{1}{3}\xi\sigma^3$.

Fig. 182, 183. Et consequenter; similis solidi A o γ fig. 183. (ex ductu rectarum o γ in γ q respective) momentum respectu A δ, (utpote prioris sexdecuplum, propter tum singulas dimensiones, tum distantiam, ut 2 ad 1,) $\frac{32}{9}xR^3+\frac{16}{9}\sigma^2xR-\frac{16}{3}\xi\sigma^3$: Hoc est (posito $a=2\xi$, propter arcum semicirculi duplum respectivi arcus in quadrante; & $c=2x$, propter chordam arcus a, duplam sinus recti dimidii arcus; & $\chi=2\sigma$, propter subtensam complementi arcus a ad semicirculum, duplum sinus complementi dimidii arcus ad quadrantem;) $\frac{16}{9}cR^3+\frac{2}{9}\chi^2cR-\frac{1}{3}a\chi^3$: Hoc itaque per $2R$ divisum; hoc est, $\frac{8}{9}cR^2+\frac{1}{9}c\chi^2-\frac{a\chi^3}{6R}$; exhibet (ut jam ostensum est) aggregatum omnium as, seu rectangulorum o γ υ fig. 183. adeoque (propter A τ $=2$ A α) hujus duplum, est aggregatum omnium as, seu rectangulorum B b υ fig. 182. Et propterea hujus duplum, seu illius quadruplum, $\frac{32}{9}cR^2+\frac{4}{9}c\chi^2-\frac{2a\chi^3}{3R}=Omn.\,2as$: fig. 182. Adeoque, si totam A τ spectemus (propter $c=2R$, & $\chi=0$) erunt (quæ eo spectant) $Omn.\,2as$: $=\frac{64}{9}R^3$.

Fig. 177. Ergo (propter $Omn.\,a^2$: $=2a^2c-16cR^2+8a\chi R$; & $Omn.\,s^2$: $=\frac{2}{3}c^3-\frac{c^5}{10R^2}$; & $Omn.\,2as$: $=\frac{32}{9}cR^2+\frac{4}{9}c\chi^2-\frac{2a\chi^3}{3R}$; ut jam ostensum est:) $Omn.\,a^2+2as+s^2$: $=2a^2c+\frac{2}{3}c^3-\frac{112}{9}cR^2+\frac{4}{9}c\chi^2+8a\chi R-2a\chi^3$

$-\frac{2a\chi^3}{3R}-\frac{c^5}{10R^2}$. Quod itaque eſt Momentum Ungulæ A b fig. 177. aciem habentis A α, reſpectu A α: Hujuſque Duplum (ut ſæpius dictum) Superficiei ſemiconverſione factæ momentum reſpectu axis converſionis A α. Adeoque, ſi totam A τ ſpectemus, (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $c=2R$, & $\chi=0$,) erunt *Omn.* a^2+s^2+2as: $=\mathcal{P}^2R+\frac{16}{3}R^3-\frac{224}{9}R^3-\frac{16}{5}R^3=\mathcal{P}^2R-\frac{1024}{45}R^3$. Quod itaque eſt Ungulæ A τ, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α: Hujuſque Duplum, eſt correſpondentis ſuperficiei ſemiconverſione circa A α deſcriptæ momentum reſpectu ejuſdem A α. Fig. 177.

Momento itaque per magnitudinem (§ G. inventam,) diviſo; habetur Ungulæ A b, aciem habentis A α, diſtantia centri gravitatis ab ipſa A α, $\frac{180a^2cR^2+60c^3R^2-1120cR^4+40c\chi^2R^2+720a\chi R^3-60a\chi^3R-9c^5}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+(60v\chi R^2=)\,30c^2\chi R}$; & ſuperficiei ſemiconverſione circa A α factæ, diſtantia centri gravitatis à converſionis axe A α, erit ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ſeu $4R$ ad $\mathcal{P}$; ut alibi: Nempe quoties idem eſt Axis Converſionis & Axis Libræ.

Totiuſque A τ Ungulæ, aciem eandem A α habentis, diſtantia ab A α, ſimiliter habebitur, $\frac{45\mathcal{P}^2-1024R^2}{90\mathcal{P}-240R}$; (& ſuperficiei ſemiconverſione factæ, ad hanc Ungulæ, ut $4R$ ad $\mathcal{P}$;) Ungulæque propterea diſtantia centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{2}\mathcal{P}-\frac{45\mathcal{P}^2-1024R^2}{90\mathcal{P}-240R}=\frac{1024R^2-120R\mathcal{P}}{90\mathcal{P}-240R}=\frac{512R-60\mathcal{P}}{45\mathcal{P}-120R}R$. Et propterea, ejuſdem reſpectu T τ momentum $\frac{1024R^3-120R^2\mathcal{P}}{45}=\frac{1024}{45}R^3-\frac{8}{3}R^2\mathcal{P}$. Quod itidem eſt (propter altitudinum & diſtantiarum reciprocationem) Momentum Ungulæ A τ, aciem habentis T τ, reſpectu A α. Adeoque, per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (per § G.) diviſum; exhibet hujus, ab A α, diſtantiam centri gravitatis, $\frac{64}{15}R-\frac{1}{2}\mathcal{P}$: &, ab acie ſua T τ, $\mathcal{P}-\frac{64}{15}R$: & propterea momentum reſpectu aciei ſuæ T τ, $\frac{16}{3}R^2\mathcal{P}-\frac{1024}{45}R^3$.

His ita peractis; ea quæ jam exhibuimus (§ G, H, I.) diviſa A τ curva in partes æquales; adeoque ſumptis ſubtenſis A B $=c$, arithmetice proportionalibus; non erit inutile, aliquatenus proſequi ſecundum alteram methodum (qua § B, C, D, E, uſi ſumus,) diviſa A α in partes æquales; adeoque ſumptis ſinibus verſis A V $=v$ arithmetice proportionalibus. K. Fig. 177.

Si itaque intelligatur recta A α fig. 177. in exiguas partes æquales numero infinitas dividi; quarum una intelligatur V O $=B$: Quæ his reſpondent b g tangentes, ſeu (quod in partibus infinite exiguis pro eodem reputabitur) b x curvæ, ſunt ut totidem V $\omega=B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſeu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, (per § B, C.) Harumque ab A α diſtantiæ, ſunt b V $=a+s$, (ſinibus verſis arithmetice proportionalibus reſpondentes,) ipſam A $\tau\alpha$ ſemicycloidem complentes, (vel etiam, tum figuram Arcuum A $\tau\alpha$ fig. 170, 185. tum ſemicirculum A B α fig. 169, 185. complentes; quippe illam complent *omnes a*; ſemicirculum, *omnes s.*) Adeoque particularum curvæ A τ fig. 177. momenta reſpectu A α; ſunt ut totidem rectangula b V ω fig. 177. hoc eſt totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}}B\sqrt{2R}$; ſeu totidem b V ω + B V ω fig. 185. hoc eſt, totidem $\frac{aB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}+\frac{sB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$; vel (omiſſa B, quæ nonniſi infiniteſimam partem ipſius A α ſignificat, ſeu rectarum craſſitiem planum complentium,) totidem $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}+\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$.

Et quidem, Aggregatum *omnium* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$ facile habetur: Cum enim ſit $s^2=vb$, adeoque $s=\sqrt{vb}$, erit $\frac{s}{\sqrt{v}}=\sqrt{b}$; & *Omnes* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, idem atque

Fig. 177. *Omnes* $\sqrt{2hR}$, hoc eſt ipſæ πV, fig. 179. Adeoque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$ curvam A b fig. 177. ſpectantes æquantur ipſi portioni parabolæ $A\Pi\pi V$ fig. 179. hoc eſt, $\frac{8}{3}R^2-\frac{2}{3}h\sqrt{2hR}$, per prop. 6. hujus. Quod (propter $2hR=\chi^2$, & $h=\frac{\chi^2}{2R}$,) tantundem eſt atque $\frac{8}{3}R^2-\frac{\chi^3}{3R}$, in § G. repertum; ſeu *Omnes*, s,(vel *Omn.* $\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$,) ſumptis A b $=2c$ arithmetice proportionalibus. Nempe $\Pi A V\pi$ fig. 179. $=$ A b υ fig. 182. (ſimiliter diviſis A τ, A τ, fig. 177,182. in punctis b;) Hoc eſt, *Omn.* s, ſumptis A b $=2c$ arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis A V $=v$ arithmetice proportionalibus. Utrumvis enim eſt ipſius A b momentum, quantum ad diſtantias B V.

At, *Omnia* $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, ſeu *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis v arithmetice proportionalibus; puta ſolidum A b V ω fig. 185. (ex rectangulis b V ω conflatum) per B, hoc eſt αO, vel V O, diviſum; tantundem eſt atque planum A b B fig. 182. ſeu *Omn.* a, ſumptis A b $=2c$ arithmetice proportionalibus: (Utrumvis utique eſt momentum A b fig. 177. quantum ad diſtantias b B.) Adeoque cum horum aggregatum deprehenſum eſt (§ G.) $=2ac-8R^2+4\chi R$; tantundem erit & Aggregatum *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$ ſumptis A b $=v$, arithmetice proportionalibus. Quod quum ibidem deprehenſum ſit, non opus erit ut hic ſolicite inveſtigemus. Atque hinc reliqua deducentur, ut ad § G.

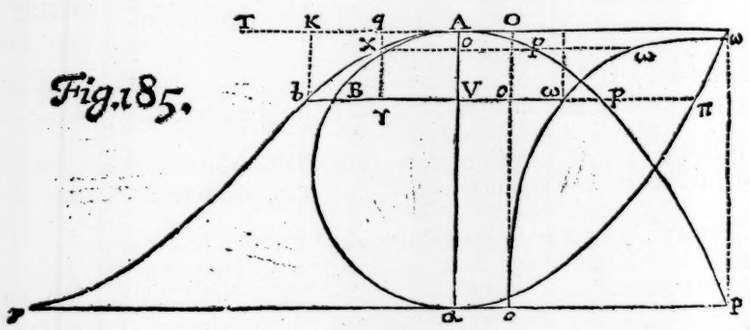


Fig. 185.

Sed & idem ſolidum A b V ω fig. 185. (quod complent omnia b V ω rectangula, ſeu Omnia $aB\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis v arithmetice proportionalibus;) complent etiam alia plana rectis x r (æqualiter ab invicem diſtantibus) trilineum A b V complentibus inſiſtentia, hoc eſt, totidem rectis, q r $-$ q x. Sunt autem quæ ſingulis bK, ſeu q r inſiſtunt plana ſolidum complentia, reſpectivis A V $\omega\omega$ æqualia; (ut ex conſtructione figuræ patet, ſi intelligatur A α O ω planum, ſuper plano A $\tau\alpha$ ad angulos rectos erectum, motu ſuo verſus τ, ſolidum deſcribere.) Adeoque omnia q r plana; tantundem ſunt atque, b V $=a$, in planum A V $\omega\omega$; hoc eſt, in duplum rectanguli A V ω; hoc eſt (per § B, C.) in $2v\times B\sqrt{\frac{2R}{v}}=2B\sqrt{2vR}$; hoc eſt $2AV\times B\sqrt{\frac{2R}{V}}$ (poſito A K $=A$, & A V $=V$;) ſeu $2A\times B\sqrt{2VR}$; ſeu b V p rectangulum, in altitudinem 2 B ductum; vel Duplum rectanguli bVp, in B ductum. Et, eadem ratione, Omnia x q plana; ſunt totidem A o ω planis æqualia; hoc eſt, totidem $2v\times B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſeu $2B\sqrt{2vR}$, (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) uſque ad maximum $V=$ b K. Adeoque $2AB\sqrt{2VR}$, demptis

demptis *Omn.* $2B\sqrt{2vR}$, ſumptis a arithmetice proportionalibus; idem eſt atque *Omn.* $aB\sqrt{\frac{2R}{v}}$; ſumptis v arithmetice proportionalibus. (Nempe idem ſolidum A b V.) Et (dividendo per B,) $2A\sqrt{2VR} - Omn.\ 2\sqrt{2vR}$: ſumptis a arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis v arithmetice proportionalibus; ſeu *Omn.* a, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; hoc eſt, Trilineum A b B fig. 182. Fig. 177, 185.

Poteſtque idem (ſi opus eſt) ſolidum conſiderari tanquam ex planis ipſi A b V parallelis conflatum. Et ſic alibi.

Similiter; Diviſa, ut prius, A α in minutas partes æquales; cum quæ his reſpondent particularum b x momenta reſpectu A α, fig. 177. ſeu Ungulæ (aciem habentis A α) particulæ, ſint (ut dictum eſt) ut totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, ſeu $a\sqrt{\frac{2R}{v}} + s\sqrt{\frac{2R}{v}}$; ſintque ipſarum à T A diſtantiæ, A V $= v$ reſpectivæ; erit omnium reſpectu T A momentum, totidem $a\sqrt{2vR} + s\sqrt{2vR}$; ſumptis v arithmetice proportionalibus. L.

Et quidem aggregatum *Omn.* $s\sqrt{2vR}$, (hoc eſt, omnium rectangulorum B V p fig. 185.) facile habetur. Cum enim ſint *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$, idem atque totidem π V fig. 179. erunt *Omn.* $s\sqrt{2vR}$, hoc eſt *Omn.* $vs\sqrt{\frac{2R}{v}}$; vel etiam (propter $s = \sqrt{vh}$,) *Omn.* $v\sqrt{2hR}$; idem atque earundem π V momenta reſpectu Π A rectæ. Eſt autem (per prop. 6. hujus,) ſemiparabolæ $\alpha\Pi$ A diſtantia centri gravitatis ab $\alpha\tau$, $\frac{3}{5}\alpha$A $= \frac{6}{5}R$; adeoque ab A T, $\frac{4}{5}R$; & (propter magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$) momentum ejus reſpectu A T, $\frac{32}{15}R^3$. Et ſemiparabolæ $\alpha\pi$ V, diſtantia centri gravitatis ab $\alpha\tau$, $\frac{3}{5}\alpha$V $= \frac{3}{5}h$; adeoque ab A T, $2R - \frac{3}{5}h$; & (propter magnitudinem $\frac{2}{3}h\sqrt{2hR}$,) momentum reſpectu A T, $\frac{4}{3}hR\sqrt{2hR} - \frac{2}{5}h^2\sqrt{2hR}$. Ergo (ſubductione facta) Momentum portionis Π A V π reſpectu T A, eſt $\frac{32}{15}R^3 - \frac{4}{3}hR\sqrt{2hR} + \frac{2}{5}h^2\sqrt{2hR}$. Hoc eſt (propter $2hR = \chi^2$, & $\sqrt{2hR} = \chi$, & $h = \frac{\chi}{2R}$,) $\frac{32}{15}R^3 - \frac{2}{3}\chi^3 + \frac{\chi^5}{10R^2}$. Tantundem ſcilicet atque *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}$, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; ut § H. oſtenſum eſt. Fig. 179.

Suntque *Omn.* $a\sqrt{2vR}$, ſumptis v arithmetice proportionalibus; (hoc eſt, omnia rectangula b V p fig. 185.) idem atque *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus. (Utrumvis utique eſt Ungulæ A b fig. 177. quantum ad altitudines b B, momentum reſpectu T A; ungulæve A b aciem habentis T A momentum quantum ad diſtantias b B.) Quod § H. deprehendimus $\frac{ac^3}{3R} - \frac{32}{5}R^3 + \frac{16}{9}\chi R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$. Atque hinc reliqua deducentur ut ad § H. Fig. 177, 185.

Sed & idem ſolidum A b V p fig. 185. (quod complent omnia b V p rectangula, ſeu omnia $a\sqrt{2vR}$, ſumptis v arithmetice proportionalibus;) complent etiam alia plana rectis x r inſiſtentia; hoc eſt (ut ex conſtructione patebit, ſi intelligatur A α P ſemiparabola, ad angulos rectos erecta, & ſuper A $\alpha\tau$ plano mota, ſolidum deſcribere,) totidem ſemiparabolæ A V p, demptis omnibus A o p, quarum altitudines A o $=$ q x ſint ſinus verſi arcuum arithmetice proportionalium: Hoc eſt (poſito A K $=$ b V $= A$, & A V $= V$,) $\frac{2}{3}A\sqrt{2V^3R}$ demptis *omnibus* $\frac{2}{3}a\sqrt{2v^3R}$, ſumptis a arithmetice proportionalibus. Quod itaque tantundem etiam valet atque *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus.

Poteſtque idem ſolidum (ſi opus eſt) conſiderari tanquam ex planis ipſi A b V parallelis conflatum: Ut ante monitum eſt.

Similiter;

M. Fig. 177, 185. Similiter; cum, diviſa ut prius A α in minutas partes æquales, ſint, quæ his reſpondent, curvæ A τ particulæ b x, ut totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ut oſtenſum eſt; erit Ungulæ aciem habentis A α momentum reſpectu A α, ut Omnia $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, in reſpectiva quadrata b V, hoc eſt, in reſpectiva $a^2+2as+s^2$, ſumptis v arithmetice proportionalibus. Hoc eſt (omiſſo B, ut prius,) *Omn.* $a^2\sqrt{\frac{2R}{v}}+2as\sqrt{\frac{2R}{v}}+s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$; ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Et quidem Aggregatum *Omnium* $s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$, hoc eſt (propter $s^2=vh$,) *Omn.* $s\sqrt{2hR}$; vel *Omn.* $vh\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſeu *Omn.* $h\sqrt{2vR}$; facile habetur. Eſt utique Semiparabolæ A p V fig. 178. Momentum reſpectu P α ſeu τ α. Hoc eſt (propter diſtantiam centri gravitatis à T A, $\frac{3}{5}$ A V $=\frac{3}{5}v$; adeoque à τ α, $2R-\frac{3}{5}v$; & magnitudinem $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}$; per prop. 6. hujus;) $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR}-\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}$. Hoc eſt (propter $2vR=c^2$, & $\sqrt{2vR}=c$, & $v=\frac{c^2}{2R}$,) $\frac{2}{3}c^3-\frac{c^5}{10R^2}$. Tantundem ſcilicet atque Omn. s^2, ſumptis A b $=2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. repertum eſt.

Suntque *Omn.* $as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; hoc eſt (propter $s=\sqrt{vh}$;) *Omn.* $a\sqrt{2hR}$, idem atque ſolidum ex ductu rectarum b V fig. 185. (figuram Arcuum complentium) in reſpectivas π V fig. 179, 185. Adeoque *Omn.* $2as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; eſt iſtiuſmodi ſolidi Duplum. Eſtque tantundem atque *Omn.* $2as$, ſumptis A b $=2c$ arithmetice proportionalibus. Quod § I. repertum eſt.

Poteſtque idem (ſi opus eſt) ſolidum conſiderari tanquam ex planis quæ rectis x r inſiſtant conflatum: Aut etiam ex planis ipſi A b V parallelis; ut in præcedentibus monitum eſt, atque alibi etiam intelligendum erit.

Et *Omn.* $a^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$, (ſumptis v arithmetice proportionalibus,) tantundem eſt atque *Omn.* a^2, ſumptis A b $=2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. itidem repertum eſt. (Eſt autem, idem atque ſolidum ex ductu quadratorum rectarum b V fig. 185. in reſpectivas V ω, per V O diviſas.) Atque hinc reliqua habentur quæ § I. traduntur.

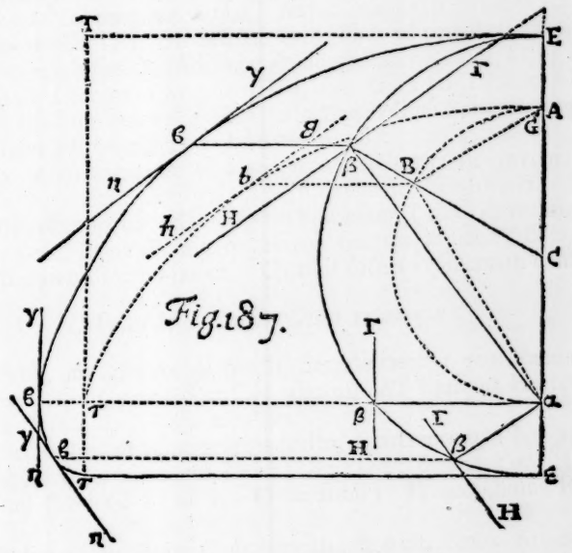
Quodque, de eodem ſolido aliis adhuc planis (puta quæ rectis x r inſiſtant, vel ipſi A b V ſint parallela,) conflando, in præcedentibus monitum eſt; etiam hic locum habet.

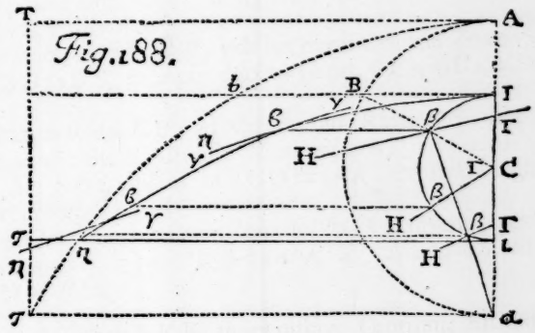
Exhibuimus itaque non modo rectas Cycloidem (Primariam intellige) tangentes; ſed & ipſius Curvæ Semicycloidis, ejuſque partium longitudinem, (exhibendo ſcilicet curvis illis æquales rectas,) ejuſque in data ratione diviſionem: Sed & curvæ ſemicycloidis, partiumque ipſius, centra gravitatis, (per horum ſcilicet à duabus ſaltem in eodem plano rectis, non invicem parallelis, diſtantiam;) earumque momenta reſpectu expoſitarum aliquot rectarum, (quæ ad alias item rectas facile transferentur:) Ungularum item Superficialium, & Superficierum converſione factarum, momentis illis reſpondentium, tum magnitudines, tum momenta, ipſaque Centra gravitatis; exhibitis ſcilicet horum diſtantiis à duobus ſaltem planis, plano Cycloidis ad angulos rectos, non invicem parallelis; dummodo etiam in quo tertio per Ungulæ aciem, ſeu axem converſionis plano ſitum ſit, per § G. prop. 12. conſtet; eo nempe, per converſionis axem quod converſionis arcum biſecat; eoque per aciem Ungulæ, quod biſecat Ungulæ altitudinem; unde (per prop. 26. cap. præced.) ipſa gravitatis Centra determinantur. Quæque de expoſitis dicta ſunt, ad alia transferentur; ut ad propoſitiones præcedentes aliquot oſtenſum eſt.

Atque de Cycloide primaria, hactenus.

Cycloides

Cycloides vero Secundarias quod attinet; *Protractam* ſcilicet & *Contractam*; (quarum illa quidem baſin habet *Majorem*, Hæc *Minorem*, quam eſt Peripheria Circuli Generantis:) Differunt quidem illæ, à Primaria, in hoc potiſſimum; quod recta ϛ β (curvis Semicycloidis, & Semicirculi Generantis circa Cycloidis O. Fig. 176. 187. 188.





axem conſtituti, interjectæ,) ſint reſpectivis Arcubus β I (in protracta,) ſeu β E (in contracta) non quidem Æquales, (ut, in primaria, b B rectæ Arcubus B A,) ſed Proportionales; (Majores quidem in Protracta, Minores in Contracta, & in ea utrobique ratione, quam habet Cycloidis illius vel Semicycloidis Baſis, ad Peripheriam vel Semiperipheriam Circuli generantis;) Æquales autem reſpectivis arcubus iſtius Circuli, cujus Peripheria vel Semiperipheria ſit hujus Cycloidis vel Semicycloidis Baſi æqualis. Puta, recta ϛ β (fig. 176.) ſive quæ Protractam τ ϛ I; ſive quæ Contractam τ ϛ E, ſpectat; æqualis rectæ b B, hoc eſt arcui B A, circuli A B α Genitoris primariæ τ b A; cujus utique Semiperipheria A B α, æquatur Semicycloidis ſuæ Baſi τ α, (adeoque & ipſis τ ι, τ ι,) ſeu promotioni Centri c C. Sunt enim rectæ b B, ϛ β, fig. 176. (ſeu b B, β α fig. 166.) menſura diſtantiæ centri circuli Genitoris ab axe A α, dum reſpectiva puncta b (in Cycloide primaria,) ſeu ϛ (in ſecundariis) motu circuli generantis deſignantur: (ut ex conſtructione patet.) Adeoque, dummodo æquales ſint τ α, τ ι, τ ι, ſeu c C in omnibus eadem; æquales item erunt b B, ϛ β, utpote æqualium eædem partes vel proportionales.

Quæ autem Cycloides ſecundarias (τ ϛ I protractam, vel contractam τ ϛ E,) in dato quovis puncto ϛ, contingunt rectæ γ ϛ ν, ſic habentur. Semicirculo Genitori

Fig. 176, 187, 188. I β ι vel E β ε, circa axem I ι, E ε, conſtituto; Concentricus fiat (circa idem C centrum) A B α, ſemiperipheriam habens A B α æqualem expoſitæ Semicycloidis baſi τ ι, τ ε. Ductaque ς β baſi parallela (circulo genitori circa axem conſtituto occurrens in β, & ſemicycloidi ſuæ in ς,) jungatur β C, peripheriæ A B α occurrens in B; (arcum B A, ipſi β I, vel β E, ſimilem abſcindens.) Atque à peripheriæ A B α puncto axis infimo α, ad peripheriæ genitoris punctum β, ducatur α β recta; & huic ad angulos rectos β Γ. Quæ huic parallela (per aſſignatum Semicycloidis punctum ς) recta ducitur γ ς », Semicycloidem illam in ς contingit. (Excepto caſu, de quo mox dicetur.)

Et quidem ſi intelligatur β punctum, in ipſis E, ε, I, ι; rectæ γ ς » tangentes erunt ipſi c C, vel τ α (Cycloidis primariæ Genitori A b α correſpondentis baſi) parallelæ.

In Cycloide autem Contracta E β τ, ſi β intelligatur in ipſa α τ, (ubi ſcilicet hæc peripheriam E β ε ſecat,) quæ huic reſpondet tangens γ ς » eſt axi E ε parallela; ſi vero β ſit alibi ſupra α τ, tangens γ ς » (ſicut & β Γ recta) axi E ε, occurret ſupra E; ſed infra ε, ſi β ſit alibi infra α τ.

In Cycloide vero Protracta I ς τ, ſi ita ſumi intelligatur, in I β ι peripheria, punctum β, ut α β recta peripheriam illam in β tangat; quod huic reſpondet punctum ς, (cum illud ipſum ſit in quo Cyclois illa recurvari incipit,) tangentem nullam habet, (ſed quæ ipſam Tangere deberet, illam ibidem Secat;) quæ vero ſupra hoc punctum ſunt tangentes, exterius tangunt; quæ infra, interius: Axique I ι (continuato) occurrunt, illæ quidem ſupra I; hæ vero, ſupra ι; (ſaltem non infra:) Rectæque β Γ correſpondentes, ipſi I ι axi occurrunt; illic quidem ſupra C centrum; hic, infra.

Fig. 175. Ipſæ autem Cycloidum harum Curvæ, Curvis ſemiellipſium æquantur: Et partes partibus reſpective ſumptis. Puta, Cycloidis Contractæ Curva τ E τ, Fig. 175. Semiellipſeos curvæ æquatur, cujus Axium alter, quem quidem (ſed, propter curvaturam, contractum,) repræſentat τ A τ curva, ſit = 2 A α + A E, (cujus ordinatim-applicatæ ſint ipſæ b c;) alter vero = 2 A E; quippe cujus ſemiſſis ſit ipſa A E recta.

Cycloidis vero Protractæ curva τ I τ fig. 175. æquatur Curvæ Semiellipſeos, axium habentis alterum (quem, propter curvaturam, protractum repræſentat τ A τ curva,) æqualem 2 A α — A I; (cujus ordinatim-applicatæ ſunt ipſæ b p;) alterum, = 2 A I.

Et quidem tota τ E τ I τ figura (ſumptis A E = A I,) alia non eſt quam ellipſis quædam diſtorta; cujus quidem, ſi axium alter intelligatur τ A τ, ſuam retinens longitudinem, ſemiellipſis ſuperior, (propter curvaturam,) protrahitur; inferior, contrahitur: eique Axi ordinatim-applicatæ ſunt c b p rectæ.

De his autem, quæ Cycloides Secundarias ſpectant, (quarum conſiderationem ultra non proſequimur,) videatur Appendix ad noſtrum de Cycloide Tractatum, una cum Epiſtola eidem ſubjuncta (circa finem:) Ubi hæc fuſius explicantur & demonſtrantur.

SCHOLIUM.

IN propoſitionibus aliquot præcedentibus, quæ Cycloidem ſpectant ejuſque ſolida, vel eo viam ſtruunt; aliquanto fuſior fui: ea præſertim de cauſa, quod in meo *De Cycloide* Tractatu, (Anno 1659. edito,) calculum non ad omnes caſus perduxeram; Sed ad eum ſaltem (alioſque qui ad hunc erant neceſſarii) quem, ex reliquis ſelectum, Anonymus Problematum Propoſitor præ cæteris deſignabat tanquam difficillimum, atque ad quem niſi cæteris intellectis non perveniri poſſe putabatur. Contentus, in reliquis, (ob rationes ibidem traditas,) ſaltem fontes tradidiſſe unde Calculi Geometrici beneficio omnia deducenda erant.

Quanquam enim mihi in animo fuerat, dum ea quæ prodierunt ſub prelo forent, reliquum etiam calculum abſolviſſe, & ſimul edidiſſe: Cum tamen interea temporis (eodem anno) inexpectato prodierit D. *Paſchalii*, ſeu *Dettonvillii*, (Propoſitoris Problematum,) de eadem re tractatus: Potius ducebam; rem totam, prout tunc erat, edere, (calculo ad reliqua nondum abſoluto,) ne viderer ex tractatu ſuo (quod inſinuaturos nonnullos præſentiebam) mea deduxiſſe. Et propterea, ipſa ſchediaſmata ſic edenda placuit, prout ea jam ante cum noſtratibus communicaveram;

nicaveram; quæque nominatim Honoratiſſimus D. Vicecomes *Brounkerus* ſubducto calculo examinaverat (ne forte, in multiplici calculo, quod ſæpe contingit, alicubi error calculi obrepſiſſet,) & comprobaverat, (ne uno quidem calculi lapſu per totum illud opus deprehenſo, jam tum per plures menſes antequam *Dettonvilii* opus prodierit. Sed & totius Methodi ſummam, jam antè per annum integrum, ad D. *Carcavium* ſuum (prout *Dettonvilius* ipſe, tum Anonymus, juſſerat,) *Pariſios* miſeram; ubi & ea viderat *Paſchalius* ipſe; prout ejus ad *Wrennium* noſtrum literæ, diſerte indicant: Ut nullus iniquæ de meis ſuſpicioni locus ſit.

Et quanquam fieri non poſſit, quin, eandem rem tractantibus, nonnulla mihi cum illo fuerint communia: Methodum meam ab illius diverſam eſſe, qui utramque comparaverit, non poterit non videre. Quanto autem mea ſit quam illius expeditior, magiſque directe ad ſcopum tendat; aliorum eſto judicium, ſiqui fuerint qui volent tum juxta mea, tum juxta illius principia, vel calculum univerſum, vel iſtius ſaltem caſus quem ex reliquis ſelegit ille, (de Centro gravitatis Semiſolidi, ex Semicycloidis circa baſin ſuam Semiconverſione facti, determinando,) calculum inſtituere.

Et, ſpeciatim, illam Cycloidis in Segmenta diſtributionem, ubi oſtenditur, non modo Semicycloidem Semicirculi triplam eſſe, (quod pridem innotuit,) ſed & illius Portiones (rectis debito modo abſciſſas) Portionum hujus reſpective triplas eſſe; (puta in fig. 166. $b\beta\tau = 3\,B\alpha B$, $A\alpha\beta b = 3\,A\alpha B$, $d\delta\beta b = 3\,D\alpha B$, & ſic ubique;) quam ego totius proceſſus mei originem facio; cæteraque hinc deduco: Ille ne uſpiam advertit. Et quidem neſciiſſe plane videtur, donec ex ſcriptis meis id reſciverit. Quippe rem tanti in hoc negotio momenti, non putandus eſt, modo ſciverit, reticuiſſe velle. Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli; quamquam jam tum per annos plus quam quadraginta in rem illam Cycloidis, intenti fuerant ex illis ſummi viri, quam ego tum primum (ad illud provocatus) conſiderandam ſuſcepi; neſcius alia jam tum ab aliis inventa fuiſſe, quam quod apud *Torricellium* & *Schotenium* traditum noverim, Cycloidis planum circuli triplum eſſe; Methodumque ibidem tradi, pro Tangentibus ducendis. Fig. 166.

Atque hinc eſſe judico; quod ille *Figuram Sinuum Verſorum*, nuſquam in auxilium advocat; ſed ea longis ambagibus ex *Sinuum Rectorum* doctrina petitum it, quæ ex Sinibus Verſis multo promptius fuiſſent depromenda.

Curvamque figuræ iſti adjacentem A d τ, fig. 170. (quam *Ellipſin Expanſam* dicimus) non omnino conſideraſſe videtur: Quamquam enim quæ ipſi eſt *Cycloidis Socia*, non alia ſit quam hujus Curvæ pars dimidia, ut d A; (quod in ſubjunctis tractatui *de Cycloide*, pag. 557. demonſtro;) illam tamen ex alia plane origine deducit, unde hæc tota non dedncetur. Quam enim ille *Dimidiam*, ductu Circini in ſuperficie Cylindri, (ea apertura quæ diametro Baſis Cylindri æqualis ſit,) deſcriptam vult: Hoc eſt, (quippe hoc tantundem valet) communi *Sphæræ atque Cylindri* ſectione; (poſito Sphæræ Centro in Cylindri ſuperficie; ejuſque Radio, hujus Baſis Diametro æquali:) Nos, *Totam*, ex communi *Cylindri & Plani* ſectione deducimus: (Utrique interim abſumptam Cylindri ſuperficiem in Planum expandentes.) Quod illum minime advertiſſe exiſtimo.

Hinc eſt, quod, in propoſitis ſuis, ſelegit ille caſum illum, ut difficillimum, qui Semiſolidum circa Semicycloidis Baſin ſpectat; (quem, niſi perſpectis quæ Semiſolidum circa Axem ſpectant, ſolutum iri poſſe non putaverat; nec quidem, per ejus methodum, abſque illis ſolvi poteſt:) Qui tamen (utut ille hoc neſciverit) longe facilior eſt, quam caſus ſimilis de Semiſolido circa Axem. Quod ex traditis noſtris, propter illam quam diximus Semicycloidis in ſua Segmenta, Segmentis Semicirculi reſpondentia, diſtributionem, ſatis liquet. Verum cum ille hanc diſtributionem neſciverit; non poterat eo pervenire, niſi ope Semiſolidi circa Axem. Adeoque, longo circuitu & perplexo admodum calculo eo tandem tendere neceſſe habet, quo nos recta pervenimus.

Hinc etiam eſt (ni fallor) quod in Problematis primitus propoſitis, illud Semicycloidis Segmentum (cum ſuis Solidis) expendendum proponat, quod recta Baſi parallela abſcinditur, (ut b V A, fig. 166.) potius quam quod recta abſcindatur quæ parallela ſit Axi. Utut enim, diſtributionem hanc intelligentibus, poſterioris hujus conſideratio fuiſſet non minus intricata, nedum magis; illi tamen, qui diſtributionem eam nondum perſpectam habuit, prior illa habita eſt intricatior; & quidem, per methodum ab illo traditam, difficilius abſolvetur.

Quæ omnia, quidem, manifesta sunt indicia, distributionem hanc (& quidem pulcherrimam) ipsi minime fuisse perspectam.

Quod quidem eousque verum est, ut siquis velit, secundum ipsius methodi leges, (quod nos in nostra fecimus,) casuum omnino omnium calculum aggredi, eorum præsertim qui Semisolidi circa τα (semicycloidis basin,) vel (huic parallelam) b V, centra gravitatis spectant; (expertus loquor;) rem adeo perplexam reperiet, ut mirum sit ni, laboris pertæsus, in medio itinere lassus desistat. Quod in causa fuisse suspicor, cur ille (utut id pollicitus videretur) ad calculum non revocaverit casus omnes à se propositos; sed, unius tantum numeros exhibuisse contentus (suppressis interim quibus huc pervenerat vestigiis) de reliquis altum habet silentium.

Sed neque noverat ille (neque ex suis alii) Cycloidis curvæ æqualem rectam exhibere, aut in data ratione curvam illam secare; antequam id ex Anglia resciverit. Unde factum erat quod Posteriora Quæsita, quæ Cycloidis Curvam hujusque segmenta spectant; & Superficies illius, vel segmentorum suorum, conversione factas; harumque omnium Centra gravitatis; non fuerint una cum Prioribus proposita; sed tum demum postea quam ex *Wrennii* nostri literis indicatum fuerat, quo pacto possint huic curvæ, suisque partibus, æquales Rectæ exhiberi. Quod ex illius ad *Wrennium* literis abunde liquet.

Quæ omnia non eo animo dicta sunt, ut inventis suis derogatum eam: Sed ut nobis quæ nostra sunt asseram, & reapse ostendam, etiam omnia illa non minus esse (ne dicam *magis*) methodis nostris pervia, quam suis; nequis superesse possit iniquis suspicionibus locus, nedum malignis insinuationibus.

Quod autem hac in re, præter ea quæ pridem edidimus, jam superadditum habetur: Non aliud est (rem ipsam quod spectat) quam calculi, pridem inchoati, continuatio. Non enim alia hic adhibemus principia, vel methodi leges alias, quam quæ in illo *de Cycloide* Tractatu passim adhibemus. Sed & quæ illic habentur, fere deprompta sunt ex principiis meis, in *Arithmetica Infinitorum* pridem traditis, Anno 1656. editis; quæ & in *Commercio Epistolico*, Anno 1658. edito (Epist. 15, & 16, hujusque appendice,) ad Centra gravitatis accommodaveram. Quippe hæc omnia vix aliud sunt, quam istius Methodi Universalis, ad particulares casus accommodatio.

Postquam vero ea quæ præcesserunt omnia, ad calculum uti hic habentur perduxeram; eaque per complures menses Prelo subjecta fuerant; & magna pars impressa: incidi in *Laloveræ* de Cycloide tractatum; ante aliquot annos Tolosæ editum, sed (uti audio) nonnisi nuperrime in Angliam allatum. Qui varios de Cycloide ejusque Solidis, & horum Centris gravitatis, Casus, ad calculum redegit, sua methodo. Hanc ego, quamvis eam hactenus totam examinare nondum vacaverit; eaque, prima saltem fronte, non parum intricata mihi videatur: Sanam tamen esse, saltem quod summam rei spectat, existimo. Eo potissimum, quod calculi sui numeros (saltem in plerisque quos contuli casibus,) cum nostris consentire reperio. Sicubi vero dissentiant, (quod in paucis fit,) id Calculi potius alicui lapsui fortuito (qui condonandus erit) quam Methodi vitio, imputandum videtur. Quod & de nostris intellectum esto, sicubi irrepserit (quod facile fieri possit, & quidem ægre cavebitur, in tam multiplici calculo,) calculi lapsus aliquis, (nedum calami, aut etiam Preli.) Quippe, Methodum ipsam meam, satis ubique demonstratam esse, satis securus sum: Sed neque de ipso Calculo multum metuo.

Quod autem ille multus sit in conquerendo, quasi cum eo minus candide actum fuerit: Ego quidem non miror; ut qui sæpius eadem ab eisdem hominibus expertus fuerim, de quibus hic conqueritur. Sed & jam, ante nos, Cartesius (ut in ipsius editis Epistolis passim liquet) eadem sæpius conquestus est. Et Torricellium (ne plures memorem) pari modo habitum fuisse, ex ea liquet Apologia quam pro illo sive *Carolus Dati*, sive quisquis alius, sub ficto nomine *Timauri Antiatis*, edidit Florentiæ, Anno 1663. Lingua Italica. Sunt utique qui Problemata sua, *Totius Europæ Mathematicis* solvenda exponunt; ne dicam venditant, jactitantve; (quasi quidem huic soli negotio cæteris vacaret, ut illorum pensa absolverent:) Quæ quidem si negligimus; Insultant: Si solvimus; Irascuntur, calumniantur, opprobriis onerant, insimulant plagii; (quasi quidem ipsi soli sapiant, atque impossibile sit ut alii, nisi ipsorum scriniis expilatis, quicquam in Mathematicis

ticis arduum præstare possint.) Quod fecit ut ego jam per plures annos tantum non religiose abstinuerim, utut aliquoties publice provocatus, & lacessitus, nequid hujusmodi commercii cum illis ultra haberem, apud quos nec impune licet eloqui, nec tacere: nec nisi nuperrime, nimis lacessitus, silentia rupi.

Quid autem rei sit, cur ibi *Dettonvilium* à *Paschalio* alium esse, insimulatum ire videantur, (quod & *Laloveræ* observat,) ego non intelligo; quem ego pro eodem semper habui, atque etiamnum habeo. Et quidem, eundem esse, *Laloveræ* (in tractatu suo) iis indiciis ostendit, ut de eo non sit cur quisquam dubitet, saltem donec alius (à *Paschalio*) *Dettonvilius* reperiri possit. Et quidem ex *Paschalii* ad *Wrennium* literis, (jam antequam Problematum Propositor *Dettonvilii* nomen professus fuerat,) non erat conjectu difficile, ipsum fuisse istorum Problematum Authorem: Et quidem, utut D. *Carcavius* in suis ad me literis, quasi rem dissimulaturus, *Dettonvillium* à *Paschalio* distinguat; (quasi non idem forent;) in D. *Hugenii* tamen ad me literis, (per quem D. *Carcavius* ad me transmittenda curavit aliquot *Dettonvilii* exemplaria, ad alios aliquot distribuenda; quem itaque putaverim tum *Carcavii* mentem, tum Authorem libri cognovisse;) Junii 9. 1659. *Hagæ* datis, sic scribitur; *Ad postremas tuas nihil hactenus rescripsi, eo quod ab illo jam tempore expectabam libros hosce* Dettonvillii *seu* Paschalii, *quos mihi ad te curandos commissum iri noveram. Quaterna hæc exemplaria ad te uti mitterem rogat* Carcavius; *te vero ut singula ex his, Viris Clar.* Wrennio, Wardo, & Hobbio, *tradi cures. Oratque ut examinato* Dettonvillii *opere sententiam suam quisque ipsi edere velit.* Et quidem *Wrennius* noster, Parisiis huc ante triennium (Anno 160.) reversus, (ubi moram aliquam posuerat,) *Paschalium*, dixit, istius libri Authorem Parisiis habitum esse, nemine (quantum ille observaverat) vel reclamante vel dubitante. Sin fallimur omnes, (quod vix crediderim:) Siquando alius à *Paschalio* prodiverit *Dettonvillius*; mihi certe perinde erit: (Quippe hic, mihi, neque seritur neque metitur:) Ego saltem hactenus, alium non novi.

Laloveræ Numeros quos cum meis me Contulisse dixi; illi sunt qui habentur, ad octo Problemata, prop. 25. lib. 3. qui (ad terminos meos reducti) cum nostris consentiunt omnes.

Item, qui habentur, ad octo Problemata prop. 36. lib. 4. qui omnes item cum meis consentiunt; nisi quod in octavo Problemate dissentiant. Quippe quam assignat ille distantiam (à conversionis axe) Centri gravitatis Semisolidi, ex Semiconversione superioris semissis semicycloidis AdC (in mea fig. 166.) circa Axem AC; esset (ad terminos nostros reducta,) $\frac{6RP^3+144R^2P^2+216R^3P-512R^4}{9P^3+144RP^2-240R^2P}$. At vero, juxta meos numeros, (per § O, P. prop 21. hujus,) Ungulæ Segmenti A b V, aciem habentis A V seu A α, distantia centri gravitatis ab A V, seu A α, (hoc est, à perpendiculari plano super A α erecto,) ubicunque sumatur V, sive supra C, sive infra C, sive (quem ille solum casum considerat) in ipso C centro; est

$$\frac{\begin{array}{l}87aR^3-87sR^3-96avR^2-9svR^2-12a^3R+36a^2sR+12as^2R+2s^3R+24a^3v\\+36a^2sv+24as^2v+6s^3v\end{array}}{-48vR^2-18a^2R+36asR+6s^2R+36a^2v+36asv+12s^2v};$$

Hoc est, in præsenti casu, (propter $a=\frac{1}{4}P$, & $s=v=R$,)

$\frac{3RP^3+72R^2P^2+108R^3P-1408R^4}{18RP^2+288R^2P-480R^3}$; (ut facta Reductione patebit.) Adeoque in Semisolido (cujus distantia est ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P, ut sæpius ante ostensum est,) erit $\frac{6RP^3+144R^2P^2+216R^3P-2816R^4}{9P^3+144RP^2-240R^2P}$. Quod à numeris nostris in hoc dissentit; quod habeat ille $-512R^4$, pro $-2816R^4$. Siquis autem dubitaverit, ubi numeri discrepant, utrum penes illius numeros, an penes meos, erratum fuerit; errorem penes illum esse, etiam absque operosa disquisitione, facile constabit. Quippe si ad numeros absolutos (quam proxime) fiat reductio; reperietur distantia centri gravitatis istius Semisolidi, ab A α, secundum meum calculum, quasi $\frac{2}{7}$ totius distantiæ $\alpha\tau$; at secundum ejus, quasi $\frac{2}{5}$; quam nimiam esse, qui figuram istius solidi mente conceperit, minime dubitabit: Est enim tanta fere quanta si esset Semicylindrus, cujus distantia saltem minor esset

quam $\frac{4}{9}$; quæ nonnisi paulo major est quam $\frac{2}{5}$, hoc est $\frac{4}{10}$: Adeoque hanc nimiam esse, non erit dubitandum.

Denique; qui habentur ad octo Problemata, suæ prop. 59. lib. 5. qui cum nostris item consentiunt omnes; excepto octavo Problemate. Quod est de distantia centri gravitatis (à conversionis Axe $A\alpha$) superficiei factæ ex semiconversione curvæ $A\tau$ (in mea fig. 166.) circa $A\alpha$. Est enim, secundum ipsius numeros, (ad meos terminos reductos,) $\frac{18RP^2+48R^2P-544R^3}{9P^2-24RP}$; quæ ad numeros absolutos reducta, major erit quam $\frac{2}{3}$ totius $\alpha\tau$; quam nimiam esse, certum est; (quippe quæ major est quam si esset superficies semicylindrica, in qua distantia minor esset quam $\frac{2}{3}$, imo quam, $\frac{4}{9}$.) Est autem, juxta numeros meos (§ I. M prop. 22.) Centri gravitatis Ungulæ ipsi $A\tau$ insistentis, aciem habentis $A\alpha$, distantia ab $A\alpha$, (hoc est, à perpendiculari plano huic insistente,) $\frac{45P^2-1024R^2}{90P-240R}$; adeoque in semisolido correspondente, distantia à conversionis axe $A\alpha$, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; seu $4R$ ad P;) $\frac{90RP^2-2048R^3}{45P^2-120RP}$; quæ, ad numeros absolutos reducta, minor erit quam $\frac{1}{2}$, imo quam $\frac{8}{17}$, (sed major quam $\frac{7}{15}$,) totius $\alpha\tau$.

Verum cum numeri ejus pro casibus illis (nunc unico, nunc duobus,) quos ille expendit; (nempe, qui vel totam $A\tau\alpha$, vel superiorem semissem AdC spectant;) cum nostris universalibus (casum quemlibet indifferenter respicientibus;) in cæteris conveniant: non in ipsius Methodi vitium, sed in calculi lapsum aliquem, rejiciendus erit hic in paucis dissensus.

Inveniet autem, in his meis, Lector, eandem non raro quantitatem pluribus modis (sed qui sint ἰσοδύναμοι) designatam. Quod ideo factum est, quoniam nunc hic, nunc ille modus, (ubi ad usum reducendus erit,) accommodatior videri possit; adeoque Lectoris commodo consultum est, ut (reductionibus à me jam factis) eum seligat designandi modum qui ipsi gratior videbitur, vel suis usibus accommodatior. Quinimo & alii plures esse possunt modi (quos ego ne nimius essem non apposui) easdem quantitates designandi, prout quis alias atque alias reductiones instituere velit.

Sed & passim deprehendet, me easdem quantitates pluribus methodis investigasse, atque ad calculum perduxisse. Quod factum est, tum ut Methodos illas plures edocerem; (adeoque ostenderem quam abunde sufficiant principia nostra ad hæc quæsita multis modis exhibenda:) tum etiam ut de calculo rite adhibito magis securus essem, quam si unico modo illum exquisivissem. Quam enim, in multiplici calculo, lapsus in proclivi sit, nemini vel parum exercitato ignotum esse potest. Ideoque, quo caverentur hujusmodi lapsus, caute prospiciendum putavi, ut ea fere omnia, in quibus saltem siquis foret error idem etiam alia inde dependentia late inficeret, pluribus methodis ad calculum redigerentur; ut plurium methodorum consensu (quæ sibi mutuo Probationum seu Examinum vices subirent) confirmatior essem de calculo rite instituto. Quod fecit, ut vel de ipso Calculo, tanquam omnino recte instituto, confirmatior fuerim, etiam ante cognitum (quod jam nuperrime, post finita omnia contingit) *Laloveræ* cum nostris consensum.

His autem de Cycloide, fusius (ut dictum est) explicatis; reliqua quæ sequuntur brevius exequemur: Ne si omnia particulatim persequi velim, in immensum excresceret hoc Caput; quod jamjam multo ultra quam speraveram excrevit.

PROP.

PROP. XXIII.

Superficies curva Cylindri recti, ejuſve Portio duabus rectis lineis interjecta, æquatur Parallelogrammo rectangulo æque alto, cujus Baſis ſit æqualis peripheriæ baſis Cylindri, ejuſve reſpectivæ portioni eiſdem rectis lineis interjectæ. A.

Idemque obtinet in Superficie iſtiuſmodi Solidi cujuſlibet Columnaris recti, quamvis baſin habeat non circularem, ſed Ellipticam, Parabolicam, Hyperbolicam, aliamve ſive rectilineam ſive curvilineam quamlibet. B.

Centrum gravitatis eſt in medio rectæ conjungentis centra gravitatis peripheriarum (ſive totalium ſive partialium, prout caſus contigerit,) oppoſitarum baſium. C.

Adeoque (propter arcus circularis centrum gravitatis datum) datur Superficiei iſtius Cylindricæ (perfectæ vel imperfectæ) centrum gravitatis. D.

Idemque in aliis illis ſuperficiebus columnaribus dabitur, ſi dentur reſpectiva curvarum baſium Centra gravitatis. E.

Datur etiam expoſitæ ſuperficialis Ungulæ Cylindricæ, tum Magnitudo, tum Centrum gravitatis. F. H.

Idemque (datis Curvarum, ut dictum eſt, Longitudinibus & Centris gravitatis) dabitur in reliquis ſuperficiebus Columnaribus. G, I.

Quodque de Ungulis ſuperficialibus dictum eſt; idem ad quaſvis in ſuperficiebus illis figuras, planorum ſectionibus terminatas accommodabitur. K, L, M.

Quæque de Cylindri Recti, Rective Solidi Columnaris, ſuperficie dicta ſunt; eadem ad Scalenorum ſuperficies transferentur. N.

Eſtque Superficies Cylindri Recti, ad Superficiem Scaleni, ejuſdem Lateris, & ſuper eadem Baſe; ut eſt Perimeter Baſis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri ſeu Axi ſit ad angulos rectos; Quod & de partibus reſpectivis intelligendum erit. O.

Idemque non minus obtinet in aliis Solidis Columnaribus, cujuſcunque baſis. P.

Ungulæque, & aliæ figuræ ſuperficiales modo dictæ, quæ in erectis exigendæ ſunt ad Baſis Perimetrum; eædem, in Scalenis, ſimiliter exigendæ ſunt ad ſectionem illam quæ Recta ſit ad Scaleni Axem. Q.

INtelligantur enim, fig. 172. ſuper baſis Cylindri recti Peripheria, ejuſve portione aliqua, $\alpha\Delta\tau$, in ſingulis punctis (æqualiter ab invicem diſtitis) erigi perpendiculares rectæ, ut $\Delta\delta$, curvam Cylindri ſuperficiem complentes; (juxta Def. 1. Cap. 4. hujus:) quæ, propter omnes ad baſin angulos æquales rectos, totidem parallelogramma rectangula (æque alta invicem & æque lata) repræſentabunt, ſuperficiem illam curvam complentia; quæ, ſi in planum expandi intelligantur, totidem rectangulis rectilineis congruunt, complentibus rectangulum rectilineum ejuſdem altitudinis, cujus baſis æquetur ipſi $\alpha\Delta\tau$ curvæ in rectam expanſæ. A. Fig. 172

Idemque ſimiliter oſtenderetur, etiamſi $\alpha\Delta\tau$ curva, non eſſet arcus Circularis, ſed alia quævis Curva. B.

Hujus autem ſuperficiei curvæ Cylindricæ, vel Columnaris, Centrum gravitatis eſſe in media longitudine, oſtenſum eſt, ad prop. 2. hujus; atque in ea recta quæ oppoſitarum C.

Fig. 172. oppoſitarum baſium ſuperficiei iſtius Centra gravitatis conjungit, per prop. 5. hujus: Ergo, in hujus punćto medio.

D. Adeoque, propter datum arcus circularis centrum gravitatis, per 14 hujus; dabitur, non tantum totius ſuperficiei Curvæ Cylindri rećti, ſed & portionis cujuſvis (duabus rećtis ad baſin perpendicularibus interjećtæ) Centrum gravitatis.

E. Idemque ſimiliter dabitur, in alia ſuperficie columnari, etiamſi $\alpha\Delta\tau$ curva, non ſit arcus circuli, ſed alia quævis curva, dummodo hujus curvæ centrum gravitatis notum ſit.

F. Si vero ex hujus Cylindri rećti ſuperficie curva, plano quovis $T\varkappa AT$ utcunque oblique poſito, abſcindi intelligatur ſuperficialis Ungula $T\varkappa A\delta$; (ubicunque contingat TA, Ungulæ acies; non minus quam ſi ſit Diameter Circuli $T\delta A$:) propter datum inclinationis angulum υ a β, arcuſque Centrum gravitatis; dabitur Ungulæ altitudo ſuper centrum illud, quæ in arcus longitudinem dućta dat ſuperficialis iſtius Ungulæ Aream; per prop. 11. hujus. Quod non minus valet de Ungula tota $T\varkappa A\delta$, quam de partialibus $A\beta\upsilon$, $\beta\upsilon\varkappa\delta$, &c. Nam & hic ob data arcuum $A\beta$, $\beta\delta$, &c. Centra gravitatis, adeoque eorum ab acie AT diſtantias, & angulum inclinationis, adeoque altitudinem ſuper gravitatis Centra; habebitur area; Dućta altitudine illa in curvæ longitudinem.

G. Atque hæc obtinent, quæcunque ſit $A\delta T$ curva (non minus quam ſi ſit arcus circularis,) cujus & Longitudo & Centrum gravitatis nota intelligantur.

H. Habitis autem, eo quo dićtum eſt modo, Ungularum magnitudinibus; earundem Momenta ea methodo inveſtigari poſſunt, quam, ex prop. 10. petitam, in ſuperioribus ſæpius adhibuimus: Nempe, omnium arcuum (Ungulam ſuperficialem complentium) Momenta reſpećtu expoſitæ rećtæ, (quæ, propter cognita curvarum tum longitudines, tum Centra gravitatis, adeoque ipſorum ab expoſita rećta, planove per illam perpendiculari, diſtantias, habentur,) ſunt ipſum Ungulæ Momentum reſpećtu iſtius rećtæ; quod, per magnitudinem diviſum, exhibet diſtantiam Centri gravitatis ab illo perpendiculari plano. Atque hoc ſi reſpećtu plurium rećtarum (quæ non ſint ad invicem parallelæ) fiat; habebitur ipſum gravitatis Centrum.

Vel etiam, (per § W. prop. 13. hujus) haberi poſſunt Ungularum iſtiuſmodi in ſuperficie Cylindri rećti, ſaltem quarum acies eſt Circuli diameter, Centrum gravitatis; & Cylindracearum ſuperficierum (parallelis rećtis interjećtarum) Centra dari, modo oſtenſum eſt, § C, D, hujus: Atque in harum aliquas (addendo vel ſubducendo, prout opus fuerit,) reſolvi poteſt iſtiuſmodi quævis Ungula ſuperficialis Cylindri rećti, (ut exemplis mox proferendis oſtendetur:) Dabitur igitur, (per prop. 27. cap. præced.) iſtiuſmodi cujuſvis Ungulæ Centrum gravitatis.

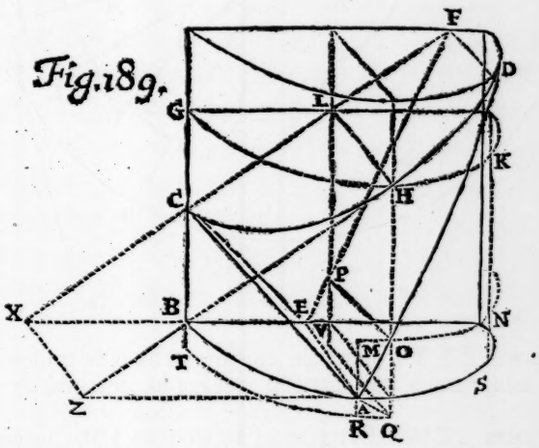
I. Hæc autem, quo ad alias curvas transferantur, opus erit, ut tum ipſius $A\delta T$, quæcunque fuerit curva, tum partium ipſius quæ rećtis puta ipſi AT parallelis (ſi nempe momentum reſpećtu hujus inquiratur) æqualiter ab invicem diſſitis abſcinduntur, tum longitudines, tum Centra gravitatis, vel (quæ ex his reſultant) momenta habeantur. Quippe, his habitis, momenta ſimiliter exquirentur (per prop. 10. hujus) atque ſi eſſent arcus circulares.

K. Quod autem de Ungulis ſuperficialibus traditum eſt; idem ad quaſvis in ea ſu-
Fig. 189. perficie figuras, planorum utcunque poſitorum interſećtionibus (cum ea curva ſuperficie) terminatas, accommodabitur. Nam, ut figuræ quævis in plano rećtilineæ reſolvi poſſunt in rećtangula triangula & parallelogramma; eodem fere modo figuræ quælibet (in rećti Cylindri vel Columnaris ſolidi ſuperficie) planorum ſećtionibus factæ, reſolvi poſſunt in ſuperficiales Ungulas & Cylindraceas ſuperficies rećtangulas. Adeoque ex partialium magnitudinibus habitis, habebitur (addendo, & ſubducendo, ut caſus poſtulaverit) magnitudo expoſitæ: Atque, ex illarum habitis Centris gravitatis, habebitur hujus, per prop. 27. cap. præced.

L. Exempli gratia; Sit iſtiuſmodi Figura expoſita (in ſuperficie Cylindri rećti) planis terminata, CAD, (fig. 189.) Atque demiſſis (ad Cylindri baſin BAS) rećtis CB, DS; erit expoſita CAD figura, eadem atque Ungula ſuperficialis CBASD, demptis CAB, & DAS.

Sed, propter dati arcus BAS Centrum gravitatis datum (per prop. 14. hujus,) adeoque ipſius diſtantiam à data Ungulæ acie (ſeu communi baſis BAS, planique Ungulam abſcindentibus CDF, ſećtione) XZ; & conſequenter (propter

ter datum etiam Inclinationis Planorum angulum FXB) Longitudinem rectæ, quæ arcus Centro gravitatis insistit, rectis in superficie curva Cylindri parallelæ: Fig. 189.



Datur etiam (per prop. 11. hujus) superficialis ungulæ CBASD area seu magnitudo.

Et similiter; propter datum arcus BA Centrum gravitatis; Ungulæque Aciem EA (quæ sive sit ipsi XZ parallela, sive secus, perinde est;) Angulumque Inclinationis CEB: Dabitur superficialis Ungulæ CAB magnitudo.

Et, simili processu, dabitur magnitudo superficialis Ungulæ DAS.

Datur ergo, expositæ Figuræ CAD = CBASD — CAB — DAS magnitudo. (Et similiter, mutatis mutandis, in expositis Figuris istiusmodi aliis.) Quod ostendendum erat.

(Idemque pariter obtinebit, etiamsi curva BAS non sit arcus circularis, sed alia quævis curva, dummodo (ut supra dictum est) tum ipsius, tum partium sui BA, AS, habeantur longitudines & Centra gravitatis.)

Porro; quo habeatur expositæ figuræ CAD (juxta tenorem § W. prop. 13. hujus) Centrum gravitatis; resolvenda erit ea, non tantum in Ungulas CBASD, CAB, DAS; sed & hæ porro ita sunt resolvendæ, ut per superficies Cylindraceas rectangulas, atque ejusmodi ungulas quæ acies habeant in diametro Circuli (additas demptasque prout res postulaverit,) exhiberi possint. M.

Puta; cum Ungulæ CBASD acies XZ non sit in diametro circuli BAS, (sed extra illam in eodem plano:) ducta intelligatur in secante Plano CFD, per L punctum in Axe Cylindri, recta LH, ipsi XZ parallela; quæ curvæ CD occurrat in H: Atque, per H, circulus GHK, centro L descriptus, basibus Cylindri parallelus. Adeoque fient superficiales Ungulæ CHG, DHK, communem aciem habentes LH in circuli Diametro. Quarum si auferatur illa, & hæc addatur, superficiei Cylindraceæ rectangulæ GBASK; habetur Ungula CBASD. Habitis itaque illarum tum Magnitudinibus, tum Centris gravitatis (nempe Ungularum CHG, DHK, per § W. prop. 13. & Cylindraceæ GBASK per § C, D, hujus;) habebitur etiam (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis ipsius CBASD = GBASK + DHK — CHG.

Similiter ostendetur (mutatis mutandis) Ungulam DAS, componi ex Cylindracea AMNS, addita Ungula DON, dempta AOM, quarum Ungularum communis acies OP est in diametro Circuli. Habebitur itaque Centrum gravitatis ipsius DAS = AMNS + DON — AOM.

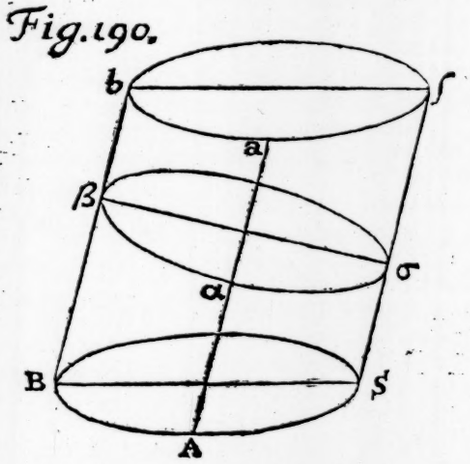
Item, Ungulam CAB haberi, demptis, ex Ungula CQT, tum Ungula AQR, (quarum communis acies QV est in circuli diametro,) tum Cylindracea BART. Adeoque habebitur Centrum gravitatis ipsius CAB = CQT — AQR — BART.

Habebitur itaque (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis figuræ expositæ CAD = CBASD — DAS — CAB. (Et similiter in aliis figuris, mutatis mutandis.) Quod erat ostendendum.

Fig. 189. Non autem erat neceſſe, in auxilium advocare § W. prop. 13. ſed per methodum illam (ſæpius adhibitam) ex prop. 10. hujus petitam, abſolvi poſſet negotium: Eademque rem abſolvet in aliis (ut dictum eſt) Superficiebus Columnaribus, dummodo Curva baſis, parteſque ſuæ, nota habeant tum Magnitudines tum Centra gravitatis.

N. Si vero expoſita ſit Cylindri (non Recti, ſed) Scaleni ſuperficies; ut in fig. 190. Quæ ad ſingula Perimetri baſis puncta (æqualiter ab invicem diſſita) obli-

Fig. 190.



que cadunt rectæ (axi Cylindri parallelæ) ſuperficiem curvam cylindraceam complentes; neque habebunt ab invicem eandem quam reſpectiva baſis puncta diſtantiam, (ſed minorem, propter obliqua quæ repræſentant parallelogramma, quorum latitudo minor eſt quam eſt baſium longitudo;) neque diſtantias invicem æquales, (propter inæqualem inclinationem ad baſis perimetrum.) Utut enim habeant illæ ad planum baſis Cylindri eandem omnes inclinationem; non tamen eandem habent omnes ad curvam baſis perimetrum; (quod, ſi opus eſſet, facile eſt demonſtratu; ſed, conſideranti, clarius per ſe liquebit, quam ut id ſit opus.) Quo fit, ut Parallelogramma, quæ repræſentant rectæ illæ, ſuperficiem complentia, neque Rectangula reputanda ſint, ſed neque æqualiter inclinata; (adeoque nec æquelata, utut æquales baſes habentia.)

Atque ob harum conſiderationum priorem, evenit, quod Curva Superficies Cylindri Scaleni non (ut Recti) æquetur facto ex Cylindri latere in perimetrum baſis (hoc eſt, in aggregatum baſium omnium Parallelogrammorum quæ repræſentent illæ rectæ) ducto: Sed minor eo ſit. Quæ conſideratio communis etiam eſt Cylindri ſolido; quod minus eſt, quam factum ex latere Cylindri ſcaleni in baſis planum ducto, (hoc eſt, in aggregatum omnium baſium Priſmatum, quæ repræſentant rectæ, ſolidum juxta def. 4. complentes;) quoniam Priſmata ſolidum complentia, non ſunt (ut in Cylindro recto) Recta, ſed Scalena. Sed, cum ſint æqualiter inclinata, (eandem utique ad planum baſis inclinationem habent, quam Axis Cylindri,) in eadem ratione minuuntur (propter inclinationem) omnia; nempe, in ea ratione quam habet Cylindri Altitudo ad Latus ſuum. Adeoque Cylindri Solidum æquale fit facto ex (non Latere, ut in Cylindro Recto, ſed) Altitudine Cylindri in Baſem ducta.

Ob poſteriorem vero conſiderationem, (quod Rectæ in ſuperficie Cylindri Scaleni non ſint, ad baſis Perimetrum, Æqualiter inclinatæ,) evenit, quod non (ut in Solido fiebat) una aliqua recta, quæ ſit communis omnium Parallelogrammorum Altitudo, pro Latere ſubſtituenda ſit, in Baſis Perimetrum ducenda, quo habeatur Area; ſed, pro aliis atque aliis Perimetri punctis, aliæ atque aliæ rectæ; propter variatam in ſingulis punctis inclinationem ad Baſis Perimetrum, adeoque Parallelogrammorum Altitudinem.

Huic itaque quo ſubveniatur incommodo; Si exponatur conſideranda (fig. 190.) Cylindri Scaleni b B S s ſuperficies curva; neglectis baſibus B A S, b a s, (quæ

ſunt

ſunt ad Cylindri latus b B oblique poſitæ :) Sumatur planum aliud, quod ſit ad Cylindri Latus (vel Axem) rectum, ſectionem faciens βασ Ellipſin (dummodo B A S ſit Circulus ;) ad quam itaque curvam βασ, rectæ omnes B b, A a, &c. ſuperficiem complentes, non minus Rectæ ſunt, quam ſunt in Cylindro Recto Latera ad perimetrum baſis. Et, conſequenter, ſi per ſingula curvæ βασ puncta, æqualibus ab invicem in eadem curva diſtantiis remota, tranſire intelligantur totidem æquales rectæ B β b, A α a, &c. ſuperficiem complentes ; repræſentabunt illæ (non minus quam quæ ſunt in ſuperficie Cylindri recti) totidem Parallelogramma Rectangula æque alta, & æque lata, quorum omnium Baſes ſimul ſumptæ complent ipſam βασ curvam, & communis Altitudo eſt ipſum Cylindri Latus B β b ; quæ itaque in curvam totam βασβ ducta, exhibet integram Cylindri ſuperficiem curvam ; eademque in curvæ portionem quamlibet ut βα ducta, exhibet correſpondentem ſuperficiei portionem B A a b. Fig. 190.

Hinc ſequitur ; Superficiem Cylindri Recti, ad ſuperficiem Scaleni, ejuſdem Lateris & ſuper eandem Baſin, ita eſſe, ut eſt Perimeter Baſis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri vel Axi ſit ad angulos rectos ; puta, ut B A S, ad βασ : Atque illius portionem, ad reſpectivam portionem hujus, ut eſt ea baſis portio cui inſiſtit, ad reſpectivam ſectionis rectæ portionem ; puta, ut B A ad βα, ſic quæ portioni B A inſiſtit in Cylindro Recto, ad eam quæ eidem inſiſtit in Scaleno ſuperficiem, idem Cylindri Latus habentem. O.

Idemque obtinet, ob eandem cauſam, non tantum in Cylindris veris, qui baſin habent Circularem ; ſed & Solidis quibuſvis Columnaribus. Nempe, quæcunque ſit B A S curva quæ baſis ſit Solidi Scaleni pro ea ſubſtituenda erit βασ, quam exhibet ſectionem Planum illud quod eſt Lateri, vel Axi, ad Angulos rectos. Quæ quidem Ellipſis erit, ſi B A S ſit Circulus ; ſi vero B A S Ellipſis ſit, erit βασ vel alia Ellipſeos ſpecies, vel etiam Circulus. Et ſimiliter, quæcunque fuerit curva B A S ; pro ea ſubſtituenda erit correſpondens βασ, prout cujuſque curvæ ratio poſtulaverit. P.

Quæ autem, de Ungulis, aliiſve figuris in Recti Cylindri ſeu Solidi Columnaris ſuperficie, ad Baſis Perimetrum B A S exigendis, dicta ſunt : Eadem omnia in Scalenis, ad Perimetrum Sectionis rectæ βασ accommodanda erunt. Quippe Solidum illud, (ſive Cylindrus ſit, ſive aliud quodvis Solidum Columnare,) quod ad Baſin B A S Scalenum eſt, idem ad baſin βασ Rectum erit. Q.

PROP. XXIV.

Figuræ cujuſvis in Superficie Sphæræ, Planorum quorumvis cum Sphærica ſuperficie ſectionibus, (hoc eſt circulorum quorumvis ſive maximorum ſive minorum arcubus) terminatæ ; Magnitudo datur. A, F.

Nempe ; Superficies ſphæræ integra, æquatur quatuor circulis maximis. B.

Segmenti cujuſvis, Plano abſciſſi, (aut etiam Zonæ cujuſvis Parallelis Planis interjectæ,) ſuperficies, eam rationem habet ad totam Sphæræ ſuperficiem, quam habet intercepta Axis portio ad Axem totum. B.

Cuneus ſuperficialis, ſeu portio ſuperficiei curvæ duobus planis in Axe coeuntibus interjecta, ſive totius Sphæricæ ſuperficiei, ſive Segmenti ſuperficialis, ſive Zonæ ; ſuperficiem habet in ea ratione ad integram illius ſive Sphæræ, ſive Segmenti, ſive Zonæ ſuperficiem, quam habet Angulus inclinationis planorum illorum (vel arcuum plana illa jungentium,) ad quatuor rectos. C.

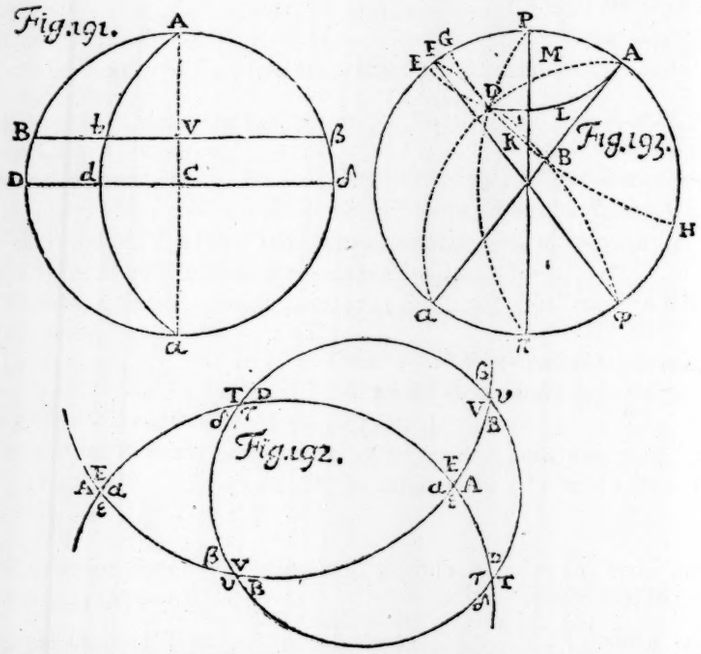
Triangulum ſphæricum, (arcubus circulorum maximorum terminatum,) eam rationem habet ad circulum in ſphæra maximum ; quam habet exceſſus aggregati omnium angulorum ſupra duos rectos, ad duos rectos. Seu (quod tantundem valet) æquatur facto ex Radio in Arcum circuli maximi, qui iſti angulorum exceſſui ſubtendit, ducto. D.

E. **Trilinea circulorum minorum arcubus terminata (vel partim his, partim arcubus maximorum,) à Triangulis Sphæricis modo dictis, differunt Bilineis notæ magnitudinis.**

F. **Adeoque, Figuræ cujuſvis, in ſuperficie ſphærica, planorum ſectionibus, vel circulorum quorumvis arcubus, terminata, (utpote quæ in expoſitarum figurarum aliquas ſemper reſolvi poſſit;) Magnitudo datur.**

A. POſſet quidem hæc Propoſitio, non tantum de Magnitudine, ſed & de Centro gravitatis, iſtiuſmodi Figuræ, ex præcedente deduci: Cum poſſit omnis iſtiuſmodi in Sphærica ſuperficie figura, in Trilinea Rectangula reſolvi; quæ in Cylindri recti ſuperficiales Ungulas expandi poterunt: Quarum quidem tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, (per præcedentem,) haberi poterunt; atque inde ad Trilinea Sphærica transferri, ope prop. 14. hujus.

Verum cum ita calculus futurus ſit perplexior quam ut illum jam aggredi libeat, (propter varias ſe mutuo decuſſantes Sphæræ diametros ad quas exigenda eſſent ea Trilinea Sphærica, eorumque partes:) libet alia methodo Figurarum illarum Magnitudines exhibere.



B. Fig. 191. Superficiei Sphæricæ *Segmentum*, (Plano abſciſſum;) vel etiam *Superficialis Zona* Sphærica, (duobus Planis Parallelis interjecta;) eam habet rationem ad totam Sphæræ Superficiem (hoc eſt, ad quatuor Circulos Maximos;) quam habet Axis portio, Plano ſeu Planis illis terminata, ad Axem totum. Puta, quanta pars eſt A V, vel V C, totius Axis A α; eadem pars eſt totius Superficiei Sphæricæ, Segmentum A B β, vel B β δ D Zona; & ſic ubique. Per § H, I. prop. 13. hujus.

C. Curva Superficies *Cunei Sphærici*, aut etiam *Cunei Segmenti Sphærici*, *Zonæve*, arcubus duorum circulorum in Axe coeuntium interjecti; eam habet ad totam Sphæræ, vel totam illius Segmenti, aut Zonæ ſuperficiem, quam habet Angulus inclinationis illorum Circulorum, ad quatuor Rectos. Quippe ſi intelligatur A B D α Semiperipheria, circa axem A α converſa, ſuperficiem ſphæricam deſcribere: quam partem totius converſionis abſolvit A B α, in ſitûm A b α delata; eadem erit tum angulus B A b, quatuor rectorum; tum, integræ Peripheriæ ſui circuli, arcus B b puncto B deſcriptus; ſuique, arcus D d deſcriptus puncto D; & ſic ubique:

ubique : adeoque eadem pars erit, Bilineum A D α d A, totius Superficiei Sphæricæ ; & A B b, ſegmenti B β A ; & B b d D, Zonæ B β δ D : & ſic ubique. Per § G. prop. 13. hujus.

Puta ; Quam habet rationem Arcus B b, vel D d, ad ſuas reſpective Peripherias integras B β, vel D δ ; aut angulus B A b vel D A d ad quatuor rectos : eam habet rationem *Sphærici Cunei Superficies* A B α b A, ad totius *Sphæræ* ſuperficiem ; *Cuneique Segmenti ſphærici ſuperficies* A B b A, vel α B b α, ad reſpectivi *Segmenti ſphærici* ſuperficiem A B β, vel α B β ; *Cuneique Zonæ Sphæricæ ſuperficies* B b d D, ad totius *Zonæ* ſuperficiem B β δ D. Et ſic ubique.

Exponatur jam, in ſuperficie Sphærica, Triangulum Sphæricum A B D, circulorum Maximorum arcubus comprehenſum. Qui quidem arcus continuati, intelliguntur circulos integros abſolvere. Hi Circuli cum ſint in Sphæra maximi ; ſe mutuo biſecabunt bini quilibet. Et, propter æquales angulos tum qui ſunt oppoſiti verticales, tum qui ſunt in eodem Bilineo oppoſiti, (puta A = α, & α = α, & ſic ubique ;) æqualia invicem erunt quæ ſunt in contrariis Hemiſphæriis Bilinea, (eorundem Circulorum contrariis Semicirculis interjecta ;) puta α α, & (quod, in Schemate diſruptum eſt & replicatum, ſed in Sphæra continuari intelligendum eſt,) A A ; & ſimiliter B B, & β β ; item D D, & δ δ. Sed &, eadem ratione, Oppoſita Triangula A B D, α β δ, (propter Latera lateribus, & Angulos angulis, reſpective ſumptis, æqualia,) erunt invicem æqualia. (Quæ eſt etiam D. *Samuelis Foſteri* noſtratis Demonſtratio, in Collegio *Greſhamenſi*, *Londini*, Aſtronomiæ dudum Profeſſoris ; Qui hoc mihi, de Triangulo *Sphærico*, Theorema indicavit, Anno circiter 1646 aut 1647 ; ut apud noſtros tum dudum receptum ; & ab *Harrioto* noſtro, ſi ſatis memini, primo repertum.) D. Fig. 192.

Si autem, ex ſemiſuperficie Sphærica T υ T υ T = $\mathcal{RP}$, (hoc eſt, facto ex Radio in Peripheriam ducto) auferatur A B D triangulum ; Reſiduum ($\mathcal{RP}$ — ABD) complebunt Triangula α τ V (hoc eſt, α α — α β δ ; hoc eſt, A A — A B D ;) & B ε τ, (hoc eſt, B B — A B D ;) & D E V, (hoc eſt, D D — A B D.) Hoc eſt, Bilinea A A + B B + D D, — 3 A B D, = $\mathcal{RP}$ — A B D. Hoc eſt, (tranſponendo) A A + B B + D D — $\mathcal{RP}$ = 2 A B D. Adeoque, quam habet rationem, exceſſus Bilineorum A A + B B + D D ſupra $\mathcal{RP}$, ad $\mathcal{RP}$ Semi-ſuperficiem ſphæricam ; hoc eſt, quam habet rationem, Exceſſus angulorum A + B + D ſupra duos rectos, ad duos rectos ; ſeu Exceſſus arcuum (angulis illis competentium) ſupra ſemiperipheriam, ad ſemiperipheriam ; eam habet 2 A B D duplum Trianguli, ad eandem $\mathcal{RP}$ Semiſuperficiem ſphæricam, ſeu duos circulos maximos ; ipſumque A B D Triangulum, ad $\frac{1}{2}\mathcal{RP}$ circulum in ſphæra maximum.

Hoc eſt, invertendo (poſito *a* pro aggregato arcuum, in circulo maximo, angulis A, B, D, competentium ;) ut Semiperipheria $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ad $a - \frac{1}{2}\mathcal{P}$; ſic Circulus in Sphæra maximus $\frac{1}{2}R\mathcal{P}$, ad ($aR - \frac{1}{2}R\mathcal{P}$) triangulum ſphæricum A B D. Quod itaque æquatur facto ex Radio *R*, in arcum $a - \frac{1}{2}\mathcal{P}$, qui convenit Exceſſui angulorum A + B + D ſupra duos rectos.

Eſto demum Trilineum expoſitum A B D, cujus latera D L A, D K B, ſint, arcus circulorum minorum E D A, G D B H ; (latuſque B A, arcus circuli maximi.) Inveniatur circuli E D A, polus P ; & circuli G D B H, polus A. Tranſeatque per A, D, circulus maximus A D α ; & per D, B, maximus F D B φ ; item per P, D, maximus P D π. E. Fig. 193.

Habetur itaque (per § B, C,) magnitudo tum integri Segmenti Superficialis P E D A, tum hujus Cunei ſeu portionis P D L A : Et (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici P D M A (arcubus maximorum circulorum terminati :) Adeoque & (horum differentiæ) Bilinei D A magnitudo.

Similiter, (per § B, C,) habetur magnitudo tum integri ſegmenti A G D B H, tum hujus portionis A M D K B : Et (per § D.) Trianguli Sphærici A M D I B : Ergo & (horum differentia) magnitudo Bilinei D B.

(Et ſimiliter faciendum eſſet, ad latus B A, ſi fuiſſet arcus circuli minoris : Cum vero latus illud ſit arcus Circuli maximi ; id minime opus erit.)

Habetur autem, ut modo dictum eſt, (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici (arcubus maximorum circulorum comprehenſi) A M D I B : Unde ſi auferatur Bilineum jam inventum D A, atque addatur Bilineum D B ; habetur magnitudo Trilinei expoſiti A B K D L A : cujus latera (ſaltem aliqua) ſunt arcus minorum circulorum.

Atque, ad eandem formam, Triangulo Sphærico, additis ablatisve, ut res postulaverit, Bilineis uno vel pluribus; habebitur area Trilinei cujusvis utut minorum circulorum arcubus comprehensi.

F. Denique; Cum nulla possit exponi Figura, in superficie sphærica, Planorum sectionibus (hoc est, circulis sive maximis sive minoribus) terminata; quæ in hujusmodi jam traditas figuras non possit resolvi: Datur istiusmodi figuræ cujusvis magnitudo. Quod erat ostendendum.

PROP. XXV.

Segmenta Sphæræ, utcunque Planis truncatæ; Magnitudinem datam habent.

HUjusmodi enim Sphæræ Segmenta quælibet, terminantur, partim portione residua Superficiei Sphæricæ, partim planis truncantibus.

Intelligatur autem (ut ad prop. 16. hujus) ea quæ restat superficiei sphæricæ portio, (cujus magnitudo data est, per prop. præced.) in particulas quantumlibet minutas distribui, totam complentes; quibus insistere intelligantur totidem pyramides exiguæ, communem verticem habentes Sphæræ Centrum; & communem altitudinem, Sphæræ Radium. Adeoque, Radii Triens, in curvam illam superficiem ductus, (utpote Basium illarum aggregatum,) exhibebit, Pyramidum sive Sectorum Sphæricorum illorum, portioni curvæ insistentium, Aggregatum.

Plana vero, quæ, una cum hac curva superficie, totam complent, sunt etiam notæ magnitudinis: Utpote quæ sunt vel Figuræ Rectilineæ, vel saltem Circulorum portiones, quarum Magnitudo habetur, per prop. 15. hujus. Harumque item (utpote positione datarum) dantur Distantiæ à Centro Sphæræ; Quarum quidem trientes, in sua respective Plana ducti, exhibent Pyramidum magnitudines, Planis illis insistentium, & communem verticem habentium Centrum Sphæræ.

Quæ quidem Pyramides, additæ vel subductæ (prout res tulerit) Aggregato illi Pyramidum superficiei curvæ insistentium, jam invento; exhibent Expositi Segmenti magnitudinem.

Datur igitur istiusmodi cujusvis segmenti sphæræ, planis utcunque truncatæ, Magnitudo. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

UT vero Propositionis hujus, & simul præcedentis, Praxis, Exemplo aliquo illustrata, facilior reddatur: Libet hic subjungere, Problematis Solutionem, quod ante aliquot annos mihi solvendum proposuit Vir ingeniosus, & rerum Mathematicarum peritus, D. *Joh Collins*, (Augusti 12° 1665.) tanquam rem maxime desideratam; & quotidiani usus, in mensurandis vasis vinariis & cervisiariis, partim depletis.

Cujus ego Problematis Solutionem, ejusque Demonstrationem, eodem statim die, summatim ei exhibui; (&, quantum scio, omnium primus absolvi) ad hunc sensum. Nempe,

"Redigendum esse expositum Dolii vel Sphæroeideos truncati Frustum, ad in-
"scriptæ Sphæræ Frustum correspondens; ad quod, Frustum illud Sphæroeideos eam
"habebit rationem, quam habet Sphæroeideos Axis, ad Diametrum Sphæræ; propter
"Plana Sphæroeideos parallelis Sphæræ Planis correspondentibus æqualia, sed ab
"invicem ea ratione longius remota, quam habet Axis Sphæroeideos ad Axem
"Sphæræ.

"Illud autem Sphæræ Frustum, considerandum esse tanquam ex Pyramidibus
"conflatum, communem verticem habentibus Centrum Sphæræ; baseseque in Fru-
"sti Superficie continuas, ipsam complentes.

"Quorum quidem quæ Bases Planas habent, facile exhiberi posse; cum plana
"illa alia non sint quam Circulorum portiones, notis methodis exhibendæ; ea-
"rumque à Centro distantiæ (altitudinem determinantes) facile exquirantur.

"Quod

"Quod autem ad eas innumeras attinet, quarum exiguæ baſes ſuperficiem cur-
"vam complent: cum baſium aggregatum ſit ea ipſa ſuperficies curva; & com-
"munis omnium Altitudo, Radius ſphæræ; id unum ſupereſſe poſſe difficultatis,
"ut exhibeatur illa Superficies curva.

"Id autem quicquid ſit difficultatis, à me jam olim explicatum eſſe in ſubjunctis
"ad Calcem mei *de Cycloide* Tractatus, pag. 122. (ſed quæ inſerenda fuerant pag. 23.
"§ 68. quod jam factum eſt.) ubi docetur, *Figuram quamlibet, in Superficie Sphæ-*
"*ræ, Circulorum quorumvis (ſive maximorum ſive minorum) arcubus termina-*
"*tam, Quadrare.*

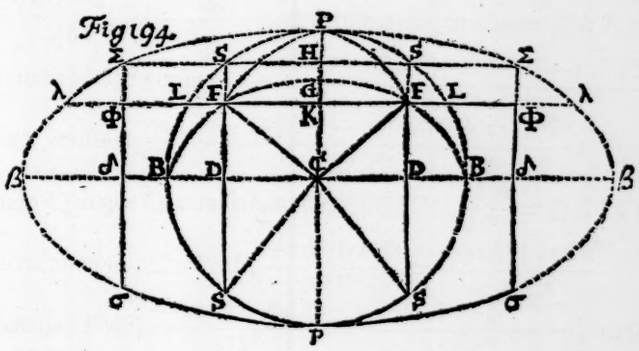
"Adeoque Rem totam, inter Deſiderata, non eſſe cenſendam; ut quam ego jam
"tum ante plures annos abſolveram, & ſcripto edito (anno 1659.) vulga-
"veram.

Quod ipſum paucis poſt diebus, latius aliquanto explicatum, ad illum etiam miſi, hac fere quæ ſequitur verborum forma.

PROP. XXVI.

Sit Dolium Σσpσ Σ P, (Sphæroeideos P β p β Fruſtum, parallelis circulis æqualibus Σ σ, Σ σ, abſciſſum,) ſitu Horizontali poſitum. Datæque ſint; tum Circuli Medii P p, Semidiameter C P; tum Extremorum Σ σ, Semidiameter δ Σ; Vaſiſque Longitudo δ δ, (cujus Semiſſis C δ:) Summique Liquoris Φ K Φ, Altitudo, ſupra infrave C centrum, C K; quæ minor ſit quam δ Σ. Quæritur, Liquoris contenti quantitas; ſeu Segmenti Majoris Φσpσ Φ, Minoriſve Φ Σ P Σ Φ, Magnitudo.

Fig 194.



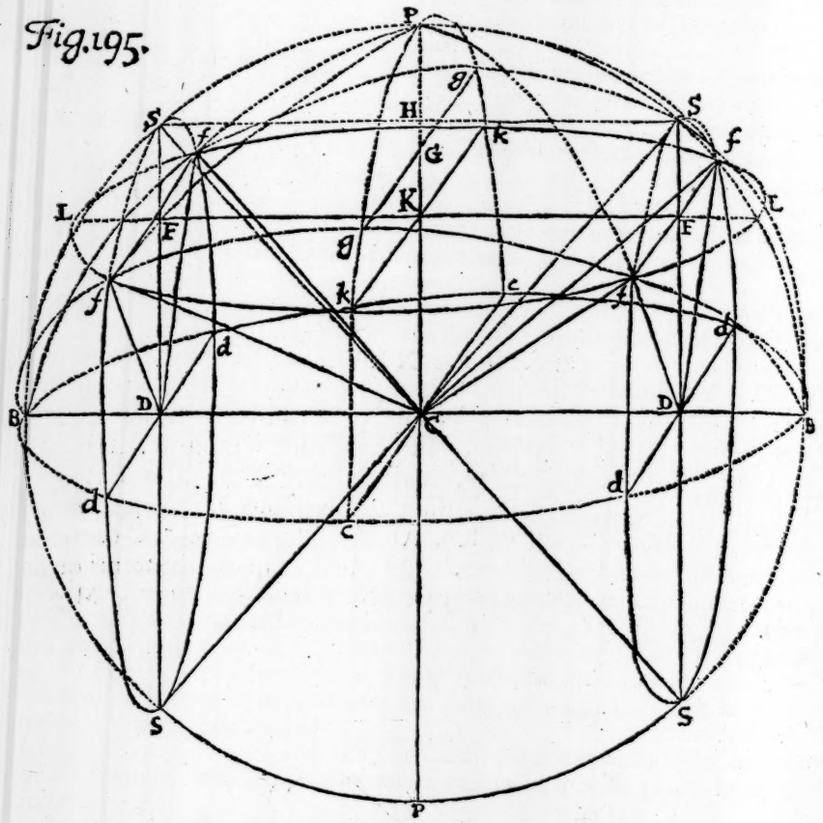
Sphæroeidi P β p β, inſcripta intelligatur Sphæra P B p B: quam ſecent Circuli Ss, Ss, ipſis Σ σ, Σ σ, æquales & paralleli; Planumque Φ K Φ Horizontale, exhibens in Sphæra Circulum L F L, Ellipſi λ Φ λ in Sphæroeide reſpondentem. Eritque Sphæræ Portio F s p s F, expoſitæ Sphæroeideos Portioni Φσpσ Φ correſpondens.

Eſtque hæc Sphæræ Portio; idem atque Semiſegmentum D s p s D (quod Semidolio reſpondet, eſtque magnitudinis notis methodis inveſtigabilis; & ſpeciatim per prop. præced. vel prop. 16. hujus.) Addita, Demptave, (prout F K F ſupra infrave Centrum fuerit,) Segmenti Portione F F D D; planis F F, D D, F D, F D, interjecta; quam portionem inveſtigare, eſt potiſſima totius negotii difficultas.

(Quo autem multiplices Solidi ſectiones, in plano utcunque exhibitæ, melius percipiantur: Rem eam pluribus figuris explicare viſum eſt: Quarum fig. 194. exhibet Sphæram Sphæroeidi inſcriptam; ſimpliciſſima projectione. Fig. 195. exhibet Sphæram, figuræ præcedenti exemptam, atque aliter projectam, quo partes ejus detegantur: Et fig. 196. ejuſdem Octantem (planis quadrantalibus P C c, P C B, c C B, toti exſectum,) quo minor ſit linearum confuſio. Item duos circulos Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

Fig. 194, culos Ss, fig. 194. hoc eſt Sfdsdfs, fig. 195. ſeorſum exhibet figura 197. Cir-
195, 196, culumque LFKFL fig. 194. hoc eſt, LfkfLfkfL fig. 195. ſeorſim exhibet
197, 198. figura 198.)

Fig. 195.



Conſtat autem ea Portio FFDD, (potiſſimum inveſtiganda,) ex Quinque Solidis Pyramidalibus, Conicisve: Quorum communis Vertex, eſt C Centrum: Baſeſque, ipſæ Portionis Superficies FD, FD, FF, planæ; duæque Curvæ DFFD, DFFD, fig. 194. (ſeu potius dffd, dffd, fig. 195.) Planis illis, planoque DD terminatæ: Altitudineſque, Superficierum illarum à Centro Diſtantiæ.

Fig. 196.

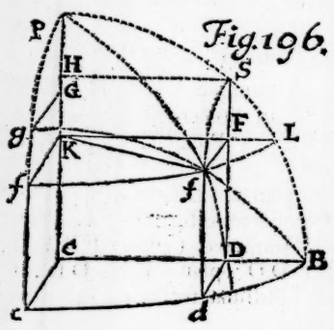
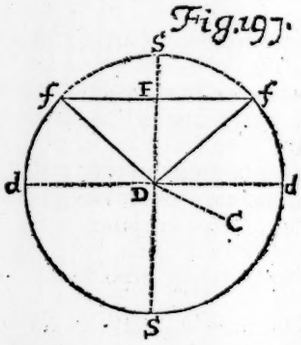


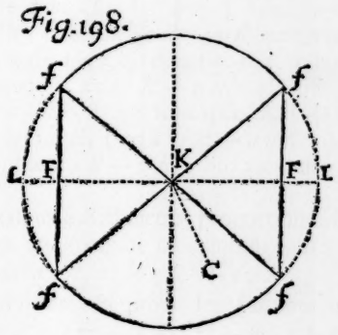
Fig. 197.



Quantæque ſint illæ Superficies Curvæ DFKFD, fig. 194. ſeu potius dfkfd fig. 195. (quæ ſola ſupereſt difficultas; reliqua ſiquidem, notis methodis, facile inveſtigantur;) invenire docui, in ſubjunctis meo, *De Cycloide*, Tractatui, atque hic in prop. 24. hujus.

Nempe;

Fig. 198.



Nempe; Si intelligatur (fig. 195, 196.) f g f, arcus Circuli Maximi, ipſi f k f arcui Minoris Circuli conterminus; & compleatur P f g f Triangulum Sphæricum: Hujus Trianguli Sphærici P f g f magnitudo innoteſcit; utpote tum alibi tradita, tum hic ad § D. prop. 24. hujus. Atque innoteſcit Trilinei P f k f magnitudo, ex cognito angulo f P f, ſeu ratione arcus f k f ad peripheriam ſui circuli: (per § B, C, prop. 24. hujus.) Adeoque & magnitudo Bilinei f k f g f, illorum differentia. Sed &, ex cognito Angulo g B d, ſeu Arcus f d ratione ad Peripheriam ſui circuli, ſimiliter innoteſcit magnitudo Quadrilinei Sphærici d f g f d. Ergo & (dempto Bilineo) Quadrilinei d f k f d magnitudo. Fig. 194, 195, 186, 197, 198.

Denique; Ex magnitudine Portionis Segmenti Sphærici ſic inventa; Habetur etiam Portionis Segmenti Sphæroeideos correſpondentis Magnitudo. Eſt utique hæc ad illam, ut Sphæroeides ad inſcriptam Sphæram; (ſive ut Axium Major ad Minorem:) propter Plana Planis reſpective ſumptis æqualia, & ad Axes in ea ratione conſtitutos ordinatim-poſita. Quæ eſt totius Problematis conſtructio.

Calculus huic Conſtructioni reſpondens.

1. Data Circuli, in Sphæroeide Medii, Semidiameter; ſeu Radius inſcriptæ Sphæræ; $CP = CB = Cs = CS = Cf$; dicatur R: Ejuſque Peripheriæ Quadrans, $\mathfrak{Q}$; quæ ſit & Anguli Recti menſura.

2. Data Circulorum, in Sphæroeideos fruſto, Extremorum, (fig. 197. ſeorſim etiam exhibitorum) Semidiameter $\delta\Sigma = DS = Dd$; dicatur $a\,R$. (Facto ſcilicet, ut CP, ad DS; ſic 1 ad a. Et ſic alibi.) Eſtque, Sinus Rectus arcus $BS = Bf$.

3. Hujus Co-ſinus, ſeu Sinus Complementi; hoc eſt, Sinus Arcus $SP = fg$; eſt $HS = CD = KF = \sqrt{:} R^2 - a^2R^2 :: = R\sqrt{:} 1 - a^2$. Qui dicatur (brevitatis gratia) αR.

4. Ut B B ad S S, ſeu C B ad H S; hoc eſt, ut R ad αR, ſeu 1 ad $\alpha = \sqrt{:} 1 - a^2$: Sic eſt integra Sphæræ Superficies, ſeu Quatuor Circuli maximi, $8\,R\mathfrak{Q}$; ad ſuperficiem Zonæ S s s S, $= 8\alpha R\mathfrak{Q}$.

5. Hæc Superficies, ducta in $\frac{1}{3}R$; exhibet magnitudinem Zonæ Solidæ, (intellige, Segmenti S D ss D S, exemptis duobus Conis, S Cs, SCs,) $SCsps CSP = \frac{8}{3}\alpha R^2\mathfrak{Q}$.

6. Ut Quadratum Radii C P; ad Quadratum Radii D S; hoc eſt, ut R^2 ad a^2R^2, ſeu ut 1 ad a^2: Sic eſt Circulus Maximus $2\,R\mathfrak{Q}$, ad Circulum $SDs = 2a^2R\mathfrak{Q}$.

7. Circulus hic S Ds, ductus in $\frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\alpha R$; exhibet Magnitudinem Coni $SCsD, = \frac{2}{3}\alpha a^2R^2\mathfrak{Q}$.

8. Hujuſmodi Coni duo, una cum Zona ſolida (§ 5. inventa,) exhibent Segmentum Solidum S Dss DS, $= \frac{8}{3}\alpha R^2\mathfrak{Q} + \frac{4}{3}\alpha a^2R^2\mathfrak{Q}$. Adeoque Semiſolidum Dss D, $= \frac{4}{3}\alpha R^2\mathfrak{Q} + \frac{2}{3}\alpha a^2R^2\mathfrak{Q}$.

9. Data ſummi Liquoris F K F, ſupra infrave Centrum, Altitudo $CK = DF$, dicatur $b\,R$. Eſtque, Sinus Rectus arcus B L.

10. Hujuſque Co-ſinus, ſeu Sinus Arcus $LP = fP$; eſt $KL = Kk = \sqrt{:} R^2 - b^2R^2 :: = R\sqrt{:} 1 - b^2$. Qui dicatur (brevitatis ergo) βR.

Fig. 194, 195, 196, 197.

11. Ut $KL = \beta R$, ad R; ſeu ut $\surd : 1 - b^2$: ad 1: Sic eſt recta $KF = \alpha R$, ad $\frac{\alpha}{\beta} R = R\surd \frac{1-a^2}{1-b^2}$; ſinum arcus fk in ſuo circulo, ſive Anguli $fKk = fPk = fPg$; Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $c\mathfrak{Q}$.

12. Hujuſque Co-ſinus ſeu ſinus Arcus fL in ſuo circulo, ſeu Anguli $fKL = fPL$; eſt $\surd : R^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} R^2 :: R\surd \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} = \frac{R}{\beta}\surd : \beta^2 - \alpha^2 :: \frac{R}{\beta}\surd : a^2 - b^2$.

13. Ut $DS = aR$, ad R; ſeu ut a ad 1: Sic $DF = bR$, ad $\frac{b}{a} R$, Sinum Arcus fd in ſuo Circulo, ſeu Anguli $fDd = gBd$. Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $d\mathfrak{Q}$.

14. Ut tota Peripheria, ſeu Quatuor Recti, $4\mathfrak{Q}$; ad Arcum ſeu Angulum $d\mathfrak{Q}$; ſive ut 4 ad d: Sic eſt Zonæ totius SssS ſuperficies, $8\alpha R\mathfrak{Q}$; ad Quadrilineum Sphæricum dfgfd, $= 2d\alpha R\mathfrak{Q}$.

15. Ut $Pp = 2R$, ad $PK = CP - CK = R - bR$; ſive ut 2, ad $1 - b$: Sic integra Sphæræ ſuperficies, $8R\mathfrak{Q}$; ad ſegmenti PLKLP ſuperficiem, $= 4R\mathfrak{Q} - 4bR\mathfrak{Q}$.

16. Ut tota Peripheria, ſeu quatuor Recti, $4\mathfrak{Q}$; ad Angulum $fPf = 2fPg = 2c\mathfrak{Q}$; ſive ut 2 ad c: Sic Segmenti PLKLP ſuperficies, $4R\mathfrak{Q} - 4bR\mathfrak{Q}$; ad Trilineum Sphæricum Pfkf P, $= 2cR\mathfrak{Q} - 2bcR\mathfrak{Q}$.

17. In Triangulo Sphærico Rectangulo fgP; Ut Co-ſinus arcus fg, ſeu arcus Bf Sinus aR; ad Co-ſinum Anguli fPg, ſeu Anguli fPL Sinum, $\frac{R}{\beta}\surd : a^2 - b^2 :$ Sive ut $a\beta$ ad $\surd : a^2 - b^2$: Sic Radius, ad $\frac{\surd : a^2 - b^2 :}{a\beta} R$ Sinum Anguli Pfg. (Nempe per doctrinam Trigonometricam.) Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $e\mathfrak{Q}$.

18. Ut duo Anguli Recti, $2\mathfrak{Q}$; ad Trium Angulorum, Trianguli ſphærici Pfgf, exceſſum ſupra Duos rectos, $2c\mathfrak{Q} + 2e\mathfrak{Q} - 2\mathfrak{Q}$: Hoc eſt, ut 1 ad $c + e - 1$: Sic eſt Circulus in Sphæra Maximus, $2R\mathfrak{Q}$; ad iſtius Trianguli Sphærici Pfgf Magnitudinem, $2cR\mathfrak{Q} + 2eR\mathfrak{Q} - 2R\mathfrak{Q}$.

19. Triangulum hoc, Pfgf, ex Trilineo Pfkf (invento § 16.) exemptum, relinquit Bilineum $fkfgf = 2R\mathfrak{Q} - 2eR\mathfrak{Q} - 2bcR\mathfrak{Q}$.

20. Atque hoc Bilineum, ex Quadrilineo dfgfd (invento § 14.) exemptum, relinquit Quadrilineum $dfkfd, = 2\alpha dR\mathfrak{Q} + 2bcR\mathfrak{Q} + 2eR\mathfrak{Q} - 2R\mathfrak{Q}$.

21. Atque hoc Quadrilineum, in $\frac{1}{3}R$ ductum; exhibet Sectorem Sphæricum $Cdfkfd, = \frac{2}{3}\alpha dR^2\mathfrak{Q} + \frac{2}{3}bcR^2\mathfrak{Q} + \frac{2}{3}eR^2\mathfrak{Q} - \frac{2}{3}R^2\mathfrak{Q}$.

22. Ut $CP = R$, ad $Kk = KL = \beta R$; (fig. 195, 198.) ſive ut 1 ad β: ſic Anguli fKk arcus $c\mathfrak{Q}$, ad longitudinem arcus fk, $= \beta c\mathfrak{Q}$: Et ſic Anguli $fKF = fKL$ Sinus, $\frac{R}{\beta}\surd : a^2 - b^2$: ad rectam fF, $= R\surd : a^2 - b^2$.

23. $Kk = \beta R$, ducta in $fk = \beta c\mathfrak{Q}$; exhibet Sectorem $fKf = \beta^2 cR\mathfrak{Q} = cR\mathfrak{Q} - b^2 cR\mathfrak{Q}$. Atque hic ductus in $\frac{1}{3}CK = \frac{1}{3}bR$, exhibet Coni portionem $CfKf = \frac{1}{3}bcR^2\mathfrak{Q} - \frac{1}{3}b^3 cR^2\mathfrak{Q}$.

24. $KF = \alpha R$: ducta in $fF = R\surd : a^2 - b^2$: exhibet Triangulum $KfFf = \alpha R^2\surd : a^2 - b^2$. Atque hoc ductum in $\frac{1}{3}CK = \frac{1}{3}bR$, exhibet Pyramidem $CKfFf = \frac{1}{3}\alpha bR^3\surd : a^2 - b^2$. Cui (propter $CK = DF$, $KF = CD$, adeoque $\frac{1}{3}CK \times KF \times Ff = \frac{1}{3}CD \times DF \times Ff$,) æqualis eſt Pyramis CDff.

25. Ut $CP = R$, ad $DS = aR$; ſeu ut 1 ad a: Sic Arcus Anguli $fDd = d\mathfrak{Q}$, ad Arcum $fd = ad\mathfrak{Q}$. Qui ductus in $Dd = DS = aR$, exhibet binos Sectores, $2fDd = a^2 dR\mathfrak{Q}$. Qui ducti in $\frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\alpha R$, exhibent binas Coni Portiones, $2CfDd, = \frac{1}{3}\alpha a^2 dR^2\mathfrak{Q}$.

26. Additis

26. Additis igitur Binis Sectoribus (§ 21.) $2CdfkfdD = \frac{4}{3}\alpha dR^2\Omega + \frac{4}{3}bcR^2\Omega + \frac{4}{3}eR^2\Omega - \frac{4}{3}R^2\Omega$: Atque Binis Coni portionibus (§ 23.) $2CfKfD = \frac{2}{3}bcR^2\Omega - \frac{2}{3}b^3cR^2\Omega$; Biniſque Pyramidibus (§ 24.) $2CKffD = \frac{2}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2:}$ (quæ cum binis illis portionibus Coni, complent Solidum Conicum, baſis quadrilineæ, CfFfkfFfk:) Biniſque Pyramidibus (§ 24.) $2CDffD = \frac{2}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$; & Bis binis Coni portionibus (§ 25.) $4CfDdD = \frac{2}{3}\alpha a^2dR^2\Omega$, (quæ cum binis Pyramidibus CDff, complent, bina Solida Conica Cddff:) Habetur Segmenti Portio $dddddffff = \frac{4}{3}\alpha dR^2\Omega + \frac{2}{3}\alpha a^2dR^2\Omega + 2bcR^2\Omega - \frac{2}{3}b^3cR^2\Omega + \frac{4}{3}eR^2\Omega - \frac{4}{3}R^2\Omega + \frac{4}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$. Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

27. Atque hoc Additum vel Subductum (prout Segmentum Majus, Minuſve requiratur) Semiſegmento (§ 8.) $dsdCdsd = \frac{4}{3}\alpha R^2\Omega + \frac{2}{3}\alpha a^2R^2\Omega$: Exhibet Sphæræ Segmentum Majus, Minuſve; FspsFK, vel FSPSFK; $= \frac{4}{3}\alpha R^2\Omega + \frac{2}{3}\alpha a^2R^2\Omega \pm \frac{4}{3}\alpha dR^2\Omega \pm \frac{2}{3}\alpha a^2dR^2\Omega \pm 2bcR^2\Omega \mp \frac{2}{3}b^3cR^2\Omega \pm \frac{4}{3}eR^2\Omega \mp \frac{4}{3}R^2\Omega \pm \frac{4}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$.

28. Denique; Data Vaſis Semi-longitudo, ſeu ratio $C\delta$, ad CD; hoc eſt, ratio $C\beta$, ad CB; ponatur ut f ad 1. Eritque expoſitum Sphæroeideos Segmentum Majus, Minuſve; $\Phi\sigma p\sigma\Phi$, vel $\Phi\Sigma P\Sigma\Phi = \frac{4}{3}f\alpha R^2\Omega + \frac{2}{3}f\alpha a^2R^2\Omega \pm \frac{4}{3}f\alpha dR^2\Omega \pm \frac{2}{3}f\alpha a^2dR^2\Omega \pm 2fbcR^2\Omega \mp \frac{2}{3}fb^3cR^2\Omega \pm \frac{4}{3}feR^2\Omega \mp \frac{4}{3}fR^2\Omega \pm \frac{4}{3}f\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$. Quod propoſitum erat inquirendum.

Calculi Synopſis.

§ 1. R; Data Semidiameter Major, ſeu Radius inſcriptæ Sphæræ; CP.
§ 2. aR; Data Semidiameter Minor; DS.
§ 9. bR; Data Altitudo ſupra infrave Centrum; CK.
§ 28. fR; Semi-longitudo Conoeideos; $C\beta$.
§ 3. $\alpha = \sqrt{:1 - a^2}$.
§ 10. $\beta = \sqrt{:1 - b^2}$.
§ 1. Ω; Angulus Rectus; vel Quadrans Peripheriæ Circuli Maximi.

§ 11. $c\Omega$, § 13. $d\Omega$, § 17. $e\Omega$ } Anguli, vel Arcus Circuli maximi, reſpondentes Sinibus rectis $\left\{\frac{\alpha}{\beta}R.\ \frac{b}{a}R.\ \frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{\alpha\beta}R.\right.$

$+\frac{8}{3}R^2\Omega$; Sphæra integra, BpBP.
$+\frac{4}{3}R^2\Omega$; Hemiſphærium, BBP.
$+\frac{4}{3}bR^2\Omega$; Zona Solida BLCLB, $+\frac{2}{3}b\beta^2R^2\Omega$; Conus LCLK, } Segmentum BLLB.
$+\frac{4}{3}aR^2\Omega$; Zona Solida BSCSB, $+\frac{2}{3}a\alpha^2R^2\Omega$; Conus SCSH, } Segmentum BSSB.

§ 5. $+\frac{4}{3}\alpha R^2\Omega$, Semizona ſolida SCSP, } Semiſegmentum SDDSP
§ 7. $+\frac{2}{3}\alpha a^2R^2\Omega$, duo Semiconi 2DCS, } Semiſegmentum SDDSP
§ 14. $+\frac{4}{3}\alpha dR^2\Omega$, duo Sectores 2FFCDD, ſeu potius 2CfkfdD, } § 20. 21
§ 19. $+\frac{4}{3}eR^2\Omega$, } + vel —
§ 19. $-\frac{4}{3}R^2\Omega$, } + vel —
§ 19. $+\frac{4}{3}bcR^2\Omega$, } + vel —
§ 23. $+\frac{2}{3}bcR^2\Omega$, duæ portiones Coni, 2CKfkf, } § 26. Interſegmentum DFfD.
§ 23. $-\frac{2}{3}b^3cR^2\Omega$, } § 26. Interſegmentum DFfD.
§ 24. $+\frac{2}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$: duæ Pyramides, 2CKfFf, } Pyram. FCF
§ 24. $+\frac{2}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$: duæ Pyramides, 2CDfFf, } § 26. 2 Pyram. FCD
§ 25. $+\frac{2}{3}\alpha a^2dR^2\Omega$, bis binæ Portiones Coni, 2CDfd, } § 26. 2 Pyram. FCD

§ 27. FspsF, major vel FSPSF minor } Portio.

§ 28. Hæc ducta in f; ſunt Homologæ partes Conoeideos.

Exemplum Calculi.

Fig. 194, 195. Posito $R=1$. Circulus Maximus, $2R\mathfrak{Q}=3.1415926\frac{1}{2}$
Erit $\mathfrak{Q}=1.5707963\frac{1}{4}$ Superficies Sphæræ, $8R\mathfrak{Q}=12.5663706$
$\frac{1}{3}\mathfrak{Q}=0.5235987\frac{3}{4}$ Superf. Hemisphærii, $4R\mathfrak{Q}=6.2831853$
Sphæra integra, BpBP, $\frac{8}{3}R^2\mathfrak{Q}=4.1887902$
Hemisphærium, BBP, $\frac{4}{3}R^2\mathfrak{Q}=2.0943951$

Casus I.

$a=0.75$ $a^2=0.5625$ $\alpha^2=1-a^2=0.4375$ $\alpha=0.6614378\frac{1}{4}$
$b=0.5$ $b^2=0.25$ $\beta^2=1-b^2=0.75$ $\beta=0.8660254+$
$a^2-b^2=\beta^2-\alpha^2=0.3125$ $\sqrt{:a^2-b^2:}=0.5590169+$
$4+2a^2=5.125$ $4\alpha+2a^2\alpha=3.3898688\frac{1}{2}$

Segmentum SspCP, vel semisegmentum SDDSP,
$\frac{4+2a^2}{3}\alpha R^2\mathfrak{Q}=1.7749312-$
Segmentum integrum SspsSP, (istius duplum,) $=3.5498624-$
Segmentum SsB, vel 2 SDB, (=BBP—SDDSP,) $=0.3194639+$
Semisegmentum SDB, (istius semissis,) $=0.1597319\frac{1}{2}$
$4+2a^2=4.875$ $4a+2a^2a=3.65625$
Segmentum BSSB, $\frac{4+2a^2}{3}aR^2\mathfrak{Q}$, $=1.9144080+$
Segmentum SSP, (=BBP—BSSB,) $=0.1799871-$
Segmentum DSSD, (=SDDSP—SSP =BSSB—2SDB) $=1.5949441-$
$4+2\beta^2=5.5$ $4b+2\beta^2b=2.75$
Segmentum BLLB, $\frac{4+2\beta^2}{3}bR^2\mathfrak{Q}$, $=1.4398966\frac{1}{2}$
Segmentum LLP, (=BBP—BLLB,) $=0.6544984\frac{1}{2}$
Segmentum LSSL, (=BSSB—BLLB,) $=0.4745113\frac{1}{2}$
$\frac{\alpha}{\beta}R=0.7637626\frac{1}{6}$ Sin. Ang. gr. 49. 47′, 8225. $=\frac{0.5533005}{1.0000000}\mathfrak{Q}=c\mathfrak{Q}$
$\frac{b}{a}R=0.6666666\frac{2}{3}$ Sin. Ang. gr. 41. 48′, 6186. $=\frac{0.4645590}{1.0000000}\mathfrak{Q}=d\mathfrak{Q}$
$a\beta=0.6495190\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{:a^2-b^2:}}{a\beta}R=0.8606628\frac{1}{3}$ Sin. Ang. gr. 59. 23′, 4658
$=\frac{0.6599010}{1.0000000}\mathfrak{Q}=e\mathfrak{Q}$
$c=0.5533005$ $d=0.4645590$ $e=0.6599010$

(Verum hic, adeoque in iis quæ hinc dependent, ultima nota, fortassis & penultima, sunt in ambiguo; eo quod Canon Sinuum ad tantam ἀκρίβειαν vix patitur pervenire.)

$6b-2b^3=2.75$ $6bc-2b^3c=1.5215764$ $4e=2.6396040$

$+\frac{6-2b^2}{3}bcR^2\mathfrak{Q}=0.7966955$
$+\frac{4+2a^2}{3}\alpha dR^2\mathfrak{Q}=0.8245649$
$+\frac{4}{3}eR^2\mathfrak{Q}=1.3820935$
$-\frac{4}{3}R^2\mathfrak{Q}=-2.0943951$
$+\frac{4}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2-b^2:}=0.2465033$
} = Intersegment. DFFD, $=1.1554621$. saltem 1.15546 proxime.

Frusti Sphæ- rici Portio { Major, FspsF, (=SDDSP+DFFD) $=2.9303933$
Minor, FSPSF, (=SDDSP—DFFD,) $=0.6194691$
Abscissa 2LFDB, (=BLLB—DFFD,) $=0.2844345\frac{1}{2}$
$LFDB=0.1422173-$
2SFL, (=LLP—FSPSF=2EDB—2LFDB,) $=0.0350293\frac{1}{2}$
$SFL=0.0175147-$

Casus II.

Casus II.

Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

$a = 0.8$ $a^2 = 0.64$ $\alpha^2 = 1 - a^2 = 0.36$ $\alpha = 0.6$
$b = 0.6$ $b^2 = 0.36$ $\beta^2 = 1 - b^2 = 0.64$ $\beta = 0.8$
$a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 0.28$ $\sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.5291502\frac{1}{2} +$
$4 + 2a^2 = 5.28$ $4\alpha + 2a^2\alpha = 3.168$

$$SDDSP = \frac{4 + 2a^2}{3} \alpha R^2 \mathfrak{Q} = 1.6587609 +$$
$$SspsSP\,(= 2\,SDDSP) = 3.3175218 +$$
$$SsB = 2SDB\,(= BBP - SDDSP) = 0.4356342 -$$
$$SDB = 0.2178171 -$$

$4 + 2\alpha^2 = 4.72$ $4a + 2\alpha^2 a = 3.776$

$$BSSB = \frac{4 + 2\alpha^2}{3} a R^2 \mathfrak{Q} = 1.9771090 +$$
$$SSP\,(= BBP - BSSB) = 0.1172861 +$$
$$DSSD\,(= SDDSP - SSP = BSSB - 2SDB) = 1.5414748$$

$4 + 2\beta^2 = 5.28$ $4b + 2\beta^2 b = 3.168$

$$BLLB = \frac{4 + 2\beta^2}{3} b R^2 \mathfrak{Q} = 1.6587609 +$$
$$LLP\,(= BBP - BLLB) = 0.4356342 -$$
$$LSSL\,(= BSSB - BLLB) = 0.3183481 -$$

$\frac{\alpha}{\beta} R = 0.75$ Sinus Ang. gr. 48. 35′, 4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} \mathfrak{Q} = c\,\mathfrak{Q}$

$\frac{b}{a} R = 0.75$ Sinus Ang. gr. 48. 35′, 4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} \mathfrak{Q} = d\,\mathfrak{Q}$

$a\beta = 0.64$

$\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta} R = 0.8267973 -$ Sinus Ang. gr. 55. 46′, 2682

$= \frac{0.6196793}{1.0000000} \mathfrak{Q} = e\,\mathfrak{Q}$

$c = 0.5398931$ $d = 0.5398931$ $e = 0.6196793$
$6b - 2b^3 = 3.168$ $6bc - 2b^3 c = 1.7103814$ $4e = 2.4787172$

$+\frac{6 - 2b^2}{3} bc R^2 \mathfrak{Q} = 0.8955536$
$+\frac{4 + 2a^2}{3} \alpha d R^2 \mathfrak{Q} = 0.8955536$
$+\frac{4}{3} e R^2 \mathfrak{Q} = 1.2978533$
$-\frac{4}{3} R^2 \mathfrak{Q} = -2.0943951$
$+\frac{4}{3} \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.2539921$

} = Interſegment. DFFD, = 1.2485575. ſaltem 1.24856 proxime.

Fruſti Sphæ-rici, Portio Major, $FspsF\,(= SDDSP + DFFD) = 2.9073184$
Portio Minor, $FSPSF\,(= SDDSP - DFFD,) = 0.4102034$
$2LFDB\,(= BLLB - DFFD) = 0.4102034$
$LFDB = 0.2051017$
$2SFL\,(= LLP - FSPSF = 2SDB - 2LFDB) = 0.0254308$
$SFL = 0.0127154$

Atque ad eandem formam procedendum erit in aliis caſibus quibuſcunque, prout alii atque alii valores ponuntur datarum magnitudinum *a* & *b*.

Inventis autem (pro caſibus aſſignatis quibuſvis) Portionibus Fruſti Sphærici; habentur correſpondentes portiones Fruſti Sphæroideos, ductis ſingulis in *f*; quæcunque fuerit ea ratio, Axis Sphæroeideos ad Diametrum Sphæræ; ($\beta\beta$ ad BB, vel $C\beta$ ad CB = CP, vel $C\delta = K\Phi$ ad CD = KF = HS Co-ſinum dati DS, in Circulo Radii CP;) quam appellamus, *f* ad 1.

PROP. XXVII.

A. B. Fig. 199, 200. Figura Spiralis (linea Spirali à principio orſa, & recta contermina, terminata) eſt contermini Sectoris Triens: Toties repetitis omnibus, quoties iterato deſcribuntur.

C. Sumptiſque angulis A M T, A M T, &c. arithmetice proportionalibus; ſi Figura Spiralis primo conveniens ponatur 1; eadem per duos continuata, erit 8; per tres, 27; per quatuor, 64; & ſic deinceps, ſecundum numeros cubos continue ſequentes.

B. Totaque figura circulationis primæ, eſt contermini circuli primi Triens; &, duarum circulationum (repetito quod in ſecunda iterato deſcribitur, quod ubique intelligendum eſt,) ejuſdem Circuli primi Octo trientes; Trium Circulationum, ejuſdem Viginti ſeptem Trientes, (ſeu totius Noncuplum;) Quatuor Circulationum, ejuſdem Sexaginta quatuor Trientes, & ſic deinceps.

Et, univerſaliter, (poſito R pro circuli primi Radio; P, pro ejuſdem peripheria; angulique circulationis quouſque libet continuatæ ratione ad quatuor rectos; vel correſpondentis arcus circuli Primi, ad integram ejus Peripheriam; ut a ad P;) Figuræ Spirales ſic deſcriptæ (repetitis toties omnibus quoties deſcribuntur) Magnitudo eſt $\frac{a^3 R}{6P^2}$.

D. Adeoque, quæ continuis Circulationum angulis æqualibus conveniunt figuræ Spirales, ſunt ut numerorum cuborum continue ſequentium 0, 1, 8, 27, 64, 125, &c. differentiæ; 1, 7, 19, 37, 61, &c.

Et ſpeciatim quod Circulatione Prima deſcribitur, eſt contermini Circuli primi Triens; quod ſecunda, ejuſdem Primi Circuli Septem trientes; quod Tertia, ejuſdem Trientes Novendecim; quod Quarta, ejuſdem Trientes Triginta-ſeptem; quod Quinta, ejuſdem Trientes Unus & ſexaginta. Et ſic deinceps.

E. Figuræ Spiralis (à Principio orſæ) quouſque libet continuatæ, toties repetitis omnibus quoties iterato deſcribuntur: (poſito s pro ſinu recto anguli circulationis, ad Radium R; & x pro ſinu complementi; ipſoque s, pro Semicirculis ſecundo, quarto, ſexto, octavo, cæteriſque in locis paribus, per contrarium ſignum ſemper expoſito, utpote ad contrarias diametri partes poſito:) Momentum reſpectu rectæ P M F, eſt $\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3}$; Centrique gravitatis inde diſtantia, $\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^3 + 2a^3vR}{a^3P}$:

Et quidem vel ad partes E, vel ad partes G, prout ſignum +, vel —, prævaluerit.

H. Ejuſque Momentum reſpectu rectæ E M G, $\frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3}$; Centrique gravitatis inde diſtantia, $\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$: Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, prout ſignum +, vel —, prævaluerit.

Et

Et ſpeciatim, Circulationis Quadrantalis, Unius; Magnitudo, $\frac{1}{384}RP$: D.
Reſpectu PMF, verſus E, momentum, $\frac{-32R^6+R^4P^2}{16P^3}$; diſtantia F.
Centri gravitatis, $\frac{-768R^5+24R^3P^2}{P^4}$: Reſpectu EMG, verſus P, mo- I.
mentum, $\frac{384R^6-96R^5P+R^3P^3}{192P^3}$; diſtantia, $\frac{768R^5-192R^4P+2R^2P^3}{P^4}$.

Duarum; Magnitudo, $\frac{8}{384}RP=\frac{1}{48}RP$: Reſpectu PMF, verſus E, momen- D.
tum $\frac{-24R^5+R^3P^2}{24P^2}$; diſtantia, $\frac{-48R^4+2R^2P^2}{P^3}$: Reſpectu EMG, F.
verſus F, momentum $\frac{-16R^6+R^4P^2}{4P^3}$; diſtantia, $\frac{-192R^5+12R^3P^2}{P^4}$. I.

Trium; Magnitudo, $\frac{27}{384}RP=\frac{9}{128}RP$: Reſpectu PMF, verſus G, momen- D.
tum $\frac{-32R^6+9R^4P^2}{16P^3}$; diſtantia, $\frac{-256R^5+72R^3P^2}{9P^4}$: Reſpectu EMG, verſus F.
F, momentum $\frac{-128R^6-96R^5P+9R^3P^3}{64P^3}$; diſtantia, I.
$\frac{-768R^5-576R^4P+54R^2P^3}{P^4}$.

Quatuor; Magnitudo, $\frac{64}{384}RP=\frac{1}{6}RP$: Reſpectu PMF, verſus G, mo- D.
mentum, $\frac{-6R^5+R^3P^2}{3P^2}$; diſtantia, $\frac{-12R^4+2R^2P^2}{P^3}$: Reſpectu F.
EMG, verſus P, momentum $\frac{R^4}{P}$; diſtantia, $\frac{6R^3}{P}$. I.

Quinque; Magnitudo, $\frac{125}{384}RP$: Reſpectu PMF, verſus E, momentum, D.
$\frac{-32R^6+25R^4P^2}{16P^3}$; diſtantia, $\frac{-768R^5+600R^3P^2}{125P^4}$: Reſpectu EMG, F.
verſus P, momentum, $\frac{384R^6-480R^5P+125R^3P^3}{192P^3}$; diſtantia, I.
$\frac{768R^5-960R^4P+250R^2P^3}{P^4}$.

Atque in reliquis ſimiliter.

Adeoque; Secundæ, Magnitudo, $\frac{7}{384}RP$: Reſpectu PMF, verſus D.
E, momentum, $\frac{96R^6-48R^5P-3R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$; diſtantia, F.
$\frac{768R^5-384R^4P-24R^3P^2+16R^2P^3}{7P^4}$: Reſpectu EMG, verſus I.
F, momentum, $\frac{-384R^6-96R^5P+48R^4P^2+R^3P^3}{192P^3}$; diſtantia,
$\frac{-768R^5-192R^4P+96R^3P^2+2R^2P^3}{7P^4}$.

Tertiæ; Magnitudo, $\frac{19}{384}RP$: Reſpectu PMF, verſus G, momentum, D.
$\frac{-96R^6-48R^5P+27R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$; diſtantia, F.
$\frac{-768R^5-384R^4P+216R^3P^2+16R^2P^3}{19P^4}$: Reſpectu EMG, ver- I.
ſus F, momentum, $\frac{128R^6-96R^5P-16R^4P^2+9R^3P^3}{64P^3}$; diſtantia,
$\frac{768R^5-576R^4P-96R^3P^2+54R^2P^3}{19P^4}$.

Quartæ;

D. Quartæ; Magnitudo, $\frac{37}{384} RP$: Reſpectu PMF, verſus G, momentum
F. $\frac{96R^6 - 96R^5P - 27R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$; diſtantia,
I. $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$: Reſpectu EMG, verſus P, momentum, $\frac{-128R^6 - 96R^5P + 64R^4P^2 + 9R^3P^3}{64P^3}$; diſtantia, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}$.

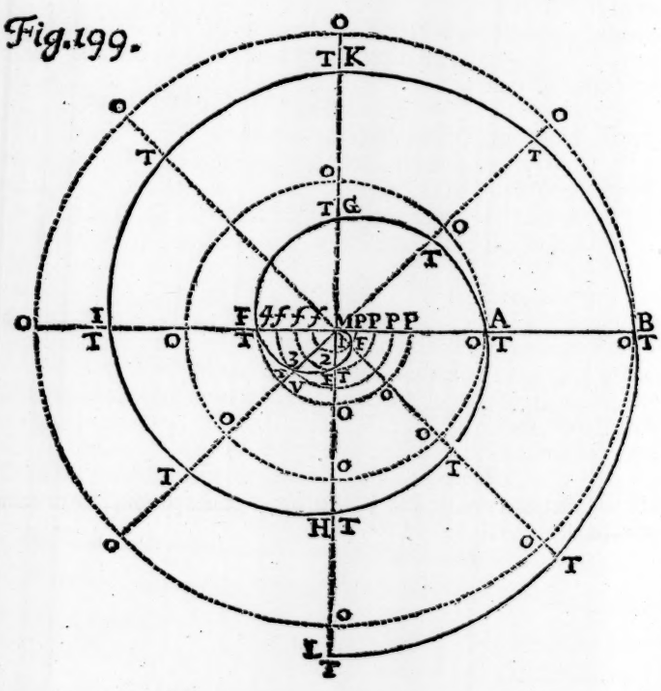
D. Quintæ; Magnitudo, $\frac{61}{384} RP$: Reſpectu PMF, verſus E, momentum,
F. $\frac{-96R^6 - 96R^5P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$; diſtantia,
I. $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$: Reſpectu EMG, verſus P, momentum, $\frac{384R^6 - 480R^5P - 192R^4P^2 + 125R^3P^3}{192P^3}$; diſtantia, $\frac{768R^5 - 960R^4P - 384R^3P^2 + 250R^2P^3}{61P^4}$.

Et ſimiliter in cæteris.

G. K. Quæque de *Figura Spirali* tradita ſunt; eadem *Solido Scalari* facile accommodantur.

A. Fig. 199, 200. SIt MTT Spiralis *Archimedea*; cujus natura hæc eſt: Dum recta quæpiam, ut MA, à ſitu ſuo MA (quod *Circulationis principium* vocant) manente puncto M ut Centro (quod vocant *Principium Spiralis*) æquabiliter circumdu-

Fig. 199.



cta, deſcribit circulum AOOA (quem vocant *Circulum primum*;) intelligitur Punctum aliquod T (quod voco *Punctum Lineans*) eodem tempore ab M ad A in

in circumducta recta M A æquabiliter promotum, motu hoc compoſito Spiralem M T T A deſcribere, (quem vocant *Spiralem Primæ circulationis* :) Eiſdemque motibus continuatis ; dum eadem recta M A, tantundem ad B protracta, hoc eſt M A B, ſecundo circumducta, deſcribit B O O B *Circulum ſecundum* ; Punctum Fig. 199, 200.

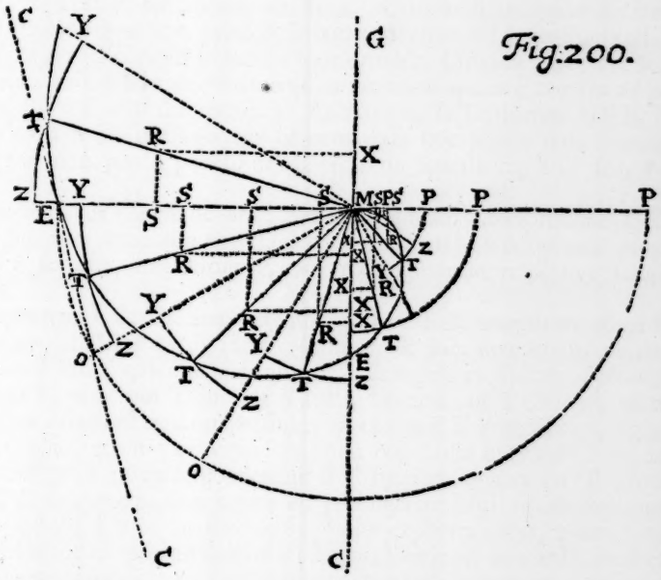


Fig. 200.

illud Lineans, ſimiliter ab A ad B promota, deſcribit A T T B *Spiralem circulationis Secundæ* : Et ſic deinceps, ad tertiam, quartam, aut etiam plures circulationes, quouſque libet.

Manifeſtum itaque eſt (ex conſtructione) rectas M T, reſpectivis angulis A M T, vel arcubus A O, (propter æquabilem utrobique motum) proportionales eſſe : Nempe, Quota pars eſt Arcus A O totius Peripheriæ ; vel Angulus A M T, quatuor rectorum ; ea pars eſt M T reſpectiva, totius M A : Vel etiam (ſumpta *Anguli* appellatione, laxiori ſenſu, pro Angulorum quotlibet Aggregato, quamquam duos rectos, aut etiam plures, vel æquet, vel ſuperet ; *Arcuſque* appellatione, pro Arcuum aggregato quovis, etiamſi ſuperet integram Circuli Peripheriam ; ut & *Sectoris* nomine, pro Sectorum quotlibet Aggregato, utut integrum Circulum vel etiam plures ſuperet ;) Quam habet rationem A M T Angulus (ſic ſumptus) ad quatuor rectos ; vel correſpondens arcus A O, ad peripheriam integram A O A ; eam habet reſpectiva recta M T, ad M A. Et ſic ubique.

Et, conſequenter ; ſi intelligatur Figuræ Spirali M T T M (curva M T T rectaque M T, ſumpto ubivis T ultimo, comprehenſa) aptari figura ex ſimilibus Sectoribus conflata ; (quorum commune Centrum ſit M, principium Spiralis ;) erunt eorum Radii Arithmetice proportionales, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4, &c. ſi figuram inſcriptam conſideremus ; vel ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſi circumſcriptam ; aut etiam ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, &c. hoc eſt ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. ſi his intermediam, partim inſcriptam, partim circumſcriptam ; quæ omnia, in partibus infinite exiguis, tantundem valent, ut ad prop. 1. hujus oſtenſum eſt :) Nempe, ut Series *Primanorum*. Adeoque Sectores ipſi (utpote in duplicata ratione Radiorum,) ut Series *Secundanorum*.

Et, conſequenter, eorum Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo æqualium ; hoc eſt (per def. 1. cap. 4.) M T M figura Spiralis, ad Sectorem conterminum P T M ; ut 1 ad 3 ; (per prop. 1. hujus :) ubicunque ſumatur T ultimum. Puta (poſito ultimo T in V,) M T T V M $= \frac{1}{3}$ M V P M. Et ſic ubique.

Et ſpeciatim, Figura Spiralis Primæ Circulationis, æqualis Trienti Circuli Primi : Et figura Spiralis Duarum Circulationum (bis computato quod bis deſcribitur,) æqualis Trienti Circuli Secundi bis ſumpti (ut qui Radio maximo bis circumducto bis deſcribitur :) Figura Spiralis Trium Circulationum (à principio B.

Fig. 199, 200. ſemper ordiendo,) toties computando quamlibet partem quoties iterato deſcribitur, (quippe quod prima circulatione deſcribitur, id in ſecunda repetitur; totumque hoc, in tertia; & ſic deinceps;) æqualis Trienti Circuli Tertii ter ſumpti (utpote qui à Radio maximo, ter circumducto, ter deſcribitur:)

Et ſic ſemper, ubicunque tandem terminetur (ſive in abſolutæ alicujus Circulationis termino, ſive loco quovis intermedio:) Nempe, Figuram Spiralem, Trientem eſſe Sectoris contermini, toties repetitis omnibus quoties ea iterato deſcribuntur, ſive à Radiis creſcentibus intra Spiralem, ſive à Radio maximo in contermino Sectore.

C. Sumptis igitur, ad idem M punctum, (à Principio Circulationis ordiendo,) angulis continuis quotlibet æqualibus, (cujuſcunque magnitudinis,) ut P M 1, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. quæ (à Spiralis Principio orſæ) huc pertingunt Figuræ Spirales; (puta M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, M 1 2 3 4 M, &c.) ſunt ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubi continue ſequentes; ſive ut Series Tertianorum. Cum enim (per ipſam ſpiralis conſtructionem) Radii M 1, M 2, M 3, &c. ſint arithmetice proportionales, ſeu ut Series Primanorum; puta ut a, $2a$, $3a$, &c. adeoque Sectores ſimiles ad hos Radios (utpote in Radiorum ratione duplicata,) ut a^2, $4a^2$, $9a^2$, &c. Series Secundanorum: Erunt (propter ipſos Sectorum angulos arithmetice proportionales, ſimiliter creſcentes ut a, $2a$, $3a$, &c.) Sectores M 1 P, M 2 P, M 3 P, &c. ut a^3, $8a^3$, $27a^3$, &c. (nempe in ea ratione quæ componitur ex ratione Angulorum, & ex duplicata ratione Radiorum,) quæ eſt ut ſeries Tertianorum. Adeoque & Conterminæ Figuræ Spirales, M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, &c. (utpote Sectorum illorum Trientes, ut modo oſtenſum eſt,) ut $\frac{1}{3}a^3$, $\frac{8}{3}a^3$, $\frac{27}{3}a^3$, &c. ſeries item Tertianorum; ſeu ut 1, 8, 27, &c. numeri cubi.

D. Et, conſequenter; quæ his continuis angulis æqualibus conveniunt Figuræ Spiralis Portiones; puta M 1 M, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. ut 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum 0, 1, 8, 27, 64, &c. differentiæ. (Quæ omnia in noſtra *Arithmetica Infinitorum*, fuſius expoſuimus; præſertim à prop. 24. ad prop. 38.)

Et, ſpeciatim, ſumptis Angulis rectis P M E, E M F, F M G, G M A, A M H, H M I, I M K, K M B, B M L, &c. Poſita figura Spirali M T E M = 1, erunt M T E F M = 8, M T E F G M = 27, M T E F G A M = 64, &c. Cum itaque ſit M T E F G A M triens circuli primi, (ut jam oſtenſum eſt;) hoc eſt, (poſito Circuli Primi Radio M A = R, & peripheria A O A = P, adeoque ipſo circulo primo A O A = $\frac{1}{2}RP$,) Figura Spiralis primæ Circulationis M T E F G A M = $\frac{1}{6}RP = \frac{64}{384}RP$: Erit quæ primo quadranti convenit figura Spiralis $\frac{1}{384}RP$; quæ Duobus $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$; quæ Tribus, $\frac{27}{384}RP = \frac{9}{128}RP$; quæ Quatuor (hoc eſt Figura Spiralis Primæ Circulationis) $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$; quæ Quadrantibus Quinque (repetito quod erat in primo) $\frac{125}{384}RP$; quæ Sex quadrantibus (repetito quod erat in binis primoribus) $\frac{216}{384}RP = \frac{9}{16}RP$; quæ Septem quadrantibus (repetito quod erat in tribus primoribus) $\frac{343}{384}RP$; quæ quadrantibus Octo; hoc eſt, binis Circulationibus (repetito quod erat in prima) $\frac{512}{384}RP = \frac{4}{3}RP$: quæ Novem quadrantibus (repetitis quæ fuerant prius deſcripta, & quidem toties quoties deſcripta fuerant,) $\frac{729}{384}RP = \frac{243}{128}RP$; & ſic deinceps quouſque opus erit. Nempe, univerſaliter, in ea ratione ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi,) qua eſt a^3 ad P^3, ſeu r^3 ad R^3. Puta $\frac{a^3R}{6P^2}$, vel $\frac{r^3P}{6R^2}$.

Adeoque, quæ Primo quadranti convenit, M T E M = $\frac{1}{384}RP$;
quæ Secundo, E M F = $\frac{7}{384}RP$; quæ Tertio, F M G, = $\frac{19}{384}RP$;
quæ Quarto, G M A = $\frac{37}{384}RP$; quæ Quinto, A M H = $\frac{61}{384}RP$;
quæ Sexto, H M I = $\frac{91}{384}RP$; quæ Septimo, I M K = $\frac{127}{384}RP$;
quæ Octavo, K M B = $\frac{169}{384}RP$; quæ Nono, B M L = $\frac{217}{384}RP$;
& ſic deinceps, quouſque libet, in ratione differentiarum numerorum Cuborum continue ſequentium.

E. His ita de Figurarum magnitudine conſtitutis; quo Centra gravitatis determinemus, eaſdem ad Duas Diametros, P M F, E M G, ſe mutuo in M decuſſantes, exigemus; earum momenta harum reſpectu, adeoque Centrorum gravitatis ab his diſtantias, inquirendo. Et primo quidem reſpectu ipſius P M F.

Sunt

Sunt autem (ut jam oſtenſum eſt) ſimilium Sectorum infinite exiguorum (ex quibus conflari intelligitur Figura Spiralis) Radii, ut totidem a, Arcus vel Anguli arithmetice proportionales ; adeoque Sectores ipſi, ut totidem a^2, eorum Quadrata. Fig. 199, 200.

Sed & eorum Centra gravitatis R in Sectoris cujuſque medio Radio ſimiliter ſita, utpote quæ ipſius Baſi (ſeu duobus trientibus) ab M diſtant (propter arcuum infinite-exiguorum quam ſupponimus cum chordis coincidentiam ; ſaltem, rationem infinite-exiguam ;) per prop. 14. hujus.

Et propterea illorum à PMF diſtantiæ RS,(fig.200.) ſunt in ratione Sinuum rectorum, Arcuum ſeu Angulorum arithmetice proportionalium, ad Radios item (MR) arithmetice-proportionales ; puta ut as ; hoc eſt in ratione quæ componitur ex s ſinuum angulorum arithmetice proportionalium, & a radiorum ſimiliter in proportione arithmetica creſcentium.

(Nequis autem hæreat, eo quod non ſit idem angulus PMR (cui convenit RS,) qui eſt Sectoris PMY, (propter rectam MRT per medium Sectoris ZMY incedentem :) Id nihili res eſt. Quippe ; ſi ponantur anguli PMY, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt anguli PMR, ſeu PMT, ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. Quæ, in partibus innumeris, infinite exiguis, tantundem valent. Ut ad prop. 1. hujus, oſtenſum eſt.)

Erunt itaque eorum, reſpectu ipſius PMF, Momentorum ratio (utpote ex ratione magnitudinum a^2, & diſtantiarum as, compoſita,) ut $a^3 s$; hoc eſt, ut a^3 ſeries Tertianorum (ſeu cuborum quantitatum arithmetice proportionalium) in s reſpectivos Sinus rectos arcuum ſeu angulorum arithmetice proportionalium. (Perinde autem eſt, Momentum quod ſpectat, ſive ponantur Pondera a^2 in diſtantiis as, ſive Pondera a^3 in diſtantiis s ; quippe utrobique Momenta erunt $a^3 s$.) Et quidem, pro duobus quadrantibus primoribus, ad (ipſius PMF) partes E, quam Ponderationem ſigno + deſignabimus ; pro duobus ſequentibus, ad partes contrarias, hoc eſt ad G, (propter quantitates ipſas, ad contrarias rectæ PMF partes, poſitas,) quam Ponderationem Signo — deſignabimus. Et ſimiliter in quadrantibus ſequentibus faciendum erit, prout ad illas vel iſtas partes ponantur : Nempe, pro quadrantibus Quinto & Sexto, ponendum ſignum + ; pro Septimo & Octavo, ſignum — : & ſic deinceps (alternatim) duobus intermiſſis.

Quod tantundem eſt atque ſi totidem $\beta\upsilon$ (ipſis s proportionales) complentes figuram Sinuum Rectorum $\alpha\tau\varkappa$ (fig. 170.) vel (quæ eandem aliquoties repetitam exhibet) $M\upsilon F\upsilon A\upsilon I$ (fig. 201.) quouſque opus erit continuandam, (ad alteras atque alteras ipſius MFAI partes poſitam, prout ipſius figuræ Spiralis ſitus poſtulat ;) onerentur reſpectivis a^3, in triplicata ratione ſuarum ab M diſtantiarum, arithmetice-proportionalium ; hoc eſt, ſerie Tertianorum.

Sive (quod tantundem eſt, propter diſtantias $M\beta = a$,) ut Momentum (reſpectu ipſius MP fig. 201.) omnium $a^2 s$; hoc eſt omnium $\beta\upsilon = s$, reſpectivis a^2 onuſtarum. (Signis + — rite conſideratis.)

Hoc eſt, per prop. 10. hujus, ut *Aggregatum omnium* $a^2 s$, (uſque ad a maximum) toties ſump-

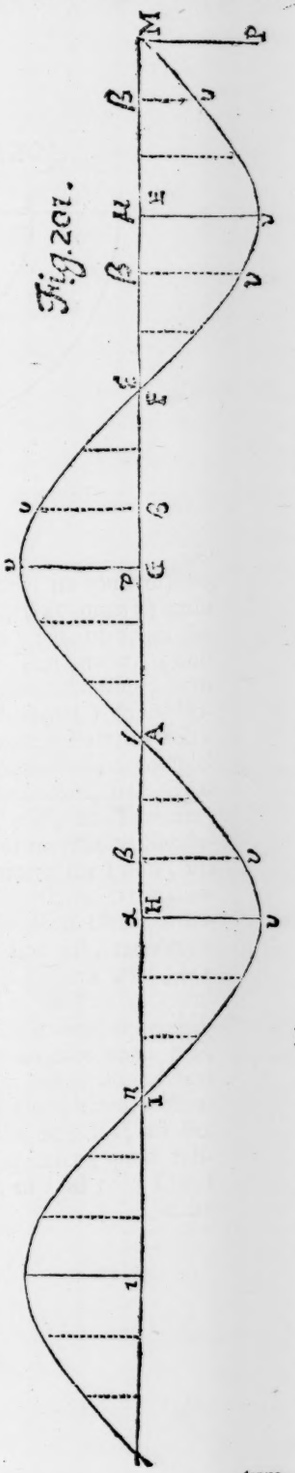


Fig. 201.

Fig. 201. tum, (hoc eſt in *a* ductum ;) demptis *Omnibus Aggregatis* ejuſmodi uſque ad reſpectivos *a* arithmetice proportionales.

Eſt autem illud *Aggregatum Omn.* $a^2 s, = -a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. Nempe, Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α ; cui reſpondet, in noſtro caſu, Ungulæ M $\beta\upsilon$ fig. 201. aciem habentis P M, Momentum reſpectu P M.) Adeoque illud toties ſumptum, hoc eſt, in a = M β ductum, eſt $-a^3R^2 + 2a^2sR^2 + a^3vR - 2avR^3$.

Quod quo rite intelligatur, conſiderandum eſt ; per s, intelligendum eſſe ſinum rectum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc eſt M β fig. 201. convenientem ; hoc eſt, ipſam $\beta\upsilon$ rectam ; quæ interpretanda erit affirmative vel negative, prout citra vel ultra M F A jaceat: Sicut & in ipſo circulo Sinus Recti in contrariis ſemicirculis, contrariis ſignis affici intelligantur ; utpote ad contrarias diametri partes poſiti: Item, per v intelligendum eſſe Sinum verſum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc eſt, M β fig. 201. convenientem. Si autem β ſumatur citra F ; adeoque in primo Semicirculo ; nihil eſt quo quis hæreat ; (quippe hoc ſæpius oſtenſum eſt, in prop. 17, de figura Sinuum Rectorum $\alpha\tau\varkappa$ fig. 170.) Si vero ultra F qui terminus eſt primi Semicirculi (cui convenit ſinus verſus $v = 2R$, & Sinus Rectus $s = 0$) ſumatur β ; (quod tantundem eſt atque ſi in fig. 169. poſt abſolutum ſemicirculum A D α, continuandus eſſet arcus, ultra α, in Semicirculo oppoſito, ſurſum, verſus A, puta A D $\alpha\theta$,) Sinus Rectus contrario Signo afficiendus eſſet ; & decreſceret Sinus verſus (ſubducto ex $2R$, quantum eſſet ſinus verſus continuati arcus $\alpha\theta$, ab α inchoandus ;) uſque dum, abſoluto ſecundo Semicirculo, ad A fig. 169. perventum fuerit, evaneſcente tum Sinu Recto, ſecunda vice, in $s = 0$, tum Sinu verſo in $2R - 2R = 0$. Sin porro procedatur, ultra circulum integrum, ad tertium Semicirculum ; ibidem Sinus Rectus Affirmative interpretandus erit, & creſcet iterum Sinus Verſus ; Qui in quarto iterum decreſcet, & Sinus Rectus negative interpretandus : Et ſic porro, alternis vicibus. Quippe eadem recta A V fig. 169. (= A α − α V = A α − α A + A V, &c.) eſt ſinus verſus, tum Arcus A B, tum (reſidui ad Circulum integrum) A D $\alpha\theta$, aut etiam (ultra Circulum continuati) A D $\alpha\theta$ A B : Item arcus A B, ſinus V B = s affirmative interpretandus, arcuſque A B $\alpha\theta$, ſinus oppoſitus V θ = − s negative interpretandus ; iterumque Arcus A B $\alpha\theta$ A B, ſinus V B = s ; & Arcus A B $\alpha\theta$ A B $\alpha\theta$, ſinus V θ = − s : Et ſic deinceps, ſi ad plures integros circuitus procedendum erit.

Porro ; propter *Aggregatum Omn.* $a^2 s, = -a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$, (ut modo oſtenſum eſt ;) erunt *Omn. Aggregata* $a^2 s, = Omn. - a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$; ſumptis a arithmetice proportionalibus uſque ad a maximum, hoc eſt M β.

Sunt autem *Omn.* $a^2 = \frac{1}{3}a^3$, per prop. 1. hujus ; Ergo, *Omn.* $-a^2R^2, = -\frac{1}{3}a^3R^2$.

Et *Omn.* $as = -eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. (eſt utique Trilinei $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. momentum reſpectu A a,) Ergo, *Omn.* $2asR^2 ; = -2eR^4 + 2avR^3$.

Et *Omn.* $a^2 v, = -2eR^3 + 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R - a^2sR$, per § L. prop. 19. (Nempe Ungulæ A b K fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α.) Ergo, *Omn.* $a^2 vR, = -2eR^4 + 2avR^3 + \frac{1}{3}a^3R^2 - a^2sR^2$.

Et *Omn.* $v, = eR$, per § B. prop. 17. (Eſt utique Trilineum A b K fig. 170.) Ergo, *Omn.* $-2vR^3 = -2eR^4$.

Ergo, *Omn. Aggregat.* $a^2 s, = Omn. - a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$; $= -\frac{1}{3}a^3R^2 - 2eR^4 + 2avR^3 - 2eR^4 + 2avR^3 + \frac{1}{3}a^3R^2 - a^2sR^2 - 2eR^4 = -6eR^4 + 4avR^3 - a^2sR^2$.

Atque hoc demum ſubductum ex, *Aggregat.* $a^2 s$, in a maximum, $= -a^3R^2 + 2a^2sR^2 + a^3vR - 2avR^3$; relinquit *Omn.* $a^3 s : = 6eR^4 - 6avR^3 - a^3R^2 + 3a^2sR^2 + a^3vR$.

Fig. 199, 200. Cum itaque ſingulorum Sectorum exiguorum Angulus ſit, verbi gratia, infiniteſima pars quatuor rectorum ; cui reſpondeat. in Circulo primo, arcus T = $\frac{1}{\infty}$ P ; adeoque in ſuis P T peripheriis conterminis, $t = \frac{a}{P}T$; (poſito a pro arcu circuli primi qui reſpondeat angulo P M T ;) & propterea eorum magnitudines ſint

sint $\frac{1}{2}tr$ (sumptis tum t tum r arithmetice proportionalibus; sintque Centrorum gravitatis ab M distantiæ $RM=\frac{2}{3}r$; adeoque eorundem à PMF distantiæ (utpote ad RM, ut Sinus Rectus anguli PMR ad Radium, seu ut s ad R,) $RS=\frac{2sr}{3R}$; adeoque eorum respectu PM momenta $\frac{1}{2}tr\times\frac{2sr}{3R}=\frac{tr^2s}{3R}$, (sumptis tum t, tum r, arithmetice proportionalibus, ipsisque s pro sinubus rectis arcuum arithmetice proportionalium ad Radium R;) adeoque (ut prius etiam ostensum est) in ratione ipsorum a^3s: Si, pro *Omnibus* a^3s, $=6eR^4-6avR^3-a^3R^2+3a^2sR^2+a^3vR$, substituantur Totidem $\frac{tr^2s}{3R}=\frac{6etr^2R^3-6avtr^2R^2-a^3tr^2R+3a^2str^2R+a^3vtr^2}{3a^3}$; habetur figuræ Spiralis, quousque libet continuatæ, (cujus Radius ultimus $MT=r$,) momentum respectu rectæ PMF, (toties computata parte qualibet quoties iterato describitur,) & quidem vel ad partes E, vel ad partes G; prout signum + aut — prævaleat. Aut etiam, (propter $t=\frac{aT}{\mathcal{P}}$,) $\frac{6er^2R^3(=6ar^2R^3-6sr^2R^3)-6avr^2R^2-a^3r^2R+3a^2sr^2R+a^3vr^2}{3a^2\mathcal{P}}T$: Vel, (propter eandem ubique rationem r ad a, quæ est R ad $\mathcal{P}$; utpote in eadem ratione semper crescentibus r & a, donec perveniatur illic ad R, hic ad $\mathcal{P}$, in termino primi circuli;) $\frac{6aR^5-6sR^5-6avR^4-a^3R^3+3a^2sR^2+a^3vR^2}{3\mathcal{P}^3}T$: Vel (neglecto T; quippe dum T ponitur pro $\frac{1}{\infty}\mathcal{P}$, infinitesima parte ipsius $\mathcal{P}$, & $\mathcal{P}$ pro earundem in $\mathcal{P}$ linea partium numero; tantundem erit $\mathcal{P}T$, atque ipsa $\mathcal{P}$ linea;) $\frac{6aR^5-6sR^5-6avR^4-a^3R^3+3a^2sR^3+a^3vR^2}{3\mathcal{P}^3}$.

Sunt autem, ut ex prædictis patet, singulorum Sectorum exiguorum magnitudines, $\frac{1}{2}tr$; hoc est, $\frac{arT}{2\mathcal{P}}$; seu $\frac{a^2RT}{2\mathcal{P}^2}$, (propter $r=\frac{a}{\mathcal{P}}R$.) Adeoque omnium summa $\frac{a^3RT}{6\mathcal{P}^2}$ vel $\frac{a^3R}{6\mathcal{P}^2}$ (utpote ad maximum toties sumptum, ut 1 ad 3; per prop. 1. hujus.) Nempe in ea ratione ad $\frac{1}{6}R\mathcal{P}T$ vel (neglecto T) ad $\frac{1}{6}R\mathcal{P}$, (trientem circuli primi, seu figuram spiralem primæ circulationis,) ut a^3, ad $\mathcal{P}^3$, seu ut r^3 ad R^3; hoc est, ut Cubus Radii terminalis MT, ad Cubum MA radii circuli primi.

Per hanc itaque Magnitudinem, si dividamus Momentum modo traditum; habebitur $\frac{12aR^4-12sR^4-12avR^3-2a^3R^2+6a^2sR^2+2a^3vR}{a^3\mathcal{P}}$ Centri gravitatis figuræ Spiralis (quousque libet continuatæ) MTT (toties computatis singulis partibus quoties iterato describuntur) distantia à recta PMF; & quidem vel ad partes E vel ad partes G, (sive Momenta spectemus, sive distantiam Centri gravitatis,) prout signum + vel — prævaluerit.

Notandum interim (ne hæc perperam intelligantur) in semicirculationibus secunda, quarta, sexta, (reliquisque in locis paribus,) pro Momentis his atque Distantiis æstimandis, sinum s negative interpretandum esse; utpote, in his semicirculis, ad contrarias Diametri partes positum: Adeoque ita exponendum atque si contrario ubique signo afficeretur. Quod & ante insinuatum est.

Et quidem, pro integris Circulationibus absolutis, (propter tum $s=0$, tum $v=0$, in fine cujusque circulationis,) Magnitudines erunt, $\frac{a^3\mathcal{P}}{6\mathcal{P}^2}$; Momenta respectu PMF (neglecto T, ob causam modo dictam,) $\frac{6aR^5-a^3R^3}{3\mathcal{P}^3}$; (toties repetitis omnibus quoties iterato describuntur;) distantiæ centrorum gravitatis à PMF

Fig. 199, 200.

F.

Fig. 199, 200. PMF versus E, $\frac{12R^4-2a^2R^2}{a^2\mathcal{P}}$; Hoc est, (propter signum —, prævalens; est utique, hoc casu, a^2 semper plus quam $6R^2$; non potest enim a in fine circulationis, minor esse quam $\mathcal{P}$;) distantiæ à PMF versus G, $\frac{-12R^4+2a^2R^2}{a^2\mathcal{P}}$. In quibus omnibus, exponetur a, in fine Circulationis Primæ, per $\mathcal{P}$; in fine secundæ, per $2\mathcal{P}$; Tertiæ, per $3\mathcal{P}$; & sic deinceps.

Pro Circulationibus Dimidiis, quæ integram Circulationem non terminant; (puta, pro una, tribus, quinque, &c.) propter $s=0$, & $v=2R$; erunt magnitudines (ut prius) $\frac{a^3R}{6\mathcal{P}^2}$; Momenta respectu PMF $\frac{-6aR^5+a^3R^3}{3\mathcal{P}^3}$; distantiæ à PMF versus E, $\frac{-12R^4+2a^2R^2}{a^2\mathcal{P}}$. In quibus exponetur a, in fine Semicirculationis primæ, per $\frac{1}{2}\mathcal{P}$; tertiæ, per $\frac{3}{2}\mathcal{P}$; quintæ, per $\frac{5}{2}\mathcal{P}$; & sic deinceps. Adeoque signum +, in hoc casu, semper prævalet: propter Quadratum, Semiperipheriæ majus quam sex quadrata Radii.

Pro Circulationibus Quadrantalibus, quæ Semicirculationem non terminant, (puta, pro prima, tertia, quinta, &c.) propter tum $s=R$, pro prima, quinta, nona, &c. sed $s=-R$, pro tertia, septima, undecima, &c. tum $v=R$ in omnibus: magnitudines erunt (ut prius) $\frac{a^3R}{6\mathcal{P}^2}$; Momenta respectu PMF, $\frac{-6R^6+3a^2R^4}{3\mathcal{P}^3}$ $=\frac{-2R^2+a^2}{\mathcal{P}^3}R^4$; distantiæ à PMF, versus E, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3\mathcal{P}}$; nempe pro prima, quinta, nona, &c. In quibus exponetur a, in fine Quadrantis primi, per $\frac{1}{4}\mathcal{P}$; quinti, per $\frac{5}{4}\mathcal{P}$; noni, per $\frac{9}{4}\mathcal{P}$; & sic deinceps. Et signum +, prævalet: propter quadratum Arcus Quadrantalis, majus quam Duo quadrata Radii. Sed, pro tertia, septima, undecima, &c. (propter s contrario signo exponendum, seu $s=-R$;) Momenta erunt $\frac{+6R^6-3a^2R^4}{3\mathcal{P}^3}=\frac{+2R^2-a^2}{\mathcal{P}^3}R^4$; Distantiæ, $\frac{+12R^5-6a^2R^3}{a^3\mathcal{P}}$; adeoque (propter a, interpretandum per, $\frac{3}{4}\mathcal{P}, \frac{7}{4}\mathcal{P}, \frac{11}{4}\mathcal{P}$, &c.) signum — prævalebit; eruntque tum Momenta, tum Distantiæ, versus G.

Sin libeat singulos quadrantes seorsum perpendere, (non, ut hactenus, inchoando à principio, omniaque toties repetendo quoties iterato describuntur;) illud sic fiet.

De Primo quadrante, MTEM, jam ostensum est, magnitudinem esse $\frac{a^3R}{6\mathcal{P}^2}$, hoc est (propter $a=\frac{1}{4}\mathcal{P}$,) $\frac{1}{384}R\mathcal{P}$; Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6+a^2R^4}{\mathcal{P}^3}$ $=\frac{-32R^6+R^4\mathcal{P}^2}{16\mathcal{P}^3}$; distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3\mathcal{P}}=\frac{-768R^5+24R^3\mathcal{P}^2}{\mathcal{P}^4}$.

Magnitudo Primæ Semicirculationis, MTEFM, est $\frac{a^3R}{6\mathcal{P}^2}$; hoc est, (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$,) $\frac{1}{48}R\mathcal{P}$: Momentum respectu PMF, $\frac{-6aR^5+a^3R^3}{3\mathcal{P}^3}=\frac{-24R^5+R^3\mathcal{P}^2}{24\mathcal{P}^2}$; distantia versus E, $\frac{-48R^4+2R^2\mathcal{P}^2}{\mathcal{P}^3}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis, $\frac{-32R^6+R^4\mathcal{P}^2}{16\mathcal{P}^3}$; Habetur Quadrantis secundi MEFM, Momentum respectu PMF, $\frac{96R^6-48R^5\mathcal{P}-3R^4\mathcal{P}^2+2R^3\mathcal{P}^3}{48\mathcal{P}^3}$; Adeoque propter magnitudinem

nitudinem (§ D. traditam) $\frac{7}{384} RP$; Distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{768R^5 - 384R^4P - 24R^3P^2 + 16R^2P^3}{7P^4}$. Fig. 199. 200.

Magnitudo Trium quadrantalium circulationum, MTEFGM, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{9}{128} RP$, (propter $a = \frac{3}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{2R^5 - a^2R^4}{P^3} = \frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; (adeoque versus G, propter prævalentiam signi — ; hoc est, revera, $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$ versus G.) Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{12R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; hoc est (propter signum — prævalens,) versus G, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$.

Ex hujus momento, si subducatur momentum primæ semicirculationis $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Habetur momentum Tertiæ quadrantalis MFGM, $\frac{96R^6 + 48R^5P - 27R^4P^2 - 2R^3P^3}{48P^3}$: Adeoque propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{19}{384} RP$; Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{768R^5 + 384R^4P - 216R^3P^2 - 16R^2P^3}{19P^4}$; hoc est, revera, versus G, $\frac{-768R^5 - 384R^4P + 216R^3P^2 + 16R^2P^3}{19P^4}$.

Magnitudo integræ Circulationis primæ, MTEFGAM, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{1}{6} RP$, (propter $a = P$,) Momentum respectu PMF, $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} = \frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$: Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P} = \frac{12R^4 - 2R^2P^2}{P^3}$; hoc est (propter prævalentiam signi —, (versus G, $\frac{-12R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$.

Ex hujus Momento ; si subducatur Momentum Circulationis Dodrantalis $\frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantalis Quartæ MGAM Momentum respectu PMF, $\frac{-96R^6 + 96R^5P + 27R^4P^2 - 16R^3P^3}{48P^3}$: & (propter magnitudinem $\frac{37}{384} RP$,) Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-768R^5 + 768R^4P + 216R^3P^2 - 128R^2P^3}{37P^4}$; hoc est (revera) versus G, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$.

Magnitudo Quinque Quadrantalium MTEFGAHM, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{125}{384} RP$, (propter $a = \frac{5}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6 + a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6 + 25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia Centri gravitatis à PMF, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5 + 600R^3P^2}{125P^4}$, versus E.

Ex hujus Momento, si subducatur momentum Primæ Circulationis, $\frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$; Habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, MAHM, $\frac{-96R^6 - 96R^5P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384} RP$;) Distantia Centri gravitatis à PMF, versus E, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$

Et sic deinceps, quousque libet. Atque

Fig. 199, 200. G. Atque eadem opera determinavimus tum Magnitudinem, tum Momentum & Centri gravitatis ab erecto ſuper rectam P M F plano diſtantiam, Solidi *Scalaris*, ſuper Figuram Spiralem T T M obliquo ſitu aſcendentem poſiti, eandem ubique habentis altitudinem (quamlibet) ſupra oblique aſcendentem figuram Spiralem; quæ quidem altitudo ſit etiam cujuſvis puncti in ſequenti qualibet circulatione diſtantia à ſubjecto proxime præcedentis Circulationis puncto.

Quippe ad hoc nihil aliud requiritur, quam ut T (quæ pro infiniteſima parte Peripheriæ circuli primi habebatur, adeoque negligi poterat,) jam habeatur pro illa quantalibet Altitudine; in Solidi tum Magnitudine tum Momento æſtimando: Diſtantia vero Centri gravitatis à plano P M F, eadem hic erit quæ prius erat à P M F recta.

Si autem Solidum hoc utcunque Truncatum intelligatur; vel ſuperne, ne ad M apicem pertingat; vel inferne, puta quo baſem planam Horizontalem habeat; vel alias quomodolibet: non erit difficile, præmiſſa rite perpendentibus, amputati rationem habere; quodque inde oritur diſcriminis ſive in Magnitudine, ſive in Momento, & Centri gravitatis diſtantia.

Vel etiam ſi pro eadem (quam hic ponimus) Altitudine, aut Circulationum intervallo, (unde continuo mutabitur acclivitas aſcendentis plani) eandem velimus retentam acclivitatem, (unde variabitur altitudo, quæ pro decreſcentibus circulis continuo decreſcet;) ſimili proceſſu habebitur tum Solidi Magnitudo, tum Momentum, Centrique gravitatis à P M F plano diſtantia: Sed Calculo paulo adhuc intricatiori, propter novam adhuc cum cæteris componendam rationem, pro variata altitudine. Verum omnia ſigillatim proſequi mihi non eſt in animo, ne nimius ſim. Ad figuram itaque ſpiralem redeo.

H. Ut autem ejuſdem M T T M figuræ Spiralis Momentum (quod hactenus ad P M F rectam expendimus,) ad rectam E M G expendamus: conſiderandum eſt, Centrorum gravitatis Sectorum exiguorum diſtantias ab E M G, eſſe ipſos R X (fig. 200.) ſinus Complementi earundem arcuum quorum Sinus recti ſunt R S; (atque ad eoſdem radios R M continue creſcentes in proportione arithmetica;) puta ut ax; (poſitis x pro ſinibus complementi, ipſis s reſpondentibus: hoc eſt, pro V C Sinibus Complementi arcuum A B, fig. 169. quorum Sinus recti ſunt B V.)

Adeoque (propter magnitudines, ut ſupra dictum eſt, ut a^2,) momenta reſpectu rectæ E M G, erunt ut a^3x ($=a^2 \times ax$:) Hoc eſt, ut a^3 ſeries Tertianorum, in reſpectivos x arcuum arithmetice proportionalium *Co-ſinus* ſeu ſinus complementi: Hoc eſt, in ipſas $\beta\upsilon$ rectas, complentes figuram $\delta\varkappa\tau$ (fig. 170.) quouſque opus erit continuandam; Hoc eſt in ipſas $\beta\upsilon$ complentes figuram $\mu\nu\varepsilon\upsilon\gamma\upsilon\varkappa$ Fig. 201. (fig. 201.) quouſque opus eſt continuandam; inchoandam autem, non (ut prius) ab M P, ſed à $\mu\nu$. (Eſt utique eadem $\upsilon\beta$ recta, tum *Sinus rectus* arcus, in rectam extenſi, M β; tum *Co-ſinus* arcus, in rectam extenſi, $\mu\beta$.

Nam, ut Sinus s, à minimo incipiunt continue creſcendo uſque ad quadrantis finem, ubi decreſcere incipiunt: Sic, vice verſa, eorundem arcuum *Co-ſinus* x, ſeu Sinus Complementi, à maximo incipiunt continue decreſcendo ad finem uſque quadrantis; ubi creſcere incipiunt, ſed ad contrarias partes ipſius E M G rectæ.

Quæ enim ſpectant ad quadrantem Primum, Quartum, Quintum, Octavum, Nonum, &c. ponderant ad rectæ E M G fig. 199, 200. partes P; (quam ponderationem ſigno + deſigno:) quæ autem pertinent ad quadrantem Secundum, Tertium, Sextum, Septimum, Decimum, &c. ponderant in partes contrarias, hoc eſt ad F; (quam ponderationem ſigno — deſigno;) & ſic deinceps, alternatim, duos intermittendo continuos quadrantes ſeu integrum Semicirculum.

Quem ſitum imitantur ipſius figuræ $\mu\nu\varepsilon\upsilon\gamma\upsilon\upsilon$, &c. (fig. 201.) portiones, ad alias atque alias rectæ $\mu\chi$ partes poſitæ.

Quæ quidem eadem eſt figura atque C A b k (fig. 170.) quouſque opus erit continuanda: Cujus portiones C A b k, vel C A d b k, fig. 170. (hoc eſt, $\mu\upsilon\upsilon\beta$, vel $\mu\upsilon\varepsilon\upsilon\beta$, fig. 201, ubicunque in ſinuoſa curva, $\mu\upsilon$ inchoata, ſumatur υ punctum,) conſideravimus, ad § B. prop. 17. oſtendimuſque iſtiuſmodi figuræ magnitudinem eſſe $s R$, æqualem facto ex reſpectivi Arcus $\mu\beta$ (ſeu Anguli A M T fig. 199, 200.) Sinu recto, in Radium ducto; habita tamen (prout ad alias atque alias rectæ partes jaciunt figuræ portiones) debita ſignorum + — conſideratione.

Quo

Quo itaque habeantur *Omnia* $a^3 x$; Hoc eſt, Omnes x, (ſeu $\beta\upsilon$ rectæ figuram $\mu\upsilon\varsigma\upsilon\gamma$, &c. complentes) reſpectivis a^3 (ſerie Tertianorum) onuſtæ: Intelligamus, juxta doctrinam prop. 10. hujus, (quam ſæpius in auxilium advocavimus,) ſingulas α, β, γ, &c. fig. 135. æqualiter ab invicem remotas, totidem eſſe reſpectivas x rectas; adeoque ipſam A E onuſtam, ſeu Omnia, $\alpha+\beta+\gamma$, &c. $=Omn.\ x$, $=sR$, ut jam oſtenſum eſt, ex § B. prop. 17. Fig. 135.

Horumque omnium momenta reſpectu axis A; hoc eſt, *Omn.* ax; ſunt ipſæ onuſtæ rectæ, A E + B E + C E, &c. hoc eſt, totidem A E, demptis omnibus A B + A C, &c. Hoc eſt, (propter A E $= sR$,) totidem sR ultimis (ſeu asR,) demptis omnibus sR antecedentibus, pro arcubus arithmetice proportionalibus uſque ad a ultimum.

Sunt autem (pro arcubus a arithmetice proportionalibus) *Omn.* s, $=vR$, per § Q. prop. 17. (utpote ipſa $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170.) Adeoque *Omn.* sR, $=vR^2$. Hoc itaque ex asR ſubducto, habetur $asR - vR^2 = Omn.\ ax$.

Intelligantur deinde eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem ax: adeoque onuſta recta A E $= Omn.\ ax$, $= asR - vR^2$. Horumque omnium momenta reſpectu ipſius A; hoc eſt *Omn.* a^2x; ſunt ipſæ A E + B E + C E, &c. rectæ ſic onuſtæ. Hoc eſt, totidem A E, ($= a^2sR - avR^2$,) demptis Omnibus A B + A C, &c. hoc eſt, omnibus $asR - vR^2$, pro arcubus a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro arcubus a arithmetice proportionalibus) *Omn.* as, $= -eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. (utpote momentum ipſius $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. reſpectu rectæ A α;) adeoque *Omn.* asR, $= -eR^3 + avR^2$.

Item *Omn.* v, $= eR$, per § B. prop. 17. (utpote ipſum A b K trilineum, fig. 170.) adeoque *Omn.* $-vR^2$, $= -eR^3 = -aR^3 + sR^3$.

Ergo, *Omn.* $asR - vR^2 := -2eR^3 + avR^2 = -2aR^3 + 2sR^3 + avR^2$.

Hoc itaque, ex $a^2sR - avR^2$, ſubducto; habetur $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR = Omn.\ a^2x$.

Intelligantur denique eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem a^2x: adeoque onuſta recta A E, $= Omn.\ a^2x$, $= 2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$. Horum itaque omnium momenta reſpectu axis A; hoc eſt, *Omn.* a^3x; ſunt ipſæ A E + B E + C E, &c. ſic onuſtæ: Hoc eſt, totidem A E, ($= 2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$,) demptis A B + A C, &c. Hoc eſt, omnibus, $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, pro arcubus a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro a arithmetice proportionalibus) *Omn.* a, $= \frac{1}{2}a^2$, per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn.* $2aR^3$, $= a^2R^3$.

Item, *Omn.* s, $= vR$, per § Q. prop. 17. adeoque *Omn.* $-2sR^3 = -2vR^4$.

Item, *Omn.* av, $= \frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, per § H. prop. 17. (utpote momentum trilinei A b K. fig. 170. reſpectu A α;) adeoque *Omn.* $-2avR^2$, $= -a^2R^3 + 2asR^3 - 2vR^4$.

Item, *Omn.* a^2s, $= -a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. (nempe Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α;) Adeoque *Omn.* a^2sR, $= -a^2R^3 + 2asR^3 + a^2vR^2 - 2vR^4$.

Ergo, (horum aggregatum) *Omn.* $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, $= -a^2R^3 + 4asR^3 + a^2vR^2 - 6vR^4$.

Hoc itaque ſubducto, ex $2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$; habetur, $6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$, $= Omn.\ a^3x$.

Atque ad eandem formam (eadem quoties opus erit repetendo veſtigia) procedendum eſſet, ſi porro *Omnia* a^4x, *Omnia* a^5x, (aut etiam ultra) inquirenda eſſent: Vel etiam, ſi loco ipſorum x, aliæ quælibet quantitates ponerentur. Quod hic obiter monitum eſto.

Cum itaque (ut jam ante oſtenſum eſt § E.) ſingulorum Sectorum exiguorum Magnitudines, ſint $\frac{1}{2}tr = \frac{arT}{2P} = \frac{a^2RT}{2P^2}$; diſtantiæq; ab EMG, RX $= \frac{2rx}{3R} = \frac{2ax}{3P}$, (poſito Fig. 199, 200.

Fig. 199, 200. ſito x pro Co-ſinu anguli vel arcus a, ad Radium R ;) adeoque momenta reſpectu EMG, $\frac{a^2RT}{2P^2} \times \frac{2ax}{3P} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$; vel (neglecto T, ob cauſam aliquoties dictam,) $\frac{a^3xR}{3P^3}$: Erit (propter *Omn.* a^3x, $= 6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$,) Momentum Spiralis MTTTM, reſpectu rectæ EMG, *Omn.* $\frac{a^3xR}{3P^3}$, $= \frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3}$.

Adeoque, (propter magnitudinem, jam ante traditam, $\frac{a^3R}{6P^2}$, Diſtantia Centri gravitatis ab EMG recta, $\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$. Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, (ſive momentum ſeu ponderationem ſpectemus, ſive diſtantiam Centri gravitatis,) prout vel ſignum +, vel ſignum —, prævaluerit.

I. Et quidem, pro integris quotlibet circulationibus abſolutis, Momenta erunt $\frac{a^2R^4}{P^3}$ (cæteris evaneſcentibus, propter tum $s = 0$, tum $v = 0$;) adeoque (propter magnitudines $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Diſtantia Centri gravitatis, ab EMG, verſus P, $\frac{6R^3}{aP}$. Ubi exponendus eſt a in fine Circulationis primæ, per P ; ſecundæ, per $2P$; tertiæ, per $3P$; &c.

Pro dimidiatis Circulationibus, quæ integras non terminant, (una, tribus, quinque, &c.) propter $s = 0$, & $v = 2R$; Momenta ſunt, $\frac{12R^6 - 3a^2R^4}{3P^3} = \frac{4R^6 - a^2R^4}{P^3}$; & (propter Magnitudines, ut prius, $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Diſtantiæ Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{24R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; Hoc eſt revera (propter prævalentiam ſigni —,) verſus F, $\frac{-24R^5 + 6a^2R^3}{a^3P}$: Exponendus utique eſt a in fine Semicirculationis Primæ, per $\frac{1}{2}P$; Tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; Quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & ſic deinceps: adeoque a^2 in omnibus plus erit quam $4R^2$; eſt enim, $\frac{1}{2}P$ plus quam $2R$.

Pro circulationibus quadrantalibus (quæ Semicirculationes non terminant) una, tribus, quinque, &c. propter tum $s = R$ in prima, quinta, nona, &c. & $s = -R$, in tertia, ſeptima, undecima, &c. tum $v = R$, in ſingulis: Momenta ſunt $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3}$; & (propter magnitudines, ut prius,) Diſtantiæ Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P}$; nempe pro prima, quinta, nona, &c. ſed, pro tertia, ſeptima, undecima, &c. (propter s contrario ſigno exponendum,) Momenta $\frac{6R^6 + 6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$; Diſtantiæ, verſus P, $\frac{12R^5 + 12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P}$; hoc eſt, (propter prævalentiam ſigni —,) verſus F, $\frac{-12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P}$. Exponendus autem eſt a, in prima, tertia, quinta, &c. per $\frac{1}{4}P, \frac{3}{4}P, \frac{5}{4}P$, &c.

Si libeat ſingulos Circulationum Quadrantes ſeorſum perpendere, id facile fiet.

Quadrantis Primi MTEM, momentum reſpectu EMG, jam oſtenſum eſt $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3} = \frac{384R^6 - 96R^5P + R^3P^3}{192P^3}$ (propter $a = \frac{1}{4}P$:) Diſtantia Centri gravitatis

vitatis ab EMG versus P, $\frac{12R^5-12aR^4+2a^3R^2}{a^3P}=\frac{768R^5-192R^4P+2R^2P^3}{P^4}$. Fig. 199. 200.

Semicirculationis Primæ, MTEFM; Momentum $\frac{4R^6-a^2R^4}{P^3}=\frac{16R^6-R^4P^2}{4P^3}$ (propter $a=\frac{1}{4}P$;) Distantia ab EMG versus P, $\frac{24R^5-6a^2R^3}{a^3P}=\frac{192R^5-12R^3P^2}{P^4}$: Hoc est, revera, versus F, $\frac{-192R^5+12R^3P^2}{P^4}$.

Ex hujus Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis; habetur Secundi quadrantis MEFM, Momentum respectu EMG, $\frac{384R^6+96R^5P-48R^4P^2-R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{7}{381}RP$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, $\frac{768R^5+192R^4P-96R^3P^2-2R^2P^3}{7P^4}$: Hoc est, versus F, $\frac{-768R^5-192R^4P+96R^3P^2+2R^2P^3}{7P^4}$:

Circulationis Dodrantalis, seu Trium quadrantum, MTEFGM; Momentum respectu EMG, est $\frac{6R^6+6aR^5-a^3R^3}{3P^3}=\frac{384R^6+288R^5P-27R^3P^3}{192P^3}=\frac{128R^6+96R^5P-9R^3P^3}{64P^3}$ (propter $a=\frac{3}{4}P$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, $\frac{12R^5+12aR^4-2a^3R^2}{a^3P}=\frac{768R^5+576R^4P-54R^2P^3}{P^4}$; Hoc est, versus F, $\frac{-768R^5-576R^4P+54R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum Semicirculationis Primæ; habetur Tertiæ quadrantalis MFGM, Momentum respectu EMG, $\frac{-384R^6+288R^5P+48R^4P^2-27R^3P^3}{192P^3}=\frac{-128R^6+96R^5P+16R^4P^2-9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{12}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{-768R^5+576R^4P+96R^3P^2-54R^2P^3}{19P^4}$; Hoc est, revera, versus F, $\frac{768R^5-576R^4P-96R^3P^2+54R^2P^3}{19P^4}$.

Integræ Circulationis Primæ, MTEFGAM; Momentum respectu EMG est $\frac{a^2R^4}{P^3}=\frac{R^4}{P}$ (propter $a=P$:) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{P^2}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur momentum Circulationis Dodrantalis; habetur Quadrantalis Quartæ momentum, $\frac{-384R^6-288R^5P+192R^4P^2+27R^3P^3}{192P^3}=\frac{-128R^6-96R^5P+64R^4P^2+9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{-768R^5-576R^4P+384R^3P^2+54R^2P^3}{37P^4}$.

Quadrantalium Quinque, MTEFGAH, (repetito quod erat in prima,) Momentum respectu EMG, est $\frac{6R^6-6aR^5+a^3R^3}{3P^3}=\frac{384R^6-480R^5P+125R^3P^3}{192P^3}$: Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{12R^5-12aR^4+2a^3R^2}{a^3P}=\frac{768R^5-960R^4P+250R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, ſi ſubducatur Momentum integræ Circulationis Primæ; habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, reſpectu EMG, $\frac{384R^6-480R^5P-192R^4P^2+125R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$,) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{768R^5-960R^4P-384R^3P^2+250R^2P^3}{61P^4}$.

Et ſic deinceps quouſque libet.

K. Atque eadem opera determinavimus, in Solido *Scalari*, (ſuper figuram Spiralem TTM obliquo ſitu aſcendentem, altitudinem eandem quamlibet habente ſuper oblique aſcendentem figuram ſpiralem,) magnitudinem, momentum, atque diſtantiam Centri gravitatis ab erecto ſuper EMG plano. Quippe eadem omnia hic locum habent reſpectu erecti in EMG plani; quæ reſpectu plani in PMF erecti ſupra diximus, § G. Ut non ſit opus eadem repetere.

PROP. XXVIII.

A. Q. Fig. 199, 200. Quæ in Propoſitione præcedente, de Spirali *Archimedea*, tradita ſunt; eadem omnia Spiralibus aliis facile accommodantur, in quibus Radii MT, MT, continue creſcant, non quidem (ut in illa) in ipſorum AMT, AMT, angulorum ratione, ſed & in ipſorum ratione Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, aliaſve utcunque multiplicata: aut etiam in Subtriplicata, hujuſce utcunque multiplicata.

A. Sed &, Magnitudinem quod ſpectat, iis etiam in quibus creſcant MT, MT, radii, in eorundem AMT, AMT, ratione Subduplicata, Subquadruplicata, aliaſve utcunque Submultiplicata; vel etiam in ratione ſubduplicatæ triplicata, quintuplicata &c. aut ſubquadruplicatæ, quintuplicata, ſeptuplicata, &c. aliaſve ex multiplicatis & ſubmultiplicatis compoſita; aut etiam alias per numeros ſurdos deſignanda.

Q. Quod ad Momenta vero, & Centra gravitatis, quæ dicta ſunt, non ita facile ad has accommodantur ubi ratio ſubmultiplicata eſt, ſeu ex ſubmultiplicata compoſita quæ multiplicatæ non æquepolleat, vel ſaltem ſubtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ.

C. Suntque hæ Spirales omnes ex Parabolarum vel Paraboloeidium correſpondentium convolutione factæ; poſſuntque in Parabolas illas ſeu Paraboloeidea evolvi.

C. D. Illa quidem Spiralis *Archimedea*, ex *Apolloniana* Parabola: Ea nempe, quæ Baſem habeat æqualem Spiralis radio terminali; Axemque æqualem ſemiſſi arcus Sectoris contermini.

E. Cujus quidem Parabolæ ſemiſſi, æquatur illa Figura Spiralis. Unde conſtat, omnino poſſibilem eſſe Figuram Rectilineam, Circulo æqualem; ejuſve Sectori cuilibet.

F. Ex data vero Altitudine iſtius Parabolæ, quæ Datæ Spirali reſpondeat; datur circuli Quadratura.

G. Rectaque Parabolam tangens, eundem cum Ordinata angulum facit quem facit, cum Spiralis correſpondente Radio, recta Spiralem tangens.

H. K. Unde alia colligitur circuli quadratura *Archimedea* (Qualis & ab aliis Spiralibus colligi poterit.)

I. Et, Curvam Parabolæ, æqualem eſſe Spiralis Curvæ.

L. M. Aliæ vero Spirales; ex iis Paraboloeidibus in quibus Ordinatim-applicatæ

tæ ſint ſeries Indicem habens $\frac{1}{S+1}$; poſito ſeriei rectarum MT Indice N. P.
S; Baſiſque Paraboloeidis, æqualis ipſi M T terminali; ejuſque altitudo, ad longitudinem arcus Sectoris contermini, ut 1 ad $S+1$.

Poſſuntque pari modo ex aliis item Figuris (puta Hyperbolicis, Ellipticis, aliiſve mille modis variatis,) alia Spiralium genera Convolutione fieri; atque in eas unde conſtruuntur evolvi. Quarum quidem Figurarum Spiralium menſuræ, ex illarum figurarum menſuris dependent, quarum Convolutione fiunt. K.

Sunt utique Figuræ Spirales, non modo quæ ex Convolutis Parabolis, K.
ſed & quæ ex aliis figuris Convolutis oriuntur; Figurarum illarum, ex quarum Convolutione fiunt Dimidiæ.

Et quidem non modo Curva Spiralis *Archimedea*, eſt æqualis Curvæ Pa- K.
rabolicæ *Apollonianæ* correſpondenti; ſed & aliæ Spirales quælibet, æquales illis reſpective ſive curvis ſive rectis quarum Convolutione fiunt.

Adeoque cognita Figuræ Spiralis Magnitudine, vel Curvæ Spiralis lon- K.
gitudine; cognoſcitur ſimiliter vel magnitudo iſtius figuræ cujus Convolutione fit, vel longitudo lineæ: Et vice verſa.

Et quidem Spiralis illa cujus rectæ M T, creſcunt in angulorum AMT O.
ratione duplicata, non modo rationem habet cognitam ad Sectorem conterminum; ſed ipſius Curvæ Rectam æqualem aſſignare licet, eamque in data ratione ſecare.

Quod ipſum aliis item Spiralibus innumeris contingit.

Sed & Figura Spiralis (ex Paraboloeide convoluta) aſſignari poteſt, B.
quæ ad Sectorem conterminum rationem quamvis datam habeat; ſaltem Minoris ad Majus, numeris explicabilem: Et Paraboloeides N.
ſimiliter, eidem correſpondens: Ut & cuivis Paraboloeidi reſpondens Spiralis.

Poteſtque hæc Spiralium doctrina, ad alia multa Spiralium genera ampliari. R.

SI Spiralis Radii M T, M T, creſcant, non quidem in ratione Angulorum AMT, A.
A M T, (ut in Spirali *Archimedea*,) ſed in eorundem ratione duplicata, puta Fig. 199, 200.
ut a^2: Erunt Sectores ſimiles (figuram Spiralem componentes) ut a^4 (utpote in duplicata ratione arcuum ſuorum:) Adeoque, eorundem aggregatum ad aggregatum totidem maximo æqualium; hoc eſt, Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 5 ($=4+1$,) per prop. 1. hujus.

Si Radii M T, M T, ſint in angulorum A M T, ſeu P M T, ratione triplicata; hoc eſt, ut a^3; adeoque Sectores ſimiles, ut a^6; erunt ſimul omnes ad totidem maximo æquales; hoc eſt, Figura Spiralis ad conterminum Sectorem; ut 1 ad 7. per eandem 1 hujus.

Et, univerſaliter, ſi Radii M T, creſcant in Angulorum P M T, ratione Simpla, Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, &c. Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, erit ut 1, ad 3, 5, 7, 9, &c. (Non, ut 1 ad 3, 4, 5, 6, &c. quod per incuriam ſcriptum fuerat in *Arithm. Infin.* Schol. Prop. 45.) propter Sectores Similes in Radiorum ratione duplicata.

Et ſimiliter; ſi creſcant Radii in Angulorum ratione Subduplicata, Subtriplicata, Subquadruplicata, &c. adeoque Sectores in ratione Simpla, Duplicata Subtriplicatæ, Subduplicata, &c. Figura Spiralis ad Sectorem conterminum erit, ut 1 ad $1+1$, $\frac{2}{3}+1$, $\frac{1}{2}+1$, &c. hoc eſt, ut 1 ad 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, &c. vel 1 ad 2; 3 ad 5; 4 ad 6, &c.

Si creſcant Radii in Angulorum ratione Duplicata ſubtriplicatæ, Triplicata ſubquadruplicatæ, &c. adeoque Sectores, in ratione Quadruplicata ſubtriplicatæ, Triplicata ſubduplicatæ, &c. (utpote in duplicata ratione radiorum;) erit Figura

Fig. 199, 200. Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad $\frac{4}{3}+1$, $\frac{3}{2}+1$, &c. (nempe ut 1 ad seriei indicem unitate auctum, per prop. 1. hujus;) hoc est, ut 3 ad 7, 2 ad 5, &c.

Quod ipsum similiter valeret, si intelligerentur Radii crescentes secundum Seriem cujus Index sit numerus surdus, puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. adeoque Index seriei Sectorum, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, &c. quippe Figura Spiralis esset ad Sectorem conterminum, ut 1 ad $2\sqrt{2}+1$, $2\sqrt{3}+1$, &c.

Illud utique ubique obtinet; si Radii sint ut Series cujus Index sit S; Sectorum Series Indicem habebit $2S$; adeoque summa Sectorum omnium ad maximum toties sumptum; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; ut, 1 ad $2S+1$: per prop. 1. hujus.

B. Et consequenter, Facile assignabitur Spiralis sic constructa, ut Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, datam habeat (minoris ad majus) rationem. Esto enim ratio data, ut 1 ad $\mathcal{D}$. Quoniam est (ut jam ostendimus) Figura Spiralis ad Sectorem conterminum ut 1 ad $2S+1$; atque imperatum est ut fit, ut 1 ad $\mathcal{D}$; erunt 1 ad $2S+1$, & 1 ad $\mathcal{D}$, eadem ratio; adeoque $\mathcal{D}=2S+1$, hoc est $\mathcal{D}-1=2S$, & $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=S$. Si itaque Radii M T, ponantur ut Series Indicem habens $\frac{\mathcal{D}-1}{2}$; erit figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad $\mathcal{D}$, in ratione data. Cum enim Series Radiorum Indicem habeat $\frac{\mathcal{D}-1}{2}$; Series Sectorum habebit Indicem (istius duplum) $\mathcal{D}-1$; adeoque Sectorum crescentium aggregatum, ad totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; erit ut 1 ad $\mathcal{D}$; nempe ad Seriei indicem $\mathcal{D}-1$, unitate auctum (per prop. 1. hujus.) Quod erat imperatum.

Puta; Si ratio data, sit 1 ad 2; adeoque (posito $\mathcal{D}=2$,) $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Erunt M T, Series *Subsecundanorum*: hoc est, in subduplicata ratione angulorum P M T.

Si ratio data, sit 1 ad 5; adeoque (posito $\mathcal{D}=5$) $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=2$. Erunt M T, Series *Secundanorum*; seu, in duplicata ratione angulorum P M T.

Si ratio data, sit 1 ad 3; adeoque $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=1$. Erunt M T, series *Primanorum*, seu in ipsa angulorum P M T ratione. Quæ est Spiralis *Archimedea*.

Si ratio data, sit 2 ad 3; seu 1 ad $\frac{3}{2}$; adeoque $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=\frac{1}{4}$. Erunt M T, Series *Subquartanorum*; seu in angulorum ratione Subquadruplicata.

Si data ratio, sit 1 ad 4; adeoque $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=\frac{3}{2}$. Erunt M T, Series *Radicum Quadraticarum Tertianorum*; seu in angulorum ratione Subduplicata-triplicatæ. Et similiter alibi, quæcunque fuerit ratio data.

Dico autem, In Ratione *Minoris ad Majus*: Quia supponitur Spiralis (à Principio orsa) radios habere M T, ab o continue crescentes; totaque, circumscripto Sectore contermino Minor.

Si vero proponeretur Ratio æqualitatis, 1 ad 1; adeoque $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=\frac{0}{2}=0$. Essent M T Series æqualium (cujus index o;) &, pro figura Spirali, prodiret Circuli Sector, (ex Convoluto Parallelogrammo confectus,) cum ipso Sectore (quem conterminum supponimus) coincidens.

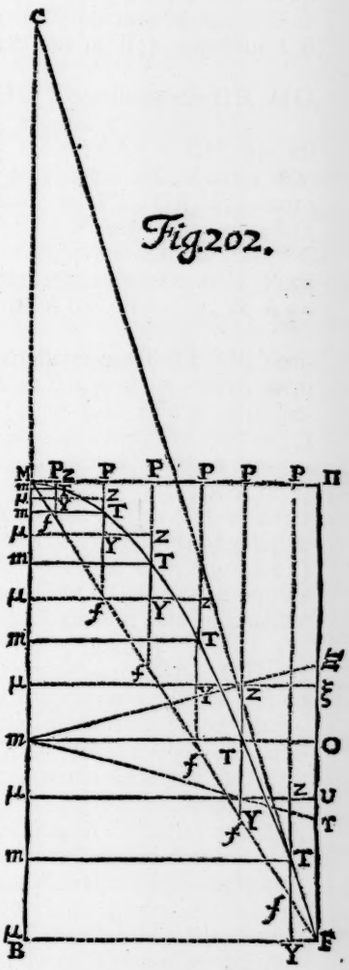
Sin proponeretur *Majoritatis* ratio, puta 2 ad 1; seu 1 ad $\frac{1}{2}$: adeoque $\frac{\mathcal{D}-1}{2}=-\frac{1}{4}$: Essent M T ex eis Seriebus una, quas *Reciprocas* definivimus, (def. 2. hujus.) puta *Reciproca Subquartanorum*, cujus Index $-\frac{1}{4}$. Adeoque non inciperent M T, ab o, crescendo; sed ab Infinito ($\frac{1}{0}=\infty$) decrescendo: Essetque conterminus Sector, non quidem Circumscriptus sed Inscriptus.

Quæ

Quæ quidem Figuræ, utut pro Spiralium generibus haberi poſſint, & aliarum Spiralium leges non refugiant (debite accommodatas:) nos tamen eas potiſſimum hic ſpectamus quæ contermino Sectore includuntur. Quamquam ſi libeat Spiralium nomen ad illas etiam ampliare; erunt utcunque ad reliquas Spirales ſimiliter redigendæ, (noſtriſque ſubjiciendæ legibus;) atque Figuræ quas *Reciprocas* dicimus, ad Paraboloeidium familiam.

Quod autem Spiralis *Archimedea*, aliud non ſit quam Convoluta Parabola *Apolloniana*; ſic evidentiſſime demonſtratur. C.

Sumptis ad Spiralem Fig. 200. M T, M T; hoc eſt M P, M P, quotlibet; ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionalibus: totidemque ad Parabolam rectam Fig. 202. illis reſpective æqualibus M P, M P; hoc eſt, m T, m T: atque his proportionalibus utrobique Z Y, Z Y; hoc eſt M μ, $\mu\mu$, &c. Sumptoque ubivis figuræ Spiralis termino, puta M F, cui æqualis ponatur μ F baſis Parabolæ: hujuſque altitudo F Π ſeu M B æqualis ſemiſſi Peripheriæ ſectoris contermini radio M F fig. 200. deſcripti: Erunt ipſæ M μ, $\mu\mu$, ſeu Z Y, Z Y, rectæ, fig. 202. ipſis Z Y, Z Y, arcubus, fig. 200. ſigillatim æquales. Fig. 200, 202.



Quippe, ſi intelligantur numero infiniti arcus Z Y arithmetice proportionales (ut 1, 3, 5, &c.) erunt hi omnes ſimul ſumpti, æquales ſemiſſi totidem maximo æqualium; hoc eſt, ſemiſſi arcus contermini, radio M F deſcripti; per prop. 1. hujus. Cui quidem ſemiſſi cum ponatur æqualis altitudo Parabolæ F Π, ſeu M B, hoc eſt, aggregatum omnium $\mu\mu$ ſeu Z Y fig. 202. Sintque tum totidem numero, tum proportionales, ipſis Z Y arcubus fig. 202. Erunt ſingulæ ſingulis, reſpective ſumptis, æquales.

Cum itaque ſint etiam ſigillatim M P ſeu m T fig. 200. ipſis M P, ſeu M T, fig. 202. æquales: Si intelligantur omnia m, μ, puncta, in unum M colligi; (toto Parabolæ axe in verticis Punctum contracto;) manentibus rectarum μ Z, m T, μ Y, longitudinibus; rectiſque Z T Y, in arcum flexis: Rectangula Z $\mu\mu$ Y, in Sectores contracta, ipſis Z M Y ſectoribus, reſpective ſumptis, congruent; propter tum radiorum, tum arcuum æqualitatem.

Sed Sectores illi Z M Y, ſi numero infiniti intelligantur, idem ſunt, atque Figura Spiralis (per def. 1. cap. 4.) ipſaque ſimiliter Rectangula Z $\mu\mu$ Y, idem atque Planum Parabolæ: Si itaque *Parabola* ſic *Convoluta* intelligatur, ut ea omnia ex quibus conflari intelligatur Rectangula, in totidem Sectores contrahantur; fit Figura Spiralis.

Et quidem ea fit Spiralis (ut ex demonſtratis conſtat) cujus terminalis recta ut M F, ſit æqualis ipſi B F baſi Parabolæ; anguluſque circulationis tantus, ut contermini Sectoris arcus, duplus ſit altitudinis Parabolæ: Hoc eſt, quæ eam habet rationem ad unam Circulationem integram, quam habet Parabolæ altitudo dupla, ad peripheriam integram ejuſdem baſe deſcriptam: Vel etiam, (ſi intelligatur axis B M ſupra Parabolæ verticem continuati, uſque dum in C puncto occurrat rectæ C F parabolam in F contingenti; unde, propter Parabolæ naturam, dupla futura eſt C B ipſius B M;) eam, quam habet B C (axis continuatus ad occurſum rectæ Parabolam in baſis puncto contingentis,) ad integram peripheriam quæ Parabolæ baſe ut Radio deſcribatur. D.

Conſtat

Fig. 200, 202. Conſtat autem, ex hac conſtructione, (propter ſingulos Sectores Z M Y, ſingulorum reſpective Rectangulorum Z μ μ Y, dimidios;) Figuram Spiralem
E. M T T F M, figuræ Parabolicæ M F B, dimidiam eſſe; & partes partium, reſpective ſumptarum, dimidias. Quod ſimiliter probabitur, de quovis alio Spiralium genere, quæ ex quacunque fit figura ſic convoluta.

Conſtat item (quod ex veteribus dubitarunt nonnulli, nedum ex recentioribus,) Figuram Rectilineam Circulo æqualem eſſe poſſe; hujuſve Sectori cuilibet: adeoque, rectam Peripheriæ. Cum enim certa ſit ratio figuræ ſpiralis M T T F, tum ad Sectorem conterminum, (nempe, ut 1 ad 3;) tum ad M F B parabolam, ex cujus convolutione fit, (nempe, ut 1 ad 2;) tum denique hujus parabolæ ad circumſcriptum rectangulum M B F Π, (nempe, ut 2 ad 3;) erit contermini Sectoris Radio M F deſcripti (puta Semicirculi) ad M B F Π rectangulum certa ratio; (erit utique æqualis; propter $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$.) Cum itaque nullus ſit circulus, cujus trienti non æquetur Figura Spiralis; nullaque figura Spiralis cujus duplo non æquetur Parabola; nullaque Parabola, cujus ſeſquialterum non æquet Rectangulum Rectilineum: Nullus erit Circulus, cui non æquatur Rectangulum Rectilineum.

F. Conſtat etiam; ſi dari poſſit Altitudo Parabolæ M F B (ſeu hujus ad Baſin ratio) quæ reſpondeat Spirali M T T F M (cujus circulationis angulus datam rationem habeat ad quatuor rectos;) datum iri rationem Radii, Diametrive, ad Peripheriam Circuli.

G. Sed & eadem F C quæ Parabolam tangit retento eodem cum B F angulo, C F B; eandem etiam curvam tanget, poſtquam in Spiralem convoluta fuerit Parabola. Nam, qua ratione probabitur omnes in Parabola rectas m T ordinatim-applicatas, (tum quæ ſunt ſupra B F, tum quæ ſunt infra,) ſola B F excepta, ad C F contingentem non pertingere; eadem oſtendetur neque ad eam pertingere eaſdem convolutas in ſitum M T in Spirali. Quippe ſi (verbi gratia) ad M F fig. 200. ita conſtituta ſit F C, ut ad illam non pertingeret rectæ M T punctum T, etiamſi extenſa Z T Y curva in rectam fiſteretur ad ipſam M F perpendicularis (poſita, etiam T M, ſeu T m, in ſitu parallelo ad F M, ſeu F B,) quod fit in Parabola: multo minus ad eandem F C pertinget idem T punctum in Z T Y inde recurvata; concurrente recta T m ſeu T M cum recta F M, in eodem M puncto; quod fit in in Spirali.

Unde ſequitur; eundem eſſe, ad tangentem, angulum M F C in Spirali, atque (qui huic correſpondet) B F C in Parabola.

H. Et conſequenter; ſi intelligatur F (verbi gratia) in fine circulationis primæ, rectaque (ad M F perpendicularis) M C, Tangenti F C occurrens in C; erit ipſa M C fig. 200. (principio Spiralis, & contingente, intercepta,) ipſi B C fig. 202. (Parabolæ axe ad occurſum tangentis continuato,) æqualis; (propter angulos ad F utrobique æquales, adeoque ſimilia triangula rectangula;) hoc eſt, (per modo demonſtrata,) integræ Peripheriæ radio M F deſcriptæ, ſeu Peripheriæ circuli primi: (ponitur enim F, in termino primæ circulationis; adeoque circulationis angulus, quatuor rectis æqualis.) Id quod ab *Archimede* fuſius oſtenditur, in libro de Spiralibus; eſtque ipſius Circuli quadratura, inde deducta; quo præcipue collimaſſe videtur in illa de Spiralibus doctrina.

Sin ubivis alibi (quam in fine circulationis primæ) intelligatur illud F punctum; puta in fine ſemicirculationis primæ, vel primi quadrantis, vel ubivis alias: idem conſequi licebit. Quippe tum M C ſic ducta (rectæ M F perpendicularis, & F C tangenti occurrens in C,) erit eadem pars (puta, vel ſemiſſis, vel quadrans, vel pars alia prout res tulerit,) integræ peripheriæ radio illo M F deſcriptæ, quæ eſt, circulationis integræ, expoſita circulatio.

I. Sed & inde etiam ſequitur; Curvam Spiralem M T T F fig. 200. curvæ Parabolicæ, correſpondenti M F fig. 202. æqualem eſſe. Quippe ſi intelligantur utrobique ſimi partes analogæ infinite exiguæ; in quibus itaque tangentium F C reſpectivarum particulæ, pro ipſis F T curvis habeantur per def. 1. cap. 4. (utpote à quibus differunt ratione data quavis minore;) ut & Y T curva, ſimiliter, pro Y T recta, eidem æquali: adeoque minuta Trilinea T Y F, utrobique, pro Triangulis rectangulis; & quidem (propter æquales utrobique reſpectivos angulos ad F) invicem ſimilibus; quæ itaque & latera habebunt proportionalia: Erunt, propter Y F rectas utrobique æquales, etiam F T (reſpective ſumptæ) itidem æquales.

æquales. Cumque hoc ubique contingat; erunt omnes F T curvam Spiralem constituentes, æquales omnibus F T conſtituentibus curvam Parabolicam; hoc eſt, M T T F curva ſpiralis, æqualis correſpondenti M F curvæ Parabolicæ. Quod demonſtrandum erat. Idemque alias demonſtravimus, in Tractatu, *De Curvarum* Ἐυθύσει, Tractatui de Cycloide ſubjuncto. Fig. 200, 202.

Quod etiam in aliis Spiralium generibus non minus valet. Si intelligatur enim eadem M F B fig. 202. non jam ut *Apolloniana* Parabola, ſed ut Paraboloeides, Hyperbola, aliave ad libitum figura, in minuta Rectangula, ut Z μ μ Y, reſolutæ quæ (punctis omnibus m, μ, in unum M collectis,) in totidem Sectores, (Rectangulorum dimidios,) redigantur: qui quidem vel ſimiles inter ſe erunt, ſi eadem ponatur ubique ratio rectarum Z Y ad m T; vel, ſi ſecus, diſſimiles; (eam utique rationem habebit ſectoris cujuſvis angulus, ad quatuor rectos; quam habet Z Y ad integram Peripheriam radio m T deſcribendam:) alia atque alia fient Spiralium genera. K.

Neque refert, utrum M F fig. 202. ſit curva, an Recta; ſed nec, utrum ad unum M verticis punctum terminetur, an ſecus. Quippe ſi integrum Rectangulum M B F Π ſic convolveretur, (toto M B latere in unicum M punctum collecto, latereque Π F in arcum curvato,) Spiralis hinc oriunda, Circulus eſſet; vel Sector Circuli, qui eam habeat ad integrum circulum rationem quam F Π recta ad peripheriam radio B F vel M Π deſcriptam.) Et quidem, ſi Trilineum M F B, ubivis truncatum recta m T, intelligeretur ſic convolvi; hoc ſaltem inde ſequeretur diſcriminis, quod non jam à puncto ut M, ordiretur Spiralis fig. 200. ſed, à recta aliqua, ut M T.

Hoc interim omnibus commune erit; Nempe, Figuram Convolutione factam, ut M T T F fig. 200. dimidiam eſſe ejuſdem evolutæ, ut M F B fig. 202. propter ſingulos Z M Y ſectores, ſingulorum Z μ μ Y rectangulorum reſpective ſumptorum, dimidios.

Item; Tangentem F C, fig. 202. retento angulo C F B, tangentem etiam fore figuræ convolutæ M T T F M fig. 202. Quippe, & hic non minus obtinebit præcedens demonſtratio, qua oſtendebatur hoc contingere in Spirali *Archimedea*. Si enim rectæ m T, punctum T in Z T Y recta, fig. 202. ad T C tangentem non pertingat; multo minus ad eandem pertinget in eadem Z T Y recurvata, fig. 200. Quod ipſum obtinet etiam vice verſa: Si enim convoluta curva F T fig. 200. explicanda intelligatur in correſpondentem F T fig. 202. quanquam T propius accederet ad T C tangentem, non tamen eo pertingeret: Niſi ſaltem explicanda eſſet in lineam rectam, (quod in Circulo fit; cujus explicata curva, eadem futura eſt cum parallelogrammi pridem convoluti latere;) quippe, hoc caſu, explicata linea cum tangente coincidet; quæ enim ſupponatur recta rectam contingere, alia non erit quam ipſa recta; quippe, niſi coincidat, ſecabit. Si vero adhuc ulterius explicanda intelligatur figura, ut non modo ad ipſam F C pertingat T, ſed tranſeat; adeoque F T recurva fiat, in contrarias partes flexa: etiam adhuc eandem F C, ſed ad contrarias partes, tanget. Cum enim flexionis angulus, qui idem eſt atque angulus contactus, magnitudinem vel nullam habeat, vel infinite exiguam, (ſive ſit rectæ & curvæ contactus, ſive duarum curvarum externe vel interne tangentium,) quod ad prop. 15. cap. 2. oſtenſum eſt; eadem quæ prius fuerat manebit recta contingens F C, utcunque flectatur (modo ne frangatur, ut angulum faciat, rectilineo æquipollentem,) F T curva, in puncto F.

Sed &, qua ratione hinc infertur, (ob cognitum in parabola punctum C in quo cum axe producto Tangens occurrat,) *Archimedea* Circuli quadratura per Tangentem Spiralis: idem etiam ſimili ratione colligetur, ex aliis innumeris Spiralium generibus, ex convolutis figuris oriundis, in quibus idem C punctum pariter cognoſcitur. Cum enim M B fig. 202. altitudo figuræ convolvendæ, æqualis ſit omnibus Z Y arcubus fig. 200. ſimul ſumptis: ſi quocunque modo colligi poterit quam habeant illi omnes ad contermini Sectoris arcum, quemque hic habeat ad integram peripheriam; conficietur negotium. Quippe cognita M C fig. 200. (cujuſcunque Spiralis,) cognoſcitur etiam (eidem æqualis) B C fig. 202. adeoque, quam habeat ea rationem ad cognitam M B fig. 202. hoc eſt, ad omnes Z Y fig. 200. adeoque & (cum horum ad arcum Sectoris contermini ratio nota ponatur,) ad arcum Sectoris contermini, & propterea (cum hujus ratio ad integram peripheriam nota ponatur) ad circuli peripheriam radio M F fig. 200. vel B F fig. 202. deſcriptam.

Fig. 200, 202. Item M F figuræ convolvendæ fig. 202. æqualem Curvæ figuræ convolutæ M T T F fig. 200. Quippe Demonſtratio prius adhibita in comparatis invicem *Apolloniana* Parabola, & Spirali *Archimedea*; in aliis non minus obtinet. Nempe, in partibus infinite exiguis, habenda eſſe utrobique T Y F trilinea, pro Triangulis rectangulis, & quidem (propter æquales utrobique angulos ad F) invicem ſimilibus; adeoque, propter æquales utrobique Y F, æquales item erunt F T; atque hoc ſemper. Æqualis itaque tota M F curva fig. 202. toti M T T F fig. 200.

Et propterea; ex cognita vel figuræ Spiralis magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; ſimiliter cognoſcitur vel Magnitudo figuræ cujus convolutione fit, vel Longitudo lineæ. Et vice verſa.

L. Ut autem, ex convoluta Parabola, fit Spiralis *Archimedea*; ſic, ex Paraboloeidibus convolutis, fiunt Spirales aliæ; quarum radii M T creſcunt in ratione angulorum A M T duplicata, triplicata, aliaſve multiplicata; vel ſubduplicata, ſubtriplicata, aliaſve ſubmultiplicata; aut etiam ex his utcunque compoſita.

Quod eodem modo oſtendi poteſt quo in Parabola id oſtenſum eſt; ſumptis Paraboloeidibus idoneis, in quibus rectæ M B, M Π, ſic dividantur ut M μ, μ μ, &c. hoc eſt Z Y, Z Y, &c. ſint ipſis M P, M P, &c. proportionales, (quo ſectores Z M Y fig. 200. ex rectangulis Z μ μ Y fig. 202. convolutis facti, ſimiles ſint,) Paraboloeidiſque curva per ipſas Z Y, Z Y, rectas tranſeat. (Quod aliis aliiſque modis, pro variis Paraboloeidium generibus, faciendum erit.) Hoc enim facto, oſtendetur, ut prius in Parabola, ſingula Rectangula, in reſpectivos Sectores, ipſorum dimidios, convolutum iri: reliquaque quæ hinc ſequuntur.

Cum vero alius occurrat modus expeditior, aliunde ſumptis principiis, idem præſtandi; (neque lectori, credo, diſplicebit varietas;) rem ſic aggrediemur; ea methodo qua ad *Arithm. Infin.* prop. 36. &c. uſus ſum.

Fig. 199, 202. In Spirali *Archimedea*, M T T F, fig. 199. ſumptis Sectoribus ſimilibus; adeoque tum radiis M T, M T, &c. hoc eſt, M P, M P, &c. tum angulis P M T, P M T, &c. arithmetice proportionalibus; ut 1, 2, 3, 4, &c. Erunt arcus P T, P T, (utpote in ratione quæ ex radiorum M P, & angulorum M P T, rationibus componitur,) ut 1, 4, 9, 16, &c. ſeries Secundanorum; (nempe uno gradu altior quam eſt ſeries Radiorum M P, propter angulos M P T, in ratione ſeriei Primanorum, ſeu arithmetice-proportionalium:) adeoque, ſi in rectas expandi intelligantur, erunt ut totidem ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ, (axem habente M P; altitudinem, ipſi P F, non ut prius hujus dimidio, æqualem,) utpote in ratione duplicata axium M P, M P: (quales ſunt P T, P T, complentes Semiparabolæ complementum M T F Π fig. 202. ſumptis B F, F Π, fig. 202. æqualibus ipſis M F, F O P, fig. 199.) & propterea, ſimul omnes, (hoc eſt M T P, ſpiralis complementum ad conterminum ſectorem,) æquantur Trienti Rectanguli Parabolæ circumſcripti; hoc eſt, $\frac{1}{3}$ M P × P F, ſeu $\frac{1}{3}$ M Π × Π F, (per 1. vel 6. hujus.) Eſtque Conterminus Sector M P F M, (utpote ex arcubus arithmetice-proportionalibus conflatus,) $= \frac{1}{2}$ M P × P F, (per 1. hujus.) Ergo, figura Spiralis (utpote Sectoris reſiduum,) $= \frac{1}{6}$ M P × P F, (propter $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;) hoc eſt, (propter $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} :: 1 . 3$,) ad Sectorem conterminum, ut 1, ad 3.

Fig. 199, 200, 202. Nequis autem hæſitet, cur parabolæ M F B fig. 202. altitudinem, jam ponam, ipſius arcus contermini P F fig. 199. longitudini æqualem; quam prius feceram arcus P F fig. 200. dimidiam: ratio in promptu eſt. Cum enim retinentibus ſuam ſingulis longitudinem rectis Z Y, utut in axem curvatis; dum, in rectis M B, contrahuntur μ μ in unicum m punctum; adeoque Parabolæ magnitudo decreſcat: neceſſe eſt ut, in Π F, rectæ ξ υ (ipſis Z Y æquales) protrahantur puta in $\varkappa$ T, (quibus reſpondeant, in Sectore Spirali contermino, arcus O O;) adeoque Complementi magnitudo creſcat. Et propterea, dum complementum conſideramus, (juxta hanc hypotheſin,) facienda erit Π F (complementi Semiparabolæ ſeu Semiparaboloeidis baſis) ipſi P O F ſemper æqualis, (quicunque fuerit Parabolæ ſeu Paraboloeidis gradus,) utpote quæ ex omnibus $\varkappa$ T, (hoc eſt, omnibus O O,) componitur. Dum vero Parabolam vel Paraboloeidem figuram M F B (juxta priorem hypotheſin) conſideramus; facienda eſt M B parabolæ ſeu paraboloeidis altitudo, (non quidem omnibus O O, hoc eſt ipſi P O F,) ſed omnibus Z Y ſimul ſumptis æqualis: hoc eſt, in Spirali *Archimedea*, (propter ipſas M T, adeoque Z Y,

ZY, fig. 200. arithmetice proportionales,) æqualis ſemiſſi arcus POF: Sed, ſi eſſent ipſæ MT, adeoque ZY, ut illarum Quadrata (ſeu in duplicata ratione angulorum PMT,) hoc eſt, ut ſeries Secundanorum; eſſet MB=$\frac{1}{3}$POF: Si ut Series Tertianorum; eſſet MB=$\frac{1}{4}$POF: Et ſic in aliis gradibus, prout cujuſque ratio poſtulaverit; per prop. 1. hujus. (Quod in *Arithmetica Infinitorum*, prop. 5. & ſequentibus, fuſius oſtendimus.) Atque hinc eſt, quod dum, in complemento conſiderando, reputamus omnes OO, hoc eſt ϖτ, invicem æquales: in Parabola, ſeu Paraboloeide, reputamus ipſas μμ, ſeu ZY rectas; hoc eſt, in Spirali, arcus RY; continue creſcentes, in ratione ipſarum mT, ſeu MT, rectarum. Quæcunque enim fuerit ipſarum ZY differentia; dummodo idem ſit angulus ZmY ſeu ZMY, eademque Radii MO ſeu mO longitudo; eadem ubique erit ipſius ϖτ ſeu OO longitudo. Tantundem utique ſunt Triangula ZmY, ϖmτ, atque Sectores ZMY, OMO, reſpective ſumpti; per 12 hujus. Quæ aliquanto fuſius explicanda putabam, quo clarius percipiantur omnia. Fig. 199, 200, 202.

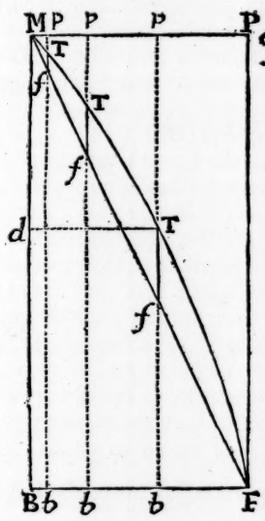
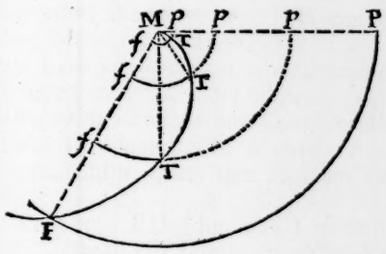


Fig. 204.

Fig. 203.



Eodem plane modo; ſi intelligatur Spiralis MTTF fig. 203. ita conſtrui, ut, ſumptis angulis PMT, PMT, arithmetice proportionalibus, (ut prius;) radii MT, MT; ſeu Mp, Mp; ſint in eorum ratione Duplicata; ſeu, ut ſeries Secundanorum: manifeſtum eſt, Arcus pT, pT, ſeriem eſſe Tertianorum (uno gradu altiorem quam eſt Series radiorum Mp, Mp,) utpote quorum rationes componuntur ex rationibus radiorum Mp (quæ eſt Series Secundanorum,) & angulorum PMT (quæ eſt ſeries Primanorum) reſpective ſumptorum. Puta, ut rectæ pT, pT, fig. 204. diametro MP ordinatim-applicatæ, in paraboloeidis complemento MPF. Cujus quidem diametri Mp, Mp, ſunt ut Secundana, ſive Quadrata arithmetice-proportionalium; ordinatim-applicatæ pT, pT, ut Tertiana, ſeu arithmetice-proportionalium Cubi: Adeoque in Diametrorum ratione Subduplicatæ-Triplicata. Quæ itaque, ſi æqualibus intervallis ſumerentur (non, uti nunc ſunt, propter Mp, Mp, in ratione ſecundanorum;) hoc eſt, ut ordinatim-applicatæ ad diametros Mp arithmetice-proportionales; ſeries eſſent Indicem habens $\frac{3}{2}$. Quarum itaque ratio, ad maximam toties ſumptam; hoc eſt, ratio complementi MTFP ad Parallelogrammum circumſcriptum MBFP; ut 1 ad $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$; ſeu ut 2 ad 5. Eſt autem Sector PMF fig. 203. ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 2: (æquatur enim Sector, uti notum eſt, ſemiſſi rectanguli quod illius Radio & Arcu comprehenditur.) Cum itaque (propter ſingulos arcus pT, ſingulis rectis pT reſpective ſumptis æquales; & eandem utrobique altitudinem MP;) Complementum Spiralis MTFP fig. 203. æquale ſit Complemento Paraboloeideos MTFP fig. 204. erit Complementum illud Spiralis MTFP, ad Sectorem conterminum PMF; ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; ſeu 4 ad 5: Et conſequenter (quod reliquum eſt) Figura Spiralis MTFM, ad eundem Sectorem, ut 1 ad 5. (Quod M.

Fig. 203, 204. etiam prius oſtenſum erat ad § A.) Arcuſque T f fig. 203. complentes figuram Spiralem M T F; tantundem ſunt atque rectæ T f fig. 204. complentes Bilineum M T F M. (Uti etiam ipſæ T f, fig. 202. tantundem ſunt atque T f arcus fig. 199. complentes figuram Spiralem M T F M; ſeu, qui arcubus P T deſunt ad complendum Sectorem conterminum.) Cum enim rectæ p f complentes Triangulum M F P fig. 204. tantundem ſint atque p f arcus complentes Sectorem M F P fig. 203. (utpote utrobique arithmetice proportionales, & maxima maximæ æqualis, eademque utrobique altitudo;) ſintque rectæ p T tantundem atque p T arcus: ſequitur, Rectas reſiduas T f, tantundem eſſe atque reſiduos arcus T f.

N. Sed & ſimul innoteſcit, ex cujus Paraboloeideos convolutione, oriatur expoſita Spiralis, cujus radii M T ſint in duplicata ratione angulorum P M T. Nempe Paraboloeideos Semicubicalis, (quippe talis eſt M T F curva fig. 204. ut ex conſtructione patet;) hoc eſt, cujus ordinatim-applicatæ T p in complemento, ſint in diametrorum M p ratione Subduplicatæ-Triplicata: & propterea in Paraboloeide, ordinatim-applicatæ T d, hoc eſt, p M, in diametrorum M d, hoc eſt p T, ratione Duplicata Subtriplicatæ.

Cujus quidem Paraboloeideos Baſis B F, æqualis eſſe debet ipſi M F terminali in Spirali: Altitudo vero, non æqualis ipſi M B fig. 204. hoc eſt arcui P F fig. 203. ſeu aggregato omnium O O (quales in fig. 199, 200. conſpiciuntur;) ſed in ea ad ipſam M B fig. 204. ratione; quæ eſt (figuræ natura rite perpenſa) omnium Z Y, ad omnes O O, ſeu Ξ Υ, (quales in fig. 199, 202. conſpiciuntur:) Hoc eſt, in præſenti caſu (propter ipſas M T, adeoque Z Y, ſeriem Secundanorum,) ut 1 ad 3. Adeoque, ſi Paraboloeidis Semicubicalis, cujus baſis ſit B F, altitudo $\frac{1}{3}$ M B, fig. 204. omnia rectangula (qualia Z μ μ Y fig. 202.) in totidem triangula (ut Z m Y) ſeu Sectores Z M Y (prout in fig. 200.) convolvi intelligantur: fiet figura Spiralis M T F M fig. 203. æqualis iſtius Paraboloeideos ſemiſſi. Quæ eodem modo demonſtrantur, quo eadem de Parabola & Spirali *Archimedea* oſtenduntur, § C, D, E.

Idemque ex calculo patet. Cum enim Index ſeu Exponens ſeriei Complementi M F P fig. 204. ſit (ut ſupra oſtenſum eſt) $\frac{3}{2}$; adeoque ipſius Paraboloeideos M F B, $\frac{2}{3}$; erit hujus ad circumſcriptum Parallelogrammum M P F B, (per prop. 1. hujus) ut 1, ad $1\frac{2}{3}$; ſeu 3 ad 5: Adeoque ſi (cæteris manentibus) ſumatur altitudo ſubtripla, (quod faciendum eſſe oſtendimus,) fiet ratio, ut 1 ad 5: Et conſequenter, (quæ hujus eſt dimidia,) figura Spiralis M T F M fig. 203. ad idem Parallelogrammum M P F B fig. 204. ut 1 ad 10; hoc eſt, ad P M F fig. 203. Sectorem conterminum, (Parallelogrammi dimidium,) ut 1 ad 5. Quod fieri debere; ſupra oſtenſum eſt.

O. Similiter etiam oſtendetur, (ut ad § I, K.) Curvam iſtius paraboloeideos ſic conſtructi, æqualem eſſe curvæ Spiralis M T F fig. 203. Verum hujus Paraboloeideos Curvæ, æqualem rectam jam olim exhibuit *Neilius* noſter, (Anno 1657. omnium primus,) &, poſt illum alii; (quod in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθυωσει, pag. 91. (nunc 551.) & ſeqq. oſtendimus. Ergo, ipſi M T F Spirali, æqualis recta exhibebitur; Suppoſita circuli quadratura, quæ hic neceſſaria erit (ut ex prædictis patet) pro deſignanda Paraboloeideos altitudine, quæ expoſitæ Spirali conveniat: utpote cujus altitudo, æqualis eſſe debet trienti arcus P F.

Quodque de recta hujus Spiralis curvæ æquali oſtenſum eſt; ſimiliter & aliis Spiralibus accommodabitur, quæ ex ejuſmodi paraboloeidibus aliiſve figuris convolutis fiunt, quarum curvis æquales rectæ aſſignari poſſunt. De quibus fuſius egeramus in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθυωσει, præſertim pag. 111. & ſeqq. (nunc 563. &c.)

P. Ad eandem formam procedendum erit, in aliis Spiralibus, quarum Radii M T, ſint in angulorum P M T ratione multiplicata, ſubmultiplicata, vel ex his utcunque compoſita. Sunto enim verbi gratia, (ut una vice omnes abſolvam,) ipſæ M T, ſeu M P, fig. 203. ſeries Exponentem ſeu Indicem habens S: erunt itaque arcus P C (utpote in ratione ex Radiorum & Angulorum rationibus compoſita) ſeries uno gradu altior; adeoque Indicem habens $S+1$. Idemque Index, per S diviſus, erit correſpondentis M T F P Complementi Paraboloeideos (fig. 204.) Hujus Paraboloeidis (cujus itaque Index erit $\frac{S}{S+1}$;) Baſis ponenda erit æqualis ipſi M F ſpiralis Terminali rectæ. Altitudo vero, quæ ad arcum Sectoris contermini P F eam habet rationem quam Seriei ratio poſtulat; nempe quam habent omnes

omnes Z Y, ſeu M T, ad totidem maximo æquales; hoc eſt (propter ſeriei Indicem S,) ut 1 ad $S+1$ (per prop. 1. hujus.) Quæ quidem Parabola ſeu Paraboloeides eſt Figuræ Spiralis dupla; Curvaque illius, hujus curvæ æqualis; Tangenſque illius cum Parabolæ ſeu Paraboloeidis Ordinatim-applicata in puncto contactus, eundem angulum facit quem facit Tangens Spiralis cum hujus radio reſpectivo.

Si vero, vice verſa, quæratur quænam Figura Spiralis expoſitæ Paraboloeidi conveniat; puta cujus Exponens ſit $\frac{1}{p}$. Erit $\frac{1}{p}=\frac{S}{S+1}$ (ut ex dictis patet;) ergo $p=\frac{S+1}{S}$, & $pS=S+1$, & $pS-S=1$, & $S=\frac{1}{p-1}$, qui Index erit Seriei radiorum M T in Spirali quæſita; cujus recta terminalis M F futura eſt Paraboloeidis baſi æqualis; anguluſque circulationis talis ut Sectoris Arcus conterminus eam habeat rationem ad expoſitæ Parabolæ vel Paraboloeidis altitudinem, quam habet $S+1$ ad 1. Quod ex modo demonſtratis facile colligitur.

Supereſt, ut Centra gravitatis exquiramus. Quod eodem modo fiet atque in Propoſitione præcedente factum eſt. Poſito enim, ut illic, $\mathcal{P}$ pro peripheria primi circuli; cujus pars infinitesima ſit T; radius R; ſimiliumque ſectorum radii, utcunque creſcentes, n; quibus reſpondeant in eadem ratione t: Erunt ſimiles Sectores quilibet $\frac{1}{2}nt$, ſeu $\frac{n^2T}{2R}$; eorumque ab M diſtantia Centrorum gravitatis reſpective, M R $=\frac{2}{3}n$; adeoque à P M F, eorundem diſtantia R S $=\frac{2ns}{3R}$; ab E M G, diſtantia R X $=\frac{2nx}{3R}$: (nempe, in ea ratione ad R M, qua eſt Sinus Rectus illic, hic Co-ſinus ſeu ſinus complementi, anguli P M R, ad Radium:) Et propterea, ſingulorum reſpective momenta reſpectu rectæ P M F, $\frac{n^2T}{2R}\times\frac{2ns}{3R}=\frac{n^3sT}{3R^2}$; reſpectu rectæ E M G, $\frac{n^2T}{2R}\times\frac{2nx}{3R}=\frac{n^3xT}{3R^2}$: Vel, (neglecto T, ob cauſas ad §E. prop. præced. traditas,) illic, $\frac{n^3s}{3R^2}$; hic, $\frac{n^3x}{3R^2}$. Atque hoc quidem univerſaliter, quacunque ratione creſcant radii M T, quos n dicimus uſque ad eorum maximum N, qui ſit M T terminalis. Q. Fig. 200.

Et propterea; Si creſcant M T, ſeu n, in ratione angulorum P M T arithmetice proportionalium, quos a dicimus; erit $n=\frac{a}{\mathcal{P}}R$, (hoc eſt, in eadem ratione ad R radium circuli primi, qua eſt a ad $\mathcal{P}$; hoc eſt, angulus expoſitus P M T, ad quatuor rectos; ſeu iſtius anguli Arcus in Circuli primi peripheria, ad peripheriam integram;) Adeoque $\frac{n^2T}{2R}=\frac{a^2RT}{2\mathcal{P}^2}$; & $\frac{n^3sT}{3R^3}=\frac{a^3sRT}{3\mathcal{P}^3}$; & $\frac{n^3xT}{3R^2}=\frac{a^3xRT}{3\mathcal{P}^3}$. Qui eſt caſus, Spiralis *Archimedeæ*, capite præcedente expoſitus.

Si vero creſcant M T ſeu n, in angulorum a ratione duplicata, triplicata, aliaſve multiplicata; erit $n=\frac{a^2}{\mathcal{P}^2}R$, vel $n=\frac{a^3}{\mathcal{P}^3}R$, & ſic porro prout rationis multiplicatæ gradus poſtulaverit. Adeoque $\frac{n^2T}{2R}=\frac{a^4RT}{2\mathcal{P}^4}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2}=\frac{a^6sRT}{3\mathcal{P}^6}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2}=\frac{a^6xRT}{3\mathcal{P}^6}$; Vel $\frac{n^2T}{2R}=\frac{a^6RT}{2\mathcal{P}^6}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2}=\frac{a^9sRT}{3\mathcal{P}^9}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2}=\frac{a^9xRT}{3\mathcal{P}^9}$; & ſic porro, prout res poſtulaverit.

Si creſcant M T ſeu n, in angulorum a ratione ſubduplicata, ſubtriplicata, aliaſve

Fig. 200. aliaſve ſubmultiplicata ; erit $n = R\sqrt{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, atque ſic porro.

Adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{aRT}{2P}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{1}{3}sRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = \frac{asRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}} = \frac{1}{3}xRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}}$; Vel $\frac{n^2T}{2R} = \frac{1}{2}RT\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$: Atque ſic porro, ut caſus poſtulaverit.

Si creſcant denique MT ſeu n, in angulorum a ratione aliqua quæ compoſita ſit ex multiplicata & ſubmultiplicata; puta, ſubduplicata triplicatæ, ſeu ut $\sqrt{a^3}$: Erit $n = R\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = \frac{a}{P}R\sqrt{\frac{a}{P}}$; adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{a^3}{2P^3}RT$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{1}{3}sRT\sqrt{\frac{a^9}{P^9}} = \frac{a^4sRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^4xRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$: Et ſimiliter alibi, prout cujuſque compoſitionis gradus poſtulaverit, mutatis mutandis.

Ut igitur habeatur ſumma Omnium $\frac{n^2T}{2R}$; hoc eſt, ipſa figura Spiralis, quocunque demum multiplicatæ ſeu ſubmultiplicatæ ſeu ex his compoſitæ rationis gradu creſcant MT ſeu n: id ſaltem requiritur ut habeatur ſumma *omnium* a^2, vel *omn.* a^4, vel *omn.* a^6, vel *omn.* a, vel *omn.* $\sqrt[3]{a^2}$, vel *omn.* a^3, aliave iſtiuſmodi ſumma prout res poſtulaverit : (Quod univerſaliter obtinebitur per prop. 1. hujus.) Quippe hæc ſumma (per analogiam ipſius P poteſtatem diviſa) ducta in $\frac{1}{2}RT$, vel (neglecto tandem T, ob cauſas § E. prop. præced. traditas,) in $\frac{1}{2}R$; exhibet Spiralis figuræ magnitudinem. Quam & ante habuimus § A.

Ut autem habeatur ſumma omnium $\frac{n^3sT}{3R^2}$, vel omnium $\frac{n^3xT}{3R^2}$; hoc eſt, iſtius figuræ ſpiralis momentum reſpectu PMF, vel EMG; adeoque (momento per magnitudinem diviſo) Diſtantia Centri gravitatis ab illis rectis : Id requiritur, ut habeatur ſumma omnium a^3s, a^3x; vel omnium a^6s, a^6x ; vel omnium a^9s, a^9x; vel omnium $s\sqrt{a^3}$, $x\sqrt{a^3}$; vel omnium $s\sqrt[3]{a^3}$, $x\sqrt[3]{a^3}$, (hoc eſt, omnium as, ax ;) vel omnium $s\sqrt{a^9}$, $x\sqrt{a^9}$, (hoc eſt, omnium $a^4s\sqrt{a}$, $a^4x\sqrt{a}$;) aliave iſtiuſmodi ſumma prout expoſitus caſus poſtulaverit. Quippe hæc ſumma (per analogam ipſius P poteſtatem diviſa) ducta in $\frac{1}{3}RT$, vel (neglecto T) in $\frac{1}{3}R$; exhibebit totius momentum reſpectu rectarum PMF, EMG ; atque ad has aut illas partes, prout ſignum + vel — prævaluerit ; ut ad prop. præced. oſtenſum eſt. Unde etiam (ut dictum eſt) colligitur Centri gravitatis ab illis rectis diſtantia.

Quo pacto autem habebitur ſumma omnium as, ax ; vel omnium a^2s, a^2x ; vel omnium a^3s, a^3x ; (ope prop. 10. hujus,) oſtenſum eſt ad § E. H. prop. præced. Quod etiam (ut ibidem monitum eſt § H.) ad alias ejuſdem a poteſtates (indicem habentes numerum integrum) continuabitur ; puta, ad a^4s, a^4x ; a^5s, a^5x ; a^6s, a^6x ; &c.

Quod itaque ſufficiet caſibus eis omnibus, ubi ponuntur MT ſeu n creſcentes vel in ratione angulorum a, vel in horum ratione duplicata, triplicata, aliaſve multiplicata. Ut patet.

Vel etiam, in ipſorum a ratione ſubtriplicata, aut ſubtriplicatæ multiplicata. Quippe ſi ſit $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, &c. in horum Cubis, tolletur Radicalitatis nota ; nempe $n^3 = \frac{a}{P}R^3$, vel $n^3 = \frac{a^2}{P^2}R^3$; & ſic in cæteris : Adeoque $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$; vel $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^2sRT}{3P^2}$, $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^2xRT}{3P^2}$; & ſic in cæteris. Quæ itaque omnia, ope ejuſdem prop. 10. exhiberi poterunt ; uti oſtenſum eſt.

Verum

Verum ſi ponantur MT, ſeu n, creſcentes in angulorum a ratione ſubduplicata, ſubquadruplicata, aliave ſubmultiplicata, aut ex his utcunque compoſita, (quæ non æquipolleat vel ipſi angulorum a rationi, vel hujus alicui multiplicatæ, vel ſaltem ſubtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ;) res non ita feliciter ſuccedit. Quoniam hic, ne quidem in Cubis eliminabitur Radicalitatis nota: Adeoque nec ſatis applicari poterit methodus illa, § E. H. prop. præced. expoſita; ex prop. 10. hujus petita. Fig. 200.

Quæ autem, ad § Q. univerſaliter tradita ſunt; Nempe, quacunque ratione creſcant MT ſeu n radii; Sectorum ſimilium magnitudines eſſe, $\frac{n^2 T}{2R}$; eorumque momenta reſpectu PMF, & EMG, eſſe $\frac{n^3 s T}{3R^2}$, & $\frac{n^3 x T}{3R^2}$: Non modo in his Spiralibus locum habent, ubi radii n ſint in angulorum a ratione multiplicata, vel ſubmultiplicata, vel ex his compoſita; ſed quæcunque fuerit utcunque perplexa ſeu implicata ratio. Quæcunque enim fuerit, ſiquo modo haberi poſſit ſumma omnium $\frac{n^2 T}{2R}$, habebitur ſpiralis magnitudo: &, ſi haberi poſſit ſumma omnium $\frac{n^3 s T}{3R^2}$, & omn. $\frac{n^3 x T}{3R^2}$; habebitur iſtius Momentum reſpectu PMF, & EMG: & quidem ſi utraque habeantur; habebitur (momento per magnitudinem diviſo) Diſtantia Centri gravitatis ab illis rectis. R.

Exempli gratia; ſi ponantur radii n, creſcentes in ratione Ordinatim-applicatarum in Hyperbola; puta ut $\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: adeoque $n=\frac{\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}:}{P}R$: Erunt horum Quadrata, $n^2=\frac{aP+a^2}{2P^2}R^2$; adeoque $\frac{n^2T}{2R}=\frac{aP+a^2}{4P^2}RT$. Cum itaque (per prop. 1. hujus) haberi poſſit tum ſumma omnium a, tum omnium a^2; habebitur etiam, omnium $\frac{aP+a^2}{4P^2}RT$; quæ eſt ipſa figuræ ſpiralis magnitudo. Et quidem, ſi porro haberi poſſit, ſumma omnium n^3 ſeu omnium $\frac{aP+a^2}{2P^3}R^3\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: atque etiam ſumma omnium $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & omnium $\frac{n^3xT}{3R^2}$; hoc eſt, omnium $\frac{aP+a^2}{6P^3}sTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: & omnium $\frac{aP+a^2}{6P^3}xTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: Hoc eſt, iſtius Figuræ Spiralis momenta reſpectu rectarum PMF, EMG: Momenta hæc, per magnitudinem illam diviſa, exhiberent Centri gravitatis diſtantias ab illis rectis.

Cumque hæc in aliis Spiralium generibus, mille modis variatis, pariter obtineant: amplus hic pateret excurrendi campus, ſi liberet exſpatiari.

Et quidem nonnulla alia Spiralium genera, in Tractatu meo, *De Curvarum* Ἐυδωσεις exponuntur; quæ, cum multis aliis poſſent in hunc locum transferri. Sed, ne nimius ſim, Lectoris illud induſtriæ (ſi opus fuerit) permittendum erit.

SCHOLIUM.

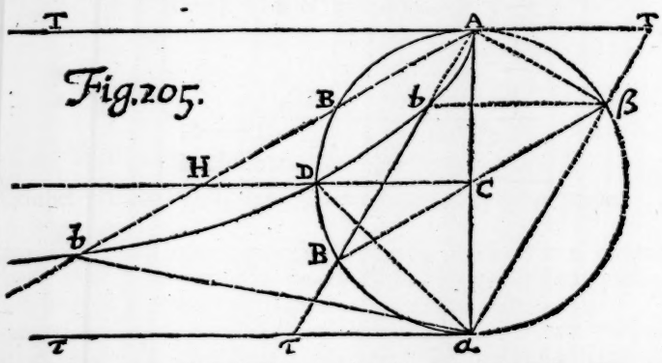
MOnendum hic duxi, (quod & ſupra, § A. inſinuatum eſt,) in Scholio prop. 45. *Arithm. Infin.* in aſſignanda ratione quam habet Figura Spiralis ad Sectorem conterminum, prout creſcunt MT radii, in angulorum AMT ratione ſimpla, duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. Cum (juxta demonſtrationis tenorem) dicendum erat, *ut* 1 *ad* 3, 5, 7, 9, *&c.* neſcio qua incuria ſcriptum fuerat, *ut* 1 *ad* 3, 4, 5, 6, *&c.* Quod cum non animadverterit V. Cl. *Stephanus de Angelis*, merum eſſe ſive Calami ſive Calculi lapſum, (non ex demonſtrationis vitio ortum;) ſuſpicatus eſt doctrinam illam de Spiralibus infirmam eſſe. Cum interim ſi ſatis animadvertiſſet demonſtrationis vim (quæ hinc potiſſimum dependet, quod ſimiles Sectores ſint in Radiorum ratione duplicata; adeoque ubi Radiorum

Fig. 200. Radiorum ſeries indices habent 1, 2, 3, 4, &c. ſeries ſectorum habebunt indices 2, 4, 6, 8, &c. adeoque omnium ſumma, ad maximum toties ſumptum; hoc eſt, figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 3, 5, 7, 9, &c.) vidiſſet, tum demonſtrationi vim ineſſe; tum, emendato mendo numerali, omnia probe conſtare. Adeoque quam ille prolixa refutatione (in ſuo *de Spiralibus* tractatu) doctrinam ſubverſum it: multo facilius, tribus verbis emendaſſet; dicendo, [*pro* 3, 4, 5, 6, *ſubſtituendum* (*juxta demonſtrationis tenorem*) 3, 5, 7, 9:] quo facto, non erit quod reprehendat. Sed & ſimul videbit, totam illam quam ille juſto volumine *De Spiralibus* doctrinam habet; eodem Scholio ſummatim tradi: Et quidem (utut hoc ille non ſtatim perſpexerit) univerſalius quam ab ipſo tradita eſt. Cum enim dixeram, doctrinam illam de Parabolis & Paraboloeidibus, tum ante traditam, *tum deinceps tradendam*, ſpiralibus accommodari poſſe, in quibus creſcant M T rectæ, in angulorum P M T ratione *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, *&c.* illud *&* *cætera* extendendum erat non modo ad alias rationes (ſtricte loquendo) *multiplicatas*, ſed & *ſubmultiplicatas*, vel ex multiplicatis & ſubmultiplicatis utcunque *compoſitas*, vel etiam *numero ſurdo* exponendas. Quippe illud ſummatim inſinuatum vellem; (quod de Paraboloeidibus, magis particulatim, vel ante traditum, vel mox tradendum erat;) Quemcunque habeat Indicem Series Rectarum M T, (integrum, fractum, ſurdumve;) hujus *Duplum*, indicem eſſe Seriei ſimilium Sectorum radiis illis deſcriptorum: Summamque horum, ad maximum toties ſumptum, (hoc eſt, figuram Spiralem ad Sectorem conterminum,) eſſe, ut 1 ad indicem illum (*duplum*) unitate auctum. Cujus quidem doctrinæ univerſalis, nonniſi pars eſt, tota illa quam habet ille de Spiralibus. Quæ tamen non ideo dicta ſunt, ut, ab eo traditis, derogatum eam: ſed ut oſtendam, quam ſit corollariorum ferax generalis illa methodus; cum Scholium illud Unicum (nec adeo longum) quo particulatim exponatur, materiam ſubminiſtrare poſſit juſto Volumini.

PROP. XXIX.

Quæ de Spatio Cycloidali (prop. 15.) tradita ſunt non pauca, poſſunt & Spatio Ciſſoeidali accommodari.

Ciſſoeidis lineæ meminit Pappus lib. 3. prop. 4, 5. (pro duabus mediis proportionalibus inveniendis excogitatæ;) Cujus hæc natura. Sit A D α Semicirculus; cujus Centrum, C; Diameter, A α; cui ad angulos rectos inſiſtat C H D: Ducta ubivis Chorda A B, quam ſecet C D in H; ſi in ea ſumatur, rectæ B H,



æqualis H b; (vel A b = B τ;) quæ per omnia b puncta incedit curva A b D, *Ciſſoeides* dicitur. Eademque etiam ultra D punctum eodem ritu continuata (alternato tantum punctorum B b ſitu, quæ in D coincidunt,) ea eſt quam hic volumus. Cui Aſymptota eſt α τ recta, circulum in α contingens.

Spatium Ciſſoeidale, dicimus, quod curvæ A b b, rectiſque A α, α τ, interjacet: interminabile quidem ex parte b τ; magnitudinis tamen finitæ.

Spatium

Spatium hoc conſideravimus in Tractatu Epiſtolari, Tractatui de *Cycloide* ſubjuncto. Ejuſque tum magnitudinem, tum momentum reſpectu rectarum A T, $\alpha\tau$; Centrique gravitatis (ſi quod foret) ab iis diſtantiam; Solidique ejuſdem converſione ſive circa A T ſive circa $\alpha\tau$, facti magnitudinem, determinavimus. Fig. 205.

Eſt utique illud A b b $\tau\alpha$ ſpatium interminabile, ſemicirculi A D α triplum. Et Axis Æquilibrii (adeoque, ſiquod eſſet, Centrum gravitatis) diſtat à $\tau\alpha$, Sextante Diametri A α; adeoque, à T A, ejuſdem Diametri quinque Sextantibus; eiſdem T A, $\tau\alpha$, tangentibus parallelus. Centrum autem gravitatis, intelligendum eſt, in axe illo, ab A α removeri ad infinitam diſtantiam; adeoque nuſquam erit.

Solidumque ejuſdem circa $\tau\alpha$ converſione factum, eſt æquale Solido ex ſimili converſione Semicirculi A D α, circa eandem $\tau\alpha$: adeoque Semicylindro cujus baſis ſit idem Semicirculus, & altitudo æqualis peripheriæ puncto C circumducto deſcriptæ. Solidumque ejuſdem circa T A converſione factum, eſt Solidi prioris quintuplum. Solidum vero quod intelligatur ejuſdem circa A α converſione deſcribi; eſt magnitudinis infinitæ.

Ungularum vero eidem inſiſtentium, aciem habentium $\tau\alpha$, vel T A; ad ſimiles Ungulas Semicirculo inſiſtentes, eaſdem acies habentes; eadem eſt ratio quæ Solidorum iſtius converſione factorum, ad Solida ſimili converſione Semicirculi facta.

Ungularum vero; Planum Æquilibrii (in quo & Centrum gravitatis ſiquod eſſet,) quæ aciem habent $\tau\alpha$, ab ea diſtat, $\frac{3}{8}$ rectæ A α; quæque aciem habent T A, ab ea diſtant, $\frac{1}{8}$ ejuſdem rectæ A α. Semiſolidorum vero, aliorumve imperfecta converſione factorum, diſtantia Axis Æquilibrii ab axe converſionis $\tau\alpha$ vel T A, ad illam in Ungulis diſtantiam, (ut ſæpius ante oſtenſum eſt,) ut eſt ad converſionis arcum Chorda ſua.

Quæ omnia cum ibidem demonſtrata ſint, non opus eſt ut eadem hic repetam.

Ut autem de Spatio Cycloidali oſtenſum eſt, (prop. 15. hujus,) non modo totum A b $\tau\alpha$ (fig. 166.) totius A D α Semicirculi triplum eſſe; ſed & partes partium reſpective ſumptarum; puta b $\beta\tau$, b $\beta\beta$ b, b $\beta\alpha$ A, triplas partium αB α, B αB, B αA; & ſic ubique: Ita in Spatio Ciſſoeidali fig. 205. non modo totum b b A $\alpha\tau$ (ſpatium interminabile) triplum totius Semicirculi A D α, (adeoque Semicycloidi A $\tau\alpha$ fig. 166. æquale:) ſed & portiones b αA, b αb, b $\alpha\tau$, fig. 205. triplas reſpectivarum Semicirculi portionum αB α, B αB, B αA; & ſic ubique; (adeoque ipſis Semicycloidis portionibus, b $\beta\tau$, b $\beta\beta$ b, b $\beta\alpha$ A, &c. fig. 166. reſpective ſumptis, æquales.) Quod Vir Cl. *Chriſtianus Hugenius* me primus monuit.

Verum hæc, ne nimius ſim, mihi nunc non eſt in animo ulterius proſequi; nedum quæ ad partium Centra gravitatis ſpectant, quæque hinc dependent.

Id interim monendum duxi, Poſſe quidem eandem curvam alio adhuc modo conſtrui.

Cum enim (ut ibidem ex Pappo demonſtratum eſt,) ducta diametro B C β, junctaque tum A β, tum β b, quæ rectam A α ſecet in V; ſit (propter tum B b bifectam in H, tum B β in C,) β V b, ipſi C H parallela; adeoque anguli ad V recti: erunt V α, V β, V A, V b, continue proportionales; hoc eſt (poſitis, A V $= v$, V $\alpha = h$, V $\beta = s$, ut antehac ſæpius;) continue proportionales, h, s, v, $\frac{v^2}{s} =$ b V. (Quod perinde valet, ſive ſumatur b, in A b D curva intra Semicirculum; ſive in eadem extra Semicirculum continuata.) Adeoque, ſumpto ubivis in A $\beta\alpha$ ſemiperipheria puncto β; ſumptaque ad V β, V A, (ſeu s, v, ſinum rectum & verſum Arcus A $\beta = a$,) tertia proportionali $\frac{v^2}{s}$; erit hæc æqualis ipſi b V ordinatim-applicatæ ad Diametri A α punctum V. Quæque per omnia b puncta tranſit A b b, eſt ipſa Ciſſoeidalis curva. Sumptiſque A V $= v$, arithmetice proportionalibus; erunt omnes $\frac{v^2}{s}$, totidem b V ſpatium Ciſſoeidale complentes. Cujus quidem portio A b α, cum tripla ſit ſegmenti αB α, hoc eſt ſegmenti, A b A; erit (per §G. prop. 15.) $\frac{3}{4} eR$, ſeu $\frac{3}{4} aR - \frac{3}{4} sR$.

Fig. 205. Sed & ſic poteſt conſtrui eadem Curva.

Ducta recta $\alpha\beta$ T, quæ tangenti T A T occurrat in T; erit ubique $\beta b = AT$. Eſt enim $\alpha V . V\beta :: VA . Vb :: \alpha A = \alpha V + VA . AT = V\beta + Vb = \beta b$.

SCHOLIUM.

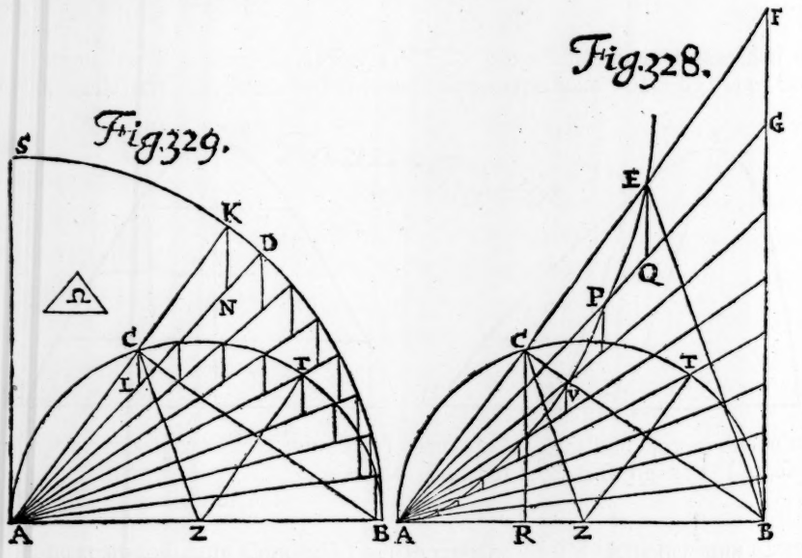
HAnc *Ciſſoeidalis Spatii* menſuram, me primus monuit (ſed abſque Demonſtratione) Vir Nobiliſſ. D. *Chriſtianus Hugenius* (acuti & ſagacis ingenii Vir) literis ad me datis 6° Auguſti 1658: Solicitus; An id ego poſſem conſequi methodis meis in *Arithmetica Infinitorum* traditis; (quas ibidem ille ſumme comprobat & collaudat;) prout me notat ante feciſſe (in *Commercio Epiſtolico*, tum nuper edito, Epiſt. 5 & 16.) in *D. Fermatii Hyperbolis Infinitis*; (nondum utique ſciebat Vir Nobiliſſimus, id item me feciſſe in *Cycloide*; cum ille *De Cycloide* liber nondum prodierit; ſed Anno tum ſequente 1659, una cum *Tractatu Epiſtolari*, ad illum ſcripto, *De Curvis Rectificandis & Complanandis.*)

Quod anſam dedit ea conſcribendi, quæ hac de re habentur in Tractatu illo Epiſtolari: Quo conſtaret Nobiliſſimo Viro, Eiſdem Methodis, directo ordine, huc perventum iri poſſe; etiam cum lucro.

Poſt autem editum Tractatum illum Epiſtolarem; atque hanc etiam *Secundam* Mechanicorum partem: Dignatus eſt Vir Nobiliſſimus (à me rogatus) ſuam ejuſdem (Ciſſoeidalis Spatii) menſuræ Demonſtrationem (ad modum Veterum conſtructam) mecum communicare. Quam ego (ne periret) ſubjunxi, tanquam Appendicem, Mechanicorum Parti *Tertiæ* (cap. 15. prop. 2.) meamque aliam eidem conſulto accommodatam: Quas ambas inde huc transferre jam viſum eſt, ut in locum debitum.

Demonſtratio D. Hugenii.

Quod *Spatia Ciſſoeidalia* $b\alpha A$, $b\alpha b$, $b\alpha\tau$, *&c. ſint tripla reſpectivorum in Semicirculo* $\alpha B\alpha$, $B\alpha B$, $B\alpha A$, &c. & ſic ubique. D. *Hugenii* Demonſtratio erat ad hunc ſenſum; (verbis nonnihil, ipſo inſinuante, mutatis;) quam potui proxime ad mentem ſuam deſcripta.



"Sit A C B, ſemicirculus, (cui Centrum Z, tangens B F) & A V P E Ciſſoides "Dioclis inde genita: Cujus hæc proprietas, ut ſit ubique A C = E F. Atque ei- "dem Semicirculo (ſeorſum tranſcripto, quo vitetur linearum confuſio,) circum- "ponatur A B S circuli Quadrans (Centro A radio A B deſcriptus;) cui A C "producta occurrat in K.

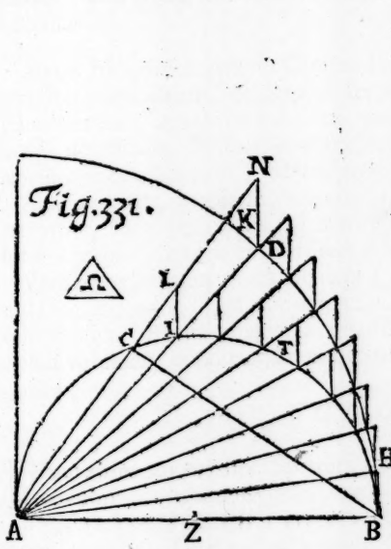
"Dico,

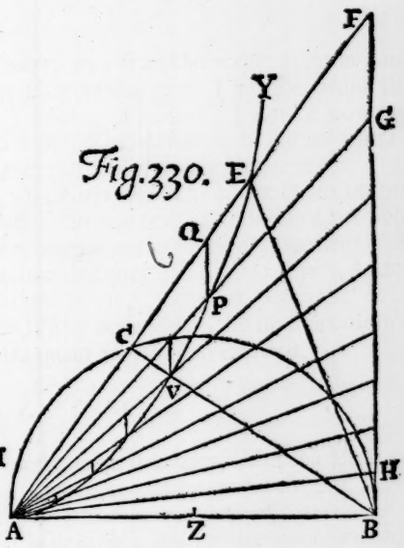
" Dico, *Spatium* AVPEFB *æquari Triplo ſegmento* CBT *una cum Triangulo* "ACB: Hoc eſt, Sectori AKB una cum Spatio CTBK. Eſt enim Segm. "CBT = Spat. CTBK. Nam (junctâ CZ) erit Ang. CZB = 2 Ang. CAB. "Adeoque Sect. ZCB = ½ Sect. AKB. Ergo Sect. ZCB = Triang. ACZ + "Spat. CTBK. Auferantur æqualia, hinc Triang. ACZ, inde Triang. ZCB: "Fit, Spat. CTBK = Segm. CBT.

" Oſtendendum ergo, quod Spat. AVPEFB = Sect. AKB + Spat. CTBK.

" (Præſumitur autem, tanquam facile demonſtratu, per notas exhauſtionum me- "thodos, *Sectori* AKB *Inſcribi poſſe & Circumſcribi figuram Dentatam, ita ut* "*altera alteram excedat ſpatio minore quolibet dato*: *Et ſimiliter, Spatio Ciſſoidali* "AVPEFB.)

" Si dicatur Ciſſoidis Spatium AVPEFB, minus eſſe quam Sect. AKB + " Spat. CTBK: Sit horum exceſſus Ω. Et inſcribatur ſectori AKB figura ordi- "nate, ut duplum omnium Trilineorum KND ſit minus quam Ω. Et Ciſſoidis "Spatio AVPEFB, figura inſcribatur ex totidem trapeziis. Oſtendetur Tra- "pezium EFGQ = Triang. AKN + Trapez. CN. Eſt enim Trapez. EG ad "Triang. ACL, ut FG + EQ ad CL, (quia eandem habent altitudinem;) "Hoc eſt, ut FA + AE ad AC; Hoc eſt, ut AF + FC ad AC; Hoc eſt, (de- "miſſa perpendiculari CR) ut AB + BR ad RA. Ergo, componendo, Tra- "pez. EG + Triang. ACL ad Triang. ACL, ut 2 AB ad AR; Hoc eſt, ut " 2 Quadrat. AB ad Quadrat. AC; Hoc eſt, ut 2 Qu. AK ad Qu. AC; Hoc eſt, "2 Triang. AKN ad Triang. ACL. Ergo, Trapez. EG + Triang. ACL = "2 Triang. AKN. Et, ablato utrinque Triang. ACL, manet Triang. AKN "+ Trapez. CN = Trapez. EG. Et ſimiliter de cæteris. Ergo, figura in Sectore "Inſcripta + Omn. Trapez. CN, = Figuræ ſpatio Ciſſoidis Inſcriptæ. Sed fi- "gura in Sectore aſſumens omnia KND, item Trapezia CN aſſumentia omnia "KND, iſta inquam omnia ſimul ſumpta ſuperant Sectorem AKB + Spat. "CTBK. Ergo, figura in Sectore + trapeziis CN (hoc eſt, figura in Ciſſoide,) "aſſumens ſpatium Ω, longe ſuperabit Sectorem AKB + ſpat. CTBK. Sed ipſum "Ciſſoidis ſpatium AVPEFB + Ω æquatur ex hypotheſi Sectori AKB + ſpat. "CTBK. Ergo figura in Ciſſoide ipſo Ciſſoidis ſpatio major erit. Quod eſt ab- "ſurdum.





" Dicatur jam Spatium idem AVPEFB, majus Sectore AKB + Spat. CTBK. "Sitque exceſſus Ω. Et circumſcribatur Sectori figura, ut omnia KND bis ſumpta "ſint minora exceſſu Ω. Et Ciſſoidis ſpatio, figura ex totidem Trapeziis; (niſi "quod, pro ultimo Trapezio, habeatur in Ciſſoide Triangulum AHB = Triang. " AHB in Sectore.) Oſtendetur, ut ſupra, Trapez. PQFG = Triang. ADN + "Trapez. LD. Ergo, tota figura circumſcripta Ciſſoidi, æqualis circumſcriptæ

"Sectori + omnibus Trapeziis LD. Sed ab his si demantur bis omnia Trilinea "KDN, residuum minus erit quam Sector AKB + spat. CTBK. (Nam pri- "mum auferendo omnia KDN, à figura circumscripta Sectori, relinquitur Sector "AKB: At eadem KDN auferendo à Trapeziis LD, residua omnia simul mi- "nora sunt spatio CTBK: Quin additis rursus spatiis LIC, omnia simul æquan- "tur demum spatio CTBK.) Ergo, Si ab his ipsis, à figura nimirum circa Se- "ctorem + Trapeziis LD; Hoc est, à figura Spatio Cissoidis circumscripta; Au- "feratur Ω: Reliquum multo minus erit Sectore AKB + spat. CTBK. Sed "spatium ipsum Cissoidis dempto Ω æquale dicebatur his ipsis. Ergo Cissoidis spa- "tium majus erit figura sibi circumscripta. Quod est absurdum.

"Hoc itaque demonstrato, Quod Spat. AVPEFB = 3 Segm. CBT + Tri- "ang. ACB: facile ostendetur, Quod *Spatium infinitum* AVPEYFB = 3 *Se- "micirc.* ACB.

"Item, *Quod Spatium* AVPEB = 3 *Segment.* CBT.

Atque hactenus Demonstratio D. *Hugenii*. Aliam se dicit ad D. *Slusium* olim misisse, (quam non vidi,) sed cui hanc præfert.

Idem aliter.

Huic D. *Hugenii* demonstrationi, libet etiam meam subjungere, (*Hugenianæ* consulto accommodatam,) ad eandem fere formam qua supra in Cycloide usus sum; retentis item eisdem Symbolis. Nempe;

Fig. 332.

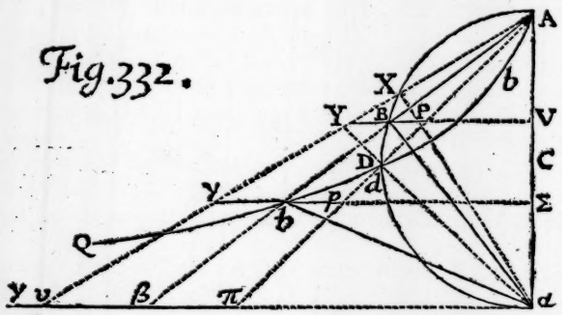


Fig. 169, 174, 332. Intelligatur (ut, in Cycloide, § C, H. prop. 20. & alibi,) Semicirculi Genitoris peripheria AD α, in punctis X, B, D, &c. in partes quotlibet æquales dividi; puta, XB, BD, vel XBD, &c. Quibus respondeant Sectores X α B, B α D, vel X α D, &c. semicirculum complentes: Seu (quod in partibus infinite exiguis tantundem valet) Triangula figuram Inscriptam complentia, quorum unum sit B α P; vel complentia figuram Circumscriptam, quorum unum sit B α Y; vel denique (quod hic potissimum sequemur) complentia figuram partim inscriptam partim circumscriptam, quorum unum sit P α Y.

Quibus respondeant Triangula (situ contrario) ad Circulum, BAP, BAY, PAY; ad Cissoidem, bAp, bAy, pAy; ad Tangentem, βAπ, βAυ, πAυ; & (Triangulorum ad Cissoidem, & ad Tangentem, differentiæ) Trapezia bβπp, bβυy, pπυy. Quæ quidem (figuras partim inscriptas partim circumscriptas spectantia) PαY, PAY, pAy, πAυ, pπυy, repræsentent axes sui αB, AB, Ab, Aβ, bβ. Quanquam enim, in sectione definita, major sit BY quam BP, adeoque by quam bp, & βυ quam βπ: neque rectæ AX, αD, in eodem Y puncto præcise coeant; aut rectæ αX, AD, in eodem præcise puncto P: sectione tamen in infinitum continuata, differentiæ illæ evanescunt; adeoque hic pro nullis habendæ, ipsaque recta PB = BX arcui, & BY = BD, & PBY = XBD. Ut, ex supra traditis de Cycloide, liquet.

His ita constructis; Ponamus Triangulorum PαY, PAY, (seu αB, AB,) basin PBY = *B*; Adeoque (propter hujus altitudinem AV = *v*,) erit Triangulum PAY, seu AB, = $\frac{1}{2}vB$. Sed, (propter similia triangula) ut recta AB ad Ab, & ad Aβ; hoc est, ut AV = *v*, ad AΣ = αV = *h*, & ad Aα = 2*R*; sic est PY = *B*, ad $\frac{bB}{v}$ = py, & ad $\frac{2RB}{v}$ = πυ. Adeoque (propter altitudinem, illic

AΣ = *h*,

$A\Sigma = b$, hic $A\alpha = 2R$,) erit Triangulum A p y, seu A b, $= \frac{b^2 B}{2v}$; & A πv, seu A β, $= \frac{4R^2 B}{2v}$; & (horum differentia) Trapezium p y $v\pi$, seu b β, $= \frac{4R^2 - b^2}{2v} B$, hoc est (propter $b = 2R - v$, adeoque $b^2 = 4R^2 - 4vR + v^2$, & $4R^2 - b^2 = 4vR - v^2$,) $\frac{4R - v}{2} B$. Et sic ubique,

Ut igitur, Omnia A B Triangula, hoc est *Omn.* $\frac{1}{2}vB$, (sumptis arcubus *a* arithmetice proportionalibus usque ad *a* maximum seu arcum A B, quorum communis differentia *B*,) complentia vel totum Semicirculum A D α, vel illius Segmentum A B A, vel Sectorem B A α; ad Omnia p y $v\pi$, hoc est *Omn.* $\frac{4R - v}{2} B$, complentia vel totum spatium Cissoidale interminatum Q b b A $\alpha\tau$, vel ipsius partem (item interminatam) b $\beta\tau$ Q arcum A B spectantem, vel partem reliquam A b b $\beta\alpha$ arcum B α spectantem, (nam de toto & de partibus perinde valet demonstratio;) vel (propter omnes $\frac{1}{2}B$ invicem æquales) ut *Omn.* *v*, ad *Omn.* $4R - v$, eo spectantia; sic spatia illa *Circularia*, ad respectiva *Cissoidalia*.

Sunt autem (sumptis, ut dictum est, *a* arithmetice proportionalibus) *Omnes v* arcum A B spectantes, (hoc est, A b K fig. 170.) $= eR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4aR$. Adeoque Segmentum A B A, ad correspondens spatium Cissoidale b $\beta\tau$ Q, ut eR ad $4aR - eR$, hoc est, ut e ad $4a - e$, vel (propter $e = a - s$) ut $a - s$ ad $(4a - a + s =) 3a + s$. Est autem Segmentum ABA, $= \frac{1}{2}eR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ (per § G. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale b $\beta\tau$ Q, $= \frac{3}{2}aR + \frac{1}{2}sR$. Et, additis Triangulis illic α B A, hic α b β, (invicem æqualibus, propter æquales bases A B, b β, & altitudinem eandem,) quorum utrumvis $= sR$; fiet Sector B α A $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, & Spatium Cissoidale α b Q $\tau = \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, Sectoris Triplum.

Similiter; *Omnes v* arcum B α spectantes, (hoc est K b τ T fig. 170.) $= \frac{1}{2}PR - eR = \frac{1}{2}PR - aR + sR = \alpha R + sR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4\alpha R$. Adeoque Sector B A α, ad correspondens Spatium Cissoidale A b b $\beta\alpha$, ut $\alpha R + sR$ ad $(4\alpha R - \alpha R - sR =) 3\alpha R - sR$, hoc est, ut $\alpha + s$ ad $3\alpha - s$. Est autem Sector B A $\alpha = \frac{1}{2}\alpha R + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale A b b $\beta\alpha = \frac{3}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$. Et, sublatis æqualibus Triangulis, (illic α B A, hic α b β,) $= sR$; fiet Segmentum α B $\alpha = \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$, & spatium Cissoidale α b b A $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$, segmenti Triplum.

Totum autem, quod A D α semicirculum spectat, Spatium Cissoidale Abb Q $\tau\alpha$, utrovis modo consequemur, propter evanescentia triangula α B A, α b β; seu $sR = 0$.

Eadem non multo aliter consequemur, ope Triangulorum P α Y. Nam, ut (Omnia Triangula P α Y arcum A B spectantia, hoc est) *Omnia* $\frac{1}{2}hB$, ad (omnia respectiva Trapezia p y $v\pi$, hoc est) *Omnia* $\frac{4R - v}{2} B$; seu ut *Omn. h.* ad *Omn.* $(4R - v =) 2R + h$; sic Sector (quem illa complent Triangula) B α A, ad Spatium (quod ea complent Trapezia) β b Q τ. Sunt autem *Omn. h*, eo spectantia, (hoc est, A b $\beta\alpha$ fig. 170.) $aR + sR$ (per § B. prop. 17.) adeoque *Omn.* $2R + h$ respectiva, $2aR + aR + sR = 3aR + sR$. Ergo, ut $aR + sR$ ad $3aR + sR$; seu ut $a + s$ ad $3a + s$; sic Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) ad Spatium β b Q $\tau = \frac{3}{2}aR + \frac{1}{2}sR$. Si huic itaque addatur Triangulum β b α $= \alpha$ B A $= sR$; fiet totum spatium α b Q $\tau = \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, triplum Sectoris B α A.

Item, ut *Omn.* (Triang. P α Y, seu) $\frac{1}{2}hB$ arcum B α spectantia, ad *Omn.* (Trapez. p y $v\pi$, seu) $\frac{4R - v}{2} B$ respectiva; seu *Omn. h* ad *Omn.* $(4R - v =) 2R + h$ eo spectantia; sic Segmentum (quod illa complent) α B α, ad Spatium (quod hæc complent) β b b A α. Sunt autem *Omn. h* arcum B α spectantes (hoc est, b $\beta\tau$ fig. 170.) $\alpha R - sR$ (per § B. prop. 17.) adeoque *Omn.* $2R + h$ respectiva, $3\alpha R - sR$. Ergo, ut $\alpha R - sR$ ad $3\alpha R - sR$; seu ut $\alpha - s$ ad $3\alpha - s$, sic Segmentum α B $\alpha = \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$ (per § G. prop. 15.) ad Spatium β b b A $\alpha = \frac{3}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$. Unde si auferatur Triangulum β b $\alpha = \alpha$ B A $= sR$; relinquitur

linquitur Spatium α b b A $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}s R$; Triplum Segmenti α B α.

Hinc facilis esset ad Momenta, & Centra gravitatis (ubi habentur,) Solidaque conversione facta, & horum item (ubi habentur) Centra Gravitatis, transitus; per methodos supra sæpius adhibitas.

PROP. XXX.

A. B. Fig. 206. In Conchoeide, quæ ad Axem Ordinatim-applicatur recta componitur ex *Sinu-recto & Tangente* ejusdem Anguli: Et quidem ejusdem Circuli in Primaria, (ubi PC & CA æquantur,) sed diversorum in aliis.

C. Adeoque constat Semi-Conchoeidale Planum CAOOH, ex Qua-

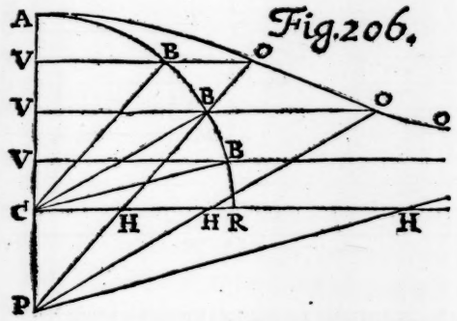


Fig. 206.

drante Genitore CAR, & figura Tangentium RBAOO; ad eundem radium æstimatarum in Conchoeide *Primaria*, (ubi CA, PC, æquantur;) sed, in *Secundaria*, ad alium; (nempe PC:) Majorem quidem in *Protracta*, (ubi excentricitas PC major est quam AC altitudo,) in *Contracta* vero (ubi PC minor est quam CA) minorem.

D. Atque, in Conchoeidibus diversis invicem Comparatis; Genitores Quadrantes (eorumque segmenta respectiva) sunt in duplicata ratione Altitudinum CA. Reliquaque spatia RBAOO, (eorumque respectiva segmenta, ut ABO, vel OBBO,) si Altitudines CA æquales sint; sunt in ratione Excentricitatum: si Excentricitates PC sint æquales; in ratione Altitudinum CA: si neutræ; in ea quæ ex Altitudinum & Excentricitatum rationibus componitur; seu in ratione rectangulorum CPA.

A. E. Conchoeidis Planum (Curvæ & Regulæ interjectum) interminabile est, & magnitudinis infinitæ.

F. Ejusdem vero Momentum, respectu rectæ CH quæ Regula dici solet, finitum est: Ungulaque eidem insistens, aciem habens Regulam CH; Solidumque Plani circa Regulam illam conversione facti: sunt quidem Interminata, sed Magnitudinis finitæ, & notæ. Quod & de partibus, ut ABO, perinde valet.

G. H. Plani Semi-Conchoeidis Centrum gravitatis nullum est, (seu, quod eodem recidit, non nisi in infinita ab Axe distantia:) Sed neque Ungulæ, nec Solidi conversione facti.

G.H.I. Idemque obtinet de segmentis OVCH, rectæ CHH adjacentibus; atque de Ungulis Solidisque eo spectantibus: Sed non item de Segmentis

Segmentis remotis AVO, ſeu ABO; aut ungulis Solidiſve eò ſpectantibus. Sed neque de Ungulis Solidiſque quæ Conchoeidem totam ſpectant (utrinque ab AC porrectam) quæ Centrum gravitatis habent in ipſa AC recta. Fig. 206.

A. IN expoſita quavis recta AP, dicatur P polus, A vertex, punctumque quodvis intermedium C Centrum, rectaque infinita CHH (ad expoſitam AP perpendicularis) Regula: Atque intelligatur AP recta (ad partes P quantum opus eſt continuata) circa Polum P manentem ſic converti, ut C punctum in recta CH perpetuo maneat; punctoque ſui extremo A, curvam deſignet AOO: Hanc curvam veteres *Conchoeidem* dixerunt.

Manifeſtum autem eſt, (propter rectam PO, regulam CH ſecantem in H,) punctum O ad CH regulam nunquam perventurum: Sed & (propter HO perpetuo æqualem ipſi CA, & ſectionis angulum continue acutiorem;) eo tandem perventum iri ut puncti O ab ipſa CH diſtantia futura ſit data quavis minor: Adeoque rectam CHH ad curvam AOO Aſymptotam eſſe; ſpatiumque, interminabile. Quæ demonſtranda erant.

B. Centro C, radio CA, deſcribatur circuli quadrans CAR (quem *Genitorem* appello) regulæ CHH occurrens in R; ſitque ordinatim-applicata quælibet in Quadrante VB, in Conchoeide VO, (quadranti occurrens in B;) jungantur CB, PO.

Manifeſtum eſt, (propter æquales CA, CB, HO,) parallelas eſſe CB, HO, hoc eſt, CB, PO: adeoque angulos ACB, APO, æquales eſſe.

Eſt autem VB, Sinus Rectus Anguli ACB ad radium AC; & CH, hoc eſt BO, ejuſdem anguli APO ſeu ACB, Tangens ad Radium PC; (quam *Excentricitatem* appello:) Hoc eſt, ad eundem radium, ubi PC, CA, æquantur; ad diverſos, ubi non æquantur. Illas ego Conchoeides *Primarias* appello; has, *Secundarias*; & quidem vel *Contractas* vel *Protractas*, prout Excentricitas PC minor eſt vel major quam Genitoris radius CA, quam *Altitudinem* appello. Puta, in fig. 207. AOO eſt *Primaria*; Secundariæ vero, Aoo *Contracta*, & A∞∞ *Protracta*.

Adeoque; ut, in Cycloide, fig. 166. ordinatim-applicata quælibet bBV, componitur ex Sinu recto BV in circulo genitore; & ex Bb, quæ reſpectivo arcui æquatur; nempe ipſi BA in Cycloide *Primaria* (cujus baſis τατ æquatur perimetro Circuli genitoris,) vel in *Secundariis*, (ſive *protractæ* ſint, ſive *contractæ*,) ſimili arcui alterius circuli; cujus nempe perimeter æqualis eſt expoſitæ Cycloidis baſi; (ut ad prop. 20. hujus oſtenſum eſt:) ſic in Conchoeide fig. 206. ordinatim-applicata VBO, componitur ex ſinu recto VB (ad radium CR inſcripti Quadrantis CAR) & ex BO, hoc eſt CH, tangente correſpondentis anguli; & quidem ad eundem radium, in Conchoeide *primaria* (ubi PC, CA, æquantur;) ſed in *Secundariis*, ſive protractis ſive contractis, (in quibus PC, CA, non æquantur,) ad diverſum; nempe, ad radium PC. Quod itidem erat demonſtrandum. (Et quidem num illud ante me quiſpiam animadverterit, neſcio.)

C. Componitur itaque Semiconchoeidale Spatium interminatum CAOOH, ex CAR Quadrante Genitore, & RBAOO, figura Tangentium (diſtorta) unius quadrantis, Radio PC convenientium, ſinibus verſis arithmetice-proportionalibus reſpondentium: ſed, quæ altitudinem habeat AC. Pariter atque componitur Semicycloidale ſpatium Aτα fig. 166. ex Semicirculo Genitore ADα, & ADατ figura Arcuum diſtorta (ſinibus verſis arithmetice-proportionalibus reſpondentium,) ad eundem cum circulo genitore Radium, in Primaria; ad alium, in Secundariis; ſed quæ Altitudinem habeat eandem cum Genitore circulo.

D. Hinc ſequitur; In Conchoeidibus diverſis, ejuſdem altitudinis, (intellige, quarum eadem ſit radii CA longitudo, ſeu magnitudo eadem quadrantis Genitoris CAR,) ſed quæ inæquales habeant Excentricitates PC; Conchoeidale ſpatium (quod extra Circuli quadrantem eſt) RBAOO, (quam Tangentium figuram eſſe, jam oſtendimus) vel etiam ejuſdem aſſignatum quodvis ſegmentum (ordinatim-applicata abſciſſum) ABO, vel duabus ordinatim-applicatis interjectum OBBO; in ea ratione majora eſſe vel minora, qua majores ſunt vel minores ſuæ reſpectivæ Excentricitates PC. Nam qua ratione creſcit vel deſcreſcit radius PC, eadem

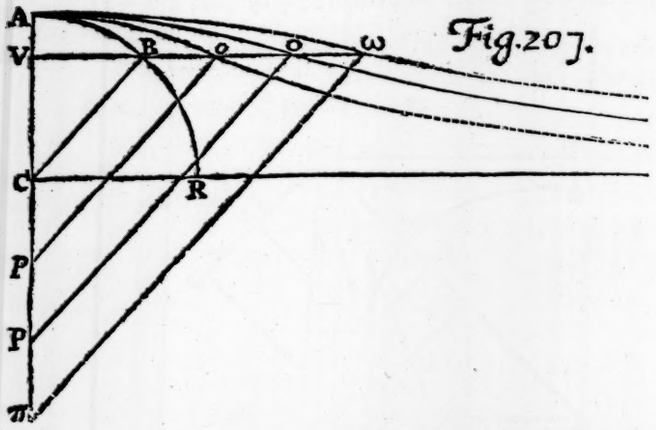


Fig. 207.

eadem ratione creſcunt vel decreſcunt Tangentes omnes (reſpective ſumptæ) CH, hoc eſt, omnes BO, ſpatium complentes RAO, vel BAO, vel OBBO.

Adeoque (propter eaſdem utrobique reſpectivas altitudines) in eadem ratione augetur vel minuitur ſpatium quod complent illæ rectæ. Puta, (fig. 207.) Spatium ABO in *Primaria*; ad ABo, in ſecundaria *Contracta*; & ABω, in *Protracta*; eam rationem habet (propter eandem altitudinem) quam habet Excentricitas PC, ad pC, & πC. Et ſic ubique.

Si vero, eadem manente Excentricate PC, mutetur Altitudo CA; erunt reſpectiva ſpatia ABO, &c. altitudinibus illis proportionalia. (Nempe, propter eaſdem latitudines reſpectivas.)

Adeoque, ſi mutentur utræque; erunt reſpectiva Spatia, in ea ratione quæ componitur ex rationibus Altitudinum CA, & Excentricitatum PC: hoc eſt, in ratione rectanguli PCA in una, ad rectangulum PCA in altera. Quod (credo) primus indicabam ego, in *Commercio Epiſtolico*, Epiſt. 39, 40.

Quadrantes autem Genitores, ſi altitudines (hoc eſt, radios,) æquales habeant, æquales eſſe; ſin inæquales, in Radiorum ſuorum ratione duplicata eſſe; notius eſt quam ut demonſtratu opus ſit:

E. Quod autem Conchoeidale ſpatium interminatum, ſit etiam magnitudinis Infinitæ; ſic colligitur.

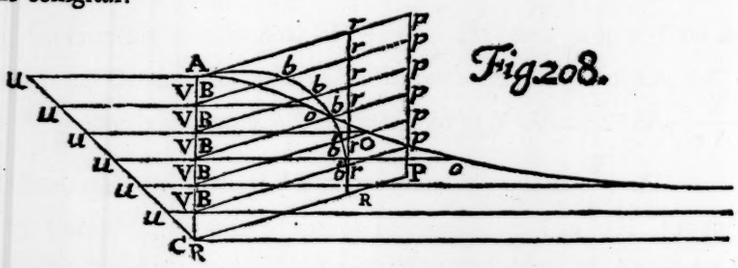


Fig. 208.

Seponamus aliquantiſper Quadrantem genitorem; & adjunctam figuram Tangentium conſideremus: Eamque (exempto Quadrante genitore) reſtituamus in ſitum proprium, ut in fig. 208. ubi rectæ BO, figuram Tangentium complentes, (ſinibus verſis AV arithmetice-proportionalibus reſpondentes,) ad axem CA ordinatim-applicantur.

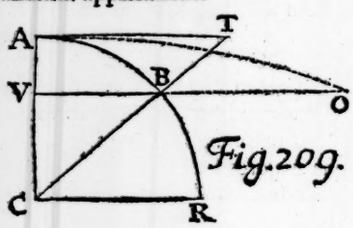


Fig. 209.

Eſto autem, fig. 209. Quadrans CAR ſeorſum exemptus: ſumptoque, ubivis in CA radio, puncto V; erit VC (ejuſdem à centro diſtantia) ſinus complementi, iſtius anguli cujus AV eſt ſinus verſus, & VB ſinus rectus, & AT Tangens, eſt autem (propter ſimilia triangula) ut CV ad VB, ſic CA ad AT; Hoc eſt, (poſitis VC$=x$, VB$=s$, CA$=R$,)

$CA = R$,) ut x ad s, ſic R ad $\frac{s}{x}R = AT = BO$. Fig. 208.

Si itaque ſumi intelligantur, ut (in fig. 208.) CV ſeu x, arithmetice-proportionales; vel, his æquales, V u triangulum CA u complentes: Sumptis ubique, ut x ad s ſic R ad *quartam*; erunt illæ quartæ, ſeries totidem AT, hoc eſt, totidem BO, complentium RBAO figuram tangentium.

Sed (neglectis aliquandiu tertiis R) perpendamus quid futurum ſit, ſi, pro R, ſubſtituerentur totidem s: Adeoque ſumerentur ubique, ut x ad s ſic s ad *quartam*. Erunt utique illæ *quartæ*, totidem $\frac{s^2}{x}$: Hoc eſt, (propter, in fig. 209. $VBq = CBq - CVq = CAq - CVq$, ſeu $s^2 = R^2 - x^2$,) totidem $\frac{R^2 - x^2}{x}$; ſeu totidem $\frac{R^2}{x} - x$.

Sunt autem (propter x arithmetice proportionales, ab ipſo C puncto, ſeu o, ordientes; & R^2 eandem ubique quantitatem;) *Omnes* $\frac{R^2}{x}$, ſeries *Reciproca primanorum*, (per def. 2. hujus.) Indicem habens — 1. Adeoque ad ſeriem totidem ultimo æqualium, hoc eſt ad totidem R^2, in ratione infinita, (per prop. 1. vel 7. hujus;) & propterea, magnitudinis infinitæ. (Eſtque revera, ſpatium Hyperbolicum exterius, Curvæ & Aſymptotis interjectum, ut ad prop. 31, poſt oſtendetur. Eademque Figura Secantium, ſinibus verſis Arithmetice-proportionalibus convenientium; propter proportionales, in fig. 209, $CV = x$. $CB = R :: CA = R$. $CT = \frac{R^2}{x}$.)

Sed, *Omnes* x, ſunt ſeries Primanorum; adeoque finitæ magnitudinis: Nempe $\frac{1}{2}R^2$ ſeu $\frac{1}{2}AR$, (per prop. 1. vel 7. hujus:) tantundem ſcilicet atque CA u Triangulum, quod complent rectæ V u ipſis x æquales.

Et propterea, *Omnes* $\frac{R^2}{x} - x$, magnitudinis adhuc infinitæ. Nam finitæ magnitudinis ab infinita detractio, relinquit adhuc infinitam.

Verum, quam jam conſideramus, Figura Tangentium etiam adhuc major eſt: Quippe Tangentes ſingulæ, ſunt (non quidem totidem $\frac{s^2}{x}$ ſeu $\frac{R^2 - x^2}{x}$, ſed) totidem $\frac{sR}{x}$: Adeoque, (propter R; ubique majorem quam s,) Series *Omnium* $\frac{sR}{x}$, ſeu Figura Tangentium, major erit quam *Omnium* $\frac{s^2}{x}$; adeoque multo magis erit magnitudinis infinitæ. Adeoque multo adhuc magis, Spatium Conchoeidale, ſeu Semiconchoeidale CAOOH, (ex quadrante Genitore, & hac figura Tangentium, compoſita,) magnitudinis erit infinitæ. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

Verum quidem eſt, in Conchoeidibus *Secundariis*, ipſas BO, non eſſe tangentes Fig. 206.
ad radium CA, ſed ad radium PC. Hoc tamen infinitati figuræ non derogat quippiam. Si enim PC major ſit quam CA, figura RBAOO in eadem ratione augetur, (ut § D. oſtenſum eſt,) non minuitur; adeoque non minus erit infinita. Sin PC minor ſit quam CA, minuitur quidem figura RBAOO; ſed non niſi in ea ratione minuitur, qua PC minor eſt; Hoc eſt, in ratione finita: Quod autem infinito non niſi in ratione finita minus eſt, etiamnum eſt infinitum; adeoque plani infinitudo non deſtruitur. Saltem, niſi intelligatur ipſa PC penitus evaneſcere (ut PC quam CA ſit infinities minor) coincidentibus PC punctis; quo caſu Conchoeidale ſpatium degenerabit in CAR quadrantem.

Quod autem Planum hoc, utut magnitudinis infinitæ, Momentum reſpectu F
Regulæ ſuæ CHH finitum habeat; adeoque Ungulas quæ aciem habeant Regulam illam, Solidaque circa illam converſione facta, magnitudinis eſſe finitæ; (quod nos, ni fallor, primi docuimus, in ſubjunctis Tractatui de Cycloeide;) ſic oſtendimus.

Fig. 206. Quodnam habeat momentum Quadrans genitor CAR, reſpectu rectæ CR, oſtenſum eſt prop. 15. § Q. nempe $\frac{1}{3}R^3$, (ſemiſſem ſcilicet iſtius quam habet Semicirculus reſpectu diametri ſuæ:) Atque tantundem eſt Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens CR: Solidumque ipſius converſione circa CR factum (utpote ad ungulam illam ut $\mathcal{P}$ ad R,) $\frac{1}{3}R^2\mathcal{P}$; nempe Hemiſphærium.

Plani reliquum, RBAOO, ex Tangentibus conſtat, ſeu totidem BO; Hoc eſt, in Conchoeide primaria (ubi PC = CA = R,) totidem $\frac{sR}{x}$ ſeu $\frac{s}{x}R$; in Secundariis (poſito PC = ς) totidem $\frac{s\rho}{x}$ ſeu $\frac{s}{x}\rho$: (Nempe in ea ratione vel longiores vel breviores quam tangentes ad radium CA = R, qua PC = ς longior eſt vel brevior quam CA.) Quæ ſi ducantur ſingulæ in ſuas ab CH diſtantias CV = x, fiunt totidem $s\,R$ vel $s\varsigma$. Sunt autem *omnes* s, idem atque circuli quadrans CAR quem complent; puta $\frac{1}{8}R\mathcal{P}$, (per § D. prop. 15,) Adeoque *Omnes* $s\,R$, ſeu *Omnes* $s\varsigma$, idem atque quadrans ille in diſtantia R vel ρ ſuſpenſus; hoc eſt, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$, vel $\frac{1}{8}\rho R\mathcal{P}$: Cui itaque æquatur Momentum *Omnium* BO, ſeu plani RBAOO, in ſuo loco ſuſpenſi, reſpectu rectæ CH.

Et ſimiliter oſtendetur, Ungulam ſemi-quadrantalem eidem inſiſtentem cujus acies CH; hoc eſt *Omn.* $\frac{sR}{x}\times x$, ſeu *Omn.* $\frac{s\rho}{x}\times x$, tantundem eſſe atque *Omn.* $s\,R$, ſeu *Omn.* $s\varsigma$. Hoc eſt, circuli quadrantem CAR in altitudinem R, ſeu ρ, = CP ductum; ſeu Cylindrum quadrantalem, cujus Baſis CAR quadrans, & Altitudo ipſi CP æqualis: Nempe, $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$ vel $\frac{1}{8}\varsigma R\mathcal{P}$. Solidumque converſione plani RBAOO circa CH factum (utpote ad Ungulam illam, ut $\mathcal{P}$ ad R,) tantundem atque Cylindrum quadrantalem ſuper eadem Baſe CAR, altitudinem habentem æqualem Peripheriæ radio CP deſcriptæ: Hoc eſt, $\frac{1}{8}R\mathcal{P}^2$, ſeu $\frac{1}{8}\rho\mathcal{P}^2$.

Idemque, eadem ratione, in partibus oſtendetur. Nempe, Momentum ſegmenti ABO reſpectu CHH, idem atque ſegmenti AVB in diſtantia R, vel ρ, = CP ſuſpenſi. Ungulamque ſemi-quadrantalem eidem ABO inſiſtentem aciem habentem CHH; tantundem eſſe atque Cylindrum cujus baſis ſit AVB & altitudo CP. Solidumque ejuſdem ABO converſione circa CHH factum, tantundem atque Cylindrum cujus baſis ſit idem AVB ſegmentum & altitudo æqualis Peripheriæ radio CP deſcriptæ. Perinde enim procedit demonſtratio de partibus reſpective ſumptis, atque de totis.

G. Plani vero totius CAOOH, aut etiam totius figuræ Tangentium RBAOO, Centrum gravitatis nullum eſt. Cum enim Momentum (ut jam oſtenſum eſt) ſit Finitum, & Magnitudo Infinita; ſi illud per hanc dividi intelligeretur, prodiret Centri gravitatis ab CHH diſtantia infinite-exigua: Neque tamen in ipſa CH eſſe, commode dici poſſet; quippe tum totum pondus ad unas partes rectæ CHH (quam eſſe tamen axem Æquilibrii oporteret) poneretur. Item, cum Spatium jam oſtendatur infinitum eſſe; in quacunque ab AC diſtantia finita poni intelligeretur Centrum gravitatis; eſſet, circa illud, pondus finitum & in diſtantia finita; ſed ultra Centrum illud, pondus infinitum in diſtantia item infinita: quod cum natura Centri gravitatis non conſiſtit. Nullum igitur erit Plani totius Centrum gravitatis, vel (quod eodem recidit) nonniſi in infinita diſtantia ab AC.

Idemque ſimiliter oſtenderetur de totius portione OVCH, vel OBR, quæ rectæ CHH adjaceat. Quippe quicquid id ſit quod ultra VBO abſcinditur, finitum erit, (utpote undecunque terminatum;) reliquumque quod ipſi CHH adjacet, manebit adhuc magnitudinis infinitæ.

Segmentum vero quodcunque remotius AVO, vel ABO; cum & Momentum finitum habeat, & Magnitudinem finitam atque undecunque terminatam; habebit etiam Centrum gravitatis.

H. In Ungula Semiquadrantali, aciem habente CH, quæ ſingulis BO rectis inſiſtunt Parallelogramma rectangula (ungulam complentia) ſunt (propter longitudinum $\frac{sR}{x}$ ſeu $\frac{s\varsigma}{x}$, in reſpectivas altitudines, diſtantiis x æquales, ductas) totidem $s\,R$ ſeu $s\varsigma$: Quæ tantundem ſunt atque totidem rectangula reſpectivis VB = s inſiſtentia, communem altitudinem habentia R, ſeu ς, = PC. Suntque in

in eiſdem à CHH diſtantiis. Adeoque eadem habent, reſpectu ipſius CHH momenta; tum ſigillatim reſpective ſumpta, tum ſimul omnia. Hoc eſt, idem eſt Momentum Ungulæ RBAOO (ejuſve ſegmentorum, ordinatim applicatis abſciſſorum, ABO, OBR,) atque Cylindri CAR (hujuſve ſegmentorum reſpective ſumptorum, AVB, BVCR,) reſpectu ejuſdem rectæ CHH. Fig. 206.

Diſtat autem quadrantis CAR (adeoque Cylindri huic inſiſtentis, per §E. prop. 5. hujus,) Centrum gravitatis à CHH, $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}}$, (per § Q. prop. 15.) quæ in quadrantis magnitudinem $\frac{1}{8}R\mathcal{P}$ ducta, exhibet quadrantis Momentum reſpectu CHH, $\frac{1}{3}R^3$; adeoque (propter altitudinem R vel ϱ,) Cylindri momentum $\frac{1}{3}R^3$ vel $\frac{1}{3}\varrho R^3$. Idemque propterea momentum erit Ungulæ RBAOO reſpectu ejuſdem CHH. Atque hoc Momentum, per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{8}R^2\mathcal{P}$ ſeu $\frac{1}{8}\rho R\mathcal{P}$, diviſum; exhibet diſtantiam Centri gravitatis (ſi quod ſit) vel ſaltem Axis Æquilibrii à CHH (intellige à perpendiculari plano ſuper recta CHH erecto,) $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}}$. (Tantundem utique quantum inde diſtat per § Q. prop. 15. Centrum gravitatis quadrantis CAR à CHR, ſeu Semicirculi ab ea cui adjacet diametro.) Et propterea, Solidi Semiconverſione circa CHH facti, Centri gravitatis inde diſtantia, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, ſeu $4R$ ad $\mathcal{P}$, per §E. F. prop. 14. hujus,) $\frac{32R^3}{3\mathcal{P}^2}$.

Similiter de Ungulæ ſegmentis, puta quæ ipſis ABO, OBR, inſiſtunt; procedendum erit. Sunt utique illa æqualia reſpectivis Cylindri ſegmentis, quæ ipſis AVB, BVCR, inſiſtunt; atque in eiſdem à CHH diſtantiis; adeoque & æqualia habent momenta: quæ quanta ſint, ex prop. 15. hujus, facile eſt colligere. Eademque momenta, per reſpectivas magnitudines diviſa, exhibebunt Centrorum gravitatis (ſiqua ſint) à CHH diſtantias reſpectivas. Atque inde colligetur (per §E. F. prop. 14. hujus) Semiſolidorum (aliorumve imperfecta converſione circa CHH factorum) Centri gravitatis (ſiquod eſt) inde diſtantia.

Et, propterea; cum etiam Ungularum (aut Solidorum correſpondentium) quæ CAR (ejuſve portiones) ſpectant, tum magnitudines, tum Centra gravitatis determinata ſint, prop. 15, 16. hujus: Ungularum ſimiliter quæ Conchoeidale ſpatium CAOOH (ejuſque partes) ſpectant, Momenta & Magnitudines (per prop. ult. cap. præced.) non minus determinantur, quam quæ Figuram Tangentium CAOO (ejuſque partes) ſpectant.

Si vero, eorundem parallelogrammorum ipſis BO (fig. 208.) inſiſtentium; hoc eſt, totidem $s R$ vel $s\rho$, (ut ſupra oſtenſum eſt;) reſpectu rectæ AC vel AR (cui, exempto quadrante, ibidem adjacent) momentum conſideretur: Cum ſua Centra gravitatis in media longitudine ſita ſint (per prop. 2. hujus,) erunt eorum ab ABR diſtantiæ reſpectivæ, $\frac{sR}{2x}$, ſeu $\frac{s\varrho}{2x}$, (nempe longitudinum ſupra inventarum ſemiſſes:) quæ in reſpectivas magnitudines $s R$ vel $s\varrho$ ductæ, exhibent eorum reſpectu rectæ ABR momenta $\frac{s^2R^2}{2x}$, ſeu $\frac{s^2\rho^2}{2x}$: Hoc eſt (propter $s^2=R^2-x^2$,) $\frac{R^2-x^2}{2x}R^2$, ſeu $\frac{R^2-x^2}{2x}\rho^2$: Hoc eſt, $\frac{R^4}{2x}-\frac{1}{2}xR^2$, ſeu $\frac{\rho^2R^2}{2x}-\frac{1}{2}x\varrho^2$. I. Fig. 208.

Eſt autem, ſeries omnium $\frac{R^4}{2x}$, ſeu $\frac{\rho^2R^2}{2x}$, Reciproca primanorum; cujus itaque magnitudo infinita erit, (per prop. 1. vel 7. hujus:) Sed omnium $\frac{1}{2}xR^2$ ſeu $\frac{1}{2}x\rho^2$, ſeries primanorum, adeoque magnitudinis finitæ, (per prop. 1. vel 6. hujus:) Hujus itaque ex illa ſubductio, non impedit quin adhuc maneat, omnium $\frac{R^4}{2x}-\frac{1}{2}xR^2$, ſeu $\frac{\rho^2R^2}{2x}-\frac{1}{2}x\rho^2$ ſeries, hoc eſt, Ungulæ RBAOO (aciem habentis CHH) momentum reſpectu rectæ ABR, magnitudinis infinitæ. Adeoque Momentum illud infinitum, per Ungulæ Magnitudinem (quam finitam eſſe jam oſtenſum eſt, §F.) diviſum; diſtantiam Centri gravitatis ab ABR exhibebit infinitam: Et multo magis fig. 206. (interpoſito quadrante CAR) diſtantiam

ſtantiam Centri gravitatis ejuſdem Ungulæ RBAOO (diſtortæ) diſtantiam à recta AVC infinitam: Et magis adhuc, totius CAOOH Ungulæ Conchoeidalis, Centri gravitatis ab eadem AVC diſtantiam infinitam. Quod itaque nuſquam eſt; ſeu (quod eodem recidit) non niſi in infinita diſtantia ab AC.

Idemque ſimiliter oſtendetur, de Ungula ſegmenti CVOOH, ipſi CHH adjacentis: Atque etiam de ſolidis converſione (perfecta vel imperfecta) ſive totius CAOOH ſive ſegmenti CVOOH factis: Nempe, diſtantiam Centri gravitatis ab AC infinitam eſſe.

Ungula vero ſegmenti remoti AVO, (utpote undique terminata, adeoque magnitudinis finitæ, & in diſtantia finita,) Momentum habet finitum, & Centrum gravitatis. Et ſimiliter, ſolidum converſione factum.

Item, quæ Conchoeidem totam (utrinque in infinitum porrectam) ſpectant, (aut etiam ejuſdem ſegmentum, ordinatim-applicata abſciſſum, & utrinque ab AC æqualiter porrectum) Ungulæ, Solidaque converſione facta, (propter duos ſemiſſes, utrinque ad AC poſitos, invicem æquiponderantes,) Centra gravitatis habebunt; in ipſa quidem AC recta (ſeu Plano huic perpendiculariter inſiſtenti;) atque in ea à C diſtantia quam ad § H. modo determinavimus.

Fig. 210.

PROP. XXXI.

A. Spatium Hyperbolicum exterius, (Curvæ & Aſymptotis interjectum,) ex Primanorum reciprocis conflatur: inſcripta Parallelogramma habens invicem æqualia.

B. Eſtque ſuapte natura utrinque interminabile.

C. Eſtque magnitudinis infinitæ, ſive ex utraque ſive ex altera tantum parte interminatum maneat: Sin utrinque truncatum ſeu terminatum cenſeatur, magnitudinis finitæ.

D. E. Portio hujus, ex altera tantum parte truncata, & recta terminata quæ alteri Aſymptotarum parallela ſit, (ut ASHhσ,) utut magnitudinis ſit infinitæ, momentum tamen habet reſpectu iſtius Aſymptotæ (Aσ) finitum: Ungulamque, cujus acies ſit Aſymptota illa, exhibet magnitudinis finitæ, & noto Parallelepipedo æqualem: Solidumque converſione circa Aſymptotam illam factum, magnitudinis finitæ & notæ.

F. Quæque huic Portioni ſive toti (ut ASHhσ,) ſive ejuſdem parti duabus rectis Aſymptotæ illi parallelis interjectæ, (ut SCIH) inſiſtit Ungula, aciem habens Aſymptotam illam; habet Æquilibrii Planum (adeoque & Axem Æquilibrii, & ſiquod ſit Centrum gravitatis) in perpendiculari Plano quod præciſe medium ſit inter parallelas rectas portionem hanc, ejuſve partem expoſitam, terminantes; atque in illo per aciem plano quod Ungulæ altitudinem biſecat. Centrum autem gravitatis quod hujuſmodi Ungulam, ipſi Aſymptotæ (quæ acies ipſius eſt) contiguam, reſpicit; nullum eſt, vel (quod eodem recidit) nonniſi in infinita diſtantia ab altera Aſymptotarum.

G. Portionis hujuſmodi utrinque truncatæ (duabus Aſymptotæ parallelis interjectæ (ut SOVH, SCIH,) magnitudo, (vero proxima,) calculo aſſignari poteſt quantumlibet accurate.

H. Adeoque & Portionis interioris; ut HVX, HIx, vel HVD, HId.

I. K. Et utriuſque momentum tum reſpectu Aſymptotæ Aσ, tum reſpectu Axis vel Diametri AX, Ax; Centrique gravitatis inde diſtantia.

tia. Adeoque ipſum gravitatis Centrum. Idque in Hyperbolis tum Erectis, tum Scalenis.

Habetur etiam Hyperbolici Conoeideos (vel Pyramidoeideos) tum magnitudo, (nempe ad Cylindrum ſeu Priſma, ejuſdem baſis & altitudinis, ut $3T+2D$, ad $6T+6D$;) tum Centrum gravitatis; utpote quod in ipſo Solidi Axe ita conſtitutum eſt, ut pars ad verticem ſit ad totum, ut $4T+3D$ ad $6T+4D$. L. M.

Hinc etiam habetur (quæ cum Hyperbolæ quadratura conjuncta eſt) Curvæ Parabolicæ Rectificatio; ſeu Recta huic curvæ æqualis. N.

Item, Superficiei Curvæ Conoeideos Parabolici Expanſio; ſeu Plana huic Curvæ æqualis. N.

Aliaque multa, quæ Curvas alias tum Lineas tum Superficies ſpectant, ad Rectas & Planas reducendas, (earumque Centra gravitatis,) ſubjungi poſſent. O.

SIt Hhh Hyperbola, cujus Aſymptotæ AS, Aσ, (angulum ad A utcunque faA. cientes,) Axis AX, vertex V: Alterique ex Aſymptotis, puta Aσ, parallela Fig. 210, SH, aliæque quotlibet sh (æqualibus intervallis diſſitæ) ſpatium curvæ & aſymp- 211.

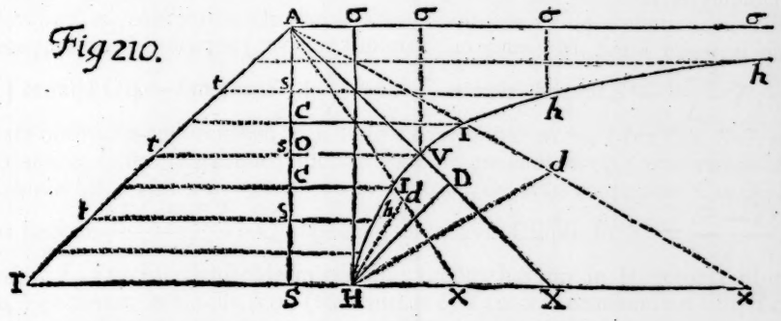


Fig 210.

totis interjectum complentes; quibus ex adverſo reſpondeant totidem s t complentes A S T triangulum, adeoque ipſis A s proportionales.

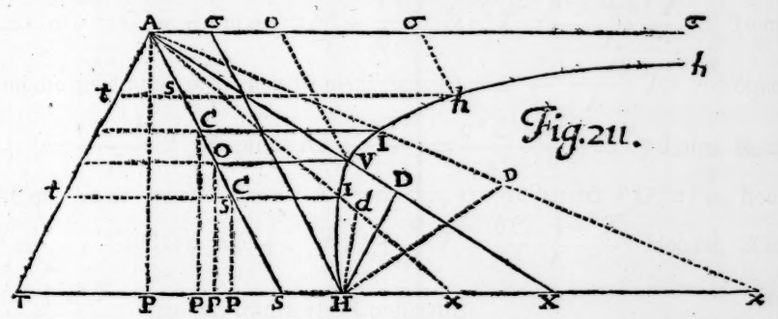


Fig. 211.

Oſtendimus jam olim (ad prop. 88, 91, 92, 94, 95, 103, *Arithmeticæ Infinitorum*) Figuram (niſi *Spatium* appellare malis) curvæ & aſymptotis interjectam, ex *Primanorum Reciprocis* conflatam eſſe; adeoque natura ſua utrinque interminabilem eſſe, (tum ad partes hσ, tum ad partes HS;) & magnitudinis infinitæ, ſive utrinque ſive ex altera tantum parte interminata cenſeatur; ſed, utrinque truncatam, adeoque undique terminatam, magnitudinis eſſe finitæ.

Nempe; propter inſcripta Parallelogramma A S H σ, A s h σ, &c. omnia inter ſe æqualia, (quæ nota eſt Hyperbolæ proprietas, per prop. 12. lib. 2. *Apollonii*,) erunt ubique rectæ S H, s h, ipſis A S, A s, (adeoque ipſis S T, s t,) reciproce proportionales; hoc eſt, reciprocæ Primanorum (ſeu arithmetice proportionalium;)

Fig. 210, 211. lium ;) ex talibus itaque Figura ſeu Spatium illud conflatur. Quod erat primo demonſtrandum.

B. Cum itaque ita ſumi poſſit s punctum, ut recta As ad AS, ſeu s t ad S T, ſit in ratione quantumvis exigua, (donec tandem in ipſum A punctum degeneret,) erit propterea (quæ illi reſpondeat) s h ad S H in ratione quantumvis magna, (donec tandem quæ ipſi A puncto reſpondere intelligatur evadat infinita :) Unde ſequitur, reſpectiva puncta h, σ, nonniſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) coitura : (Utut intervallo tandem diſtent quod dato minus ſit, quantillum ſcilicet eſt A s :) Adeoque Spatium illud eſſe, ad partes h σ, interminabile : rectamque A σ aſymptotam eſſe.

Similiter ; Cum ita ſumi poſſit (in A S continuata) punctum s, ut ſit A s ad A S, ſeu s t ad S T, in ratione quantumvis magna (nec unquam eo perveniri poſſit ut non poſſit major ſumi,) erit propterea quæ ipſi reſpondeat reciproce proportionalis s h ad S H in ratione quantumvis exigua, (nec eo tamen pervenietur ut non poſſit ſumi minor.) Unde ſequitur ; neque unquam coitura eſſe puncta H, S, (utut, ad diſtantiam data quavis minorem, continue accedant :) Adeoque Spatium idem, ad partes etiam H S, interminabile eſſe : rectamque A S ſimiliter eſſe Aſymptotam. Quæ itidem erant demonſtranda.

C. Intelligatur autem Spatium illud ex altera parte truncatum (puta ad partes H S,) recta H S (ipſi A σ parallela) terminatum, interminatum vero ad partes h σ : Erit (propter ſeriei ex primanorum reciprocis Indicem — 1, per def. 2. hujus,) Spatium illud A S H h σ, ad inſcriptum Parallelogrammum A S H σ, ut 1 ad — 1 + 1, (per prop. 1. vel 7. hujus ;) hoc eſt, ut 1 ad 0 : adeoque magnitudinis Infinitæ. Quod item erat demonſtrandum.

Atque ſimiliter oſtendetur, Spatium idem recta h σ terminatum, & interminatum ad partes H S, magnitudinis eſſe infinitæ. Adeoque, à fortiori, ſi utrinque fuerit interminatum. Quæ itidem probanda erant.

Si vero utrinque truncatum, adeoque & terminatum, fuerit ; puta, rectis H S, h σ ; vel H S, s h ; (vel alias utcunque :) Manifeſtum eſt, figuram illam ſic truncatam, (utpote undique terminatam,) puta S H h σ A, vel S H h s, magnitudinis eſſe finitæ. Quod etiam erat propoſitum.

D. Intelligatur itaque Baſi S H, parallela recta C I, portionem C S H I abſcindere. Sitque baſis S H = *B*, latus A S (vel, in obliquangulis, figuræ altitudo, A P) = *A* ; adeoque parallelogrammum inſcriptum A S H σ = *AB* : Item C S (vel, in obliquangulis, ut fig. 211. hujus altitudo, C P) = *C* : Ipſiuſque *A*, vel *C* ; particulæ infinite exiguæ, *a*, *a*, &c. Cum itaque rectæ s h, planum complentes, ſint ipſis A s (ſeu harum altitudinibus,) hoc eſt, ſuis à vertice diſtantiis, reciproce proportionales ; Hoc eſt, A s, A S :: S H . s h : Erunt ipſæ s h, (à vertice deorſum,) $\frac{AB}{0}$, $\frac{AB}{a}$, $\frac{AB}{2a}$, $\frac{AB}{3a}$, &c. uſque ad baſin $\frac{AB}{A} = B$: Vel (à baſe ſurſum) $\frac{AB}{A}$, $\frac{AB}{A-a}$, $\frac{AB}{A-2a}$, $\frac{AB}{A-3a}$, &c. uſque ad $\frac{AB}{A-A} = \frac{AB}{0}$ (ſi ad ipſum verticem procedatur ;) vel (ſi tantum ad C I) uſque ad $\frac{AB}{A-C} = $ C I. Quorum itaque omnium Aggregatum, ſunt ipſum quod complent planum.

E. Eædemque rectæ, in ſuas ſingulæ à vertice diſtantias ductæ ; puta, $\frac{AB}{a}$ in *a*, $\frac{AB}{2a}$ in 2 *a*, &c. hoc eſt, totidem *AB* ; ſunt ipſa A s h σ parallelogramma ; (quæ itaque omnia, ut prius dictum eſt, ſunt invicem æqualia.)

Sed & eædem rectæ in eaſdem diſtantias ductæ, ſunt earundem Momenta reſpectu rectæ A σ : Vel etiam, parallelogramma, eiſdem s h rectis inſiſtentia, Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem A σ : Quæ itaque ſunt totidem *AB*. Et propterea quæ toti A S H h σ (figuræ interminatæ) inſiſtit Ungula, aciem habens A σ, (ſeu Plani A S H h σ momentum reſpectu A σ,) eſt ipſum *AB* in *A* (totius altitudinem) ductum : Hoc eſt, $A^2 B$. Et ſimiliter ejuſdem Ungulæ portio ipſi A C I h σ inſiſtens (ſeu plani hujus Momentum reſpectu A σ,) eſt *AB* in *A* — *C* ; hoc eſt, $A^2 B - ABC$: Quæque portioni S H I C inſiſtit, aciem itidem

itidem habens A σ, (seu plani momentum respectu A σ,) est *AB* in *C*; hoc est *ABC*. Fig. 210, 211.

Habetur itaque, quæ plano interminato, magnitudinis infinitæ, A S H h σ, insistit Ungula (aciem habens A σ) magnitudinis Finitæ; nempe Solido $A^2 B$ (Parallelipipedo Rectangulo) æqualis. Ejusdemque Plani (magnitudinis infinitæ) quod conversione circa A σ describitur, Solidum Magnitudinis Finitæ: Quippe, ad ungulam illam, ut (*P* ad *R*, hoc est, ut) Circuli Peripheria ad ejusdem Radium; (per prop. 12. hujus:) Estque hoc Torricellii *Solidum Hyperbolicum Acutum.*

Hinc etiam sequitur; istius Ungulæ (aciem habentis A σ) sive quæ toti ASHhσ, sive quæ utrivis portioni A C I h σ, vel S C I H, insistit, Centrum gravitatis (nempe si quod sit) seu Planum Æquilibrii, esse in eo plano quod inter extrema medium est. Nempe, primæ, in eo quod medium est inter A σ & S H, (quodque ab A σ seu H S distat $\frac{1}{2}A$;) secundæ, in medio inter A σ & C I, (quodque ab A σ seu C I distat $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C$;) tertiæ, in medio inter C I & S H, (adeoque à C I vel S H distat $\frac{1}{2}C$.) Quippe, cum singulæ rectæ h s planum complentes æqualiter onerantur (nempe parallelogrammo *AB*,) Centrum gravitatis seu Æquilibrii planum in ipso medio erit (non minus quam si Parallelogrammi plano insisteret Parallelepipedum, altitudinem habens ipsi *A* æqualem;) per prop. 2. vel 3. hujus. F.

Atque in quo per aciem plano situm sit, jam supra sæpius ostensum est; (nempe, in eo quod Ungulæ altitudinem bisecat.) Ergo, in ea recta quæ est utrique communis: quæ itaque recta, est Axis Æquilibrii.

In quo autem hujus rectæ puncto sit Centrum gravitatis (quod ungulam respiciat ipsi A σ contiguam) si inquiratur: Invenietur, (secundum ea quæ tradita sunt ad prop. 8. hujus) nusquam esse: seu (quod eodem recidit) in distantia (ab A S) infinita. Est enim Series Magnitudinum, series Æqualium (propter æqualia parallelogramma ipsis s h rectis insistentia,) cujus Index, 0; adeoque Magnitudo, verbi gratia, *NP*: Series vero Distantiarum (Centrorum gravitatis) ab A S, (utpote in media longitudine rectarum s h,) Series est reciproca primanorum (qualis est ipsa rectarum series) cujus Index, −1: Et propterea Series Momentorum (ex illis conflata) series item reciproca primanorum; (propter $-1+0=-1$.) Adeoque Momentum integrum, $\frac{1}{-1+1} NP\mathcal{D} = \frac{1}{0} NP\mathcal{D} : NP) \frac{1}{0} NP\mathcal{D} (\frac{1}{0}\mathcal{D}$. Hoc itaque per Magnitudinem *NP* divisum, exhibebit distantiam ab A S, $\frac{1}{0}\mathcal{D}$; hoc est, quæ sit ad $\mathcal{D}$ (distantiam centri gravitatis basis ab A S;) seu, in hoc casu, ad $\frac{1}{2}B$; ut 1 ad 0. Quæ ratio est infinita.

Sed, (ut ad Planum redeamus,) ostensum est, (§ D.) C S H I, (planum interminatum,) æquale esse aggregato omnium s h, hoc est, omnium $\frac{AB}{A} + \frac{AB}{A-a}$ G.

$+\frac{AB}{A-2a} + \frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $CI = \frac{AB}{A-C}$.

Est autem $\frac{A}{A-a} = 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$ &c. in infinitum. (Quod dividendo *A* per *A* − 1 patebit.) Adeoque $\frac{AB}{A-a} = 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$ &c. in *B*. Et similiter ostendetur $\frac{AB}{A-2a} = 1 + \frac{2a}{A} + \frac{4a^2}{A^2} + \frac{8a^3}{A^3}$ &c. in *B*. Et $\frac{AB}{A-3a} = 1 + \frac{3a}{A} + \frac{9a^2}{A^2} + \frac{27a^3}{A^3}$ &c.

$A-a)\,A(1, +\frac{a}{A}, +\frac{a^2}{A^2}, +\frac{a^3}{A^3}$, &c.

$\frac{A-a}{+a}$

$+a-\frac{a^2}{A}$

$+\frac{a^2}{A}$

$+\frac{a^2}{A}-\frac{a^3}{A^2}$

$+\frac{a^3}{A^2}$

$+\frac{a^3}{A^2}-\frac{a^4}{A^3}$

$+\frac{a^4}{A^3}$ &c.

in

Fig. 210, 211. in *B*. Et ſimiliter in cæteris uſque ad $\frac{AB}{A-C} = 1 + \frac{C}{A} + \frac{C^2}{A^2} + \frac{C^3}{A^3}$ &c. in *B*.

Vel, poſito $A = 1$, (quo ipſius *A* poteſtates omnes deleantur, *B* in, $1 + a + a^2 + a^3$ &c. Et *B* in, $1 + 2a + 4a^2 + 8a^3$ &c. Et *B* in, $1 + 3a + 9a^2 + 27a^3$ &c. Et ſic deinceps uſque ad *B* in, $1 + C + C^2 + C^3$ &c.

Erunt ergo, omnes ſpatium CSHI complentes) poſito $A = 1$,
$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ &c.} \\ 1 + 2a + 4a^2 + 8a^3 + 16a^4 \text{ &c.} \\ 1 + 3a + 9a^2 + 27a^3 + 81a^4 \text{ &c.} \\ \text{Et ſic deinceps uſque ad} \\ 1 + C + C^2 + C^3 + C^4 \text{ &c.} \end{array}\right\} \text{in } B.$$

Quorum omnium Aggregatum (ſeu ipſum CSHI planum) eſt (per prop. 1. hujus ; vel prop. 64. *Arithmet. Infinitorum*)
$$C + \tfrac{1}{2}C^2 + \tfrac{1}{3}C^3 + \tfrac{1}{4}C^4 + \tfrac{1}{5}C^5 \text{ &c. in } B. = \text{Plano.}$$

Si vero non ponatur $A = 1$, ſed cujuſcunque magnitudinis : Erit ſaltem Planum, ſeu $PL = C + \frac{C^2}{2A} + \frac{C^3}{3A^2} + \frac{C^4}{4A^3} + \frac{C^5}{5A^4}$ &c. in *B*.

Vel, poſito $\frac{C}{A} = E$; erit $PL = 1 + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}E^2 + \frac{1}{4}E^3 + \frac{1}{5}E^4$ &c. in *CB*.

Res autem ad calculum ſic commodiſſime referetur.

Cum *C* (per conſtructionem) ſemper minor ſit quam *A* (propter CI rectam, rectis Aσ & HS interjectam ; adeoque hujus à CI diſtantiam minorem quam ab Aσ :) Poſito $A = 1$, erit *C* in partibus decimalibus quamlibet proxime exprimenda. Hujuſque propterea poteſtates, C^2, C^3, &c. (quod ſemper obtinet ubi Radix ſeu Latus minus eſt quam 1,) continue decreſcunt, adeoque in remotiora loca decimalia continue detruduntur. Quamquam igitur, in plano deſignando, intelligantur ipſius *C* poteſtates, C^2, C^3, C^4, &c. in infinitum continuandæ : Poſtquam tamen aliquouſque proceſſum eſt (& quidem plus minuſve prout major minorve ἀκρίβεια ſpectetur,) reliquæ, utpote in loca decimalia altius detruſæ quam ut magni ſint momenti, merito poſſunt negligi.

Exempli gratia ;
Poſita AS = *A* = 1.
Sit SC = *C* = 0,21.
SH = *B* = 0,01.

Erunt
$C = 0{,}21$
$\frac{1}{2}C^2 = 0{,}02205$
$\frac{1}{3}C^3 = 0{,}003087$
$\frac{1}{4}C^4 = 0{,}000486203 -$
$\frac{1}{5}C^5 = 0{,}000081682 +$
$\frac{1}{6}C^6 = 0{,}000014294 +$
$\frac{1}{7}C^7 = 0{,}000002573 +$
$\frac{1}{8}C^8 = 0{,}000000473 -$
$\frac{1}{9}C^9 = 0{,}000000088 +$
$\frac{1}{10}C^{10} = 0{,}000000017 -$
$\frac{1}{11}C^{11} = 0{,}000000003 +$
Horum Summa, 0,235722333
Ducta in $B = 0{,}01$
Exhibet planum CSHI, ſeu $PL = 0{,}00235722333$ proxime.

Atque ad eandem formam procedendum erit, poſita $A = 1$, quæcunque fuerit *C* (quæ tamen ſemper minor eſt quam *A*,) & *B* (quæ vel major eſſe poteſt, vel minor, quam vel *A* vel *C* ;) prout expoſitus caſus poſtulaverit.

Atque huic non multum abſimilem Hyperbolæ quadraturam exhibuit nuper in *Logarithmotechnia* ſua D. *Nicolaus Mercator*. De qua verba fecimus in binis literis

teris ad D. Vice-comitem *Brouncker*, (Societatis Regiæ *Londini* Præſidem digniſſimum, & harum rerum ſcientiſſimum,) datis, *Julii* 8. & *Auguſti* 5. 1668. atque in *Tranſactionibus Philoſophicis Londinenſibus*, ſub idem tempus, inſertis, pro Menſe *Auguſti* 1668. Fig. 210, 211.

Habita vero, ut dictum eſt, Figuræ Hyperbolicæ Exterioris magnitudine: Etiam Interioris magnitudo facile obtinetur. H.

Intelligatur utique ab V vertice, recta VO, ipſi Aσ parallela; portionem abſcindens SHVO. Cujus plani magnitudo, (ſic ut jam traditum eſt inventa,) dicatur $\mathcal{P}L$. Eſtque $AVO=\frac{1}{2}AOV\sigma=\frac{1}{2}AB$. Item $AXS=\frac{1}{2}A^2$ (nempe ſi ſit Triangulum rectangulum; adeoque XS & SA ipſi A, figuræ altitudini, æqualis;) vel ſaltem (poſito $SX=F$,) $AXS=\frac{1}{2}AF$: Ergo $HVX=AXS-AVO-OVHS=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}AB-\mathcal{P}L$, ſeu $\frac{1}{2}AF-\frac{1}{2}AB-\mathcal{P}L$. Sed & hinc etiam, ſi opus ſit, abſcindi poterit (per HD ordinatim-applicatam) HDX triangulum; ut habeatur portio HDV.

Si vero, non quidem ad Axem, ſed ad aliam quamvis Diametrum, ponatur hyperbola: Menſuram ejus non minus aſſequemur.

Nempe; Sumpto, ubivis in Hyperbola, vertice I; cui reſpondeat Diameter AIdx. Quippe hic ſimiliter habebitur Magnitudo Triangulorum ACI, ASx, Hdx, & ſpatii SCIH: Adeoque & IHx, IHd.

Sed &, propter cognita triangulorum ASX, AOV, HDX, vel ASx, ACI, Hdx, tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, horumve momenta reſpectu rectæ Aσ; (per prop. 6. hujus:) Atque etiam (per jam tradita, §G.) Spatii SOVH vel SCIH magnitudinem, Centrique gravitatis ab Aσ diſtantiam, ejuſque (reſpectu ejuſdem Aσ) momentum: Habebitur etiam portionum HVX, HDV, vel HIx, HdI, momentum. Cumque (ut jam oſtenſum eſt) habeatur & harum magnitudo; habetur (momentum per magnitudinem dividendo) earundem diſtantia Centri gravitatis ab Aσ. I.

Porro: Si conſideretur eadem VHD ſemi-hyperbola, tanquam ex rectis ipſi HD parallelis, ad axem VD ordinatim-applicatis, conflata. Manifeſtum eſt, ſingularum HD ordinatim-applicatarum momenta, ſeu Triangula ipſis inſiſtentia Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem VD; earundem Semiquadratis eſſe æqualia. Adeoque ſemiſumma quadratorum illorum, erit totius VHD ſemi-hyperbolæ reſpectu ipſius VD momentum: (ſeu ſemi-quadrantalis Ungula aciem habens VD.) K.

Poſito itaque pro Axe Tranſverſo, T; pro Latere Recto, L; ſumptis Diametris interceptis, d, arithmetice proportionalibus, ut 1, 2, 3, &c. uſque ad maximum $\mathcal{D}=VD$: Erunt quæ his reſpondent ordinatim-applicatarum (ſemi-hyperbolam complentium) Quadrata (ut in tractatu meo *De Conicis Sectionibus*, prop. 33. oſtenſum eſt:) totidem $dL+\frac{d^2L}{T}$ ſeu $\frac{dT+d^2}{T}L$, ſumptis d arithmetice-proportionalibus, uſque ad maximum $\frac{\mathcal{D}T+\mathcal{D}^2}{T}L=$ Quadr. HD. Adeoque (propter *Omn.* $d,=\frac{1}{2}\mathcal{D}^2$; & *Omn.* $d^2,=\frac{1}{3}\mathcal{D}^3$; per prop. 1. hujus;) Omnium quadratorum ſumma $\frac{\frac{1}{2}\mathcal{D}^2T+\frac{1}{3}\mathcal{D}^3}{T}L$, ſeu $\frac{3T+2\mathcal{D}}{6T}\mathcal{D}^2L$: & ſemi-ſumma, ſeu plani momentum, $\frac{3T+2\mathcal{D}}{12T}\mathcal{D}^2L$.

Atque hoc Momentum, per plani magnitudinem (modo exhibitam) diviſum; exhibet ejuſdem ab VD diſtantiam Centri gravitatis.

Sed ejuſdem Centri diſtantia ab Aσ, jam exhibita eſt: Ergo (propter Aσ, AVD, non invicem parallelas,) exhibetur ipſum Plani VHD Centrum gravitatis; per prop. 26. Cap. præced.

Et, conſequenter; (propter data etiam triangulorum ASX, AOV, HDX, Magnitudines & Centra gravitatis, per prop. 5. vel 6. hujus; ipſiuſque SOVH magnitudinem, jam oſtenſam;) datur etiam plani SOVH Centrum gravitatis; per prop. 27. Cap. præced.

Fig. 214. Vel etiam, in Fig. 214. ubi Hyperbolæ AO, vertex A, Centrum C, Diameter conjugata C♂, Semiſſis diametri tranſverſæ AC = $S = \frac{1}{2}T$; Ordinatim-applicatæ

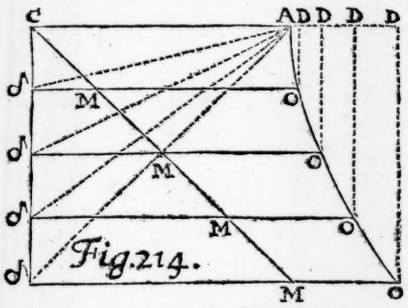


Fig. 214.

ad hyperbolæ diametrum DO = b; Ordinatim-applicatæ ad diametrum conjugatam ♂O = c. Oſtenſum eſt (in Tractatu meo *De Conicis ſectionibus, prop.* 35,41.) Rectas ♂O = c, eſſe totidem $\sqrt{:} S^2 + \frac{T}{L} b^2 :$ (ſumptis C♂ = DO = b, arithmetice proportionalibus.) Earum itaque quadrata, ſunt totidem $S^2 + \frac{T}{L} b^2$; quorum ſumma (per prop. 1. hujus) $AS^2 + \frac{AT}{3L} b^2$, (poſito A pro altitudine figuræ;) Cujus itaque ſemiſſis, $\frac{1}{2}AS^2 \frac{AT\,b^2}{6L}$, eſt plani C♂OA (curvæ & diametro conjugatæ interjecti) momentum reſpectu CA.

Sed & magnitudo cognoſcitur, ex jam traditis; propter cognitam Spatii MCAO fig. 214. hoc eſt SAVH fig. 210, 211. magnitudinem; & magnitudinem trianguli MC♂ fig. 214; adeoque & totius C♂OA.

Hujus itaque momentum per magnitudinem dividendo, habetur Centri gravitatis ejuſdem diſtantia à C♂.

Verum & Totius Parallelogrammi CDO♂, tum magnitudo tum & Centri gravitatis à C♂ diſtantia habentur. Habetur itaque & partis reliquæ AOD, tum magnitudo tum Centri gravitatis ab eadem C♂ diſtantia: per prop. 27. cap. præced.

Sed & ejuſdem diſtantia ſive à CM, ſive ab AD, fig. 214. (hoc eſt ab AS, vel VD fig. 210, 211.) jam ante data eſt. Ergo & ipſum gravitatis Centrum datur, per prop. 26. cap. præced.

Fig. 212, 213. Quæque de Semi-hyperbola Recta VHD jam oſtenſa ſunt; eadem Scalenæ IHd, facile accommodantur. Eſt utique Semi-hyperbolæ IHd fig. 213. Cen-

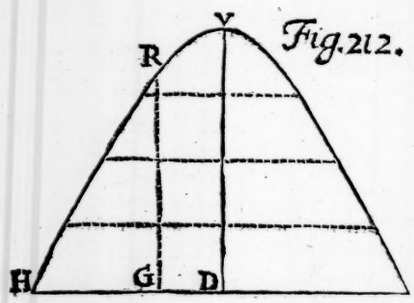


Fig. 212.

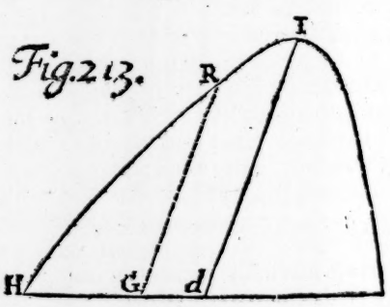


Fig. 213.

trum gravitatis in ea recta (puta GR) diametro Id parallela, quæ ita dividit baſin Hd, acſi anguli ad baſin recti eſſent: Puta, ut recta GR fig. 212. (parallela rectæ VD) dividit baſin HD.

L. Hinc etiam colligitur Conoeidis (vel Pyramidoeidis) Hyperbolici tum Magnitudo

tudo tum Centrum gravitatis. Cum enim infinita plana ſolidum complentia, baſi parallela, ſint in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, ſeu ut harum quadrata; hoc eſt, ut totidem $\frac{dT+d^2}{T}L$, ſumptis d arithmetice-proportionalibus; Solidumque Cylindricum ſeu Priſmaticum ſuper eadem baſe, æque altum, compleant plana totidem maximo æqualia, $\frac{DT+D^2}{T}L$: Erit Conoeides illud ſeu Pyramidoeides, ad Solidum hoc Cylindricum ſeu Priſmaticum, (propter T, L eadem perpetuo utrobique,) ut omnia $dT+d^2$, (ſumptis d arithmetice-proportionalibus,) ad totidem $DT+D^2$ (ſumptis D maximo æqualibus;) hoc eſt (ut modo oſtenſum eſt, ex prop. 1. hujus,) ut $\frac{1}{2}D^2T+\frac{1}{3}D^3$ ad D^2T+D^3; ſeu ut $3T+2D$ ad $6T+6D$. Quod ipſum jam olim demonſtravimus, ad prop. 163, 164. *Arithmeticæ Infinitorum.* Et perinde obtinet ſive Conoeides hoc vel Pyramidoeides, Erectum ſit, ſive Scalenum. Fig. 212, 213.

Sunt autem planorum horum Diſtantiæ à Vertice, ipſis d diametris interceptis proportionales; adeoque eorum Momenta reſpectu plani tangentis in vertice, ut totidem d^2T+d^3, ſumptis d arithmetice proportionalibus; qualia totidem D^2T+D^3 ſunt momentum Solidi iſtius Cylindrici ſeu Priſmatici in maxima diſtantia ſuſpenſi; adeoque illorum omnium ſumma, ſeu Momentum Solidi (per prop. 1. hujus) $\frac{1}{3}D^3T+\frac{1}{4}D^4$. Quod quidem momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}D^2T+\frac{1}{3}D^3$ diviſum; exhibet $\frac{4T+3D}{6T+4D}D$ Diſtantiam Centri gravitatis à vertice Conoeidis vel Pyramidoeidis (ſive Erecti, ſive Scaleni,) in ipſo Solidi Axe conſtituti. Eademque eſt diſtantia à Plano Verticem tangente, in Erecto, (cujus Altitudo eadem eſt cum D, maxima diametro intercepta:) In Scaleno vero, $\frac{4T+3D}{6T+4D}A$; poſito A pro figuræ altitudine, ſeu diſtantia maxima. M.

$$\tfrac{1}{2}D^2T+\tfrac{1}{3}D^3)\tfrac{1}{3}D^3T+\tfrac{1}{4}D^4(\frac{4T+3D}{6T+4D}D,$$

Cum Hyperbolæ vero Quadratura, conjunctam eſſe Curvæ Parabolicæ Ἐυδυτην, ſeu Rectæ huic Curvæ æqualis exhibitionem; jam olim demonſtravimus in Tractatu Epiſtolari *de Curvarum* Ἐυδωσει & Πλατυσμῶ, Tractatui *de Cycloide* ſubjuncto. Ubi etiam, Conoeidis Parabolici Superficiei Curvæ, æqualem Planam exhibuimus. N.

Atque hic quidem pateret Campus ſatis amplus; ſi ad Curvarum aliarum Linearum Rectificationem, & Superficierum Complanationem, (vel Rectarum illis, Planarum his, æqualium exhibitionem,) liberet procedere: (Qualia non pauca in illo de Ἐυδωσει & Πλατυσμῶ tractatu ſtrictim indicavimus, & multo plura in promptu eſſet exhibere:) Centrique gravitatis in illis inveſtigationem. O.

Aliaque multa, conſimilis argumenti, de figurarum aliarum, aut etiam linearum curvarum, Magnitudinibus, Momentis, & Centris gravitatis, Solidiſque aut Superficiebus earundem varia converſione factis, magna varietate adjungi poſſent.

Verum, ex his non pauca, ibidem (ſaltem breviter) inſinuata ſunt: Aliaque, juxta methodos hic ſupra traditas, cum opus fuerit, excogitari poterunt, & Calculo ſubjici. Atque tandem aliquando ſiſtendum videtur, ne in immenſum excreſcat volumen, quod jamjam multo ultra quam ſperaveram excrevit.

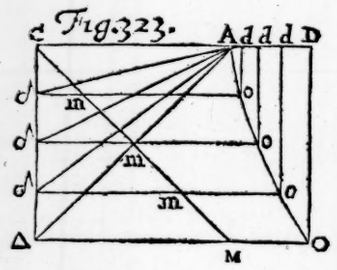
SCHOLIUM.

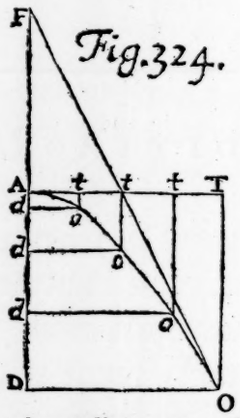
PRiuſquam autem hoc Spatium Hyperbolicum dimittam, libet ejuſdem cum aliis aliquot figuris Symbolizationes, non olim obſervatas recolligere.

1. *Si rectarum quotlibet arithmetice proportionalium quadrata, quadratis invicem æqualibus (vel eodem communi) augeantur; aggregatorum latera quadratica, ad rectam ut axem æqualibus intervallis ordinatim-applicata, complebunt Spatium Hyperbolicum, Curvæ, Semi-axi tranſverſo, & Axi Conjugato interjectum,*

jectum, rectaque axi transverso parallela clausum. Puta, Si expositæ rectæ C A
Fig. 323. fig. 323. normalis fiat C δ Δ quantumvis producta, in qua sumantur partes æquales quotlibet C δ, δ δ, δ Δ, &c. adeoque C δ, C δ, C Δ, &c. arithmetice-proportionales; & junctis δ A, Δ A, &c. æquales ponantur δ o, Δ O, &c. Erit A o O curva Hyperbolica, cujus Semiaxis transversus C A, & C Δ axis conjugatus; spatiumque C A O Δ hyperbolicum complebunt rectæ δ o, &c. ipsis δ A æquales. Hoc demonstramus in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθυώσει, iterumque mox ad prop. 32. hujus Capitis V.

Fig. 324. 2. Si exponatur, fig. 324. A o O Parabola, cujus Axis interceptus A d D, ordinatim-applicata D O, tangensque O F axi producto occurrat in F; tangatque in





vertice A t T, = D O, divisa utcunque in t; cui æqualis ponatur C δ Δ (fig. 323.) similiter in δ divisa; fiatque angulo D F O, æqualis C Δ A, determinans (in recta ipsi C δ Δ normali) rectam C A; & junctis δ A, Δ A, æquales ponantur δ o, Δ O, ipsi C A parallelæ, fiatque (ut modo dictum est) A o O Hyperbola, cujus Semiaxis transversus C A; sitque asymptota C m M: Erit, *Ut*, (Fig. 323.) *spatium hyperbolicum* C Δ O A, *ad* C Δ M *triangulum*; *sic* (Fig. 324.) A o O *curva parabolica, ad ejus axem interceptum* A d D: *Itemque, ut* (illic) C δ o A, *ad* C δ m; *sic* (hic) A o *curva parabolica, ad ejus axem* A d; *& sic ubique.* Hoc demonstramus in eodem De Ἐυθυώσει tractatu; iterumque hic monemus ad prop. 31. hujusce Cap. V.

3. Si conversione Parabolæ A O D circa Axem A D describatur Conoeides parabolicum; & conversione Rectanguli circumscripti A D O T circa eundem axem describatur Cylindrus: Erit, *Ut momentum spatii hyperbolici* C Δ O A, *ad momentum trianguli* C Δ M, *respectu ejusdem* C A; *seu, ut erecta Ungula super illud, ad Ungulam erectam æque altam super hoc, quarum communis acies sit eadem* C A; *seu, ut Solidum ex conversione illius, ad Solidum ex conversione hujus, circa eandem* C A; (sunt enim hæ rationes, eædem omnes;) *Sic Conoeidis hujus parabolici superficies curva, ad duos trientes superficiei curvæ Cylindri circumscripti.* Vel etiam (propter C Δ O A = C Δ O D — A O D.) Ut *Momentum Rectanguli* C Δ O D *minus momento Semihyperbolæ* A O D, ad *momentum Trianguli* C Δ M, (respectu ejusdem C A D;) Sic est *Conoeidis hujus superficies Curva*, ad *duos trientes curvæ superficiei Cylindri circumscripti.* Quod ibidem demonstramus, atque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

4 Sed; positis (ut § E. prop. 32. hujus Cap. V.) A C = $S = \frac{1}{2}T$, Latereque recto = L, A D = d, D O = C Δ = $b = \sqrt{\frac{dT+d^2}{T}}L$, Δ O = C D = $c = \frac{1}{2}T + d = S + d = \sqrt{:s^2 + \frac{T}{L}b^2} = \sqrt{:\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}b^2}$, Δ M = $\sqrt{\frac{T}{L}b^2} = b\sqrt{\frac{T}{L}}$: *Momentum Semi-hyperbolæ* A O D *respectu rectæ* C A D (utpote Semiquadrata omnium D O) est $\frac{\frac{1}{2}d^2T + \frac{1}{3}d^3}{2T}L$; (Quod, ut ibidem demonstratum, assumimus

ex

ex prop. 164. *Arith. Infin.* iterumque oſtendimus ad § L. prop. 31. hujus Cap. V.) Momentum autem (reſpectu ejuſdem C A D rectæ) Rectanguli C △ O D, $\frac{1}{2}ch^2$; & Trianguli C △ M, $\frac{1}{3}h^3\sqrt{\frac{T}{L}}$; (per pr. 6. ejuſdem.) Ergo, ut $\frac{1}{2}ch^2 - \frac{\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}d}{2T}d^2L$, ad $\frac{1}{3}h^3\sqrt{\frac{T}{L}}$; hoc eſt, Ut $ch^2T - \frac{1}{2}d^2TL - \frac{2}{3}d^3L$, ad $\frac{2}{3}h^3T\sqrt{\frac{T}{L}}$; Hoc eſt (propter $c=\frac{1}{2}T+d$, & $h^2=\frac{dT+d^2}{T}L$,) Ut $\frac{1}{2}T^2+dT+\frac{2}{3}d^2$, ad $T+d$, in $\frac{2}{3}\sqrt{:}\,dT+d^2$: Sic *illa ſuperficies curva Conoeidica*, ad $\frac{2}{3}$ *Cylindricæ*: Seu, Ut $\frac{1}{2}T^2+dT+\frac{2}{3}d^2$, ad $T+d$, in $\sqrt{:}\,dT+d^2$; Sic *Conoeidica* ad *Cylindricam.* Fig. 323, & 324.

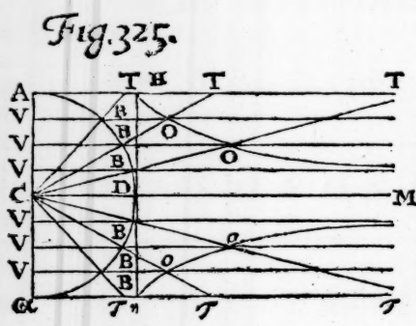
5. Sed & eadem eſt ratio momenti curvæ parabolicæ A O, ad momentum rectæ T O, reſpectu ejuſdem rectæ A D, (nempe, quæ eſt converſione factorum:) Cum itaque Momentorum ratio ex rationibus ponderum & diſtantiarum componatur; ſi ex hac momentorum ratione eximatur ratio magnitudinum, hoc eſt (ut modo oſtenſum eſt) quadrilinei C △ O A ad triangulum C △ M, (ſeu hujus converſa cum ea componatur:) habebitur ratio *diſtantiæ centri gravitatis curvæ parabolicæ* AO, ad *diſtantiam centri gravitatis rectæ* T O, (ab eadem A D,) hoc eſt, ad AT = C△ = DO = $h = \sqrt{:}\,\frac{dT+d^2}{T}L$: Adeoque $\frac{\frac{1}{2}T^2+dT+\frac{2}{3}d^2}{T+d}$, in $\sqrt{:}\,dT+d^2 \times \frac{C\triangle M}{C\triangle O A}$ A T *Diſtantia Centri gravitatis curvæ parabolicæ* A O *ab ejus axe* A D: Vel, propter $C\triangle M = \frac{1}{2}h^2\sqrt{\frac{T}{L}}$, ſi ponamus $hg = C\triangle O A$, adeoque $\frac{C\triangle M}{C\triangle O A} = \frac{\frac{1}{2}h}{g}\sqrt{\frac{T}{L}}$; erit ea diſtantia $\frac{\frac{1}{2}T^2+dT+\frac{2}{3}d^2}{T+d}$, in $\sqrt{:}\,dT+d^2 \times \frac{\frac{1}{2}h}{g}h\sqrt{\frac{T}{L}}$, hoc eſt, reductione facta, (propter $h=\sqrt{\frac{dT+d^2}{T}}L$, & $h\sqrt{\frac{T}{L}} = \sqrt{:}\,dT+d^2$:) $\frac{\frac{1}{2}T^2+dT+\frac{2}{3}d^2}{T+d} \times \frac{\frac{1}{2}h}{g} = \frac{3T^2+6dT+4d^2}{6T+6d} \times \frac{\sqrt{:}\,dT+d^2:}{2g}\sqrt{\frac{L}{T}}$. Ubi quantitates omnes ſunt Geometricæ determinatæ præter unam g, quæ cum $C\triangle = h$ intelligitur Rectangulum comprehendere æquale Quadrilineo C △ O A; eaque ipſa approximatione quamlibet accurata determinatur prop. 31. hujus Cap. V. Sed & hinc ſimiliter habetur ejuſdem ab O T diſtantia; adeoque ratio ſuperficiei ab A O curva circa O T converſa deſcriptæ, ad Cylindricam recta A D ſic converſa deſcriptam. Aliaque de ejuſmodi aliis curvæ parabolicæ converſionibus; quæ hic ulterius proſequi non eſt animus, ne nimis divagarer.

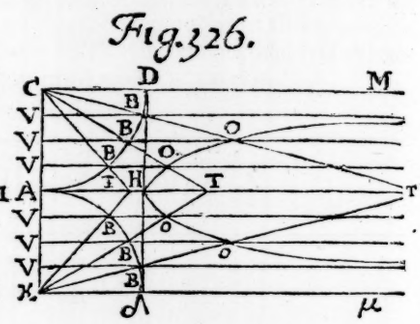
6. Si eadem curva Parabolica A O circa tangentem verticis A T ut axem convertatur, Conoeidis Parabolici Acuti ſuperficiem curvam deſcribens; rectaque A D ſic converſa deſcribat circulum: Erit, *Ut Ungulæ Quadrilinei Hyperbolici* C△OA, *aciem habentis* C A, *momentum reſpectu aciei ſuæ* C A; *ad Ungulæ Trianguli* C △ M, *aciem item habentis* C A, *momentum reſpectu ejuſdem* C A: *Sic ſuperficies curva Conoideos parabolici acuti ab* A O *circa* A T *deſcripti*; *ad circulum rectæ* A D *ut radio circa* A *ut centrum converſa deſcriptum.* Quod etiam in eodem De Ἐυδώσεως tractatu demonſtratur. Manente ſcilicet Magnitudinum ratione o o, d d, in Parabola, ut δ o, δ m, in Hyperbola; diſtantiæ t o, t o, ſunt (non ut d o, d o, arithmetice proportionales, ſed) ut quadrata arithmetice proportionalium: adeoque comparantur, (non cum Quadrilinei C △ O A, & Trilinei C △ M, Ungulis ſeu Momentis reſpectu C A rectæ, ſed) cum Momentis Ungularum C △ O A & C △ M reſpectu communis aciei C A. Eademque (quæ factorum à converſione) eſt ratio momenti curvæ A O, ad momentum rectæ A D, reſpectu A T rectæ. Atque, ex hac momentorum ratione, ſi eximatur ratio magnitudinum, (vel hujus converſa cum eo componatur,) habetur ratio diſtantiæ centri gravitatis Curvæ parabolicæ A O, ad diſtantiam Centri rectæ A D (quod eſt ipſius punctum medium,) ab A T eadem tangente verticis. Adeoque (propter habitam iſtius Centri diſtantiam

à duabus rectis non parallelis) habetur ipsum curvæ Parabolicæ A O Centrum gravitatis; &, quæ inde dependent.

7. *Figura ex Primanorum Reciprocis conflata, est Spatium Hyperbolicum Curvæ & Asymptotis interjectum, recta Asymptotarum alteri parallela terminatum.* Fig. 210. Ut A S H σ fig. 210. Hoc demonstravimus prop. 94, 95. *Arithmet. Infinit.* iterumque prop. 31. hujus Cap. V.

8. *Idemque spatium Hyperbolicum, est Figura Secantium, sinibus rectis complementorum (aut arcuum suorum sinibus versis) arithmetice proportionalibus respondentium.* Hoc insinuatum est, § B. prop. 17. hujus Cap. V. iterumque occurrit § E. prop. 30. (Nam quæ illic occurrunt rectæ $\frac{R^2}{x}$ sunt hæ Secantes.) Estque obvium & demonstratu facile. Cum enim sit, in fig. 327. Ut sinus complementi $CV = x$, ad radium $CB = R$; sic radius $CA = R$, ad secantem $CT = \frac{R^2}{x}$: Sumptis Sinibus complementi $CV = x$ arithmetice proportionalibus (adeoque & sinibus versis $AV = v$ arithmetice item proportionalibus;) si ponantur (fig. 325, 326.) rectis CBT secantibus, æquales ordinatim-applicatæ VBO; (quæ itaque erunt





totidem $\frac{R^2}{x}$, ipsis x arithmetice proportionalibus reciprocæ, *Figuram Secantium* complentes;) erit, eadem Figura Secantium, spatium illud Hyperbolicum, (per modo dicta;) utpote Figura ex Primanorum Reciprocis conflata.

Nempe, ut C A H O M: Ubi Hyperbolæ Centrum, C, Asymptotæ C M, & C A, Vertex, H. (Quæ autem de C, A, H, O, M, dicta sunt; pariter intelligantur de κ, α, ν, ο, μ.)

Et quidem, si sumatur A H, æqualis semidiametro Circuli C A, (ut fig. 325, 326.) ordinatim ad Asymptotam applicatæ V O sunt ipsis secantibus C T æquales; eritque H Vertex Axis. Si vero brevior sit A H quam A C, in eadem ratione breviores erunt V O, quam C T, respectivæ Secantes ad Radium C A: neque erit H vertex Axis, sed alterius alicujus diametri; Axis autem vertex situs erit propius ad Asymptotam, (nempe ubi recta bisecans angulum C, occurrit curvæ.) Sin longior sit A H quam A C, etiam in eadem ratione longiores erunt V O quam C T; (utrobique scilicet æquales Secantibus ad Radium A H, sive longior sit sive brevior quam A C:) Nec erit H vertex Axis sed alterius diametri, Vertex autem Axis nusquam comparet, quippe qui ibi futurus esset ubi recta angulum C bisecans occurreret curvæ ultra H productæ. Quippe recta Angulum C bisecans, in figura *Primaria*, (ubi A H ipsi A C æqualis,) occurrit rectæ A H, in H: Secus autem in *Secundariis*: Nempe, In *Contracta*, (ubi A H brevior quam A C,) ultra H, intra Hyperbolam: In *Protracta*, (ubi A H longior quam A C) citra H (inter H & A) extra Hyperbolam.

Si vero Duo Circuli Quadrantes componantur, (ut fig. 325.) semicirculum absolventes; erunt duæ Hyperbolæ H O O, ν ο ο, situ inverso positæ communem habentes Asymptotam C M, ut & A C α: Sin quadrantes duo inversis verticibus componantur, (ut fig. 326.) Hyperbolæ duæ, H O O, H ο ο, commmunem verticem H habentes, Asymptotas habebunt oppositas C M, κ μ, communem vero C A κ.

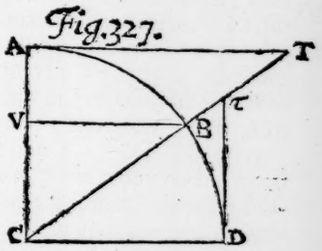
Duæ

Duæ autem Hyperbolæ, H O O, H ∘ ∘, ſic compoſitæ; utut ſimiles ſint, & quidem quamvis (ut in *Primaria*, fig. 326.) communem habeant Axis Verticem H; non tamen eandem continuant Curvam hyperbolicam; ſed Angulum in H faciunt (productæque, ſe mutuo ſecabunt,) Rectum quidem in *Primaria*; Acutum, in *Protracta*; Obtuſum, in *Contracta*; magiſque vel Acutum vel Obtuſum, quo magis vel Protracta vel Contracta fuerit: adeo ut, in valde contractis, fere videantur unam facere continuam curvam.

Ponuntur enim (fig. 326.) H O O, H ∘ ∘, ſemihyperbolæ, ſitu diſtorto; propter dirempta puncta C, ϰ; (quæ, ut O H ∘ foret una hyperbola, idem eſſent punctum, nempe commune centrum ſemihyperbolarum H O O, H ∘ ∘;) convergentibus punctis M, μ; adeoque &, O, ∘. Neque eſt A H utriuſvis vel Axis vel Diametrorum ulla: utpote quæ per C tranſire debent omnes quæ ſpectant H O O; & per ϰ, quæ H ∘ ∘ ſpectant.

Si vero, in figura *Primaria*, (propter H verticem Axis,) manente communi puncto H, divaricari intelligantur curvæ O ∘; ſimulque Aſymptotæ in M μ, donec in unum coeant K, ϰ, puncta; evaneſcet angulus ad H, fietque ∘ H O una hyperbola. Sed non item in *Secundariis*, (in quibus H non eſt vertex Axis:) Poſſunt quidem, etiam in his, manente H puncto, ita divaricari curvæ in O ∘, ut, evaneſcente angulo ad H, coeant in unam curvam, at non in unam *Hyperbolam* (ſed duarum portiones.) Manifeſtum enim eſt (ex conſtructione) hyperbolas H O O & H ∘ ∘ omnino ſimiles eſſe & congruentes: fieri autem non poteſt in ullo hyperbolæ puncto, præter ipſum Axis Verticem, ut curvæ utrinque adjacentes congruant.

9. Verum hic cavendum eſt ne exiſtimetur O H O fig. 326. eadem curva cum ∘ ∘ ∘ fig. 186. Quanquam enim A α O ∘ ∘ ſit etiam figura Secantium, (ſed Contracta, propter A O minorem quam A C,) ut § B. prop. 17. inſinuatum eſt: Sunt tamen illæ (non, ut hic, Secantes ſinibus verſis, ſeu complementorum rectis, ſed) Sinibus Rectis, arithmetice proportionalibus reſpondentes. Sunt enim illic rectæ $V\omega = \frac{BR}{s}$ (ſinibus rectis $s = VB$, arcuum AB, reciprocæ;) hic vero, $VO = \frac{R^2}{x}$, ipſis $x = VC$ ſinibus complementorum B D reciprocæ. Hoc eſt; Sumptis A V arithmetice proportionalibus; ſpatium complentes rectæ V O fig. 326. ſunt arcuum A B ſecantibus C T fig. 327 proportionales; ſed V ∘ fig. 186. proportionales complementorum BD ſecantibus C τ. Fig. 186.

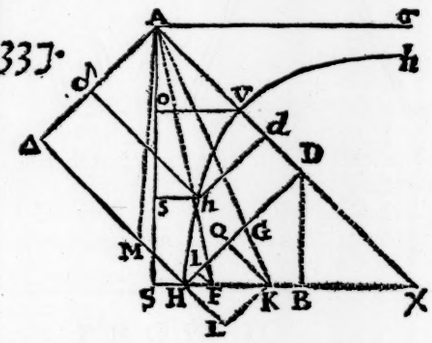


10. Cumque ſint $s = \sqrt{R^2 - x^2}$. Si ſumantur $x = CV$, (adeoque & $v = AV$) arithmetice proportionales; erunt omnes s, ut rectarum in parabola, axi parallelarum radices quadraticæ, ſeu in ipſarum ratione ſubduplicata; puta quæ ſint in rectarum V β fig. 164. ſemiparabolam complentium ratione ſubduplicata; (cum enim rectæ β δ complentes ſemiparabolæ complementum ſint ut x^2, quadrata primanorum; erunt harum continuationes V β, axi parallelæ, ut $R^2 - x^2$; ſumpto Axe ut R^2:) quæque ex iſtiuſmodi radicum reciprocis conflatur figura, eſt ipſa C A O ∘ fig. 186. Omneſque s^2, ſunt ut ipſæ rectæ axi Parabolæ parallelæ. Puta, ut ipſæ V β fig. 164. (ut pr. 112. *Arithm. Infin.* & § V. prop. 15. hujus Cap. 5. oſtenditur:) atque harum reciprocæ, $\frac{R^4}{s^2}$, ſunt ut rectarum V ∘ (fig. 186.) $\frac{AB}{s}$ vel $\frac{R^2}{s}$ quadrata, ſeu ut earum momenta reſpectu A α, aut circuli earundem converſione circa A α facti. Rectarum vero $VO = \frac{R^2}{s}$ fig. 326. (ſpatium hyperbolicum complentium) quadrata ſeu momenta, ut $\frac{R^4}{x^2}$, ſunt ut ipſarum β δ (fig. 164.) rectarum reciprocæ. Quæ autem ſunt ipſis β b fig. 164. vel V p fig. 178. ordinatim-applicatis in parabola reciprocæ, ſunt ut V ∘ figuram A α O ∘ (fig. 178.) complentes, curvæ Cycloidalis particulis (continue ſumptis) proportionales:

portionales; ſpatiique (quod illæ complent rectæ) A α O ω portiones, proportionales reſpectivis Curvæ Cycloidalis partibus quas illæ complent particulæ: ut § B, C. prop. 22. oſtenſum eſt. Sed rectæ V ω fig. 186. ſunt peripheriæ circularis particulis (continue ſumptis) proportionales; ſpatiique quod illæ complent rectæ, proportionales reſpectivis peripheriæ partibus quas illæ complent particulæ: ut § B. prop. 17. oſtenſum eſt.

11. Etiam hoc addo. *Spatii Hyperbolici, ſive interioris ſive exterioris,* non quidem ipſum Gravitatis Centrum ſed Rectam in qua eſt, ſeu *Axem Æquilibrii, exhiberi poſſe, etiamſi ignoretur Plani magnitudo.*

Fig. 337.



Eſto enim expoſitæ Hyperbolæ HhV, Centrum A, axis AX, vertex V, latus rectum L, axis tranſverſus $T = 2S$, axes intercepti V D $= D$, V d $= d$, ordinatim-applicatæ H D $= H$, h d $= h$, axis conjugatus A Δ, ad quem ordinatim applicatæ H Δ $= K$, h ſ $= k$, aſymptotarum alteri A σ parallela H S $= B$ ad alteram A S $= A$ applicetur, & V O ad A O $= E$, & h s, H S: atque intelligatur S A σ angulus rectus: ſitque O S $(= A - E) = O$.

Sunt (propter $h = \surd : dL + \frac{L}{T} d^2$:) ordinatarum ad axem ſemiquadrata, ſeu momenta reſpectu A D X, $\frac{1}{2} Ld + \frac{L}{2T} d^2$: & (propter *Omn.* $d, = \frac{1}{2} D^2$, & *Omn.* $d^2, = \frac{1}{3} D^3$,) ſimul omnia, ſeu Momentum totius H V D reſpectu A X, $\frac{1}{4} LD^2 + \frac{L}{6T} D^3$.

Item (propter $k = \surd : S^2 + \frac{T}{L} h^2$:) ordinatarum ad axem conjugatum ſemiquadrata, ſeu momenta reſpectu A Δ, $\frac{1}{3} S^2 + \frac{T}{2L} h^2$; & (propter *Omn.* $h^2, = \frac{1}{3} H^3$,) ſimul Omnia, ſeu totius A V H Δ momentum reſpectu A Δ, $\frac{1}{2} S^2 H + \frac{T}{6L} H^3$. Quod ex (totius A D H Δ momento) $\frac{1}{2} K^2 H = \frac{1}{2} S^2 H + \frac{T}{2L} H^3$ ſubductum, relinquit reſidui H V D reſpectu A Δ momentum $\frac{T}{3L} H^3$.

Ergo (propter Diſtantias Momentis proportionales,) in D H, ſumpta D G quæ ſit ad A D, ut $\frac{1}{4} LD^2 + \frac{L}{6T} D^3$ ad $\frac{T}{3L} H^3$, hoc eſt, $3TL^2D^2 + 2L^2D^3$ ad $4T^2H^3$; erit in (juncta) A G, ipſius H V D centrum gravitatis; utpote cujus puncta ſingula in ea ratione diſtant ab A D, A Δ.

Idem obtinebitur ope momenti ejuſdem H V D reſpectu Aſymptotæ A σ. Eſt (per § D. prop. 31, Cap. 5.) ipſius O V H S reſpectu A σ momentum ABO. Eſt autem trianguli A S X $(= \frac{1}{2} A^2)$ reſpectu ejuſdem A σ momentum $\frac{1}{3} A^3$; & trianguli A O V momentum $\frac{1}{3} E^3$; poſitiſque H X $(= A - B) = X$, & D B (parallela A S) $= T$, adeoque H D X $= \frac{1}{2} XT$, hujuſque ab A σ diſtantia centri gravitatis $A - \frac{1}{3} T$, erit trianguli H D X reſpectu A σ momentum $\frac{1}{2} AXT - \frac{1}{6} XT^2$.

Ergo

Ergo (propter HVD = ASX − AOV − OVHS − HDX) ipsius HVD respectu A σ momentum $\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}E^3 - ABO - \frac{1}{2}AXT + \frac{1}{6}XT^2$.

Ergo (propter Distantias momentis proportionales,) in DH, sumpta DQ, quæ sit ad AS ut $\frac{1}{4}LD^2 + \frac{L}{6T}D^3$ ad $\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}E^3 - ABO - \frac{1}{2}AXT + \frac{1}{6}XT^2$; ductaque QK parallela AX occurrente SX in K; erit in (juncta) AK (utpote cujus singula puncta in ea ratione distant ab AD, A σ,) Centrum gravitatis HVD. Quæ quidem AK est eadem positione recta cum AG, quoniam utraque tum per A transit tunc per centrum gravitatis HVD.

Similiter (ob eandem causam) in $\triangle$H, sumpta $\triangle$L, quæ sit ad AS ut $\frac{T}{3L}H^3$ ad $\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}E^3 - ABO - \frac{1}{2}AXT + \frac{1}{6}XT^2$; ductaque LK parallela A$\triangle$, occurrunte SK in K; erit in (juncta) AK (cujus utique singula puncta in ea ratione distant ab A$\triangle$, Aσ,) Centrum gravitatis HVD. Erit autem hoc K idem quod prius, ob causam modo insinuatam.

12. Simili processu utendum est in spatio exteriori OVHS.

Est enim (ut jam ostensum) hujus respectu Aσ momentum ABO.

Item, respectu AX, trianguli ASX = $\frac{1}{2}A^2$ est (propter centri ab AX distantiam $\frac{1}{3}A\sqrt{\frac{1}{2}}$) momentum $\frac{1}{6}A^3\sqrt{\frac{1}{2}}$; & similiter trianguli AOV momentum $\frac{1}{6}E^3\sqrt{\frac{1}{2}}$; triangulique HDX = $\frac{1}{2}XT$ (propter distantiam $\frac{1}{3}H$) momentum $\frac{1}{6}XTH$; ipsiusque HVD (ut modo) $\frac{1}{4}LD^2 + \frac{L}{6T}D^3$: Ergo (propter OVHS = ASX − AOV − HDX − HVD,) ipsius OVHS respectu AX momentum $\frac{1}{6}A^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}E^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}XTH - \frac{1}{4}LD^2 - \frac{L}{6T}D^3$.

Ergo (propter distantias momentis proportionales) in DH, sumpta DI, quæ sit ad AS, ut $\frac{1}{6}A^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}E^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}XTH - \frac{1}{4}LD^2 - \frac{L}{6T}D^3$ ad ABO; ductaque IF parallela AX occurrente SX in F; erit in (juncta) AF (cujus puncta singula in ea ratione distant ab AX, Aσ,) Centrum gravitatis OVHS.

Idem obtinebitur comparando ejusdem OVHS momenta respectu Aσ, & A$\triangle$; vel AX, & A$\triangle$; eandem autem AF prodire necesse erit, ut quæ transire debeat tum per A, tum per ipsius OVHS centum gravitatis.

13. Simili item processu utendum est in spatio exteriori AVH$\triangle$.

Est enim (ut modo) hujus respectu A$\triangle$ momentum, $\frac{1}{3}S^2H + \frac{T}{6L}H^3$.

Item, respectu AX, rectanguli ADH$\triangle$ momentum $\frac{1}{2}KH^2$; unde subducto ipsius HVD momento $\frac{1}{4}LD^2 + \frac{L}{6T}D^3$; habetur ipsius AVHD, respectu AX, momentum $\frac{1}{2}KH^2 - \frac{1}{4}LD^2 - \frac{L}{6T}D^3$.

Ergo, in $\triangle$H, sumpta $\triangle$M, quæ sit ad DH, ut $\frac{1}{3}S^2H + \frac{T}{6L}H^3$ ad $\frac{1}{3}KH^2 - \frac{1}{4}LD^2 - \frac{L}{6T}D^3$; erit in (juncta) AM, (cujus singula puncta in ea ratione distant ab A$\triangle$, AX,) centrum gravitatis AVH$\triangle$.

Idemque obtinebitur, comparatis ejusdem momentis respectu A$\triangle$, & Aσ; vel respectu AX, & Aσ: eandem autem AM prodire necesse erit, ob causam ante insinuatam; ut non sit spes inde ob duas hujusmodi rectas se mutuo decussantes, ipsum Centrum obtinendi, absque plani magnitudine.

Si vero, in his omnibus, vel non sit SAσ angulus rectus; vel Hyperbola non recta, sed scalena, (sumpta diametro quavis alia loco axis AX;) similis adhibenda erit accommodatio cum ea quam de Scalenis insinuavimus ad § K. prop. 31. Cap. 5.

Multaque alia adjungi posset, nisi sic nimius essem.

Missis itaque aliis; Unam adhuc de Hyperbola Speculationem subjungam, quam

Wrennio noſtro debemus: Qui Solidum Hyperbolicum, convexo-concavum, Torni ope, acie Dolabræ rectilinea obliquo ad Axem ſitu poſita, conficere docuit. Quam rem, ad meas methodos reductam, ſic viſum eſt exponere, & paulo fuſius proſequi: Ejuſque Solidi Sectiones, & Centra gravitatis, conſiderare.

PROP. XXXII.

A. B. Si in quacunque ab Axe Torni diſtantia, ponatur Acies Dolabræ recta, in ſitu ad illum Axem (non parallelo, ut in Tornando Cylindrum, ſed) quocunque obliquo: Formabitur torno Cylindroeides Hyperbolicum Convexo-concavum.

C. Et quidem ea Hyperbola; cujus Semi-axis tranſverſus æquatur minimæ diſtantiæ aciei dolabræ ab Axe Cylindroeidis (ſeu Semi-diametro baſis inſcripti Cylindri;) Axiſque conjugatus cum Aſymptota eum faciat angulum, quem facit Dolabræ Acies recta, cum recta axi torni parallela.

D. Unde patet methodus, Cylindroeides torno formandi, cujus ſectio per axem, ſit Data Hyperbola.

E. Solidi hujus ſectiones Plano factæ; ſi planum illud ſit, ad Axem Solidi, Rectum; ſunt Circuli.

F. L. Si, ad Axem, minus obliquum quam eſt Aſymptota; Ellipſes.

F. H. I. Si ſimiliter inclinatum ſit atque ipſa Aſymptota; ſunt Parabolæ; vel (ſi etiam per Centrum ſit) Parallelogrammum.

F. G. K. Si adhuc Obliquius ſecet Axem, vel etiam ſit Axi Parallelum; Oppoſitæ Hyperbolæ; vel (ſi axi parallelum atque per verticem Hyperbolæ Genitricis, aut Hyperbolam hanc ubivis tangat,) oppoſita Triangula.

M. Solidi ſic conſtructi (à Centro utrinque æqualiter continuati) Magnitudo, nota eſt: Quippe ad Cylindrum circumſcriptum, ut $3LT + 4H^2$, ad $3LT + 12H^2$. Et Centrum gravitatis in Centro ſolidi, ſeu Axis medio.

N. Semiſolidi (plano per Centrum, ad Axem recto, abſciſſi,) Centrum gravitatis, in Axe ſitum, abſcindit axis ſui partem ad Centrum, quæ ſit ad totum, ut $3LT + 6H^2$ ad $6LT + 8H^2$.

A. Fig. 214. HOc quo commodius abſolvatur; Lemma præmittam, in meo de Ἐνδιώσει Tractatu, modo memorato, inſinuatum; Demonſtratione ex meo de *Conicis Sectionibus* tractatu, prop. 35, 40. petita. Ad hunc ſenſum;

Si ad Rectæ alicujus puncta quotlibet, æqualibus intervallis ſumpta, ordinatim-applicentur Rectæ, quarum Quadrata ſint, ut numerorum continue conſequentium 1, 2, 3, 4, &c. quadrata, eodem aliquo vel æqualibus quadratis aucta: Quæ per harum extrema reliqua tranſit Curva, eſt Hyperbola.

Quippe, (in fig. 27. ibidem, quam hic repeto fig. 214.) Manifeſtum eſt rectas ♂A, tales eſſe quales innuit Lemma; (propter C♂, C♂, C♂, &c. ut 1, 2, 3, &c. & CA communem:) Quæ ſi in ſitum ♂O transferantur, ad C♂♂ ordinatim-applicatæ; Hyperbolam AOO deſignabunt.

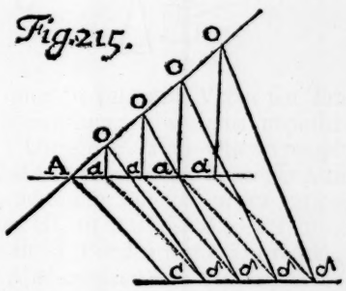
Quodſi, manentibus CA, ♂O, ordinatim-applicatis, intervalla C♂, ♂♂, minora fuerint vel majora quam nunc ſunt; vel etiam angulus AC♂, qui jam rectus intelligitur, fiat obliquus quilibet: prodibit utcunque AOO Hyperbola; ſed cujus aliud erit Latus-rectum, aliuſque ad Aſymptoton CM angulus ♂CM, aliuſque angulus quem cum diametro faciant conjugata diameter & ordinatim-applicatæ.

Demonſtratio petitur, ex meis *de Conicis Sectionibus* prop. 35, 41. ubi oſtenditur, rectas ad Hyperbolæ diametrum conjugatam ordinatim-applicatas ♂O; hoc eſt,

CD

CD diſtantias, punctorum applicationis ad diametrum, à Centro, quas illic *c* dicimus; (ex Semidiametro tranſverſa, & diametro intercepta aggregatas, ſeu $\frac{1}{2}T+d$;) eſſe $\sqrt{:\frac{1}{4}T^2+\frac{T}{L}h^2}$: Quarum itaque quadrata ſunt, $\frac{1}{4}T^2+\frac{T}{L}h^2$: (Poſitis T pro diametro tranſverſa, L pro latere recto, & h pro ordinatim-applicata ad hyperbolæ diametrum.) Adeoque, (propter T, L, quantitates permanentes,) ſi ſumantur h, hoc eſt DO, ſeu Cδ, arithmetice-proportionales ut 1, 2, 3, &c. manifeſtum eſt, quadrata illa, $\frac{1}{4}T^2+\frac{T}{L}h^2$, eſſe, ut *Quadrata æqualia, quadratis arithmetice-proportionalium aucta.* Quæ itaque cum ſit Hyperbolæ generalis proprietas, (quæcunque fuerit ratio Diametri-tranſverſæ ad Latus-rectum, & quemcunque ad diametrum angulum faciant ordinatim-applicatæ;) Lemma conſtat.

His præmiſſis; Intelligatur (fig. 215.) Acies Dolabræ recta, AOO, in qua- B.

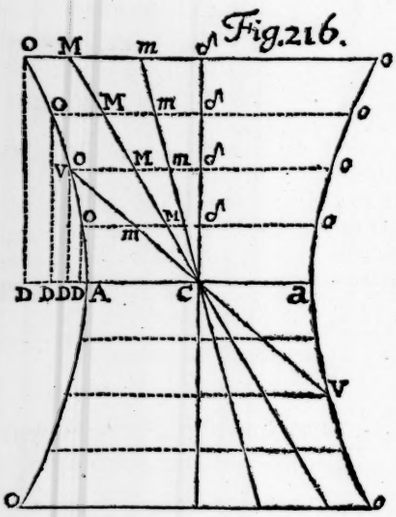


cunque ab Axe Cylindroeidis (torno conficiendi) diſtantia, ſitu quocunque obliquo (ad axem illum) poſita. Manifeſtum eſt, per rectam illam AOO, tranſiturum eſſe planum aliquod, ut OAα, cui (plano) parallelus ſit Cylindroeidis axis Cδ: Rectamque aliquam in eo plano, axi parallelam, ut A$\alpha\alpha$, (nempe, ex parallelis eam quæ ſit axi proxima,) lineam contactus eſſe qua planum illud tangat Cylindrum, (Cylindroeidi inſcriptum,) cujus Axis Cδ; & baſis radius CA; (quæ eſt minima diſtantia aciei dolabræ, quantum opus ſit continuatæ, ab Axe Cylindri ſeu Cylindroeidis formandi.) Sumptiſque in Axe C$\delta\delta$, partibus continue æqualibus Cδ, $\delta\delta$, &c. atque ad eum perpendicularibus CA, $\delta\alpha$, &c. erectiſque itidem ad planum CAα perpendicularibus αO, αO, &c. Manifeſtum eſt, rectas αO, eſſe ut 1, 2, 3, &c. numeros continue conſequentes; earumque quadrata, ut quadrata horum: Et propterea (propter angulum $\delta\alpha$O rectum, rectaſque $\alpha\delta$ invicem æquales,) junctis omnibus Oδ, quadrata harum eſſe, ut quadrata numerorum illa æqualibus quadratis aucta.

Adeoque; Si Torni ope, circa axem Cδ (fig. 215.) deſcribi intelligantur in C. Cylindroeide Circuli, quorum radii ſint ipſæ δO rectæ: Sectio per axem exhibebit ipſum δCAO (fig. 214.) planum. Erunt utique Circulorum illorum radii, planum complentes, ipſis δO, utriuſvis figuræ, æquales. Nempe ſi, in binis figuris, ſumptis tum AC æqualibus, tum æqualibus Cδ reſpectivis; ſumantur αO fig. 215. ipſis Cδ fig. 214. reſpectivis æquales: Quod fit, ſumpto OAα fig. 215. angulo ſemi-recto; (qualis eſt, in fig. 214. δCM, quem cum axe conjugato Cδ facit Aſymptota CM:) Si vero alius ſit angulus OAα quam ſemirectus; illi congruet Hyperbolæ quæ ſimilem habeat angulum, δCM; ut nempe Cδ fig. 214, 215. ſint reſpectivis αO fig. 215. æquales.

Conſtat itaque, non modo Cylindroeides hujuſmodi torno formari poſſe cujus D. ſectio per axem ſit hyperbola; ſed &, quæ ſit *data* Hyperbola. Quippe exponatur Hyperbola AOO (fig. 214.) quælibet, cujus Centrum C, ſemi-axis tranſverſus CA, axis conjugatus Cδ, & CM aſymptota; cui ſimilem imperatum ſit torno exhibere: Hoc tantum curandum erit; nempe ut CA fig. 215. ſit æqualis ipſi CA fig. 214. ſitque angulus αAO fig. 215. ipſi δCM, fig. 214. (quem cum Aſymptota facit axis conjugatus) æqualis.

E. Solidum vero ſic conſtructum cum varias admittat ſectiones plano factas; eas Fig. 216. ut ordine exquiramus, conſiderabimus hoc idem ſolidum ut alia conſtructione formatum; converſione ſcilicet Hyperbolæ O A O fig. 216. circa conjugatum axem ♢ C ♢. Quippe hoc, idem eſſe ſolidum atque illud quod Torno conſtructum iri modo docuimus, ex dictis ſatis patet.



Cumque Solidi hujus ſectio quælibet plano facta, ſit alicui per Axem ſectioni recta, ſeu perpendicularis: Eſto ea per Axem ſectio O o o O; in qua oppoſitæ Hyperbolæ (Genitrices) A O, a o; quarum Centrum, C; Axis conjugatus (qui & Solidi Axis eſt) ♢ C ♢; Aſymptotarum altera, C M; Axis Tranſverſus, A a = 2 C A = T = 2 S; Axis interceptus, A D = d; à Centro diſtantia, C D = $c = \frac{1}{2}T + d = S + d$; Ordinatim-applicata ad Hyperbolæ axem, D O = b; cujus quadratum, $b^2 = Ld + \frac{L}{T}d^2 = \frac{Td + d^2}{T} - L = \frac{c^2 - S^2}{T} - L$; (quæ ſunt itaque, ut ſeries Primanorum aucta ſerie Secundanorum; aut etiam, ut Series Secundanorum mulcta ta ſerie Æqualium:) Adeoque $c^2 = S^2 + \frac{T}{L}b^2$: Quod itaque eſt quadratum rectæ C D (diſtantiæ à Centro) vel (huic æqualis) O ♢, ordinatim-applicatæ ad Axem conjugatum. (Quæ omnia olim demonſtravimus, *Con. Sect.* prop. 35, 41.) Et, propterea, ſumptis C ♢, hoc eſt D O = b, arithmetice proportionalibus; erunt omnia rectarum ♢ O, ordinatim-applicatarum ad Axem conjugatum, (ſpatium O ♢ C A complentium,) quadrata, totidem $S^2 + \frac{T}{L}b^2$, ſumptis b arithmetice-proportionalibus: Hoc eſt. Series Æqualium aucta ſerie Secundanorum.

Sed &, ſumpto M in Aſymptota C M, erit (per *prop.* 39. *ibidem*,) ut L ad T, ſic quadratum C ♢ ſeu D O, hoc eſt b^2, ad quadratum ♢ M. Adeoque quadrata omnium ♢ M (ſpatium M C ♢ complentium) ſunt totidem $\frac{T}{L}b^2$; ſumptis C ♢ = b arithmetice proportionalibus.

Manifeſtum autem eſt, (ex conſtructione ſolidi,) quæ rectis A a, O o, inſiſtunt erecta plana (ſolidum complentia) totidem eſſe circulos; quorum diametri ſunt ipſæ A a, O o, rectæ. Quippe radii C A, ♢ O, circa Axem ♢ C ♢ converſi, totidem deſcribunt Circulos.

F. Intelligatur autem, ſumpto, ubivis in ♢ O recta, puncto m, recta per Centrum C m, cui erectum inſiſtat Planum ſectionem faciens, quam itaque compleant rectæ m (ipſis m punctis inſiſtentes:) Quarum quadrata (utpote, in ſuis reſpective circulis, inter diametri ſegmenta O m, mo, mediarum proportionalium, ſeu ordinatim-applicatarum ad Circuli diametrum,) ſunt totidem quadrata ♢ O, demptis reſpectivis quadratis ♢ m; ſeu $m^2 = ♢Oq - ♢mq$.

Sitque 1°, punctum m in ♢; adeoque ♢ m = o, & ♢ O q − ♢ m q = ♢ O q: Et propterea, quæ rectæ C ♢ inſiſtit ſectio, eadem erit atque ♢ O A C hyperbola.

Sit 2°, punctum m in M, (nempe C m eadem exiſtente atque C M aſymptota;) adeoque ♢ m = ♢ M, & ♢ m q = ♢ M q = $\frac{T}{L}b^2$: Et propterea ♢ O q − ♢ m q = $S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}b^2 = S^2 = m^2$: ipſæque m, totidem S, invicem æquales. Adeoque, quæ Aſymptotæ inſiſtit ſectio, eſt Parallelogrammum Rectangulum.

Sit

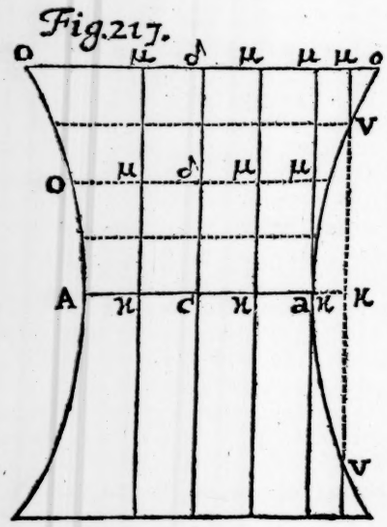
Sit 3°, punctum m inter δ & M; adeoque δm minor quam δM, ſed eidem ubique proportionalis; puta in ratione ν ad *b*. Adeoque $\delta m q = \frac{T}{L}\nu^2$: Et $\delta Oq - \delta m q = S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}\nu^2 = S^2 + \frac{b^2-\nu^2}{L}T = m^2$. Quæ itaque (propter ν minorem quam *b*) ſunt quadrata ordinatim-applicatarum ad hyperbolæ axem conjugatum, (utpote ſeries Æqualium aucta ſerie Secundanorum;) Quæ quidem Hyperbola, Semi-axem Tranſverſum habet (ſuper C centro erectum) $S = CA$; ſeu Tranſverſum Axem $T = Aa$; Axem Conjugatum, Cmm: & Latus-Rectum $\frac{b^2L+\nu^2T}{b^2-\nu^2}$. Quippe, cum ſit, in quavis Hyperbola, $b^2 = \frac{c^2-S^2}{T}L$; pro *b*, *c*, *L*, (ne fiat Symbolorum confuſio, propter has literas jam uſurpatas,) ponamus, in hac, θ, κ, λ; (manentibus *S*, *T*, utpote huic cum Hyperbola Genitrice communibus:) Eritque $\theta^2 = \frac{\kappa^2-S^2}{T}\lambda$. Adeoque $\frac{\theta^2 T}{\kappa^2-S^2} = \lambda$. Eſt autem θ^2 $(= Cmq = C\delta q + \delta m q =) b^2 + \frac{T}{L}\nu^2$; & $\theta^2 T = \frac{b^2L+\nu^2T}{L}T$. Item κ^2 (utpote quadratum rectæ puncto m inſiſtentis quam *m* diximus,) $= m^2 = S^2 + \frac{b^2-\nu^2}{L}T$; Adeoque $\kappa^2 - S^2 = \frac{b^2-\nu^2}{L}T$. Et propterea $\frac{\theta^2 T}{\kappa^2-S^2} = \frac{b^2L+\nu^2T}{b^2-\nu^2} = \lambda$, Latus Rectum. Eſtque Conjugatus Axis, ipſa Cm recta: Centrum, C.

Sit 4°, punctum m inter O & M, (inter Curvam & propiorem Aſymptotam; adeoque Cm, continuata, curvam ſecabit; & quidem utrinque continuata, ſectiones oppoſitas:) Adeoque (propter δm majorem quam δM, ſeu ν majorem quam *b*,) erunt $\delta Oq - \delta m q = S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}\nu^2 = m^2$, hoc eſt $S^2 - \frac{\nu^2-b^2}{L}T$; quadrata ordinatim-applicatarum ad Ellipſeos conjugatum axem, (per *Con. Sect. prop.* 28. utpote ſeries Æqualium mulctata Serie Secundanorum;) Cujus minor Axis Tranſverſus, *T*, ſeu 2*S*, = Aa: cujus Centrum, C; Axis conjugatus CmO; Latus Rectum $\frac{b^2L+\nu^2T}{\nu^2-b^2}$. Quippe cum, in quavis Ellipſi ſit $e^2 = \frac{S^2-c^2}{T}L$; pro *c*, *L*, (ne fiat Symbolorum confuſio, propter has jam in Hyperbola uſurpatas,) ponamus, in Ellipſi, κ λ, (manentibus *S*, *T*, utpote communibus Ellipſi cum Hyperbola.) Eritque $e^2 = \frac{S^2-\kappa^2}{T}\lambda$. Adeoque $\frac{e^2T}{S^2-\kappa^2} = \lambda$. Eſt autem e^2 $(= Cmq = C\delta q + \delta m q) = b^2 + \frac{T}{L}\nu^2$: & $e^2T = \frac{b^2L+\nu^2T}{L}T$. Item κ^2 (utpote quadratum rectæ puncto m inſiſtentis) $= S^2 - \frac{\nu^2-b^2}{L}T$. Adeoque $S^2 - \kappa^2 = \frac{\nu^2-b^2}{L}T$. Et propterea $\frac{e^2T}{S^2-\kappa^2} = \frac{b^2L+\nu^2T}{\nu^2-b^2} = \lambda$, Latus Rectum. Et Cmo in eo puncto Curvæ Ao occurrit, cui reſpondet $\delta O = \delta m$, hoc eſt $c^2 = \frac{\nu^2}{L}T$. Et $CO q = b^2 + c^2 = b^2 + \frac{\nu^2}{L}T = \frac{b^2L+\nu^2T}{L}$. Hoc eſt, $CO = \sqrt{\frac{b^2L+\nu^2T}{L}}$: ſemi-axis tranſverſus Conjugatus.

Omnis igitur hujus ſolidi ſectio, plano per Centrum facta, erit vel Circulus, nempe ſi ſuper rectam CA; vel Ellipſis, ſi inter CA & CM (ſeu inter curvam & aſymptotam proximam;) vel Parallelogrammum, ſi in ipſa Aſymptota; vel Hyperbola (ſeu potius Oppoſitæ Hyperbolæ, infra ſupraque,) ſi per Cm inter CM & Cδ; vel ipſa quidem Genitrix hyperbola, ſi per Axem Cδ.

Intelligatur deinde, Sectio rectæ κμ, axi parallelæ, inſiſtens. Eruntque, & G. hic, Fig. 217.

Fig. 217. hic, omnia quadrata rectarum punctis μ insistentium (planum complentium,) puta $\mu^2 = \delta O q - \delta \mu q = \delta O q - C \varkappa q$ (propter $\delta \mu = C \varkappa$.)



Ideoque, si $\varkappa$ sit in C; erit (ut prius) sectio per $\varkappa \mu$, eadem quæ per $C\delta$, hoc est $\delta O A$ Genitrix hyperbola (propter $\delta \mu = o$.)

Si $\varkappa$ sit in A vel a; adeoque $C\varkappa = CA = S$: Erunt $\delta O q - C\varkappa q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - S^2 = \frac{T}{L} b^2 = \mu^2$. Quæ itaque sunt quadrata ordinatim-applicatarum in triangulo, (utpote Series Secundanorum;) seu potius binis triangulis communem verticem A habentibus, quæ fiunt rectis decussantibus eundem angulum facientibus quem faciunt Asymptotæ se mutuo in plano decussantes.

Si $\varkappa$ sit inter C & A, vel C & a; adeoque $C\varkappa = \sigma$ minor quam S; Erunt $\delta O q - C\varkappa q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \sigma^2 = \mu^2$, quadrata ordinatim-applicatarum ad conjugatum axem hyperbolæ; (quippe series Æqualium aucta serie Secundanorum:) cujus Semi-axis transversus est $\sqrt{:} S^2 - \sigma^2$: (Nempe, quæ puncto $\varkappa$ insistit ordinatim-applicata in Semicirculo A a;) Latus rectum, $\frac{2L}{T}\sqrt{:} S^2 - \sigma^2$, seu $\frac{L}{S}\sqrt{:} S^2 - \sigma^2$: atque axis conjugatus, ipsa $\varkappa \mu$ recta.

Si $\varkappa$ sit extra Solidum, puta ultra A vel a, (adeoque plani secantis pars media etiam extra solidum,) Planum secans in iis punctis occurret ubi est δO (vel δo) $= C\varkappa = \delta \mu$; (quæ itaque puncta sunt vertices oppositi:) puta, V, V. Atque ultra hæc puncta, existente μ intra solidum, erunt $\mu^2 = \delta O q - \delta \mu q = \delta O q - C\varkappa q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \sigma^2$; hoc est (propter σ majorem quam S,) $\frac{T}{L} b^2 - \sigma^2 + S^2 = \mu^2$; quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola (seu Oppositis hyperbolis) ad suum axem: (utpote Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Cujus Axis transversus est $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{T}} L$, & Latus rectum, $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{L}} T$. Centrum vero, ipsum $\varkappa$; atque Axis, $\varkappa \mu$; Transversus, V $\varkappa$ V.

Omnis igitur hujus Solidi Sectio, plano quod Axi sit parallelum facta, est, vel Oppositа Triangula ad eundem verticem, nempe si per verticem hyperbolæ Genitricis; vel Hyperbolæ Oppositæ, si alibi.

H. Fig. 218. Intelligatur denique, ubivis in Hyperbolæ Genitricis axe A a, quantumvis producto, sumi punctum $\varkappa$; unde ducatur (cui insistat sectio) in plano per Axem solidi, recta $\varkappa \pi$, solidi Axi $C\delta$ non parallela, sed eidem alicubi occurrens.

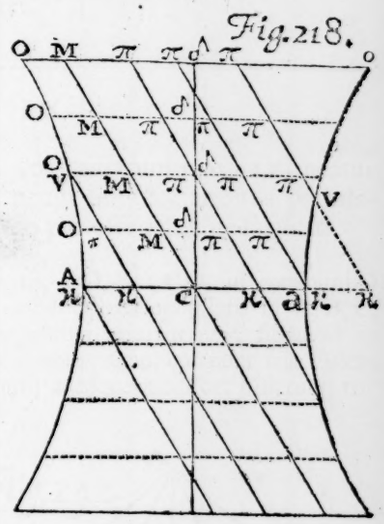
Et quidem si sumatur $\varkappa$ in C; fiet sectio per Centrum, de qua jam supra dictum est: In qua quadrata ordinatim-applicatarum sunt $m^2 = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \frac{T}{L} \nu^2$: Adeoque sectio ipsa, vel Hyperbola, vel Parallelogrammum, vel Ellipsis; prout ν minor est, vel æqualis, vel major quam b.

Jam vero, cuivis prædictarum C m, parallela intelligatur $\varkappa \pi$. Sitque $C\varkappa (= m\pi) = \sqrt{\frac{T}{L}} F^2 = F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (uti prius erat $\delta m = \sqrt{\frac{T}{L}} \nu^2 = \nu\sqrt{\frac{T}{L}}$. Adeoque $\delta \pi = \delta m + m\pi$, vel $\delta m - m\pi$, vel $m\pi - \delta m$, (pro vario situ punctorum m, π;) hoc est, æqualis summæ vel differentiæ rectarum δm, $m\pi$; hoc est, ipsarum

$\nu\sqrt{}$

$\nu\sqrt{\frac{T}{L}}$, $F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (nempe, Summæ, ſi punctum m ſit intermedium inter δ & π: Differentiæ, ſi ſecus.) Adeoque ipſarum δπ quadrata, $\delta\pi q = \frac{\nu^2 \pm 2\nu F + F^2}{L} T$.

Cum itaque Quadrata rectarum punctis π inſiſtentium (ſectionis planum ipſi κπ inſiſtentis complentium,) puta π^2 ſint (per prius oſtenſa) δOq—δπq; erunt ipſa, $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - \nu^2 \mp 2\nu F - F^2}{L} T$: (Nempe, $2\nu F$ cum ſigno —, ſi m ſit intermedium; cum ſigno +, ſi ſecus.) Ubi S^2 & F^2 ſunt ſeries Æqualium; $2\nu F$, ſeries Primanorum; $b^2 - \nu^2$, ſeries Secundanorum.



Et quidem 1°, ſit κπ parallela ipſi CM aſymptotæ: Adeoque (propter δm=δM,) $b^2 = \nu^2$, ſe mutuo perimentes. I.

Quo caſu; ſi ſit etiam $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, (exiſtente ſcilicet κ in A vel a; adeoque CA=Cκ:) his item ſe perimentibus mutuo, ſolum ſupereſt $\frac{2\nu FT}{L}$, & quidem cum ſigno +: (Nam, poſito κ in A vel a, non poteſt punctum m intermedium eſſe inter δ & π, quin π erit extra Solidum:) ſeu (propter $\nu = b$,) $\frac{2bFT}{L}$; ſeu (propter $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, adeoque $F^2 = \frac{L}{T} S^2$, & $F = S\sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2}T\sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $bT\sqrt{\frac{T}{L}}$, ſeries Primanorum; (ut quadrata ordinatim-applicatarum in parabola.) Adeoque quæ rectæ κπ, per verticem A vel a tranſeunti, utrivis Aſymptotarum parallelæ, inſiſtit Sectio, eſt Parabola. Cujus vertex, κ; Axis interceptus, $\kappa\pi = Cm = \sqrt{:C\delta q + \delta M q :} = \sqrt{: b^2 + \frac{T}{L} b^2 :} = b\sqrt{\frac{L+T}{L}}$: Latus-rectum, $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT:}}$; vel (propter $F = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $T\sqrt{\frac{T}{L+T}}$.

Sin (manente κπ parallela CM aſymptotæ) punctum κ ſit extra ſolidum (ultra A vel a,) adeoque $\frac{F^2}{L} T$ majus quam S^2: Erit etiamnum $2\nu F$ ſeu $2bF$ cum ſigno +, (quippe poſito κ extra Solidum, non poterit m intermedium eſſe, quin π etiam erit extra ſolidum:) Et $\pi^2 = S^2 + \frac{2bF - F^2}{L} T$, hoc eſt $\frac{2bF}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$, ſeries Primanorum mulctata ſerie Æqualium: Adeoque, & hic, ſectio erit Parabola; ſed cujus vertex ſit non in κ, ſed (ubi κπ, intrando, curvam ſecat) in V; & κ, in axe continuato extra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT:}}$: Verticis diſtantia $\kappa V = \frac{2F^2 - SL}{4F}\sqrt{\frac{L+T}{L}}$. Cui reſpondet $C\delta = b = \frac{2F^2 - S^2}{4F}$.

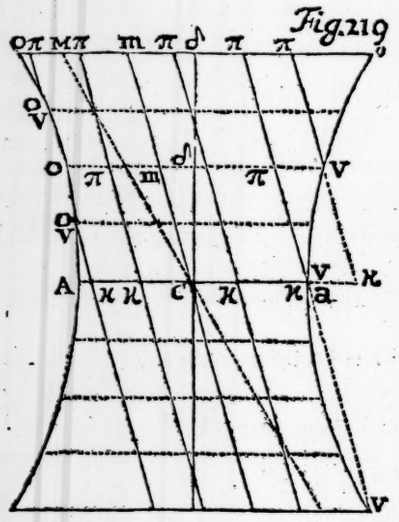
Si autem (manente κπ parallela CM aſymptotæ) punctum κ ſit intra ſolidum, (ſive inter A & C, ſive inter C & a,) erit Cκ minor quam CA; adeoque $\frac{F^2 T}{L}$ minus quam S^2: Poteſtque m vel M intermedium eſſe inter δ & π (nempe

ſi

Fig. 218. si $\varkappa\pi$ ſumatur citra CM,) vel (ſi ultra) non eſſe: adeoque $2\nu F$ ſeu $2bF$, vel ſigno —, vel ſigno + affici. Adeoque $\pi^2 = S^2 - \frac{F^2}{L}T \mp \frac{2bF}{L}T$; ſeries Æqualium, illic mulctata, hic aucta, ſerie Primanorum: utrobique, ſectio erit Parabola, & $\varkappa$ in axe intra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT:}}$; & verticis diſtantia $\varkappa V = \frac{SL-2F^2}{4F}\sqrt{\frac{L+T}{L}}$; illic ſurſum, hic deorſum. Cui reſpondet $C\delta = \frac{SL-2F^2}{4F} = \pm b$.

Omnis itaque Solidi hujus ſectio, plano Aſymptotæ parallelo facta, eſt Parabola, verticem habens in rectæ $\varkappa\pi$ illo puncto quo Curvam genitricem ſecat.

K. 2°. Si Cm cui parallela eſt $\varkappa\pi$, non ſit ipſa CM aſymptota, ſed quæ obliquius ſecet ſolidi Axem $C\delta$; ſumpto ſcilicet puncto m inter δ & M: erit ν minus quam b.



Quo caſu, ſi ſit $S^2 = \frac{F^2T}{L}$, adeoque $C\varkappa = CA$, ſumpto ſcilicet $\varkappa$ in A vel a: His ita ſe perimentibus mutuo, erunt $\pi^2 = \frac{b^2-\nu^2\mp 2\nu F}{L}T$, quadrata ordinatim-applicatarum in oppoſitis hyperbolis, (utpote ſeries Secundanorum, mulctata vel aucta ſerie Primanorum;) quarum quidem axis tranſverſus $\varkappa V$ eſt extra ſolidum, vertices habens in eadem Curva genitrice: Signa vero —+ reſpicient, hoc unum; illud, reliquum verticem.

Idem accidet, ſi ſit S^2 minus quam $\frac{F^2T}{L}$, adeoque $\varkappa$ extra ſolidum: niſi quod jam $\varkappa$ non erit in verticum altero, ſed in axe tranſverſo alicubi intra vertices. Quippe tum $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2-\nu^2\mp 2\nu F-F^2}{L}T$, hoc eſt, $\frac{b^2-\nu^2}{L}T - \frac{F^2T-S^2L}{L} \mp \frac{2\nu FT}{L}$, erit ſeries Secundanorum mulctata ſerie Æqualium, mulctata vel aucta ſerie Primanorum. Qui etiam eſt Locus ad Hyperbolam: Cujus Axis eſt ipſa $\varkappa\pi$, verticeſque illius ea puncta quæ ſunt in curva genitrice.

Si S^2 majus ſit quam $\frac{F^2T}{L}$, adeoq; $\varkappa$ intra ſolidum: erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2-\nu^2\mp 2\nu F-F^2}{L}T$, hoc eſt $\frac{S^2L-F^2T}{L} + \frac{b^2-\nu^2}{L}T \mp \frac{2\nu F}{L}T$; ſeries Secundanorum aucta ſerie Æqualium, & mulctata vel aucta ſerie Primanorum; adeoque Sectio, oppoſitæ Hyperbolæ: Ipſaque $\varkappa\pi$ earundem Axis ſi curvam genitricem ſecet, vertices habens in ipſis interſectionibus: Vel, ſi curvam illam non attingat, Axis conjugatus; Sin curvam Tangat; perinde eſt ad utrumvis caſum referas; Quippe tum oppoſitæ Hyperbolæ degenerant in oppoſita Triangula, quorum communis Vertex eſt O, punctum contactus; evaneſcente Latere Tranſverſo.

Omnis igitur hujus Solidi ſectio, plano facta quod obliquius ſecat axem ſolidi, quam eam ſecat Aſymptota, ſunt Oppoſitæ Hyperbolæ, vel Triangula.

L. 3°. Si Cm cui parallela eſt $\varkappa\pi$, minus oblique ſecet axem ſolidi quam Aſymp-
Fig. 200. tota CM; adeoque ſit m punctum intra M & O: erit ν majus quam b: rectaque $\varkappa\pi$ oppoſitas curvas genitrices ſecabit.

Quo caſu, ſi $S^2 = \frac{F^2T}{L}$, poſito ſcilicet $\varkappa$ in A vel a; (cum non poſſit m cadere

inter

inter δ & π,) erit $\pi^2 = \frac{b^2 - n^2 + 2nF}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T$; eritque sectio, Ellipsis; cujus Axis $n\pi$ V, & verticum alter in n, reliquus in opposita hyperbola.

Si vero n sit extra Solidum; adeoque S^2 minus quam $\frac{F^2 T}{L}$; (nec possit m cadere inter δ & π:) Erunt $\pi = S^2 + \frac{b^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$; Sectio item Ellipsis erit, cujus axis est ipsa $n\pi$, sed neuter verticum in puncto n, quod est in axe continuato extra Ellipsin: Verticesque in illis rectæ $n\pi$ punctis quibus oppositas curvas genitrices secat.

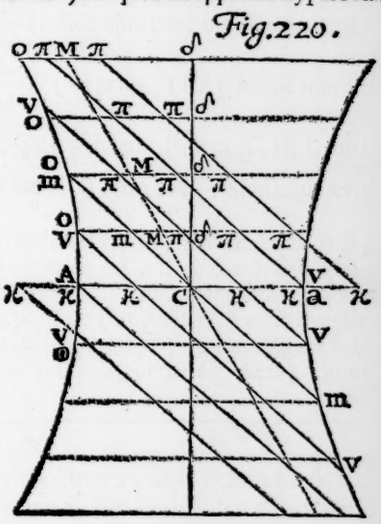


Fig. 220.

Sin S^2 majus quam $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque n intra solidum; erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2 \mp 2nF - F^2}{L} T = \mp \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T + \frac{S^2 L - F^2 T}{L}$: Sectioque Ellipsis erit; cujus axium alter est ipsa $n\pi$ recta, punctumque n in neutro verticum, sed in axe illo intra ellipsin, cujus vertices sunt in eis ejusdem punctis quibus oppositas curvas genitrices A O, a o, secat.

Omnis itaque hujus Solidi sectio, plano facta quod ad Axem solidi minus obliquum sit quam est Asymptota; est Ellipsis; vel saltem (si rectum sit ad axem) Circulus. M. Fig. 214.

Solidi hujus Centrum Gravitatis quod spectat; si totum spectemus, æqualiter utrinque continuatum, non est quod ambigemus in ipso C centro positum esse; propter tum δ C δ totius axem (in quo propterea Centrum gravitatis situm esse liquet, ex prop. 5. hujus;) tum Circuli planum A a, quod tum axem tum solidum etiam ita dividat ut singulæ segmenti unius particulæ, singulis alterius respective sumptis, æquiponderent; utpote æquales, & æqualiter utrinque remotæ; quare & in hoc etiam plano situm esse constat, per prop. 3. vel 4. hujus: adeoque in ipso C puncto quod est utrique commune.

Si vero alterutrum segmentum consideremus; puta O A a o, à dividente plano A a quantumlibet continuatum, vel hujus etiam segmenta quælibet planis ipsi A a parallelis abscissa, vel interjecta: Hic etiam rem facile obtinebimus.

Cum enim, verbi gratia, in Plano C A O δ, fig. 214. cujus conversione circa C δ axem, istiusmodi semisolidum formatur; rectarum δ O quadrata (quibus & circuli his radiis descripti sunt proportionales) sint, (per § A.) $S^2 + \frac{T}{L} b^2$, vel $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L} b^2$, hoc est, series Æqualium aucta serie Secundanorum: Sintque (per prop. 1. hujus) *omnia* T^2 idem atque T^2 (in altitudinem) H ductum, seu HT^2, & *omnia* $\frac{1}{4}T^2 = \frac{1}{4}HT^2$: atque *omnia* b^2, idem atque $\frac{1}{3}H^3$; & *omnia* $\frac{T}{L} b^2 = \frac{T}{3L} H^3$: Erunt *omnia* $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L} b^2 = \frac{1}{4}T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$, (posito H pro D O $= b$ maximo:) Solidumque Conversione vel Semiconversione factum, ad hanc quadratorum summam, ut Circulus vel Semicirculus ad quadratum radii. Adeoque ad Cylindrum æque altum cujus basis æquetur Circulo radii D O maximi, ut $\frac{1}{4}T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$ ad $\frac{1}{4}T^2 H + \frac{T}{L} H^3$, seu ut $\frac{1}{4}LT^2 + \frac{1}{3}TH^2$ ad $\frac{1}{4}LT^2 + TH^2$. Hoc est, ut $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$.

Sed & rectarum, adeoque & quadratorum aut circulorum δ O, à C A distantiæ, N.

sunt ut h arithmetice proportionales: Adeoque (verbi gratia) quadratorum & O momenta respectu C A, sunt totidem $\frac{1}{4}T^2h + \frac{T}{L}h^3$ (sumptis h arithmetice proportionalibus usque ad H maximum;) Adeoque (per prop. 1. hujus) omnium (sive quadratorum sive circulorum) in suis locis suspensorum Momentum, ad momentum totidem maximo æqualium in distantia maxima suspensorum, ut $\frac{1}{8}T^2H^2 + \frac{T}{4L}H^4$ ad $\frac{1}{4}T^2H^2 + \frac{T}{L}H^4$; hoc est $\frac{1}{2}LT^2 + TH^2$ ad $LT^2 + 4TH^2$, seu $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$.

Cum itaque Magnitudinum ratio sit, ut $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$; & Momentorum ratio, $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$; sitque Momentorum ratio ex rationibus Magnitudinum & Distantiarum composita; erit Distantiarum ratio, (hoc est, distantiæ Centri gravitatis à C A, ad distantiam totam seu altitudinem figuræ,) ut $3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4$ ad $6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4$, vel (abbreviando per $LT + 4H^2$,) ut $3LT + 6H^2$ ad $6LT + 8H^2$

$$3LT + 4H^2 \;)\; LT + 2H^2 \;(\; 3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4 \;/\; 6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4 = 3LT + 6H^2 \;/\; 6LT + 8H^2.$$

Adeoque (cum in Axe solidi situm esse certum sit,) erit in Axe sic diviso.

Verbi gratia; si ponantur $L = T = H$: Erit ut $3 + 18 + 24 = 45$, ad $6 + 32 + 32 = 70$; seu, ut $3 + 6 = 9$, ad $6 + 8 = 14$; hoc est, ut 9 ad 14: Sic, Solidi Centri gravitatis (in C & siti) à C distantia, ad totam C &. Atque similiter judicandum erit (mutatis mutandis) quæcunque ponatur ipsorum L, T, H, ad invicem ratio.

Quæque hic de Magnitudine & Centro gravitatis Solidi Erecti, ejusve recta Portione ipsi A a plano adjacente dicta sunt: ad Scalena facile transferuntur; (posito A loco H pro figuræ altitudine;) Atque ad segmenta duobus utcunque planis plano A a parallelis interjecta; utpote quæ sunt duorum ipsi Plano A a adjacentium, vel Summa vel Differentia.

SCHOLIUM.

ATque hic tandem pedem figo; neque hoc *De Calculo Centri Gravitatis* Caput ulterius produco. In quo si quispiam causetur me satis aliquando perplexum fuisse; utut id non negem, perplexo (siquod aliud) subjecto imputandum erit. Nec dubito quin, qui intricatissimam rerum traditarum naturam intelligunt, me satis dilucide pro subjecta materia tradidisse, existimabunt; nec speraverint forsan clarius hoc olim ab aliis traditum iri. Si cui nimius fuisse videar; (utut ego is sim qui de hoc omnium maxime conqueri debeam, qui incredibilem intricatissimi calculi laborem, ne dicam infinitum, sustinui solus:) qui tamen multiplicem rerum traditarum copiam perpendit, atque succinctam tradendi methodum; facile pro me sponsor erit, me, pro tanta materiæ varietate, etiam brevem fuisse: Dum ea, unico hoc capite, tradi videat, quæ, si, aliorum quorundam exemplum sequutus, in longum protraxisse vellem, ad spissa satis volumina, neque pauca, materiam affatim suppeditarent. Contra vero, siquis istiusmodi alia non pauca adjungi potuisse queratur, quæ tanquam omissa desiderat: neque ego hoc negaverim, (neque id mihi in animo fuit, sic omnia undecunque corradere, ut nullum supereset sequenti spicilegium:) Addo tamen, etiam ea forsan ipsa, quæ tanquam desiderata causantur illi, si rite animum adverterint, ita universaliter tradi perspiciant, ut nihil ultra desit, quam ut, universaliter tradita, ad particulares casus applicentur: Saltem eas hic methodos tradi, quæ si ad quæsita particularia accommodentur, etiam alia innumera, quæ hactenus pro difficilibus fuerint habita, expedire poterunt.

Supersunt adhuc plura ad hanc, quæ præ manibus est, *De Mechanicis*, sive *De Motu* doctrinam spectantia: Sed preli moras atque difficultates jam expertus; hæc interim præmittenda judicavi, dum *Partem Tertiam*, jam inchoatam, absolvant operæ.

FINIS PARTIS SECUNDÆ.

MECHANICORUM,

SIVE

Tractatus DE MOTU;

PARS TERTIA.

IN QUA,

De Vecte; aut unico, aut binis pluribusve Fulcris sustento.
De Axe in Peritrochio, cum Potentiis cognatis.
De Trochlea, seu Polyspasto.
De Cochlea.
De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.
De Percussione.
De Cuneo.
De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.
De Hydrostaticis, & Aeris Æquipondio.
Variisque Quæstionibus Mechanicis.

Anno 1671 edita.

Ad Lectorem Monitio.

CUR Partem hanc Tertiam, (*ut prius* Secundam,) *tanquam ex abrupto inchoemus; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, Numeris: Ad Partem Secundam jam dictum est: Nempe, ut Citationes commodius peragantur.*

CAP.

CAP. VI.

De Vecte.

DEFINITIONES.

DEF. I. Vectem (*notæ ſignificationis in uſu vulgari*) *hic conſideramus, tanquam* Lineam Rectam Inflexilem, *Ponderibus vehendis, ſuſtinendis, vel levandis accommodatam: Ponderiſque vel nullius, vel ſaltem æquabilis. Græcis* μοχλὸς *dicitur.*

II. Fulcrum (*Græcis* ὑπομόχλιον) *illud eſt quo Vectis ſuſtinetur; Vel etiam ſuper quo, tanquam immobili, movetur.*

Vectis nomen, à *Vehendo* dici videtur, (ut *vector, vectio, vectura, vectigal, convexum, vexo, vexillum*, quæque his cognata ſunt;) eumque præſertim ipſius uſum reſpicere, quo Bajuli (ſeu *Palangarii*) utrinque adhibiti, *Vecti* (*Palangæ* itidem dictæ) impoſitum Onus *vehunt*; Aut etiam (quod eodem recidit) quo Vectis, Trabs, ſeu Tignum, Fulcris utrinque ſuſtentatum, incumbens Grave ſuſtinet.

Vox Græca μοχλὸς, ſive à μόχθος *labor, moleſtia*, ſive (ut ὀχλεὺς ejuſdem ſignificatus) ab ὀχλέω *moveo*, dicatur; alterum potius Vectis uſum reſpicit (quem Mechanici potiſſimum tractant) quo, unius Fulcri ope, Vis alteri Vectis extremo applicata, reliquo impoſitum Grave, facilius ſublevat: Quo reſpicit & noſtratium vox **Leaver**, tanquam à *levando* dicta, quod noſtri dicunt **to lift**, vel etiam **to heave**, (quaſi à *veho* diceretur inverſis literis;) unde & noſtratium vox **Heaven**, Cœlum denotans; tanquam *Elatum, Altum, Elevatum*; (quomodo & Cœlum *convexum* dicunt Poetæ.) Eodem ſenſu nautæ, ſpeciatim de Anchora ſublevanda, dicunt **to weigh Anchor**, hoc eſt, Anchoram ſublevare, atque *invehere*; (cui contrarium eſt **to caſt Anchor**, hoc eſt, projicere.)

A μοχλὸς dicitur μοχλεύω, quod prima ſignificatione eſt *vecte moveo*, (unde ad alia etiam molimina transfertur;) atque hinc Latinorum *molior, molimen, moles, moleſtia*, &c. dici videntur; niſi quis hæc à *moveo* dicta malit.

Nos, utrumque Vectis uſum reſpicientes, quo & Vehendis ſeu ſuſtinendis ponderibus, & Levandis etiam accommodatur; utrique definitionem accommodavimus.

Quod autem, à μοχλὸς, ὑπομόχλιον dicunt Græci (utpote quod Vecti ſubjacere ſolet,) Latinis *Fulcrum* dicitur, quod à *Fulcio, fulſi, fultum*, formatur eadem analogia qua à ſuis Verbis, eorumve Supinis, formantur alia; nam prout à *lavatum, ſimulatum, ambulatum, involutum, ſepultum*, formantur *lavacrum, ſimulacrum, ambulacrum, involucrum, ſepulcrum*, (& ſiqua ſunt ſimilia) & à *fultum* formabitur *Fulcrum*. Sed &, à *Fulcio, fulcivi, fulcitum*, etiam *Fulcimen* dicitur, & *Fulcimentum*, eodem ſignificatu. Significat autem vel illud immobile ſuper quo moveri Vectis intelligitur, ubi ſubmovendis ponderibus adhibetur; vel bina illa (ſive plura ſint) fulcimina, quibus utrinque incumbens Trabs, ſeu Vectis, fulcitur ſeu ſuſtinetur: Prout ſcilicet vel unico, vel binis (pluribuſve) Fulcris Vectis ſuſtinetur.

III. Applicationum puncta, Centrum Æquilibrii, *aliaque hujuſmodi, ſicubi hic occurrunt, eodem ſenſu intelligenda erunt quo ſupra de Libra, definitum eſt.*

Fig. 221. SIC, (Fig. 221.) A B, Vectis; O, Onus levandum ſeu ſubmovendum, vel etiam Obex amoliendus; V, Vis motrix adhibita; B, punctum applicationis ponderis; A, punctum applicationis Vis motricis; F, Fulcrum quo ſuſtinetur; cujus apex C eſt Centrum motus, Axique Libræ reſpondet; Onuſque & Vis motrix, oppoſitis ad Libram Ponderibus reſpondent.

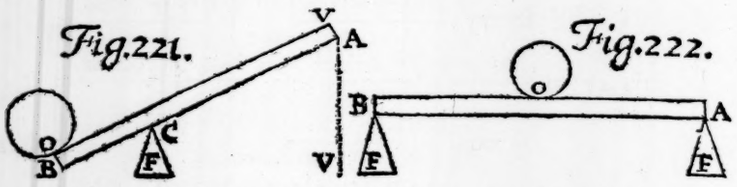


Fig. 222. Item, (Fig. 222.) A B Vectis, duobus fulcris ſeu bajulis F, F ſuſtentatum; O pondus ſeu onus impoſitum.

Vectem autem tanquam rectam lineam (ſed non flexilem) eadem ratione hic habemus, qua *Libram* ſupra ſic habuimus: Quoniam tanquam nullius ponderis æſtimatur. Et ſiquid, revera ponderis habeat, id vel Oneri movendo, vel Vi motrici, vel partim huic partim illi, (pro vario ſitu) accenſendum erit.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Vectis, (unico fulcro Oneri & Viribus intermedio nixus,) tanquam Libra conſideretur; quæ de Libra ſupra dicta ſunt, eadem & Vecti accommodantur.

Fig. 221. PUta; ſi Vectis A B, Fulcro ſuſtineatur in C; atque applicentur Onus in B, & Vis in A, (utraque deorſum prementia;) Vis & Onus contra-ponderant; (ſeu invicem contra-nituntur;) hoc eſt, Vis deorſum in V, elevat O. per 1. Cap. 3.

Item, tantundem ſimul gravant ſeu premunt Fulcrum, quantum eſt utriuſque ſimul (cum ipſo Vecte) Vis (dum ſuſpenſum onus in quiete libratur;) per 2. Cap. 3. dumque eſt in motu, quantum per 16. Cap. 3. determinatur.

Item, tantundem utrumque ſuum afficit ſeu gravat applicationis punctum, cui vel directe imminet, vel directe ſubeſt, (vel ipſum, vel ejus Centrum gravitatis,) atque ſi in ipſo eſſet applicationis puncto. (Quod & alibi perinde obtinet.) Per 30. Cap. 2. vel 4. Cap. 3. & 16. Cap. 4.

Item, in ea ratione valent (Vis agendo, & Onus reſiſtendo,) quæ componitur ex rationibus Graduum (puta Ponderum & Virium,) & Diſtantiarum punctorum applicationis à Fulcro ſeu Centro motus (cæteris paribus;) per 12. Cap. 3.

Item, ſi Vis (ſic æſtimata) oneri præpolleat; movebit: Si minus, non movebit. per 11. Cap 1.

Adeoque, quo propius ad fulcrum ſit Onus O, & Vis V remotius, eo minori Vi majus movebitur Onus. per 12. Cap. 3.

Item, ſi, propter curvatum Vectem (quem rectum ſupponimus;) vel (quod eodem recidit) propter Centrum motus extra ipſum Vectem, (hoc eſt, extra rectam applicationum puncta jungentem;) vel propter non eaſdem Oneris & Virium Directiones; vel alias undecunque, contingat; pro vario Vectis ſitu, inæ-

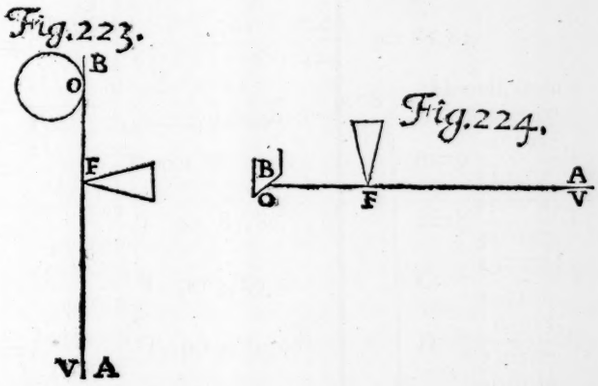
quales

quales ſubinde futuras eſſe motuum (Oneris & Virium motricium,) Obliquitates : Eædem hic anomaliæ contingent, quæ de Libra oſtenduntur, prop. 14. Cap. 3.

Aliaque de Libra tradita, etiam de Vecte intelligenda erunt. Vectis enim Libra eſt ; & Fulcri vertex, eſt Libræ Axis, ſeu Centrum Motus : Onuſque & Vis Motrix, ſunt ut Pondera utrinque Libræ applicata. Adeoque quæ illic de Libra univerſaliter demonſtrantur ; ſpeciatim Vecti conveniunt.

SCHOLIUM.

NOtandum interim eſt ; quanquam Vectium præcipuus uſus eſſe ſoleat ad onera in altum levanda, (quem itaque vocabula horſum accommodata potiſſimum reſpicere videantur ;) tamen eadem omnino ratio eſt, mutatis mutandis, Vectium in alio ſitu adhibitorum, ad quoſcunque obices amoliendos ; (eademque & hic demonſtratio.) Puta, ſi, in ſitu horizontali, Vectis A B, firmiori fulcro F ad dex- Fig. 223.



tram poſito nixus, adhibeatur (vi in A applicata) ad amoliendum obicem O ad ſiniſtram poſitum ; aut ad fores ibidem perfringendas ; aliudve hujuſmodi perficiendum. Eodem modo ; ſi fulcro F, ſuperne poſito, adhibeatur A B vectis, quo Clavus ſuperne fixus ſubducatur, Vi adhibita in A quæ ſurſum premat. Et ſic alibi. Fig. 224.

Dico autem, *firmiori Fulcro F.* Niſi enim ſatis firmum ſit Fulcrum ; Manente O, movebitur F, (ut fiat O fulcrum, & F mobile ; de quo in Propoſitione ſequente dicendum erit.) Sicut &, niſi vectis A B ſit ſatis firmus ; frangetur vectis A B, vel curvabitur. (Quæ & alibi ſimiliter intelligenda erunt.)

Et quidem ſic aliquando inter plura diſtribuitur motus, ut in ambiguo ſit, quod Fulcrum dicatur, quod Mobile. Sic in Navigii vel Cymbæ, Remis ; dum Vis Manubrio applicatur, Palmula Aquæ ut Fulcro innixa, Scalmum cum conjuncta Cymba ſubmovet : Verum, cum neque ita firmum fulcrum ſit Aqua, quin & ipſa nonnihil preſſa cedat ; ratione motus hujus, Scalmus pro Fulcro erit, eritque Aqua pro Mobili : Sed &, cum neque Remus ipſe tam validus aut firmus ſit, quin Flectatur nonnihil ſeu Incurvetur, (etiam cum non frangitur ;) tertius hinc oritur motus : Qui quidem tres motus ſe minuunt invicem. Quippe Aquæ Ceſſio, & Remi Flexio, motui Cymbæ nonnihil demunt, qui major eſſet ſi non adeſſent illæ ; ſicut ex adverſo, Motus Cymbæ, eademque Remi Flexio, Ceſſioni Aquæ ; duoque motus reliqui, Flexioni Remi nonnihil demunt : Adeo quidem ut Vis eadem adhibita, quæ jam flectit ; ſi nec Aqua cederet, nec ſubmoveretur Cymba, Remum frangeret. Et ſimile eſto in aliis judicium.

Sed & nonnunquam gemini Vectes, decuſſatim poſiti, eidem communi Fulcro nituntur. Ut in Forficibus, & Forcipibus, ad interjectum obicem vel ſcindendum vel comprimendum adhibitis. Ubi duo Vectes A B, $\alpha\beta$, communi fulcro F nixi, (adhibita vi in A, α,) comprimunt interjectum obicem O ; & quidem eo fortius, quo vel O propius eſt ad F, vel A α inde remotius, Fig. 225, 226.

Quæ autem ad hanc propoſitionem monemus ; etiam in ſequentibus obtinent.

Poſſent

Fig. 225.

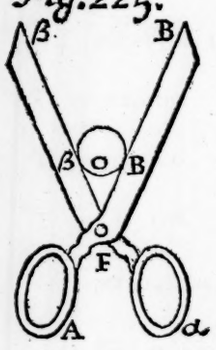
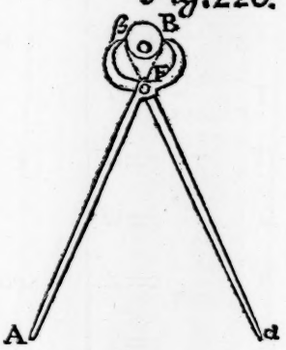


Fig. 226.



Possent quidem hæc omnia deduci, ex prop. 4, 5, 6. Cap. 2. (ubi fundamenta jacta sunt pro Machinarum omnium viribus æstimandis :) Cum autem id *de Libra* jam factum sit, Cap. 3. potius duxi, ea quæ de Libra dicta sunt, ad Vectem hic transferre, propter similes utrobique affectiones ab iisdem principiis deductas.

PROP. II.

Si Onus, Vecti applicatum, Fulcro & Vi motrici interjaceat: Quæ de Libra traduntur, etiam huc facile transferentur. Aut etiam, si Vis Fulcro & Oneri interjaceat.

Fig. 227. NEmpe; Si ad AB vectem, inter Vires in V, & Fulcrum in F, applicetur Onus in O : Vis sursum in V, secundum directionem suam procedens, elevat O contra directionem suam; (propter inflexilem AB :) Adeoque contra-nituntur vis & onus. Per 1. Cap. 3.

Fig. 227.

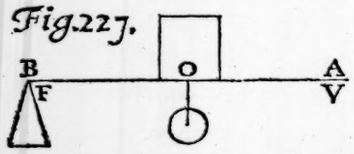
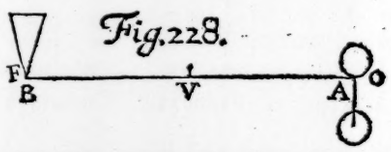


Fig. 228.



Fulcrum vero non utraque vi premitur (vi scilicet oneris, & vi motrice,) quia Vis motrix non est deorsum, nec Fulcro impeditur (ut in casu propositionis præcedentis;) sed sursum : Sed neque toto Onere premitur F, sed auxilio virium in V partim sublevatur. (Cui consonum occurrit ad prop. 18. Cap. 3.) Quantam autem oneris partem sustinet F, determinandum erit ex iis quæ post tradentur de Vecte duobus Fulcris sustentato.

Sed & hic in ea ratione valent, Vis sursum nitendo, & Onus renitendo, quæ ex rationibus Graduum, & Distantiarum puncti applicationis à Fulcro, componitur. Per 11 & 12. Cap. 3.

Atque si Vis (sic æstimata) præpolleat; submovebit Onus : Secus; non movebit. Et quidem si minus polleat, ne sustinebit quidem. Per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad Fulcrum sit Onus, vel Vis remotior; eo minore Vi movetur majus Onus. Quippe sic Oneris Vis minuitur, Vis motrix augetur.

Quæque ad Prop. præcedentem, ex prop. 14. Cap. 3. notantur: etiam hic locum habent.

Fig. 228. Eadem fere omnia dicenda veniunt, si Vis V, Fulcro & Oneri intercedat. Hoc saltem interest, quod Fulcrum jam superne ponendum erit; & minus Onus, nonnisi majore Vi elevabitur : Sed neque tam Onere premitur Fulcrum, quam Virium parte.

PROP.

PROP. III.

Si (ad Vectem cum unico Fulcro applicatorum) ratio Vis motricis, ad Onus, major ſit quam reciproca diſtantiarum (punctorum applicationis) à Fulcro; Vis Onus movebit: Secus; non movebit: Si minor; ne ſuſtinebit quidem.

$$\frac{n}{m}\ \frac{m}{n} \qquad \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}$$
$$mn = nm \qquad 6 = 6$$

VErbi gratia. Si Vis Motrix ad Vim Oneris, ſit ut 2 ad 3; ſeu n ad m; ſitque diſtantia V F ad O F, ut 3 ad 2, ſeu ut m ad n: Æquipollebunt quidem Vires (propter $2\times3 = 3\times2$, ſeu $mn = nm$;) ſunt utique (ut jam oſtenſum Fig. 229, 230, 231.



Fig. 229.



eſt, ad prop. 1 & 2.) illarum valores in ratione ex graduum & diſtantiarum rationibus compoſita. Adeoque, nondum movebit. Sed ſi Vis motrix vel tantillum augeatur, aut minuatur Onus: Vis præpollebit, adeoque movebit Onus. Sin minuatur Vis, vel Onus augeatur; Vis Onus ne ſuſtinebit quidem, per 9, & 11. Cap. 1.

Demonſtratio perinde valet, ſive Onus ultra fulcrum intelligatur; ut in fig. 229. ſive citra, ut in fig. 230. Aut etiam (ut in fig. 231.) ſi Vis utrique intercedat; niſi quod, hoc caſu, Vis motrix ſemper major eſſe debeat quam Vis Oneris (propter minorem à Fulcro Diſtantiam) quo poſſit Vis Oneri æquipollere; ſicut, ex adverſo, ubi Onus citra Fulcrum eſt (Vi motrici & Fulcro interjectum) Vis motrix minor, majori Vi ponderis, æquipollet; (propter minorem Oneris à Fulcro Diſtantiam:) Ubi autem Fulcrum intermedium eſt, poteſt utrumvis contingere.

PROP. IV.

Datum Pondus, data Vi, Vecte movere.

$$\frac{n}{m}\ \frac{m}{n} \qquad \frac{nV}{mD}\ \frac{mO}{nD} \qquad \frac{2V}{3D}\ \frac{3O}{2D}$$
$$nm = mn \qquad mnDV = mnDO \qquad 6DV = 6DO$$

INtelligatur vis V, oneri O, æquipollere; ſitque expoſitum Onus mO (quod utique ſit ad O ut m ad 1;) & nV vis expoſita; (puta quæ ſit ad V, ut n ad 1;) ſitque onus mO, vi nV movendum. Si Vectis A B (fig. 229.) ita dividatur in puncto F, (quod Fulcro incumbat,) ut ſit A F ad F B, ut m ad n; Vis nV in A adhibita, Oneri mO applicato in B æquipollebit; per 3. hujus. (Propter rationem virium ad onus, n ad m, reciprocam rationis diſtantiarum m ad n; adeoque, quæ ex utriſque componitur, momenti ad impedimentum rationem æqualitatis, Fig. 229.

tatis, per 6. Cap. 1.) Si itaque, vel tantillum ad Fulcrum verſus admoveatur Onus, (quo minuatur Impedimentum,) vel inde remotius applicetur Vis (quo Momentum augeatur,) vel denique Fulcrum tantillum promoveatur ad Onus (quo utrumque fiat,) Momentum Impedimento præpollebit, & Vis expoſita (ſic adhibita) expoſitum Onus movebit. Per 9 & 11. Cap. 1.

Fig. 230, 231. Idem fiet, ſi Vectis A B ita in O dividatur, ut ſit A B ad O B ut *m* ad *n*. Quippe tum, poſito Fulcro in B, æquipollebit vis *n V* in A, ponderi *m* O in O; (propter Vis & Oneris à Fulcro diſtantias ipſis reciprocas;) Adeoque ſi vel Fulcrum Oneri, vel Onus Fulcro, tantillum admoveatur, vel remotius applicetur Vis; hæc Oneri præpollebit, adeoque movebit. Quippe tribus ſaltem hiſce modis (ne plures nominem) augebitur ratio diſtantiarum A F ad O F.

Patet autem, in hac poſteriori via, ſi Vis Oneris major ſit quam Vis motrix; debere Onus Fulcro & Vi Motrici intercedere, ut in Fig. 230. Si Vis Motrix Vi Oneris major ſit, poteſt Vis illa Fulcro & Oneri interponi, ut in Fig. 231. Verum ubi hoc contingit, Vecte non opus erit; quippe Vis Motrix, Oneri immediate applicata, movebit Onus.

PROP. V.

Si Vectis (Tignum, Palanga, ſeu Trabs oblonga,) ſitu Horizontali jacens, utroque ſui extremo Fulcris ſuſtineatur: Fulcra bina ſuſtinentia, onus inter ſe partiuntur; idque in ea ratione quæ eſt reciproca diſtantiarum ſuarum à Vectis Centro gravitatis: Et quidem utrumvis eam totius portionem ſuſtinet quæ ad totum eam habeat rationem, quam habet contrarii Fulcri diſtantia ad diſtantiam totam, ſeu Vectis longitudinem.

Adeoque, ſi Vectis, vel Trabs illa, ſit æquabiliter gravis; & propterea Centrum gravitatis habeat in media longitudine; (aut etiam, ſi hoc propter aliam cauſam contingat;) Onus inter ſe æqualiter partiuntur.

Si vero Centrum gravitatis in media longitudine non ſit: Fulcrum illud magis premitur cui propius eſt Centrum gravitatis; atque in ea ratione quæ hac proportione determinatur.

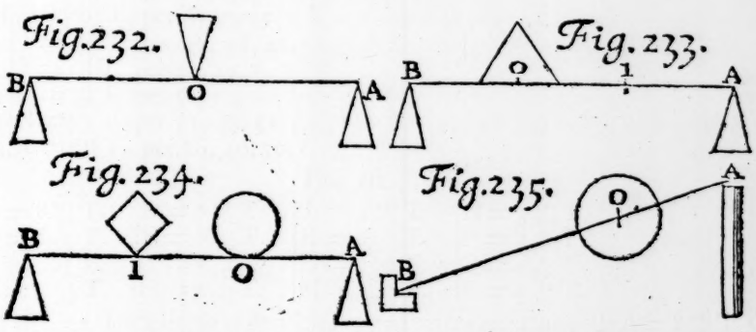
Idemque valet, ſi Vecti ubivis applicetur Pondus quodvis. Nempe, ſi Pondus præciſe Vectis medio applicetur; æqualiter ab utroque Fulcro ſuſtinetur. Si non in ipſo medio, in ea ratione premitur, ab incumbente Pondere, utrumvis Fulcrorum, quæ eſt reciproca diſtantiarum ſuarum à puncto applicationis. In ea vero ratione ad totum Pondus abſolute conſideratum, qua eſt contrarii Fulcri Diſtantia (à puncto applicationis ponderis) ad Fulcrorum ab invicem Diſtantiam, ſeu Vectis longitudinem.

Si autem in pluribus punctis, plura applicentur Pondera; de ſingulis ſeorſim ſimile fiet judicium (nempe, quantam partem cujuſque Ponderis, utrumvis ferat Fulcrum;) atque inde de omnibus ſimul ſumptis. Vel etiam (quod eodem recidet) ibidem omnia applicata cenſeantur, ubi eſt commune omnium Centrum gravitatis.

Fig. 232. ESto, duobus Fulcris in A & B, Vectis A B ſuſtentus; cujus Centrum gravitatis ſit O punctum medium: Vel (quod eodem recidit, per prop. 16. Cap. 4.) Intelligatur A B Vectis tanquam linea recta nullius ponderis, quæ in ſui puncto O, onuſta intelligatur totius Vectis (Tigni ſeu Trabis) pondere, cujus Centrum gravitatis ibidem eſſe intelligatur: Vel denique (nam & hoc tantundem valet) Vectis puncto medio O, intelligatur Pondus quodlibet applicatum. Dico utrumvis Fulcrum ſemiſſe totius Ponderis onerari; adeoque Fulcra duo totum onus æqualiter inter ſe partire.

Manifeſtum

Manifeſtum utique eſt, Onus fulcro A incumbens, tantum eſſe, quanta vis eſt quæ ibidem foret neceſſaria huic ſuſtinendo oneri, ſi (manente fulcro B) fulcrum A abeſſet. (Quippe tantum Onus eſt, quanta Vis eſt quæ ſuſtinendo ſufficit: per prop. 11. Cap. 1. vel prop. 18. Cap. 2.) Hoc eſt; (propter diſtantiam A B, duplam diſtantiæ O B,) quæ dimidio Oneri æquipollet, (per prop. 3. hujus.) Idemque ſimiliter oſtendetur de Fulcro B. Adeoque totum onus æqualiter inter ſe partiuntur duo Fulcra A, B. Quod oſtendendum erat.



Si vero Punctum O (quod ſit vel totius Vectis ſeu Trabis Tignive aut Palangæ Centrum gravitatis, vel punctum applicationis impoſiti Ponderis) non ſit in ipſo Vectis puncto medio: Utcunque tanto Onere premitur fulcrum A, quanta Vis eſt quæ huic ibidem ſuſtinendo par eſſet, ſi abeſſet A fulcrum: Hoc eſt, (per prop. 3. hujus,) quod ſit, ad totum Pondus, in ea ratione quæ eſt reciproca diſtantiarum A B, O B; hoc eſt, ut O B ad A B. Et ſimiliter oſtendetur eo onere premi fulcrum B, quod ſit ad Pondus totum, in ratione reciproca diſtantiarum B A, O A; hoc eſt, ut O A ad eandem A B. Et propterea (ob eundem utrobique conſequentem) onera fulcrorum A, B, ſunt ad invicem, ut O B ad O A; hoc eſt, in reciproca ratione ſuarum (ab applicationis puncto) diſtantiarum. Quæ itidem erant demonſtranda. Fig. 233.

Sin plura applicentur Pondera, puta alterum in O, alterum in I: Similiter oſtendetur, Fulcrum A, eam partem ponderis O ſuſtinere, quæ ſit ad totum ut O B ad A B; eamque partem ponderis I, quæ ad totum ſit ut I B ad A B: Et Fulcrum B, eam ſuſtinere ponderis O partem, quæ ſit ad totum, ut O A ad B A; eamque partem ponderis I, quæ ſit ad totum ut I A ad B A. Fig. 234.

Vel etiam, ſi per prop. 27. Cap. 4. quæratur commune ſimul utriuſque Centrum gravitatis; atque ibidem utraque cenſeantur tanquam unum Pondus applicari: Hujus eam partem ſuſtinebit utrumvis fulcrum, quam indicant reciprocæ diſtantiæ; (per modo demonſtrata.) Tantundem utique gravant utcunque applicata pondera atque ſi ibidem eſſent ubi eſt commune omnium Centrum gravitatis: per prop. 16. & 27. Cap. 4.

SCHOLIUM.

Dico autem diſerte, *In ſitu Horizontali jacent*. Quamquam enim de hac conditione prorſus tacere ſoleant Mechanicorum Scriptores (quantum ſcio, Omnes:) rationem onerum ad A & B, eandem aſſignent in Obliquo Vectis ſitu, quam aſſignant in ſitu Horizontali: Eſt tamen onerum, alia plane ad invicem ratio, in hoc, atque in illo, ſitu. (Ut ex dicendis ad prop. 8. patebit.) Quod quidem eoûſque verum eſt, ut, prout alterutrum Vectis extremum A altius elevatur, ita continuo minuatur Onus; donec tandem, Vecte ad ſitum perpendicularem redacto, Fulcrum A nihil prorſus oneris ſuſtineat, ſed B totum. Quod in erigenda prælonga Pertica, vel Scala, facile quis deprehendat. Fig. 235.

PROP. VI.

Hinc ſequitur; Ita poſſe ad eundem Vectem (duobus Fulcris ſuſtinendum, vel duobus Bajulis ferendum,) applicari Pondus; ut unius Fulcri (ſeu Bajuli) onus, ad onus reliqui, eam habeat rationem quam quiſque velit.

Fig. 233. PUta, ſi Gigas & Infans (ſeu Fulcra firmitudinum utcunque inæqualium) adhibeantur (ille quidem in B, hic in A,) eidem portando oneri, imponendo Vecti A B: quod ita moderandum ſit ut ferentium viribus juſta proportione conſulatur: Id fiet, ſi ita dividatur, in O, vectis A B, ut ſit diſtantia B O ad O A, ut ſunt vires A ad vires B. Quippe, tum erunt Onera Viribus proportionalia: per præced. Sed ipſius Vectis hic nulla habetur ratio.

PROP. VII.

Inde etiam Calculo colligetur; Quanta cuique Vectis puncto Firmitas requiratur, ne rumpatur.

Fig. 233. EXempli gratia. Vectis A B, duo ſegmenta B O, O A, firmitate conjunctionis ſuæ in communi O puncto, impediuntur ne rupto Vecte ruant. Tanta igitur conjunctionis firmitudo ibidem requiritur, quanta ſi disjuncta eſſent vis fulcri foret neceſſaria utriuſque ſegmenti extremo ſuſtinendo. Si autem, disjunctione in O facta, ſuppoſito Fulcro ſuſtinendum eſſet utriuſque ſegmenti extremum; onerandum foret (per prop. 5. hujus) fulcrum illud, tum ſemiſſe ponderis B O (propter Vectem B O, duobus fulcris in B & O ſuſtentum;) tum ſemiſſe ponderis O A, (ob ſimilem cauſam:) Hoc eſt, ſemiſſe totius A B. Tanta itaque firmitudinis Vis in O requiritur, ne Vectis ſuo pondere rumpatur.

Intelligatur deinde, eidem O puncto (præter ipſum Vectis ſeu Trabis pondus) imponi vel ſuſpendi pondus aliud quantumvis. Manifeſtum eſt onerandum fore ſubjectum fulcrum illud, tum ſemiſſe totius A B, (ob cauſam jam dictam,) tum toto onere Ponderis ibidem incumbentis. Tanta itaque Vectis firmitudo ibidem requiritur, quæ ſimul utrique (ſui ſemiſſi, & toti ponderi impoſito) æquipolleat.

Intelligatur demum proponi punctum quodvis aliud expendendum (extra punctum applicationis appenſi ponderis) ut I. Manifeſtum eſt, ſi disjunctione ibidem facta ſupponendum eſſet in I Fulcrum, onerandum fore fulcrum illud (ob cauſam modo dictam) tum ſemiſſe ponderis B I, tum ſemiſſe ponderis I A, (hoc eſt, ſemiſſe totius B A,) tum etiam (per prop. 5. hujus) ea parte oneris O (inter B & I ſuſpenſi) quæ ſit ad totum ut B O ad B I; (atque ſimiliter, ſi plura adhuc pondera ſive inter B & I, ſive inter I & A, imponi aut ſuſpendi intelligantur, de ſingulis fiet judicium; adeoque, additione facta, de omnibus:) tanta itaque firmitas in I requiritur quæ oneribus illis æquipolleat. Atque ſic alibi, prout res tulerit.

SCHOLIUM.

ATque hinc, in re Architectonica, facienda erit æſtimatio, quam trabis cujuſque partem oporteat fortiorem facere, prout imponendi oneris & diſponendi ratio poſtulaverit.

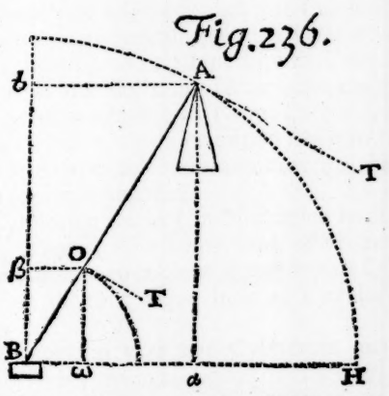
PROP.

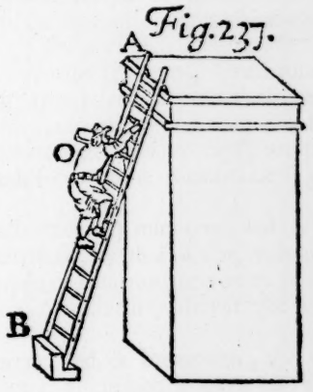
PROP. VIII.

Si intelligatur Vectis obliquo ſitu poſitus; Fulcrum elatius, eam totius Oneris impoſiti partem ſuſtinebit, quæ ſit ad totum, in ea ratione quæ componitur ex ratione Diſtantiæ Oppoſiti Fulcri ab applicationis puncto, ad totam Fulcrorum ab invicem Diſtantiam; &, ratione quam habet ad Radium Sinus rectus iſtius anguli quem cum recta ad horizontem perpendiculari facit Vectis; ſeu Co-ſinus inclinationis Vectis ad horizontem: Reliquumque oneris ſuſtinebit inferius fulcrum.

Nempe (in fig. 236.) Oneris O eam partem ſuſtinet Fulcrum A, quæ ſit ad totum ut B ω ad B H; B vero, quæ eſt ω H ad B H. Adeoque Onus Fulcri A, ad Onus Fulcri B, ut B ω ad ω H.

INtelligatur enim Vectis A B = *R*, ſitu ad Horizontem Obliquo poſitus, fulcris A, B, ſuſtentus; cui applicetur, in O, pondus quodvis; Vectem dirimens in duo ſegmenta, A O = *a*, & O B = *b*. Manifeſtum eſt (per demonſtrata ad prop. 5.) Onus fulcri elatioris A, tantum eſſe, quanta Vis eſſet eidem ibidem ſuſtinendo neceſſaria, ſi (manente fulcro B) abeſſet A fulcrum. Hoc eſt; propter rectæ A B diviſionem in O; in ea ratione ad totum pondus, quæ eſt diſtantiarum B O ad B A, ſeu *b* ad *R*: per prop. 2. hujus, vel prop. 7. Cap. 2. & prop. 11. Cap. 3. Sed & porro; propter Obliquum ſitum ad Horizontem, adeoque Obliquum Deſcenſum ſi (manente B) moveatur A, (puta in arcu A H, cujus Tangens A T;) in ea ratione quam ad Radium habet Sinus rectus anguli quem facit Vectis cum perpendiculari, vel Co-ſinus anguli Inclinationis ad Horizontem: per prop. 13. Cap. 3. vel prop. 21. Cap. 2. Hoc eſt A b ad B A; ſeu O β vel B ω ad B O; puta Fig. 236.





ut *s* ad *R*. Adeoque; propter ſimul utramque cauſam; in ea ratione quæ ex utriſque componitur; *s* ad *R*, & *b* ad *R*; hoc eſt, ut *s b* ad R^2: Seu ex β O ad B O, & B O ad B A; hoc eſt, ut β O ad B A, ſeu B ω ad B H.

Adeoque Oneris reliquum quod ſuſtinet B fulcrum, eſt ad totum, ut ω H ad B H.

Et propterea Onus fulcri A, ad Onus fulcri B, ut B ω ad ω H. Quæ erant demonſtranda.

Hic nota; rectam B α (Co-ſinum anguli inclinationis A B H) in eadem ratione ſecari in ω, qua ſecatur B A in O.

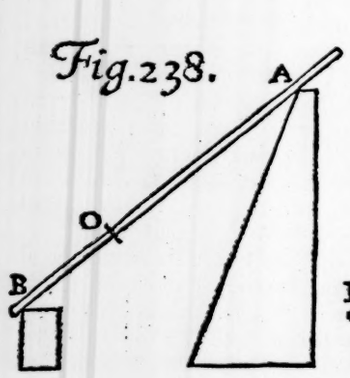
SCHOLIUM.

CAuſa diverſæ rationis in Obliquo Vectis ſitu, ab ea quæ eſt in ſitu Horizontali; hinc oritur, quod, manente B fulcro, fulcrum A impedit tantummodo Rotationem puncti O Circa B centrum, quæ in hoc ſitu æquipollet Obliquo Fig. 236.

Deſcenſui ſecundum tangentem O T, (per prop. 15. Cap. 2.) non deſcenſui recto
Fig. 235. in recta O ω. Fulcrum vero B, (ut in fig. 235.) impedit, non tantum Rotationem ipſius O circa centrum A ; ſed etiam ejuſdem Deſcenſum Obliquum ſecundum rectam A O B, cui fulcrum A non obſtat. Nam, niſi obſtaret B fulcrum, poſſet, manente fulcro A, non modo punctum O circa A rotari, ſed etiam totus A B Vectis deorſum labi ; adeoque punctum O ferri in motu compoſito ex motu Rotationis & motu Vectis Labentis, cui utrique obſtat Fulcrum B.

Si vero intelligatur Vectis A B, non tantum fulcro A inniti, (quo impediatur
Fig. 237. rotatio,) ſed & (ut fig. 237.) cum illo ſic ligari, aut unco aliaſve ſic conjungi, ut, etiamſi B abeſſet, non poſſet alias, quam circa A rotando, moveri punctum O : alia prodibit ratio. Quippe jam fulcra A, B, obliquum lapſum ſecundum A B rectam æqualiter impediunt : rotationem vero impediunt in oppoſitarum diſtantiarum ratione.

Fig. 238. Sed & porro ; ſi intelligatur, non modo A fulcrum, ſed & fulcrum B, ſic eſſe comparata, ut non impediant obliquum illum ſecundum rectam A B Deſcenſum (puta ſi intelligatur A B Vectis extremo tantum fulcri B angulo incumbere :) labetur Vectis ſimul cum annexo pondere, deſcenſu illo obliquo. Rotationem vero impedient in ea ratione Fulcra quæ eſt Oppoſitarum Diſtantiarum ; (quæ continue variabitur prout O propius ad B feretur.) Totumque quod inter ſe partiuntur Onus, non eſt totius Ponderis impoſiti, ſed ea pars totius quæ determinanda erit ex diminuto deſcenſu in obliqua recta O B (fig. 235.) præ eo qui eſſet in O ω perpendiculari (fig. 236.) juxta leges prop. 17. & 21. Cap. 2. traditas. Puta, quæ ſit ad totum, ut (in fig. 42.) P R ad P F, propter obliquum deſcenſum in F B recta : hoc eſt (in fig. 236.) ut B O — O ω ad B O.



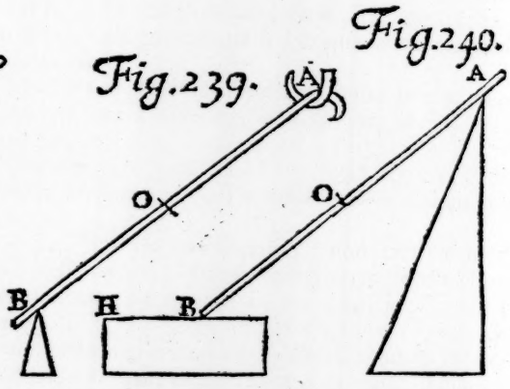


Fig. 239. Si vero, (fulcro B id permittente,) intelligatur Vectis A B, fulcro A ſic ſuſpendi (aliaſve cum illo ſic connecti) ut hoc ſolo impediatur Vectis A B, ne ſecundum A O B rectam deſcendat ; (fulcro B nonniſi rotationem circa A impediente :) erit onus fulcri B, ad onus totius ponderis impoſiti in ea ratione, quæ ex s ad R, & a ad R, componitur, hoc eſt, ut sa ad R^2, (quod ſimiliter de B probabitur, atque ſupra probatum erat, in caſu propoſitionis, rationem oneris A, eſſe ad totum, ut sb ad R^2 ;) reliquumque oneris ſuſtinebit A.

Fig. 240. Denique ; ſi intelligatur Fulcri B facies ſuperior horizontalis, ſic ab omni aſperitate lævigata, ut quamvis non permittat Vecti deſcenſum per A O B rectam, permittat ſaltem ut Vectis extremum B (verbi gratia) in horizontali recta H B labatur, (neque huic obſtet aliqua connexio cum A fulcro,) unde aliqualis ſaltem deſcenſus puncto O permittatur : minus propterea premetur fulcrum B, propter deſcenſum non penitus impeditum. Idem vero eſt quod prius fulcri A Onus ; ſed quod continuo variabitur, partim Auctum (propter ſitum Vectis minus obliquum) partim Diminutum (propter majorem rationem diſtantiæ A O ad O B) prout Vectis extremum B remotius in H B recta retro lapſum fuerit ; dummodo (quod hic intelligendum erit) Vectis pars O A intelligatur ultra A quantum opus fuerit prolongata ; ſecus enim, retro labente extremo B, alterum A fulcrum ſuum deſeret, nec eo ſuſtinebitur.

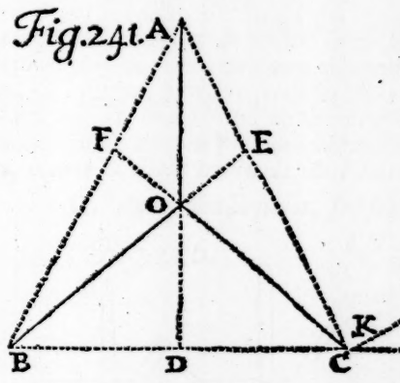
Et

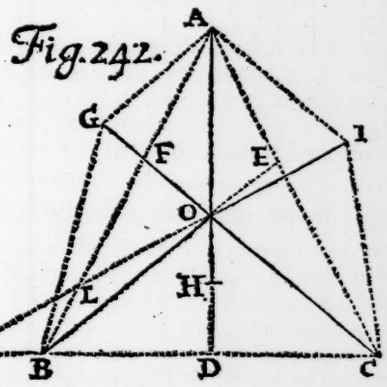
Et quidem ſimiliter, mutatis mutandis, in aliis caſibus judicandum erit, quos omnes ſigillatim proſequi nimis moleſtum foret.

PROP. IX.

Si pluribus Fulcris (Vectium invicem commiſſarum ope) ſuſtineatur impoſitum Pondus; Onus cujuſque, prout ſingulorum ſitus poſtulaverit, calculo æſtimabitur, cui ferendo par eſſe debet ne fatiſcat.

EXempli gratia: Si tribus Vectibus ſeu Tignis, A O, B O, C O, in communi O puncto firmiter conjunctis, impoſitum pondus O, tribus fulcris in A, B, C, ſuſtineatur. Manifeſtum eſt, ſi A B C ſit triangulum æquilaterum, ſitque O in Trianguli medio, æqualiter à ſingulis angulis remoto; Onus hoc inter tria Fulcra (ob ſimilem omnium ſitum) æqualiter diſtribui; adeoque quodlibet Fulcrum trientem totius Oneris ſuſtinere. Fig. 241.





Sin ſecus fuerit; ſingulorum tamen Onus ſic habebitur. Intelligatur (verbi gratia) Vectis A O continuari, donec in D occurrat rectæ B C. Cumque fulcri A id unicum munus ſit, ut impediatur Oneris O rotatio circa B C rectam (ut ex prop. 1. Cap. 4. liquet:) perinde eſt (quantum ad fulcrum A) ſive id fiat ope continuati Vectis A O D, in ejuſdem B C rectæ puncto D ſuffulti, ſive fiat ope duorum B O, C O: Utrovis enim modo eadem præciſe Rotatio impeditur. Si vero id fiat (ſublatis fulcris B, C,) ope continuati Vectis A O D (ſuppoſito Fulcro ipſi D puncto;) erit Oneris A, ea pars totius quæ ſit ad totum ut O D ad A D; per prop. 5. hujus. Tantundem itaque erit, ſi, ſublato D, fulcris B, C, idem obtineatur. Atque ſimiliter oſtendetur, (continuatis B O ad E in recta A C, & C O ad F in recta A B,) onus fulcri B, eam eſſe totius O partem, quæ ſit ad totum in ratione O E ad B E; onuſque fulcri C, ad totum, ut O F ad C F: Cujuſcunque formæ fuerit Triangulum A B C.

Et ſimili modo procedendum erit, prout res poſtulaverit, quotcunque Fulcris quomodocunque ſitis, ſuſtineri intelligatur Pondus O. Quippe id ſemper proſpiciendum erit, Quam Rotationem impediat quodlibet Fulcrum; &, quidem, Num Unum aliquod an Plura id præſtent. Quippe ſi Plura ſint; utut unum eorum non ſatis valeat Oneri ſuſtinendo, tamen ſi ſimul omnia (ſuis cujuſque Viribus rite computatis) ferendo Oneri ſaltem æquipolleant; Onus ſuſtinebitur.

Puta; ſi non tantum in A, B, C, (ut modo) ſed & in G, H, I, intelligantur Fulcra; (cæteraque conſtructa ut in fig. 242.) Quorum reſpectivæ Vires ſunto *a, b, c, g, h, i.* Fig. 242.

Stantibus Fulcris A, B, vel A, G, B; non aliter Deſcendendo movebitur Pondus O, quam circa A B rectam rotando, (ut modo oſtenſum eſt ex prop. 1. Cap. 4.) Huic autem obſtant Tria Fulcra C, H, I. Quorum quidem C, Pondus in O ſuſtinebit, quod ad Vires ſuas ſit ut C F ad F O; puta $\frac{CF}{FO}c$: per 2 vel 3 hujus:

jus : (tantundem utique eſt, acſi continuata Vectis COF, fulcrum haberet F, in ea recta AB circa quam facienda eſſet Rotatio.) Similiter Fulcrum H, ſuſtinebit Pondus in O, quod ſit ad Vires ſuas, ut HA ad AO ; puta $\frac{HA}{AO}\,b$. Et Fulcrum I, ſimiliter Pondus in O ſuſtinebit quod ſit ad Vires ſuas ut IL ad LO, puta $\frac{IL}{LO}\,i$. Si itaque totum Pondus O (ſimpliciter conſideratum) majus non ſit quam $\frac{CF}{FO}\,c + \frac{HA}{AO}\,b + \frac{IL}{LO}\,i$; valebunt hæc tria Fulcra C, H, I, onus in O ſuſtinere ne circa AB rotetur. Sin majus fuerit Pondus O, quam ut dictum eſt ; fatiſcent Fulcra, C, H, I, ponderi ſuſtinendo imparia.

Similiter ; Stantibus Fulcris A, C, ſeu A, I, C ; non deſcendet O, niſi circa AC rectam rotando. Huic autem obſtant Tria Fulcra B, G, H. Quorum, Fulcrum B, ſuſtinebit $\frac{BE}{EO}\,b$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}\,g$: Fulcrum H, $\frac{HA}{AO}\,b$; (ut ex modo dictis, & Schematis inſpectu patet.) Si itaque majus non ſit Pondus O, quam $\frac{BE}{EO}\,b + \frac{GC}{CO}\,g + \frac{HA}{AO}\,b$; ſatis valebunt B, G, H, Fulcra, Oneri ſuſtinendo ne circa AC rotetur : Si ſecus ; fatiſcent.

Item ; Stantibus Fulcris B, C ; non deſcendendo movebitur O, niſi circa BC rectam rotando. Huic vero obſtant Quatuor Fulcra, A, G, H, I. Quorum A, ſuſtinebit (per ante dicta) $\frac{AD}{DO}\,a$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}\,g$: Fulcrum H, $\frac{HD}{DO}\,b$: Fulcrum I, $\frac{IK}{KO}\,i$. Si itaque majus non ſit Pondus O, quam $\frac{AD}{DO}\,a + \frac{GC}{CO}\,g + \frac{HD}{DO}\,b + \frac{IK}{KO}\,i$; ſatis valebunt Fulcra A, G, H, I, ne circa BC rotetur O : ſi ſecus ; ſub onere fatiſcent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, inſtituetur Calculus, quotcunque fuerint Fulcra, & quomodocunque ſita.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quo rectius intelligantur omnia,) Onus ſeu Pondus quod intelligitur ad punctum O applicari ; & Vectibus AO, BO, &c. invicem compactis ſuſtineri ; poſſe Tabulatum eſſe (gravatum vel non gravatum incumbente aut dependente pondere quovis alio) vel aliud quodvis Grave cohærens ; cujus ſaltem Centrum gravitatis vel ſit in ipſo O puncto, vel huic directe ſubſit aut immineat : per prop. 18. Cap. 2. & prop. 16. Cap. 4.

Item Vectes, AO, BO, &c. non ſemper alios eſſe ab ipſo onere ; ſed vel ipſius Tabulati ſeu Gravis rectas, vel imaginarias ſaltem rectas à ſuis reſpective Fulcris ad O pertingentes, & prout opus fuerit continuatas, ſecundum quas Fulcrorum A, B, &c. diſtantias tum ab O onere, tum ab oppoſitis reſpective Fulcris imaginariis in Axe Rotationis, æſtimemus. Neque aliud innuunt, quam quod Gravis partes ita ſint inter ſe ſat firmiter cohærentes ut puncti O, ab ipſis A, B, C, &c. diſtantiæ, eædem maneant : ſive id fiat totidem rectis inde in O coeuntibus ibique connexis, ſive per curvos circuitus, aliaſve, id fiat.

Fulcra vero, quæ punctis A, B, C, &c. ſuppoſita intelligimus ; conſiderantur ſolummodo ut Fulcra, non item ut Retinacula : impedientia ſcilicet ne quod illis imponitur ibidem Deſcendat, non autem ne inde Aſſurgat. Adeoque, utut Fulcrum H (verbi gratia) intelligatur impeditivum Rotationis circa BC, (quoniam non deprimetur O, niſi depreſſo H ;) non tamen intelligitur Fulcrum G, impeditivum rotationis circa AB, quoniam ut hæc fiat rotatio (deſcendente O) non fiet Fulcri G depreſſio, ſed ſurſum aſſurget quod illi incumbit ; cui Fulcrum non obſtat.

Si vero, quod huic impoſitum eſt, non tantum ſubjecto fulcro incumbat, ſed cum eo ita connexum ſit ut nonniſi rupta copula poſſit aſſurgere ; (aliove quovis Retinaculo, aut Impedimento, vel onere ſuperimpoſito idem eveniat :) Hoc quicquid eſt Retinaculi, Impeditivum erit Rotationis circa AB, fulcriſque C, H, I, ſuppetias feret : (quippe, ſtante recta AB, non poterit O deſcendere niſi aſcendente

Gra-

Gravis puncto G; propter rectam O G quam ſupponimus inflexilem, ſeu totum Grave ita compactum ut non luxetur; per Schol. prop. 1. Cap. 4.) Cujus quidem Retinaculi vires ſi ponantur r; ſuſtinebunt illæ, pondus in O, quod ſit ad r, ut GF ad F O, (per prop. 1. vel 3. hujus,) puta $\frac{GF}{FO} r$. Adeoque jam, non modo, ſi O non ſit majus quam $\frac{CF}{FO} c + \frac{HA}{AO} b + \frac{IL}{LO} i$, (ut prius;) ſed ſi majus non ſit quam $\frac{CF}{FO} c + \frac{HA}{AO} b + \frac{IL}{LO} i + \frac{GF}{FO} r$; Satis valebunt Fulcra C, H, I, una cum Retinaculo in G, impediendæ rotationi Oneris O circa A B. Simileque erit in reliquis judicium.

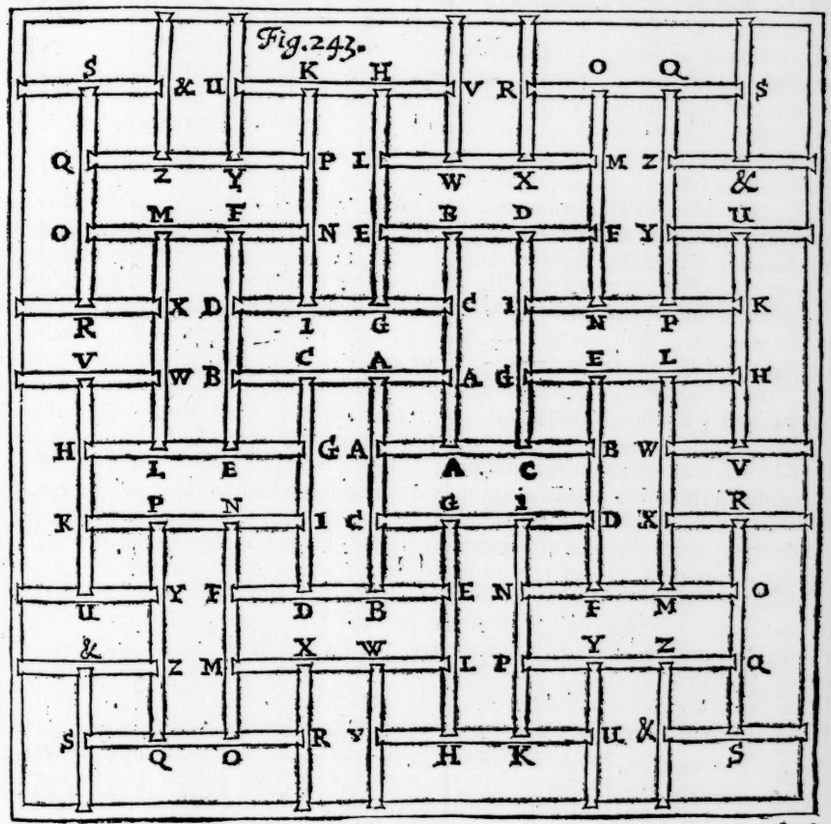
Rotationes autem nonniſi Tres in Calculo conſideravimus; nempe circa A B, A C, B C: non quod plures eſſe non poſſint, (ut circa A G, G B, &c.) ſed quoniam inſtituto ſufficiant hæ tres; in quibus conſiderandis Fulcrorum omnium vires ſub calculo veniunt. Quippe ſi ſaltem tria puncta, (ut A, B, C,) intra quæ ſit ipſum Grave ejuſve Centrum gravitatis O, ſatis ſuſtineantur, (ſive ſuis ſingula fulcris, ut in fig. 241. ſive cum ſuccenturiatorum ſubſidiis, ut in fig. 242.) totum ſuſtinebitur Grave: per prop. 1. Cap. 4.

PROP. X.

Contignationem planam ex Tignis multo Brevioribus quam ſit Areæ Latitudo invicem conjunctis conſtruere: Et computo æſtimare, Quantum cuique Junctiuræ Onus incumbat.

Contignationis ſeu Tabulati Conſtructio.

POteſt quidem hoc variis modis fieri. Eam vero formam præ cæteris ſeligendam putavi, quam jam olim Anno 1644. *Cantabrigiæ* primum delineabam, in Col- Fig. 243.



legio *Reginenſi*, in quo tum temporis *Socius* eram: & quam non ita multo poſt Tigillis ligneis conſtruendam curabam, (quo manifeſtius indicarem Theoriam poſſe in Praxin reduci:) eamque in Veſperiis Comitiorum *Oxoniæ* Anno 1652. (poſtquam ad munus illud quod etiamnum ſuſtineo vocatus eram) ſolenni Prælectione exponebam; ejuſque Calculum Veſperiis Comitiorum Anni ſequentis, 1653. ſimiliter explicabam: Quamque ex eo tempore tum Noſtratium tum Exterorum non pauci ſatis approbarunt, aliqui etiam imitati ſunt: Quam & Sereniſſimus Rex noſter, *Carolus* Secundus, poſt auſpicatum ſuum in *Angliam* reditum, oblatam ſibi Octobr. 18. 1660. inter Κειμήλια ſua dignatus eſt reponere.

Specimen exhibet Areæ quadratæ, cujus Latitudo eſt fere quadrupla longitudinis Tignorum longiſſimorum; quæ ita ſunt invicem intertexta, ut ſe mutuo ſuſtineant. Et quidem, quo ſupra planitiem non aſſurgant, qua parte tignum quodvis aliud ſibi ſuperne impoſitum ſuſtinet (quod ſui partibus intermediis fit) ſuperne (ad mediam quaſi partem) excavatur: qua parte vero alii impoſitum ſuſtinetur, (quod in ſui extremis fit) tantundem quaſi excavatur inferne: quo fit, ut, ſibi mutuo impacta, aream planam faciant. Si tamen metuendum videatur, ne, propter ligni naturam flexilem, partes mediæ, onere preſſæ, nonnihil ſubſidant: huic incommodo cavebitur, ſi excavationes non præciſe ad mediam tigni craſſitiem pertingant, ſed paulo citra medium definant. Quippe, hoc pacto, aſſurget paululum in ſingulis junctûris contignatio, quo compenſetur illa exigua depreſſio quæ ex curvatura oriatur.

Fig. 244. *Fig. 245*

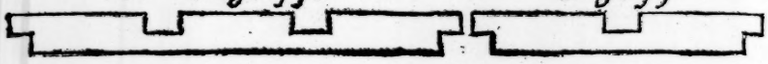


Fig 244, 245. Faciem lateralem Tigni Longioris, exhibet fig. 244. Brevioris, fig. 245. Facies ſuperna in ipſa fig. 243. ſatis apparet.

Fig. 243. Quo autem ordine diſponantur; ex Schematis intuitu (fig. 243.) facilius intelligatur, quam poſſit multis verbis explicari.

Videre enim eſt, ſi ab Extremis ordiri libeat, totam Aream *Muro* circumſeptam; vel etiam (ſiquis id malit) Muri loco, totidem quot opus erit *Columnis*, quibus imponantur Trabium ſive Tignorum exteriora Capita. Quorum capita altera, introrſum ſpectantia, Tignis aliis impoſita ſuſtinentur; atque horum porro, ab aliis; atque hæc ab aliis; & ſic deinceps donec ad oppoſitos muros perveniatur.

Verbi gratia, Tigni S &, extremum alterum muro ſuſtinetur, alterum tigno & Z: Hujus alterum extremum muro itidem ſuſtinetur, reliquum tigno Q P. Sed & tigni U Y, extremum alterum muro ſuſtinetur; reliquum eodem Q P tigno. Hujus vero Q P, ſed & tigni O N, extrema altera tigno S R, altera tigno K I ſuſtinentur. Atque horum item extrema (uti videre eſt) tignis alteris ſuperimpoſita ſuſtinentur; horumque alteris; & ſic porro, prout ex inſpecto Schemate luculentius patet quam ut multis verbis explicatu opus ſit.

Similiter; ſi à medio libeat ordiri, quodlibet Tignorum A B, ut & tignorum C D, ſuſtinentur alteris extremis in altero A B, alteris in tigno E F: atque hujus item, ut & tigni L M, extrema altera tigno G H, altera tigno N O: atque horum, aliis; & ſic porro uſquedum ad muros perveniatur; ut ex Schemate liquet.

Notandum interim, eadem methodo, aream iſtiuſmodi conſtrui poſſe vel ex paucioribus, vel etiam ex pluribus tignis; ſed & in alia forma, (puta oblonga, non minus quam quadrata;) prout res poſtulaverit.

Verbi gratia; poterit ibidem continuus Murus collocari, ubi jam habentur Tigna S R, V U, & S; aut ubi Tigna & Z, M L, P Q; quo area reddatur minus lata, ut paucioribus tignis à muro in murum perveniatur: idque eouſque ut
Fig. 246, 247. non niſi *Quaternis* tignis opus ſit; ut in fig. 246. Vel etiam (quæ eſt forma omnium ſimpliciſſima) *Ternis* tignis; ut in fig. 247.

Fig. 243. Verum etiam, ſi id opus erit, poterunt tigna X R, W V, (cæteraque quæ reliquis breviora ſunt, atque hic in muro terminantur,) ad parem cum reliquis longitudinem protrahi, tignaque ſecunda (ipſis S R, V U, parallela, & extra hæc poſita) ſuſtinere; eorumque ſic protractorum extrema, vel muris (extra promotis)

Fig. 246.

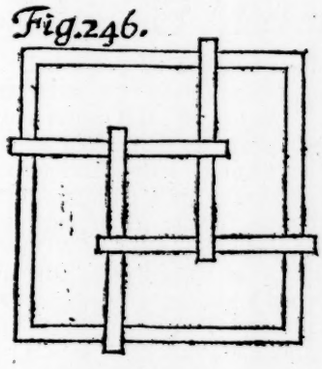


Fig. 247.



promotis) ibidem tranſeuntibus ſuſtineri, vel etiam (ampliata adhuc area) tignis aliis, (ipſis ML, PQ, parallelis;) atque ſic porro prout opus videbitur.

Hoc autem ne in infinitum protrahi poſſit, impediunt, non tam rationes Mathematicæ, (quæ in contrarium non eunt,) quam Materiæ Phyſicæ conditio. Quippe in protracta area, aucta Tignorum multitudine, augetur Onus; donec eo tandem perveniatur, ut majus evadat, quam ut, quæ ſuſtinendo paria ſint, Tigna conquiri poſſint, quæque ſub tanto onere non fatiſcant & rumpantur.

Quouſque autem tuto liceat hac ratione procedere; ex calculo facienda eſt æſtimatio. Quippe ſi conſtet tum quanto oneri ferendo ſufficiant Tigna quæ adhibenda veniant; (quod periti Architecti, experimento docti, docebunt:) tum quantum oneris, prout ſitus ratio poſtulat, cuique Tigno ferendum imponatur; (quod calculus indicabit:) hinc optime fiet judicium, quid tuto fieri poſſit. Qui quidem calculus, in tignis numero paucioribus, facilius inſtituetur; operoſius autem in pluribus.

Quo autem qua methodo fieri poſſit oſtendam; expoſitæ contignationis juncturas ſingulas calculo ſubjeci; perplexo quidem, propter tignorum multitudinem; ſed qui in paucioribus tignis multo citius ad exitum perveniſſet.

Calculus, expoſitæ Contignationi accommodatus.

Quo calculus (Synopſi ſequente tradendus) rectius intelligatur; notandum eſt (quod oculi judicium ſatis indicabit,) Tignorum alia aliis longiora; atque ita quidem ut longiora ſint breviorum quaſi ſeſquialtera. Et propterea, cum Tigni cujuſque ex longioribus pondus deſignemus ſymbolo T; cujuſque ex brevioribus ſymbolum erit $\frac{2}{3}T$. Fig. 243.

Onus autem cuique Tignorum juncturæ incumbens, ea litera indicatur quam ſibi in Schemate aſcriptam habet ea junctura.

Notandum porro erit; cum manifeſtum ſit, (Schema vel mediocriter conſideranti,) quaterna ſemper puncta eſſe, quæ (propter ſimilem ſitum reſpectu totius contignationis) æqualiter onerata cenſenda ſint: ea ſemper (ne, præter neceſſitatem, ſymbolorum numerus creſceret, & calculus proinde redderetur multo perplexior,) eiſdem ſymbolis deſignamus. Unde habeantur quatuor A, (ſimiliter ſita, atque æqualiter onerata,) atque totidem B, & ſic de reliquis.

Cum itaque habetur, verbi gratia, (ad Num. 2. ſeu Æquationem ſecundam,) $B=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A$; tantundem eſt atque ſi diceretur, ſubjecti Tigni AB, punctum B, (præter eam firmitatem quæ ibidem requiritur ne ſuo pondere rumpatur tignum, quam hæc æquatio non involvit,) tantum onus impoſitum ſuſtinere, quantum eſt tum $\frac{1}{2}T$ (ſemiſſis ponderis incumbentis tigni longioris AB,) tum $\frac{2}{3}C$ (beſſis oneris eidem AB tigno impoſiti in C puncto; utpote quod in C, A, punctis trifariam ſectum intelligitur;) tum $\frac{1}{3}A$, (trientis oneris eidem AB tigno, in A, impoſiti.) Item ubi habetur (ad num. 21.) $W=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}V$: innuit hoc, Tigni, LM, puncto W, onus impoſitum tantum eſſe, quantum eſt tum $\frac{1}{2}T$ (ſemiſſis incumbentis tigni brevioris, qui idem eſt atque tigni longioris triens,) tum

$\frac{1}{2}V$ (ſemiſſis oneris quod incumbentis tigni puncto medio V ſuper-imponitur.) Quæ omnia ſingulatim demonſtrantur ex prop. 5. vel 7. hujus Capitis. Quod ſimiliter obtinet in Æquationibus primoribus Viginti-quinque.

Æquatio 26. & quæ ſequuntur ; ex præcedentibus derivantur, (quas per numeros æquationibus illis adſcriptos citavimus, quo dilucidior eſſet totius proceſſus ratio.) Quæ inſerviunt partim ad abbreviandas fractiones, (quoties tum numeratores tum denominatores poſſunt communi aliquo diviſore dividi,) partim vero (& quidem potiſſimum) ad reducendas & exponendas æquationes præcedentes (ſubſtituto ſymboli alicujus valore, aliis ſymbolis explicato,) quo, diſpunctis ſubinde aliquot ſymbolis, ſymbolorum numerus reſiduorum ſenſim minuatur, donec tandem unum aliquod ſymbolorum à principio ignotorum, per notam quantitatem T (pondus unius tigni longioris, ſimpliciter conſiderati,) exponatur ; ejuſque demum ope (repetendo præcedentium aliquot æquationum veſtigia) reliquorum etiam ſymbolorum (onerum primitus ignotorum) valores innoteſcant.

Verbi gratia ; cum habeatur (num. 1.) $A=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}C$; manifeſtum eſt (propter A in æquationis utraque parte repertum) ſublato utrinque $\frac{2}{3}A$, ſupereſſe $\frac{1}{3}A=\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}C$; hoc eſt (utrinque per 3 multiplicando) $A=\frac{3}{2}T+C$; quam itaque Æquationem (num. 26.) habemus, tanquam derivatam ex Æquatione prima, (num. 1.) quam itaque citamus.

Similiter ; cum ſit (num. 2.) $B=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A$; ſitque (per num. 26.) $A=\frac{3}{2}T+C$; adeoque $\frac{1}{3}A=\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}C$; erit $B\,(=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}C)=T+C$. Quam itaque æquationem ($B=T+C$) habemus num. 27. tanquam ex num. 2, 26, derivatam. Et ſimiliter in aliis.

Nonnunquam vero (ut modo dictum eſt) ſola fit Fractionis abbreviatio (ſeu ad minores terminos per communem diviſorem reductio.) Ut, cum (num. 64.) habeatur $H=\frac{6912T+672G+552I+2790}{2907=3\times 969}$; poſſintque omnia membra per 3 dividi : habetur, num. 65. (tanquam ex num. 64. derivata) æquatio, $H=\frac{2304T+224G+184I+930}{969}$. Et ſic alibi.

Quoniam autem has omnes Æquationum reductiones atque abbreviationes ſingulatim exponere (prout has paucas expoſuimus) Lectori tædium crearet, (cum illud poſſit ſuo marte quilibet præſtare :) contenti ſumus omnes una Synopſi breviter exhibere ; indicatis iis æquationibus antecedentibus ex quibus quæque immediate dependeat.

Calculi Synopſis.

1	$A=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}C$.	14	$O=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}F$.
2	$B=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A$.	15	$P=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}Y+\frac{1}{3}Z$.
3	$C=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}G+\frac{1}{3}I$.	16	$Q=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}Z+\frac{1}{3}Y$.
4	$D=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}I+\frac{1}{3}G$.	17	$R=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}O+\frac{1}{3}Q$.
5	$E=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}B+\frac{1}{3}D$.	18	$S=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}Q+\frac{1}{3}O$
6	$F=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}B$.	19	$V=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}H+\frac{1}{3}K$.
7	$G=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}E+\frac{1}{3}L$.	20	$U=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}K+\frac{1}{3}H$.
8	$H=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}L+\frac{1}{3}E$.	21	$W=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}V$.
9	$I=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}N+\frac{1}{3}P$.	22	$X=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}R$.
10	$K=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}N$.	23	$Y=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}U$.
11	$L=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}W+\frac{1}{3}X$.	24	$Z=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}\&$.
12	$M=\frac{1}{3}T+\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}W$.	25	$\&=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}S$.
13	$N=\frac{1}{3}T+\frac{2}{3}F+\frac{1}{3}M$.		

Per Prop. 5. vel 7. hujus Cap.

26	$A=\frac{3}{2}T+C$. per 1.
27	$B=T+C$. per 2, 26.
28	$B=\frac{3}{2}T+\frac{2}{3}G+\frac{1}{3}I$. per 27, 3.
29	$E=\frac{15T+5G+4I}{9}$. per 5, 28, 4.

30 | F=

Fig. 243.

30 $F=\frac{12T+4G+5I}{9}$. per 6, 4, 28.

31 $W=\frac{7T+4H+2K}{12}$. per 21, 19.

32 $X=\frac{7T+4O+2Q}{12}$. per 22, 17.

33 $Y=\frac{7T+2H+4K}{12}$. per 23, 20.

34 $\&=\frac{7T+2O+4Q}{12}$. per 25, 18.

35 $Z=\frac{7\frac{1}{2}T+O+2Q}{12}$. per 24, 34.

36 $L=\frac{39T+8H+4K+4O+2Q}{36}$. per 11, 31, 32.

37 $M=\frac{39T+4H+2K+8O+4Q}{36}$. per 12, 31, 32.

38 $P=\frac{39\frac{1}{2}T+4H+8K+O+2Q}{36}$. per 15, 33, 35.

39 $Q=\frac{20T+H+2K+O+2Q}{18}$. per 16, 33, 35.

40 $Q=\frac{20T+H+2K+O}{16}$. per 39.

41 $N=\frac{94\frac{1}{2}T+16G+2H+20I+K+4O+2Q}{54}$. per 13, 30, 37.

42 $O=\frac{45T+4G+2H+5I+K+4O+2Q}{27}$. per 14, 30, 37.

43 $O=\frac{45T+4G+2H+5I+K+2Q}{23}$. per 42.

44 $G=\frac{213T+40G+8H+32I+4K+4O+2Q}{108}$. per 7, 29, 36.

45 $G=\frac{213T+8H+32I+4K+4O+2Q}{68}$. per 44.

46 $H=\frac{48T+G+4H+4I+2K+2O+Q}{27}$. per 8, 29, 36.

47 $H=\frac{48T+5G+4I+2K+2O+Q}{23}$. per 46.

48 $I=\frac{658\frac{1}{2}T+64G+20H+80I+28K+19O+14Q}{324}$. per 9, 38, 41.

49 $I=\frac{658\frac{1}{2}T+64G+20H+28K+19O+14Q}{244}$. per 48.

50 $K=\frac{294T+16G+14H+20I+25K+7O+8Q}{162}$. per 10, 38, 41.

51 $K=\frac{294T+16G+14H+20I+7O+8Q}{137}$. per 50.

52 $G=\frac{1724T+65H+256I+34K+33O}{8x68=544}$. per 45, 40.

53 $H=\frac{788T+80G+H+64I+34K+33O}{16x23=368}$. per 47, 40.

54 $H=\frac{788T+80G+64I+34K+33O}{367}$. per 53.

Fig. 243.

55 | $I = \frac{5408T + 512G + 167H + 238K + 159O}{244 \times 8 = 1952}$. per 49, 40.

56 | $K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 2K + 15O}{137 \times 2 = 274}$. per 51, 40.

57 | $K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 15O}{272 = 8 \times 34}$. per 56.

58 | $O = \frac{380T + 32G + 17H + 40I + 10K + O}{23 \times 8 = 184}$. per 43, 40.

59 | $O = \frac{380T + 32G + 17H + 40I + 10K}{183}$. per 58.

60 | $G = \frac{14400T + 32G + 549H + 2088I + 279O}{544 \times 8 = 4352}$. per 52, 57.

61 | $G = \frac{14400T + 549H + 2088I + 279O}{4320 = 9 \times 480}$. per 60.

62 | $G = \frac{1600T + 61H + 232I + 31O}{480}$. per 61.

63 | $H = \frac{6912T + 672G + 29H + 552I + 279O}{367 \times 8 = 2936}$. per 54, 57.

64 | $H = \frac{6912T + 672G + 552I + 279O}{2907 = 3 \times 969}$. per 63.

65 | $H = \frac{2304T + 224G + 184I + 93O}{969}$. per 64.

66 | $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H + 280I + 1377O}{1952 \times 8 = 15616}$. per 55, 57.

67 | $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H + 1377O}{15336 = 27 \times 568}$. per 66.

68 | $I = \frac{1760T + 160G + 57H + 51O}{568}$. per 67.

69 | $O = \frac{54720T + 4512G + 2457H + 5640I + 75O}{183 \times 136 = 24888}$. per 59, 57.

70 | $O = \frac{54720T + 4512G + 2457H + 5640I}{24813 = 3 \times 8271}$. per 69.

71 | $O = \frac{18240T + 1504G + 819H + 1880I}{8271 = 3 \times 2757}$. per 70.

72 | $G = \frac{13799040T + 46624G + 529920H + 1977152I}{480 \times 8271 = 3970080}$. per 62, 71.

73 | $G = \frac{13799040T + 529920H + 1977152I}{3923456 = 64 \times 61304}$. per 72.

74 | $G = \frac{215610T + 8280H + 30893I}{61304}$. per 73.

75 | $H = \frac{6917568T + 664192G + 25389H + 5655681I}{969 \times 2757 = 2671533}$. per 65, 71.

76 | $H = \frac{6917568T + 664192G + 5655681I}{2646144 = 64 \times 41346}$. per 75.

77 | $H = \frac{108087T + 10378G + 88371I}{41346}$. per 76.

78 | $I = \frac{15487200T + 1400064G + 513216H + 95880I}{568 \times 8271 = 4697928}$. per 68, 71.

79 | $I = \frac{15487200T + 1400064G + 513216H}{4602048 = 96 \times 47938}$. per 78.

80 | I =

Fig. 243.

80 $I = \frac{161325T + 14584G + 5346H}{47938}$. per 79.

81 $G = \frac{9809571420T + 8592984OG + 1350472338I}{61304 \times 41346 = 2534675184}$. per 74, 77.

82 $G = \frac{9809571420T + 1350472338I}{2448745344 = 162 \times 919 \times 16448}$. per 81.

83 $G = \frac{65890T + 9071I}{16448}$. per 82.

84 $I = \frac{724797655 2T + 6584708 52G + 47242602I}{47938 \times 41346 = 1982044548}$. per 80, 77.

85 $I = \frac{724797655 2T + 6584708 52G}{1934801946 = 18 \times 919 \times 116963}$. per 84.

86 $I = \frac{438156T + 39806G}{116963}$. per 85.

87 $I = \frac{9829607228T + 361080226I}{116963 \times 16448 = 1923807424}$. per 86, 83.

88 $I = \frac{9829607228T}{1562727198 = 4594 \times 340167}$. per 87.

Hoc est, ordine Alphabetico.

89 $I = \frac{2139662}{340167}$ T. per 88.

90 $G = \frac{2542309}{340167}$ T. per 83, 89.

91 $C = \frac{2578443\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 3, 89, 90.

92 $D = \frac{2444094\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 4, 89, 90.

93 $B = \frac{2918610\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 27, 91.

94 $A = \frac{3088694}{340167}$ T. per 26, 91.

95 $E = \frac{2930522}{340167}$ T. per 5, 92, 93.

96 $F = \frac{2772350}{340167}$ T. per 6, 92, 93.

97 $H = \frac{1984812\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 77, 89, 90.

98 $O = \frac{1895418\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 71, 89, 90, 97.

99 $K = \frac{1690314\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 57, 89, 90, 97, 98.

100 $V = \frac{2056730}{340167}$ T. per 19, 97, 99.

101 $U = \frac{1958564}{340167}$ T. per 20, 97, 99.

102 $W = \frac{1141704}{340167}$ T. per 21, 100.

103 $Y = \frac{1092671}{340167}$ T. per 23, 101.

104 $Q = \frac{879012\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 40, 97, 98, 99.

A = 9 $\frac{27191}{340167}$ T.

B = 8 $\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}$ T.

C = 7 $\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}$ T.

D = 7 $\frac{62925\frac{1}{2}}{340167}$ T.

E = 8 $\frac{209186}{340167}$ T.

F = 8 $\frac{51014}{340167}$ T.

G = 7 $\frac{161540}{340167}$ T.

H = 5 $\frac{283977\frac{1}{2}}{340167}$ T.

I = 6 $\frac{98660}{340167}$ T.

K = 4 $\frac{329646\frac{1}{2}}{340167}$ T.

L = 3 $\frac{236331\frac{1}{2}}{340167}$ T.

M = 3 $\frac{181326\frac{1}{2}}{340167}$ T.

N = 7 $\frac{37757}{340167}$ T.

O = 5 $\frac{194583\frac{1}{2}}{340167}$ T.

P = 3 $\frac{50382\frac{1}{2}}{340167}$ T.

Q = 2 $\frac{198678\frac{1}{2}}{340167}$ T.

105 R=

Fig. 243.

105	$R = \frac{1726700}{340167}$ T. per 17, 98, 104.	$R = 5\frac{25865}{340167}$ T.
106	$S = \frac{1387898}{340167}$ T. per 18, 98, 104.	$S = 4\frac{27230}{340167}$ T.
107	$X = \frac{976739}{340167}$ T. per 22, 105.	$V = 6\frac{15728}{340167}$ T.
108	$\& = \frac{807338}{340167}$ T. per 25, 106.	$U = 5\frac{257729}{340167}$ T.
109	$Z = \frac{517058}{340167}$ T. per 24, 108.	$W = 3\frac{121253}{340167}$ T.
110	$L = \frac{1256832\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 11, 102, 107.	$X = 2\frac{296405}{340167}$ T.
111	$M = \frac{1201827\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 12, 102, 107.	$Y = 3\frac{72170}{340167}$ T.
112	$N = \frac{2418926}{340167}$ T. per 13, 96, 111.	$Z = 1\frac{176891}{340167}$ T.
113	$P = \frac{1070883\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 15, 103, 109.	$\& = 2\frac{127004}{340167}$ T.

Onera Columnis ſeu Muris incumbentia, non erat neceſſe diſtincto calculo deſignare; utpote quæ eadem plane ſunt quæ eorundem tignorum alteris capitibus conveniunt. Cum enim (verbi gratia) Tignum XR, non niſi in medio ſui puncto R oneretur; ſuſtinet utrumvis Fulcrum (tum quod eſt ad X, tum quod eſt in Muro,) tum ſemiſſem Tigni, tum ſemiſſem oneris in R impoſiti: per prop. 5. hujus.

Patet, ex hoc calculo, juncturas A, medio proximas, omnium maxime urgeri. Utpote quorum onus peculiare, eſt pluſquam *Novem* Tignorum longiorum; (reliquorum vero, minora ſaltem quam novem:) Cui quidem adhuc addendum erit (per prop. 7. hujus) ſemi-onus *Unius* tigni pro firmitate debita ne ſuo pondere rumpatur: Atque porro ſemiſſis oneris junctura C incumbentis, (per eandem prop. 7.) fere *Quatuor* tignorum. Adeoque (computatis omnibus) firmitas ibidem requiſita ne rumpatur tignum, plus quam æquipollet ponderi Tignorum *Tredecem*, & fere *Quatuordecim*, $9\frac{27191}{340167} + 4\frac{394549}{1360668} = 13\frac{503313}{1360668} = 13\frac{167771}{453556}$: (tigni ſui pondere computato.)

Cum itaque nulli dubium eſſe poſſit, quin tigna, etiam ſatis longa, tantæ firmitudinis eſſe poſſint, ut valeant Onus longe gravius in eodem ſui puncto ſuſtinere quam eſt Quatuordecuplum ſui ponderis; Neque poterit eſſe dubium, quin hujuſmodi Contignatio tuto poſſit uſui accommodari.

Alia Conſtructionis Forma.

Fig. 248. Aliam formam exhibet, Fig. 248. Quæ à præcedente in hoc differt, quod quæ illic duorum Tignorum Capita Tigno tertio incumbunt, ejuſdem duobus diſtinctis punctis applicantur (quibus trifariam ſecatur tignum;) ipſaque Tigna ſic ſuffulta ad eaſdem partes jacent: Hic, ad idem ſubjecti Tigni punctum medium applicantur utraque; ſed ad contrarias partes.

Fig. 249. Tignorum Faciem Lateralem exhibet fig. 249. Facies ſuperna, in ipſa fig. 248. ſatis apparet. Sunt autem omnia longitudine invicem æqualia atque inter ſe ſimilia.

Fig. 248. Poteſt autem hæc, ut præcedens, plus minuſve continuari prout opus videbitur; atque materiæ conditio ferre poterit. Quippe hic etiam, prout, protracta area, augetur trabium multitudo; ſic & augetur Pondus.

Habet autem hæc forma, præ præcedente, hoc incommodum; quod, propter utrumque ponderum incumbentium eidem ſubſtrati tigni puncto applicatum, hoc fortius premitur, (utpote quod ſuſtinet utrumque onus integrum; cum, in forma, præcedente,

Fig.248.

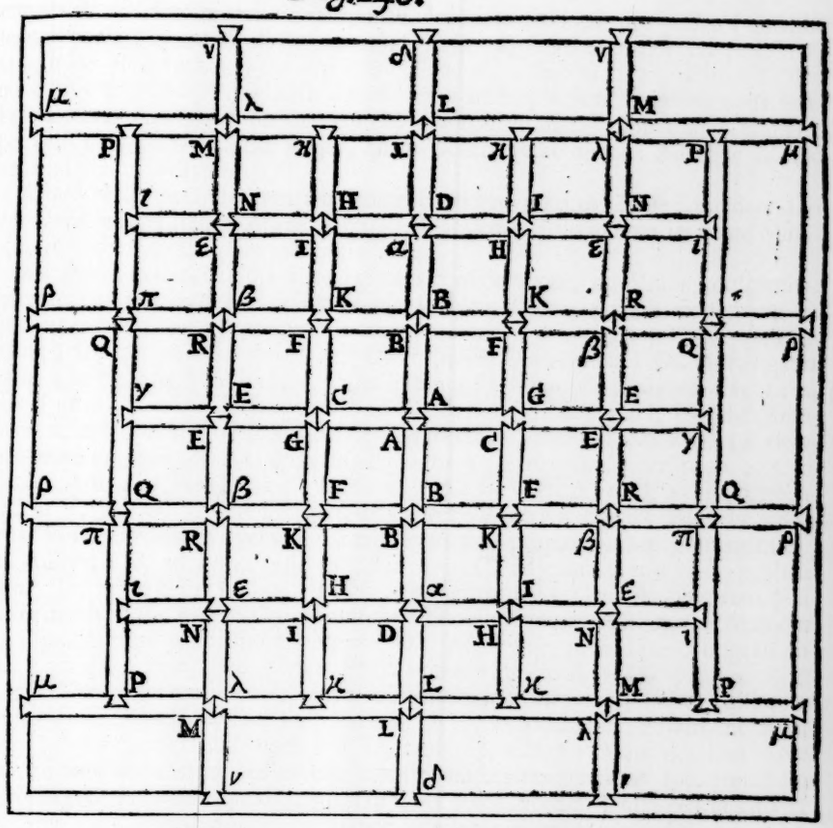
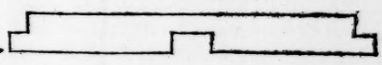


Fig.249.



præcedente, punctum idem ſuſtinuerit onus alterum integrum, alterum dimidium;) ſed & propterea etiam eodem loci plus excavandum erit tignum ſuſtinens, quo admittantur utriuſque incumbentium capita. Quod quadantenus forte compenſari videatur, propter tigna incumbentia ad contrarias partes poſita; quæ, in præcedente forma, jacebant ad eaſdem partes utraque: Quamquam & hoc non multum interſit; præſertim ſi incumbentium tignorum capita, non ad ſubjecti mediam tantum latitudinem, ſed uſque ad remotiorem marginem, aut etiam ultra, extendantur; quod pro Architecti arbitrio vel fieri poteſt, vel non fieri.

Sed neque admodum metuendum erit illud incommodum; nam eo non obſtante, ſatis valere poterunt tigna oneri ſuſtinendo; prout ex ſubjecto calculo patebit.

Aſpectum quod attinet; præcedens forte gratior videbitur: tum propter tigna ſic diſpoſita ut totius operis textura ſit oculo magis conſpicua, (quæ in poſteriore forma vix aut ne vix obſervabitur;) tum propter intervalla, ibidem, uniformi difformitate variata; quæ, hic, ſunt quadrata omnia. Fig. 243.

Calculus, iiſdem principiis nititur in hac forma atque in præcedente: Sed expeditior hic eſt, propter tigna omnia ejuſdem longitudinis, eademque in uno tantum puncto medio onerata, pluraque puncta æqualibus oneribus preſſa: Quæ omnia conducunt ad reddendum calculum expeditiorem. Fig. 248.

Calculus huic conſtructioni accommodus.

Ad calculum hic expeditius inſtituendum, notandum erit; non tantum ea puncta (ſive bina, ſive quaterna,) quæ ſunt reſpectu totius Schematis ſimiliter

ſita (& propterea æqualiter onerata) eodem ſymbolo deſignari; (quod in calculo præcedente factum erat:) Sed etiam, propter tigna ſingula in medio tantum ſui puncto onerata, utraque ejuſdem tigni capita æquali onere ſubjecta fulcra gravare, (per prop. 5. hujus;) quæ itaque analogis ſymbolis deſignavimus, onera invicem æqualia indicantibus. Cætera quæ de præcedente Calculo dicta ſunt, etiam hic (prout opus erit) locum habent.

Calculi Synopſis.

1 $A = \alpha = \frac{1}{2}T + B.$
2 $B = \beta = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}F.$
3 $C = \frac{1}{2}T + A.$
4 $D = \delta = \frac{1}{2}T + L.$
5 $E = \varepsilon = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}R.$
6 $F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}G.$
7 $G = \gamma = \frac{1}{2}T + E.$
8 $H = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}D.$
9 $I = \iota = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}N.$
10 $K = \varkappa = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}I.$
11 $L = \lambda = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\varkappa.$
12 $M = \mu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}P.$
13 $N = \nu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}M.$
14 $P = \pi = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\iota.$
15 $Q = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\gamma.$
16 $R = \varrho = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}Q.$

Per prop. 5 vel 7 hujus Cap.

17 $C = T + B.$ per 3, 1.
18 $D = T + \frac{1}{2}\varkappa.$ per 4, 11.
19 $F = \frac{3}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}E.$ per 6, 7, 17.
20 $H = \frac{3}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}\varkappa.$ per 8, 1, 18.
21 $M = \frac{3}{4}T + \frac{1}{4}\iota.$ per 12, 14.
22 $N = T + \frac{1}{4}\varkappa + \frac{1}{4}P.$ per 13, 11, 12.
23 $N = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}\varkappa + \frac{1}{8}\iota.$ per 22, 14.
24 $Q = \frac{3}{4}T + \frac{1}{2}E.$ per 15, 7.
25 $R = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}E + \frac{1}{4}\iota.$ per 16, 14, 24.
26 $B = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}K.$ per 2, 19.
27 $B = \frac{9T + 2E + 4K}{6}.$ per 26.
28 $E = \frac{29}{16}T + \frac{7}{24}E + \frac{1}{8}I + \frac{1}{3}K.$ per 5, 25, 27.
29 $E = \frac{87T + 61I + 16K}{34}.$ per 28.
30 $H = 2T + \frac{1}{6}E + \frac{7}{12}K.$ per 20, 27.
31 $I = \frac{17}{16}T + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{16}I + \frac{1}{8}\varkappa.$ per 9, 23.
32 $I = \frac{17T + 8\varepsilon + 2\varkappa}{15}.$ per 31.
33 $K = \frac{31}{15}T + \frac{7}{20}E + \frac{43}{120}K.$ per 10, 30, 32.
34 $K = \frac{248T + 42E}{77}.$ per 33.
35 $I = \frac{361T + 140E}{3 \times 77 = 231}.$ per 32, 34.
36 $E = \frac{11389T + 952E}{34 \times 77 = 2618}.$ per 29, 34, 35:
37 $E = \frac{1627T + 136E}{34 \times 11 = 374}.$ per 36.
38 $E = \frac{1627}{238}T.$ per 37.
39 $G = \frac{1746}{238}T.$ per 7, 38.
40 $Q = \frac{222}{238}T.$ per 15, 39.
41 $K = \frac{1654}{238}T.$ per 34, 38.

42 L=

Fig. 248.

42 L = $\frac{946}{238}$ T. per 11, 41.
43 D = $\frac{1065}{238}$ T. per 4, 42.
44 B = $\frac{2002}{238}$ T. per 27, 38, 41.
45 A = $\frac{2121}{238}$ T. per 1, 44.
46 C = $\frac{2240}{238}$ T. per 3, 45.
47 F = $\frac{2112}{238}$ T. per 6, 39, 46.
48 H = $\frac{1712}{238}$ T. per 8, 43, 45.
49 I = $\frac{1358}{238}$ T. per 32, 38, 41.
50 P = $\frac{798}{238}$ T. per 14, 49.
51 M = $\frac{518}{238}$ T. per 12, 50.
52 N = $\frac{851}{238}$ T. per 13, 42, 51.
53 R = $\frac{1014}{238}$ T. per 16, 40, 50.

Hoc eſt.

A = $8\frac{217}{238}$ T.	E = $6\frac{199}{238}$ T.	I = $5\frac{168}{338}$ T.	N = $3\frac{127}{238}$ T.
B = $8\frac{98}{238}$ T.	F = $8\frac{208}{238}$ T.	K = $6\frac{226}{238}$ T.	P = $3\frac{84}{238}$ T.
C = $9\frac{58}{238}$ T.	G = $7\frac{80}{238}$ T.	L = $3\frac{232}{238}$ T.	Q = $4\frac{40}{238}$ T.
D = $4\frac{112}{238}$ T.	H = $7\frac{46}{238}$ T.	M = $2\frac{42}{238}$ T.	R = $4\frac{62}{238}$ T.

Patet, ex hoc calculo; Ponderum ſingularium maximum eſſe A = $8\frac{217}{238}$ T. Cum itaque eidem puncto (tigni CC medio) incumbant duo A, (utrinque unum,) hoc eſt $17\frac{196}{238}$ T; idemque porro (ne pondere tigni ſui rumpatur) Uno adhuc ſemitigno onerari cenſendum ſit, (per prop. 7. hujus Cap.) Firmitas ibidem requiſita, (ne rumpatur tignum) æquipollet ponderi Tignorum $8\frac{217}{238} + 8\frac{217}{231} + \frac{1}{2} = 18\frac{77}{238} = 18\frac{11}{34}$.

Quod quidem Onus non tantum eſt ut propterea metuamus ne non ferendo ſufficiat tignorum robur: Quippe tigna, etiam ſatis longa, multo gravius onus ſuſtinere valebunt quam eſt *Octodecuplum*, ſeu *Novendecuplum* ſui ponderis.

Eſt autem gravius quam onus maximum formæ præcedentis; utpote quod ad *Quatuordecuplum* ponderis unius tigni non pertigiſſe, ſupra deprehenſum eſt.

Paucioribus interim tignis in hac forma res abſolvitur, (utut areæ hujus latitudo intra muros, duodecima ſui parte ſuperet latitudinem illius, eadem manente longiſſimi tigni longitudine:) Quippe hic adhibentur tigna omnino 49 æqualia; illic vero, ex longioribus 40, ex brevioribus 20.

Conſtructiones adhuc aliæ plures.

Tertia conſtructionis forma, quam exhibet fig. 250. in hoc potiſſimum à Prima

Fig. 250.

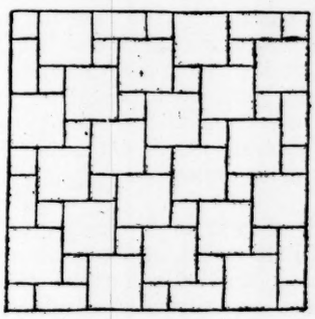


Fig. 251.

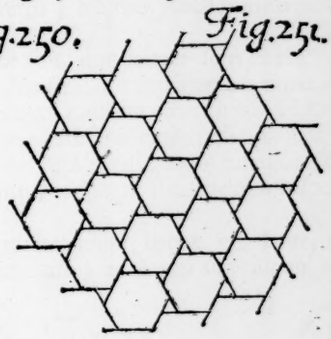


Fig. 252.

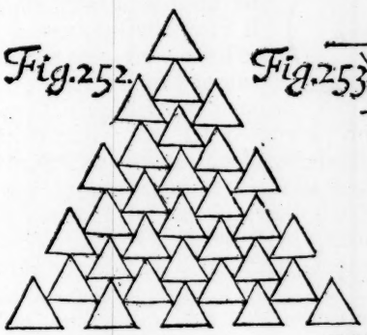
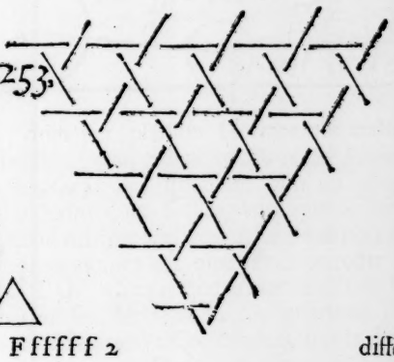


Fig. 253.



differt, quod quæ diverſis ejuſdem ſubjacentis tigni punctis ſuſtinentur tigna incumbentia ; ſint, illic, ad eaſdem partes poſita ; hic, ad contrarias.

A Secunda vero, in hoc potiſſimum differt, quod, quæ ad contrarias partes ſubjecti tigni jacent tigna incumbentia, applicentur illic ad idem ſubjecti tigni punctum medium ; hic vero, ad diverſa puncta, quibus tigni longitudo trifariam ſecatur.

Quarta, Quinta, & Sexta, ſimiliter ex figura trilatera fig. 247. derivantur ; ut, ex quadrilatera fig. 246. derivantur prima, ſecunda, & tertia.

Forma Quarta, quam exhibet fig. 251. eſt analoga Tertiæ ; mutatis Quadratis (propter angulos non rectos) in Triangula & Hexagona.

Forma Quinta, quam exhibet fig. 252. eſt magis analoga primæ ; propter duo tigna incumbentia, ad eaſdem partes tigni ſuſtinentis poſita : In hoc autem cum ſecunda convenit, quod ad idem ſuſtinentis punctum medium, applicentur utraque.

Forma Sexta, quam exhibet fig. 253 eſt Secundæ plane analoga ; propter incumbentium ad contrarias partes tignorum capita, eodem ſubjecti tigni puncto medio ſuffulta : Atque in hoc potiſſimum à Quarta differt ; quod, hic, ad idem ſuſtinentis punctum applicantur utraque ; illic, ad diverſa. In Schemate autem, neceſſe habui tignorum capita amputare, paulo citra tigni ſuſtinentis puncta media, (quibus ſuffulcienda intelliguntur :) Quippe alias, coeuntibus ad idem punctum tignis contrariis, una fieret continua recta, nec ad oculum pateret tigni ſuſtinentis ab incumbentibus diſtinctio, niſi vellem in majori forma Schema delineare (ut in fig. 248. factum eſt) quo poſſint tignorum oppoſitorum capita ſuſtinentis medio diſterminari.

Poſſunt autem hæ Formæ (ſicut præcedentes) plus minuſve continuari, prout opus erit, atque expedire videbitur.

Poſſuntque, quæ ſingulis incumbunt juncturis onera ſuſtinenda, ſimiliter ad calculum revocari, ut ad formam primam & ſecundam factum eſt.

Sed & aliis mille modis poſſunt hæc omnia variari, prout vel conditio loci, vel ſcopus Architecti poſtulaverit. Nobis, hæc pauca ſufficiat exhibuiſſe ſpecimina.

CAP.

CAP. VII.

De Axe in Peritrochio, & Machinis cognatis.

DEFINITIONES.

DEF. I. Axem in Peritrochio *vocant Machinam, ſeu Inſtrumentum Mechanicum, ponderibus levandis aptum; in quo Cylindrus* (*quem* Axem *vocant,*) Fig. 254. *Fulcris per extrema ſuſtinetur, circumpoſitum habens Tympanum,* (*quod* Peritrochium *vocant,*) *in cujus ambitu, foraminibus ad id factis, infiguntur* Scytalæ; *quibus applicata Vis, Peritrochium una cum Axe vertit, cui convoluti Funes Onus elevant.*

Cylindrus (κύλινδρος) à κυλίνδω ſeu κυλινδέω dicitur, (atque hoc à κυλίω *volvo,*) ob formam teretem, apte volubilem: quam autem in Geometria figuram ſic appellant, notum eſt.

Cylindri autem, ſaltem qui pro magnitudine breves ſunt, (in Mechanicis præſertim) etiam *Tympana* (τύμπανα) dici ſolent: ob ſimilitudinem, credo, Inſtrumentorum Muſicorum pulſatilium ſic dictorum, quæ & etiamnum in uſu ſunt. Ea vero ſive à τύπτω ſic dicantur (unde Scholiaſtes Ariſtophanis τύμπανον deducit, cum pro *fuſte* ſumitur quo quis verberetur;) ſeu potius ab Hebræo תוף (quod tantundem ſignificat) non diſputo. Certe à Syrorum תופים, Græcorum τύμπανα originem traxiſſe, non videtur ambigendum; quæ Romanis poſtea aliiſque gentibus in uſum venerunt. Neque ſatis convenit inter interpretes num illud ἐτυμπανίσθησαν Hebr. c. 11. innuat quod *fuſtigati* fuerint ſeu *fuſtibus cæſi*, an quod fuerint quaſi in equuleo *torti* atque *extenſi*, haud ſecus atque Membranæ Tympanorum capitibus impoſitæ.

Cylindrum autem (in Mechanico hoc Inſtrumento) minorem, ſed & longiorem, *Axem* (ἄξονα) appellant. *Axis* autem ſeu ἄξων, ab ἄγω, ἄξω, videtur deveniſſe; utpote circa quem *agatur* Rota. Quippe de rotarum axe vox ea prima ſignificatione dicitur; atque inde ad Circulorum, Sphærarum, aliorumque Solidorum Axes transfertur.

Tympanum vero ſive Cylindrum majorem, ſed & breviorem, *Peritrochium* (περιτρόχιον) vocant; (quod quin à τρόχος *rota*, atque hoc à τρέχω *curro* dicatur, non eſt ambigendum;) quod Rotarum inſtar circa Axem (περιτρέχει) circumcurrit: cum eo tamen diſcrimine, quod curruum Rotæ circa manentem Axem (hoc eſt, non converſum,) convertuntur; hoc autem Peritrochium una ſecum & Axem ſuum volvit.

Et quidem Axem hunc, utut alibi tornatum, ea tamen parte qua Peritrochio infigitur, quadratum relictum vult Pappus, (aptatum ſimili in Peritrochio Foramini quadrato,) quo Peritrochio firmius jungatur, certiuſque cum eo converſo convertatur.

Axis autem Extrema, (quæ & axis *Capita* dicuntur, aut etiam *Poli*,) in foramina (πήματα) immoti Pegmatis quo ſuſtinentur immiſſa, circumpoſitis axique fixis munimentis æneis armari jubet, quas *Chœnicidas* (χοινικίδας) vocat, (dicitur autem χοινικὶς à χοῖνιξ, ob formæ, ut videtur, ſimilitudinem; atque in eodem ſenſu uſurpatur χνόη:) Sed &, in pegmatis foraminibus, eiſdem Chœnicidibus ſubjectos vult πίβεις æneos, (ſic enim eſt in noſtris codicibus græcis MSS; Commandini verſio πήβεις habet;) quod à πίβω *tero*, dictum videtur: In eum vero finem

utraque, tum ut Axium extrema in Foraminibus expeditius vertantur, tum ut minus terantur utraque.

Fig. 254.

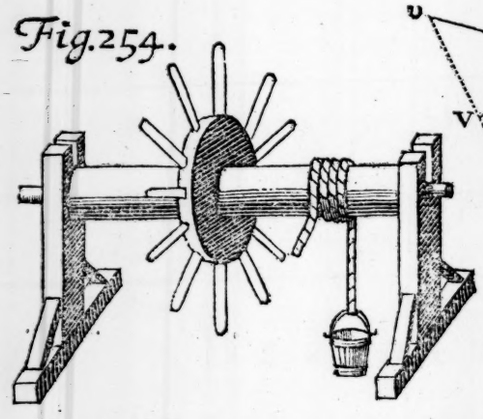
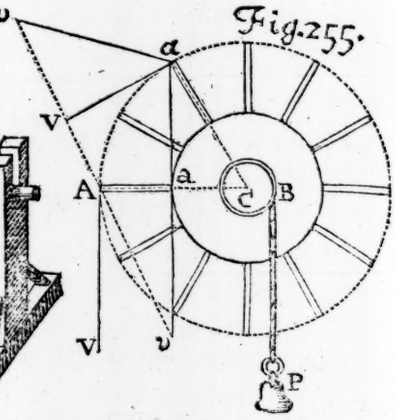


Fig. 255.



Idem vero, ubi *Gloſſocomum* deſcribit, pro Axium extremis, habet *Digitos* æneos *Pyxidibus* æneis acceptos, Δακτύλους dicit ob formæ ſimilitudinem ; & πυξίδας ſimiliter. Ut enim πυξὶς à πύξος dicatur, quoniam primitus è *buxo*, ut videtur, fiebant *pyxides* ; poſtea tamen non ex quovis ligno tantum ſed ex quavis materia cum fierent, idem tamen nomen retentum eſt.

Eoſdem idem ibidem etiam *Tormos* τόρμους videtur appellare : quod ſive à τείρω *tero* dicatur, (quod verſando teratur,) ſive à τρέω vel τορέω *terebro, perforo*, perinde eſt ; ſive etiam cognatæ ſignificationis ſint τόρμος, τέρμα, τέρμις, τέρμων, & *terminus*. Vitruvius, *Cnodacas* appellat ; Hero, κνώδακας ; ut ejuſdem forte originis ſint κνώδαξ, & κνώδων, *mucro* ſeu *cuſpis gladii*, quod à καίνω & ὀδὰξ dictum volunt.

Hi autem ſive δίκπυλοι, ſive τόρμοι, ſive κνώδακες dicantur ; non tam videntur fuiſſe continuati axis (qui ligneus eſſe ſolebat) partes, in minorem formam tornatæ ; quam Clavi ferrei vel ænei ibidem impacti, adacti, aut etiam implumbati ; quo fortius axem ſuſtinerent quam ſi lignea eſſent hæc axis Capita. Quare & *Subſcudes* quædam ſeu *ſubſcudiculæ* rotundæ dicuntur eſſe. *Subſcus* autem à *ſuccudendo* dici perhibetur ; quod quaſi *cudendo*, mallei ictibus percuſſa, immittatur.

Scytalæ (σκυτάλαι) dicuntur, Fuſtes ſeu Baculi teretes, qui pro Manubriis ſunt, in foramina in Peritrochii ambitu facta immiſſi fixique. A σκύτος (*corium*) σκυτάλλω dictum volunt ; eo præſertim ſignificatu quo *Flagrum coriaceum* ſeu *ſcuticam* ſignificat. Sed & *clavam corio obductam* ſignificare volunt ; (atque, hinc, ſimpliciter *clavam* vel *fuſtem*.) Et quidem fieri poteſt, ut hæc manubria non raro fuerint corio obducta (quo tractantium manus minime læderentur,) indeque *Scytalæ* dicta. Sed (quicquid ſit de origine ſeu cauſa nominis) *Scytalæ* vox pro *baculo* ſeu *ligno tereti* paſſim adhibetur. Atque hinc Lacedæmoniorum *Scytale*, (à multis paſſim ſcriptoribus memorata,) modum innuit occulte ſcribendi. Quippe Segmentis Membranæ (quod quaſi Corii genus eſt) bacillo tereti circumpoſitis, ſive Spirali forma circumvolutis, Epiſtolam inſcribebant : quibus inde ſolutis confuſæ literæ non legerentur niſi baculo ſimili ſimiliter circundarentur.

Quæ autem Pappo σκυτάλαι, Ariſtoteli (in quæſtionibus Mechanicis) κόλλοπες vocantur. Habetque & hæc vox, neſcio quo pacto, cum Corio connexionem. Quippe κόλλοψ prima ſignificatione Corium durius ſignificat, quod in boum cervicibus & dorſis eſt ; quod ita dictum volunt quod ex eo cocto fiebat κόλλα *gluten*. Hinc & Citharæ *verticilla*, quibus chordæ intenduntur, κόλλοπας dici volunt, *ex materia qua fiebant* : niſi potius dicendum ſit, *qua tegebantur*. Hoc utique putaverim potius ; quippe corium utcunque durum & calloſum, non tantæ firmitatis eſt ut ex eo fiant hæc verticilla ; quæ lignea ſaltem eſſe debent, aut ſi mavis metallina. Sed tum hæc Verticilla tum illa Manubria corio tecta fuiſſe nihil impedit ; atque inde tum κόλλοπας dici, tum & σκυτάλας.

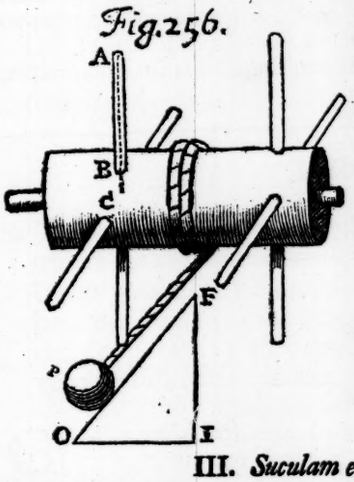
Dum

Dum vero *Collopas* appellat Ariſtoteles hæc manubria; idem σκυτάλας vocat inſtrumenta quædam alia; Qualia ſcilicet nos exhibemus fig. 260. item, qualia innuit figura 258, R, S, oneribus trahendis ſuppoſita, quo minus in ſubjectam terram offenſent; eaque vel rotulis quaſi capitibus affixis, vel etiam ſine his. Cum enim *Scytala* pro *ligno tereti* habebatur, mox ea pluribus inſtrumentis ex ligno Cylindraceo factis accommodata eſt.

Funes χοινίκα, quæ Axi circumpoſita etiam ad Onus ſublevandum (φορτίον dictum) annexa erant, ὅπλα appellat Pappus; hoc eſt *Arma*; (pro quo in Commandini verſione, errore credo Typographi, *Arna* legitur: quod quid ſit, nonnullis forſan faceſſat negotium.) Sic enim & Rudentes ſeu funes nautici majuſculi ὅπλα dicebantur; &, Latine, *navis Armamenta.* Quæ & *Sparta* σπάρτα dicebantur; hoc eſt, ut quibuſdam videtur *Sata*; (tanquam à σπείρω, pro *ſero, ſevi*;) quia ex *cannabe* aliiſque rebus ſativis fiebant: malim à σπείρω *necto*, hoc eſt, *ſero, ſerui.* Nam, ut σπείρω, ſic *ſero* (quod inde factum videtur) utrumque ſignificatum habet; ſed in altero eſt *ſevi, ſatum*, ubi pro *ſemino* uſurpatur; in altero, *ſerui, ſertum*, ubi pro *jungo*, aut *necto*, dicitur; (qua ſignificatione etiam ab εἴρω *necto* dici poterit; ut & *ſermo, ſeries*, &c. & quidem *ſerere ſermones*, fortaſſis ab ἔρω dico.) Idemque & in compoſitis videre eſt; quia ab *inſero*, pro diverſa ſignificatione, dicitur *inſitus*, & *inſertus*; à *conſero, conſitus*, & *conſertus*; à *diſſero, diſſitus*, & *diſertus*; à *deſero, deſitus*, & *deſertus*; ab *aſſero, aſſitus*, & *aſſertus*; ab *exero, exertus*; (ſed *exitus*, potius ab *exeo.*) *Funis* autem ſeu *ſpartum* in hoc & hujuſmodi inſtrumentis, dicitur & *Funis tractorius*, & *Funis ductarius.*

II. *Axem cum Scytalis, ſed ſine Peritrochio,* Suculam *vocant.* Fig. 256.

Fig.256.



Suculam, ſive *Succulam*, (nam utroque modo ſcribitur,) dici volunt, ob *Suis* neſcio quam (volutando forſan) ſimilitudinem. Græcis, ob *Aſini* potius (in ferendis oneribus) ſimilitudinem, ὄν☉, ὀνίσκ☉, ὄνε☉, appellatur. Scytalas autem vel ad alterum vel ad utrumque extremum, pro arbitrio, habere poterit.

Neque huic abſimile eſt *Jugum* textorum (ζυγὸς) de quo Ariſtoteles in Mechanicis quæſtionibus, aliique ad illum, ſcribunt. Fig. 257.

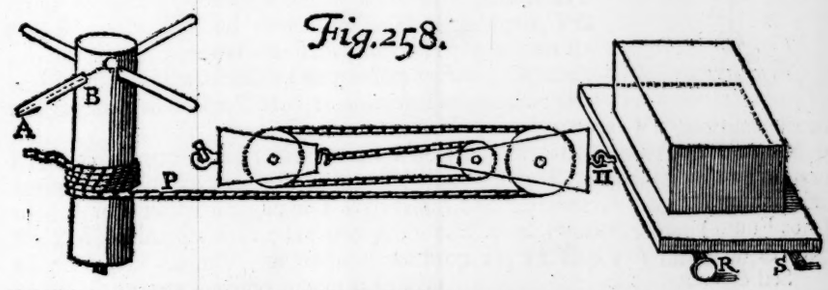
Fig.257.



III. *Suculam erectam,* Ergatam *vocant.*

SI nomen ſpectemus, *Machinam Operariam* dixeris; (eſt utique ἐργάτης *operarius*, ab ἐργάζω:) ſed huic ſpeciatim Organo nomen impoſuit uſus. In quo erecta Fig. 258.

Fig.258.



Sucula, vectibus quaternis, (ſeu, quod tantundem eſt, duobus tranſverſim poſitis & utrinque extantibus,) vel etiam pluribus, converti ſolet; atque ponderibus Attrahendis, (potius quam elevandis aut attollendis,) adhiberi.

IV. *Huc*

IV. *Huc referenda erunt ejuſmodi alia Inſtrumenta innumera; ex Cylindris ſeu Tympanis confecta (ſeu quæ horum inſtar ſunt,) eiſque vel Dentatis vel non-Dentatis; & quidem utcunque multiplicatis: idque ſive circa eundem motus axem rotentur, ſive circa diverſos. Talia ſunt* Terebra, Tympanum manubrio inſtructum, Tympanum cum axe, *aut etiam hujuſmodi plura invicem commiſſa,* (*ut in Automatis fieri ſolet,*) Geranium, *aliaque multa, quæ vel ex figuris ſatis intelligantur, vel quæ Lector ex ſuo penu huc referre poſſit.*

Fig. 259, 260, 261, 262, 263.

Fig. 259. ET quidem *Terebra* ſeu *Terebrum*; à *Tero* dictum, (ut Græcorum τέρετρον à τιτρέω *perforo*, atque hoc à τείρω *tero*,) vel à Græco τέρετρον immediate; vix aliud eſt quam vel *Sucula* vel *Ergata* cum *Scytalis binis*; cujus ope acies qua ſecat premitur ſeu protruditur.

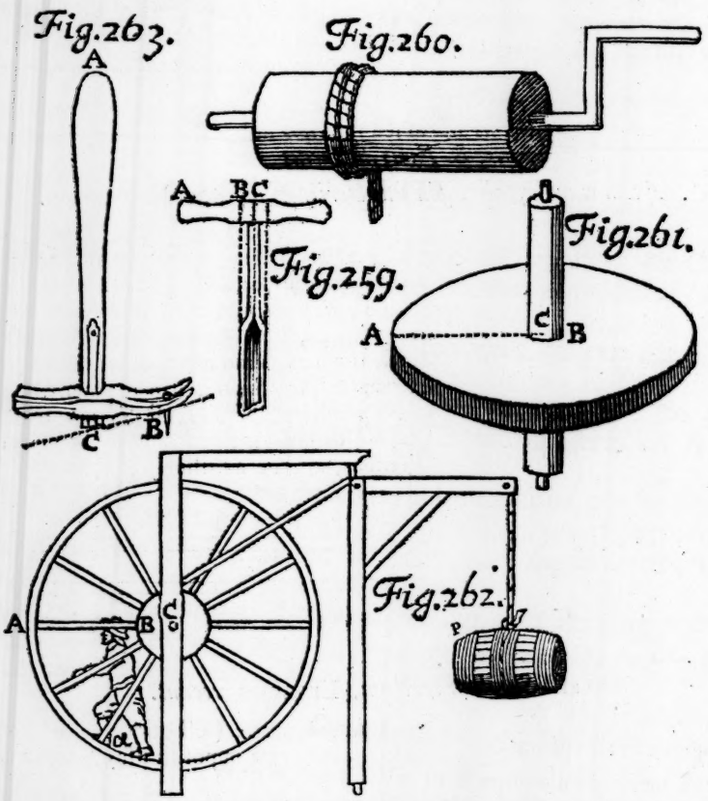


Fig. 260. *Tympanum manubrio inſtructum*, eſt inſtar *Suculæ* cum unica *Scytala*.

Fig. 261. *Tympanum cum Axe*, eſt *Axis in Peritrochio* ſed ſine *Scytalis*: (ſaltem niſi, in *Tympanis dentatis*, ipſi Dentes ſint pro Scytalis:) ſed & hujuſmodi plura invicem committi ſolent; quo Vis Vi addatur.

Fig. 262. *Geranium* appello, Inſtrumentum illud cujus in Navigiis onerandis & exonerandis (atque Oneribus alias ſublevandis) frequens eſt uſus; (ubi à Rota magna, ab hominibus calcata, porrigitur longa Cervix, unde ad Onus demittitur Tractorius Funis.) Noſtrates vocant à *Crane*, (Gruem;) cui reſpondent Machinæ Græca nomina γέρανος, γεράνιον; &, Latinorum, *Grus*.

Fig. 263. Sed & vulgaris Ferrei *Mallei* uſus, evellendis Clavis adhibiti, poterit & huc referri. Aliaque iſtiuſmodi plurima.

PROP.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

In Axe cum Peritrochio, (& cognatis Potentiis, quibus eadem eſt ratio,) ut eſt Perimeter Axis, cui applicatur Pondus movendum; ad Perimetrum Orbis Extimi, cui applicatur Vis Motrix; (ſeu illius Diameter vel Semidiameter, ad Diametrum vel Semidiametrum hujus:) ſic, vice verſa, Vis æquipollens, ad Pondus Movendum. Quæ itaque vel tantillum aucta movebit; aut etiam, ſi tantillum minuatur Pondus: Secus; non movebit: Et, ſi adhuc minor ſit, vel Pondus augeatur; ne ſuſtinebit quidem. Fig. 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263.

PRopoſitionem ſic univerſaliter conceptam, eadem opera pluribus Machinis ſeu (ut dici ſolent) Potentiis accommodandam cenſui (cum in omnibus eadem ſit ratio;) potius quam ut eadem de ſingulis toties repetantur.

Solent autem plerique omnes Mechanicorum ſcriptores *Potentiam* hanc ad Vectem reducere, (de quo in ſuperiore Capite dictum eſt:) Neque id incommode. Quippe ſi C Centrum ſeu Axis Motus pro Fulcro ſeu Hypomochlio habeatur; rectæque CA, CB pro Diſtantiis punctorum applicationis, Virium & Ponderis, ad eandem rectam ceu Vectem ACB: Eadem omnia quæ de Vecte ſuperius demonſtrantur, etiam hic locum habebunt. Eſt utique hoc Organon tantundem atque Vectis continuus, ſeu alius atque alius continuo ordine ſubinde ſuccedentes. Quippe ut, vertente Machina, (fig. 254, 255.) aliud atque aliud erit Perimetri axis punctum B cui applicatur Pondus; ſimiliter alius atque alius ſuccedit Vectis ACB, cujus reliquo extremo applicetur Vis motrix. Si vero non quidem ad ipſum A punctum oppoſitum applicetur Vis, ſed ad aliud quodvis extimi Orbis Punctum, ut α: ſi tamen ad hoc punctum quodvis ſic applicetur Vis ut linea directionis ſuæ, ut αV, ſit ſecundum Tangentem hujus Orbis; res eodem plane recidit, per ea quæ de Libra Demonſtravimus, ad prop. 14. Cap. 3. Si autem non ſecundum rectam quæ Orbem tangat, ſed quamvis aliam, ut αv, applicetur Vis; eadem pro ſingulis reſpective caſibus locum hic habebunt, quæ illic de Libra demonſtrantur. Sive enim ad Libram referatur hæc potentia (quod mihi potius videtur) ſive ad Vectem (qui & ipſe Libra eſt,) eodem res recidit.

Verum ego, ut rem ad prima principia revocem, malim ex prop. 5 & 6. Cap. 2. demonſtrare; utpote quod univerſale principium eſt, ex quo omnium Machinarum vires æſtimandæ ſunt.

Si itaque intelligatur (quod hic ſupponimus) in una Machinæ converſione tantundem Elevari (ſeu contra propenſionem ſuam moveri) Pondus appenſum P, quantum tractorii funis illud eſt quod Axem ſemel ambiat, (quod itaque ipſius Ambitui æquale ſupponitur;) unaque tantundem Deſcendere (ſeu ſecundum propenſionem ſuam procedere) Pondus contrarium ſeu Vim Motricem V, quantus eſt Extimi Orbis Ambitus cui vis hæc applicatur, (quod pariter intelligendum erit:) Manifeſtum eſt ſic eſſe Deſcenſum ad Aſcenſum, ut eſt Ambitus hic ad illum, ſeu ut hujus diameter vel ſemidiameter ad diametrum vel ſemidiametrum illius: puta ut m ad n ſeu mD ad nD. Si itaque ponatur (vice verſa) Pondus ad Vim Motricem, ut n ad m, ſeu ut nP ad mP: Erit Motus illius Magnitudo ad Magnitudinem hujus, (utpote in ratione ex duabus illis rationibus compoſita, per prop. 5. Cap. 2.) adeoque & Momentum illius ad Momentum hujus (per prop. 7. Cap. 2.) ut $nP \times mD$ ad $mP \times nD$, ſeu ut

$$\frac{\frac{nP}{mD}}{mnPD} = \frac{\frac{mP}{nD}}{mnPD}$$

mnPD ad *mnPD*; nempe æquale. Hoc eſt, Virium ut *nP*, Deſcenſus (ſeu latio ſecundum directionem ſuam) ut *mD*, æquipollebit Ponderis ut *mP* Aſcenſui (ſeu lationi contra directionem ſuam) ut *nD*: Qui itaque cum ſint contrarii, pro nullo ſimul vel Deſcenſu vel Aſcenſu reputandi ſunt; per prop. 6. Cap. 2. adeoque (per prop. 7. ejuſdem,) Momentum in neutram partem præpollens; & Vires contrariæ ſe mutuo ſuſtinebunt. Si vero vel Augeatur Vis Motrix, vel Minuatur Pondus; præpollebit Vis Motrix & Pondus elevabit: Sin contra; præpollebit Pondus, & Vis Motrix ne quidem ſuſtinendo par erit: per prop. 8, & 12. Cap. 1. Quæ erant demonſtranda.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, ſi ad Mathematicum rigorem res exigatur, à ratione propoſita nonnihil recedendum eſſe. Nam Funis longitudo quæ una revolutione convolvitur aliquanto major eſt quam axis ambitus: Tum quia, propter funis craſſitiem, extra Axis ambitum ſupereminet, (adeoque peripheriam majorem efficit;) Tum quia non præciſe circularem peripheriam efficit; ſed Spiralis circa Cylindrum converſionem, quæ circuli peripheria major eſt. Item quæ Scytalis applicatur Vis, non in ipſis earundem punctis extimis applicatur, ſed paulo citra extremum. Verum hujuſmodi minutiæ in Mechanicis negligi ſolent. Si autem ad Mathematicum rigorem exigere velis; tantus reputandus erit Axis Ambitus, quanta eſt longitudo funis una converſione convoluti: Atque tantus reputandus ambitus à Scytalis deſcriptus, quantus ab eo illarum puncto deſcribitur cui Vis cenſenda erit applicari. Hæc utique ſupponit Demonſtratio.

Notandum porro; Demonſtrationem hanc ſpectare potiſſimum fig. 254, 255, &c. ubi Pondus dependet, adeoque propter gravitatem ſuam agit ut Vis contraria; quæ itaque ut Pondus elevetur, ſuperanda erit à Vi motrice; & ſaltem æquanda, quo ſuſtineatur.

Si vero, ut in fig. 258. Pondus humi jacens Trahendum ſit (in Plano Horizontali) non Elevandum; vel aliud obſtaculum amovendum ſit; (ut fig. 259. ubi lignum Terebra ſcindendum erit, quo poſſit Terebra converti; & fig. 263. ubi clavus evellendus eſt;) conſiderandum erit hoc Pondus, vel Obſtaculum, non ut *Vis contraria*, (quippe ut non horſum ſua ſponte nititur quo trahitur, ſic neque ad partes contrarias,) ſed ſimpliciter ut *Impedimentum*. Quo caſu utut Vis major quam quæ æquipolleat requiratur ad Pondus illud vel Obſtaculum movendum vel amoliendum: quo tamen ſuſtineatur (hoc eſt, impediatur ne feratur in oppoſitum,) nulla Vis requiritur; ſupponitur utique vel non aliorſum niti, vel (quod tantundem hic erit) aliunde ſuſtineri (puta ſubjecto pavimento, vel alio quovis modo,) ne eo feratur. Alia ſiquidem habenda eſt ratio nudi *Impedimenti*, ut in prop. 11. Cap. 1. alia *Vis contrariæ*, ut in prop. 12. ejuſdem.

Si vero, ut in fig. 256. partim Trahatur, partim Elevetur; utriuſque habenda erit ratio: Nam, præter amoliendum Impedimentum (ex ſcabritie terræ vel aliunde ortum quod majus minuſve eſſe poteſt, prout magis vel aſperum vel glabrum ſit ſubjectum, quo nititur, fundamentum;) ſuperanda etiam eſt Vis contraria deorſum tendens; quæ aſcenſui non opponitur tantum ſed contrariatur. Quæ quidem Vis contraria major minorve erit (eodem manente pondere) prout major minorve fuerit motus acclivitas; ſecundum ea quæ Cap. 2. tradidimus, prop. 16, 17. & alibi.

Et quidem illud ipſum Impedimentum quod quo Trahatur pondus ſuperandum erit à Vi motrice; quo tamen ſuſtineatur, (ne à Vi contraria in Oppoſitum moveatur,) Adjumento eſſe poteſt: Quippe eadem, verbi gratia, aſperitas Terræ quæ impedit tractionem ſurſum, impediet etiam lapſum deorſum in eodem obliquo plano; & quamquam Vi Tractrici opponatur ut Impedimentum; Retentrici tamen ut Adjumentum aſſociandum erit.

Si autem peragenda ſit Tractio in plano (non, ut prius, Acclivi, ſed) Declivi: Superandum & hic erit quod à Terræ Scabritie (vel aliunde) oritur impedimentum; ſed quæ ſuperetur vis contraria, à Ponderis gravitate orta, nulla eſt: imo ea ipſa quæ in gravitate illa eſt Vis Motrix deorſum, Impedimento illi contraria erit; illudque magis minuſve minuit, prout major eſt aut minor declivitas; quæ & tanta eſſe poterit ut hæc ipſa Impedimentum ſuperet, ut Vi Tractrice opus

non

non ſit. Utcunque; Vi Tractrici eouſque adjumento erit, ut ea nihil ultra ſuperandum relinquatur quam id quo Impedimentum illud, ſuperat hoc ex Gravitate Momentum, pro ea plani declivitate.

Verum hæc omnia ſunt extra conſiderationem hujus Propoſitionis; quæ (cæteris rite computatis prout ex ſuis quodque principiis æſtimandum erit) hoc potiſſimum probatum it; Vim quamlibet in A directe applicatam, ad eandem directe applicatam in B, eam Momenti rationem habere ad Pondus P movendum, quam habet C A diſtantia, ad diſtantiam C B, vel eo radio deſcripta Perimeter ad Perimetrum hoc radio deſcriptam.

Dico autem *directe applicata*; (hoc eſt, ſecundum rectam quæ ad Orbis ambitum in puncto applicationis Tangens ſit; ut ad prop. 14. Cap. 3. explicatum eſt:) quippe ſi Oblique applicetur; minuitur Vis pro ratione Obliquitatis; ſecundum Obliquitatis leges Cap. 2. expoſitas. Nempe, Vis per αv oblique applicata, ad eandem per α V tangentem directe applicatam, in ea ratione valebit quam habet αV ad αv; per prop. 14. Cap. 3. vel prop. 21, aut 25. Cap. 2. Et quidem, Vis per αa, ad Vim eandem per α V vel A V applicatam; valebit ut C a, ad C α vel C A; per prop. 13. Cap. 3.

Atque hoc, *Geranium* ſeu *Gruem* ſpeciatim ſpectat. Ubi Vis motrix adhibita, hoc eſt, hominis calcantis pondus, non directe applicatur ſecundum Orbitæ tangentem, ſed oblique. Et propterea minus agit Pondus calcantis in α, quam ſi eſſet in A; Cum enim agat hoc Pondus, propter gravitatem ſuam, ſecundum rectam quæ ſit Horizonti perpendicularis; adeoque, ſi ad Horizontalis rectæ C A punctum A applicata foret, orbitam tangeret ea recta; atque æquipolleret calcantis Pondus Oneri in P, quod ad ipſum ſit ut C A ad C B, per modo demonſtrata: idem ad punctum α applicatum, minus valebit (ob cauſam jam dictam) quam ſi in A foret. Et quidem ſi foret α ipſi C directe ſubjectum, nihil omnino ageret ad convertendum Tympanum aut Pondus elevandum; ſed eo plus agit quo propius ad A promovetur; atque in ea quidem ratione quam jam oſtendimus ex prop. 21. Cap. 2. & prop. 13. Cap. 3. Fig. 262.

Dico etiam, in ea ratione valere *ad Pondus* P *movendum*: quoniam ubi ad materiam Phyſicam perventum erit, nullum erit tam in omnibus expeditum Organum (utcunque affabre detornatum fuerit, omneſque mobilium commiſſuræ ad glabritiem redactæ, & perfuſo Oleo aliaſve adjutæ,) quin aliqua ſupererit ſcabrities, aliave inæqualitas, aut impedimentum, quod faciet ut Virium nonnihil impendendum fuerit ad ipſum Organum movendum; atque hoc, quantumcunque ſit, ſummæ Virium in A applicatarum detrahendum erit, illudque quod ſupereſt Virium reputandum erit adhibitum ad Pondus movendum quod ad B applicatur.

Quæque hic monemus, alibi prout opus fuerit intelligenda erunt.

Mallei vero uſum illum quem innuit fig. 263. cur huc reducimus, ratio manifeſta eſt: Quoniam, etiam hic, virtus in A adhibita, movet in circumferentia radio C A deſcripta (propter C Centrum motus,) B vero, una cum Impedimento ſeu Obſtaculo, (hoc eſt clavo evellendo,) in circumferentia deſcripta radio C B. (Adeoque quo propius ſit B ad C, eo fortius aget vis eadem in A.) Atque idem dicendum erit de quovis alio organo conſimili, ubi eadem ratio. Fig. 263.

Si tamen Mallei uſum illum (aliaque ſimilia) ad Vectem referas (aut Libram etiam) cujus Centrum Motus extra Vectem (Libramve) ſit: perinde eſt. Quam rem ad prop. 14. Cap. 3. conſideravimus.

PROP. II.

Datum Pondus, data Vi, Axe in Peritrochio (aliove quod hujus inſtar ſit Organo) movere.

Fig. 254, 255, &c.

FIat, ut Pondus *P*, ad Vires *V*, ſic (reciproce) hujus diſtantia CA, ad CB: atque æquipollebunt in hoc ſitu Vis & Pondus, (utpote in diſtantiis reciproce proportionalibus,) per præcedentem. Adeoque ſi diſtantia CA vel tantillum augeatur; auctum ſic erit Virium Momentum, Ponderique præpollebit, illudque movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Quod erat propoſitum.

SCHOLIUM.

PAtet hinc; quo minor fuerit Axis ambitus cui applicatur Pondus, vel major ambitus Peritrochii extimus (ſeu quod hujus inſtar eſt) cui Vis Motrix applicatur, eo minori Vi movebitur Pondus.

Verum hic recordandum erit, præſertim vaſtis Ponderibus exigua Vi movendis, quod in Schol. prop. 18. Cap. 2. monuimus; nempe probe curandum eſſe, ut omnia, Vi & Ponderi intermedia, ſint pro ſuis reſpective oneribus ſuſtinendis ſatis firma: ſecus, rumpetur ipſa Machina, ejuſve aliqua Armamenta, potius quam efficietur motus imperatus.

Item, quod ad prop. 28. Cap. 1. monuimus; nempe, motum hunc quo minori Vi peragatur, eo tardiorem fieri; adeoque defectum Virium Temporis impenſi longitudine redimendum eſſe: Quod & in omnibus omnino Organis mechanicis locum habet. Adeoque, ubi Tempori parcendum erit, ut plus Virium addatur neceſſe eſt.

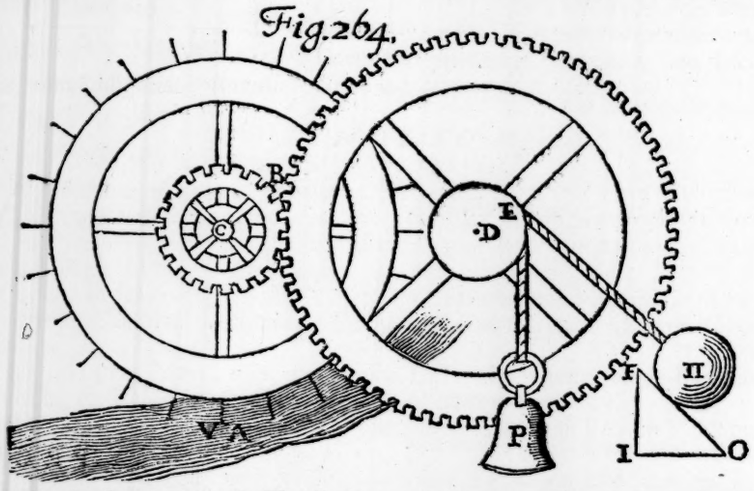
Denique; quoniam, ubi Virium & Ponderis magna eſt inæqualitas, haud commode poterit quod in hujus Propoſitionis conſtructione Imperatum eſt ad praxin redigi una vice (pro Phyſicæ materiæ imperfectione;) ideo pluribus ſive tympanis ſive rotulis invicem commiſſis id præſtant. De quo in ſequente propoſitione agitur.

PROP. III.

Si pluribus commiſſis Rotulis, aliiſve Ponderis levandi mediis adhibitis, motus facilitetur: calculo nihilominus conſtabit, quanta ſit illa facilitatio.

ESTo, verbi gratia, Centro (ſeu motus Axe) C, Tympanum ſeu Rota CA, cui in ambitu (ut moris eſt) Aſſerculi ſeu Pinnacidia affigantur; quibus impin-

Fig. 264.



gens in A, Aqua currentis Fluvii, Rotam convertat. Sitque ad eundem motus Axem C, Rota minor CB dentata; quæ ita cum priore conjuncta ſit ut circa communem

communem Axem junctim moveantur. Sitque C B ad C A, (verbi gratia,) ut *a* ad *b*, seu ut 1 ad 3 : valebit igitur, (per prop. 1. hujus) Vis in A ad æqualem in B ; ut *b* ad *a*, seu ut 3 ad 1. Adeoque *Uncia* in A, æquipollebit *Quadranti* (hoc est, tribus Unciis) in B.

Esto porro ; Centro (seu motus Axe) D, alia Rota D B ; ita dentata, ut dentes sui apte congruant dentibus rotæ C B ; eisque sic implicentur ut earum ope convertatur rota D B circa Centrum suum seu Axem D. (Sic autem congruent, si in ea sit ratione Numerus Dentium rotæ D B, ad Numerum Dentium rotæ C B ; qua est illius Ambitus, ad Ambitum hujus ; seu ut Radius, ad Radium.) Sitque circa eundem motus-Axem D, Rota minor seu Orbita D E ; quæ cum D B junctim moveatur ; habeatque sibi circumpositum Funem Tractorium E P, quo Pondus P trahatur. Sitque Radius D B ad D E, ut *c* ad *b* ; puta ut 4 ad 1. valebit igitur Vis in B, ad æqualem in E (per prop. 1. hujus) ut *c* ab *b*, seu 4 ad 1. Adeoque *Quadrans* in B, æquipollebit *Asse* in E. At (per modo ostensa) *Uncia* in A, æquipollet *Quadranti* in B. Ergo, *Uncia* in A, æquipollebit *Asse* in E, aut etiam (per prop. 18. Cap. 2.) in P. Adeoque *Vis Uncialis* in A, sustinebit *Pondus Assis* in P ; eademque Vis, tantillum aucta, movebit.

Vel, universaliter ; propter C A ad C B, ut *b* ad *a* ; vis V in A tantundem valebit atque $\frac{b}{a}V$ in B : Item, propter D B ad D E, ut *c* ad *b* ; vis $\frac{b}{a}V$ in B (seu V in A) tantundem valebit atque $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a}V = \frac{c}{a}V$, in E. Hoc est, Vis in A, æquipollebit Ponderi in E, vel P, quod ad illam sit in ea ratione quæ componitur ex C A ad C B, & D B ad D E. Atque eodem modo procedendum erit quotcunque porro fuerint Rotæ invicem Commissæ.

Si vero Pondus illud non ex E directe dependeat, ut in P ; sed, ut in Π, obliquo Plano F O incumbat ; Pondus in Π, ad idem in P, in ea ratione ponderabit, qua est F I (perpendicularis æque-alta) ad F O ; puta ut *c* ad *d*, seu 3 ad 4 ; (per prop. 21, vel 25. Cap. 2.) Adeoque cum vis V in A, æquipolleat Ponderi $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a}V = \frac{c}{a}V$ seu 12 V, in P ; eadem æquipollebit Ponderi $\frac{d}{c} \times \frac{c}{b} \times \frac{b}{a}V = \frac{d}{a}V$, seu 16 V, in Π. Hoc est, Ponderi quod ad eum sit in ratione quæ componitur ex A C ad C B, & B D ad D E, & O F ad F I.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis casibus Calculo æstimanda est Vis in A, quæ Ponderi in P vel Π æquipolleat ; (quæ itaque, tantillum aucta, Pondus movebit.) Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

§ 1. AD hanc formam de quibusvis Machinis, ex Tympanis dentatis confectis, fiet judicium ; qualia sunt varia Automatum genera, aliaque instrumenta in usum passim adhibita. Et speciatim *Glossocomum* illud quod ex Heronis Alexandrini *Barulco* describit Pappus, Collectionum lib. 8. prop. 10. Et quæ sunt ejusmodi.

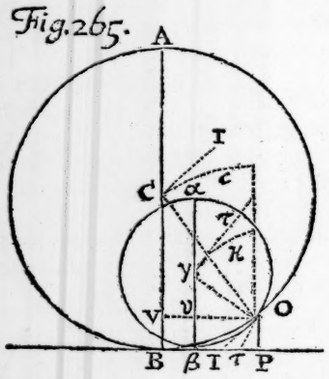
2. Hanc autem de *Rotulis* doctrinam priusquam dimittam ; locus hic haud incommodus erit alias adhuc de Rotis speculationes subjungere ; quæ quamquam hujus loci directe non sint, huc tamen quadantenus spectare non immerito videantur.

3. Observatum est in usu communi (quod & Aristoteles attigit in Mechanicis Quæst. 9.) *majores Rotas, Cylindros, Tympana, Sphæras, &c. facilius moveri quam Minores.* Quod utut per omnia verum non sit (limitatione utique opus erit ;) rite tamen intellectum, concedi potest. Quippe, dummodo idem sit utrobique Pondus, (id utique manifesto interponendum erit,) id non raro videmus in Curruum Rotis, in Cylindris Sphærisve humi volutis, in Trochlearum Orbiculis, aliisque contingere. Saltem si & Axium siqui sint circa quos moventur, eadem sit utrobique magnitudo ; aliaque quæ sunt Impedimentorum loco, sint utrobique æqualiter constituta. Nam nisi hæc ita sint, res omnino secus esse poterunt.

4. Ubi autem hoc contingit; ſi de cauſa quæratur: quilibet fere proclivis eſt eam ex hac de Axe in Peritrochio doctrina allignare. Neque hoc prorſus incommode; (quippe & huic conſiderationi locus erit:) Sed alia etiam in conſiderationem advocanda erunt, ſi res penitius inſpiciatur. Quippe hæc de Axe in Peritrochio doctrina, non de Rotis ſeparatis invicem comparandis agit; ſed de duabus (pluribuſve) conjunctis, quarum motus alter ab altero dependet: & quidem ubi Agens ſecundum unam, Patiens ſecundum alteram, conſideratur.

5. Ut igitur ad ſuum Principium res referatur; intelligatur primo Cylindrus ejuſmodi (*Scytalen* vocat Ariſtoteles) qualem in Hortis (& alibi) ad complanandam terram volvendo ſolent adhibere: qualem (ſi manubrium demas) in fig. 260. exhibuimus. Ex hujuſmodi Cylindris, Pondere æqualibus (& longitudine) Majorem facilius volvas (cæteris paribus) quam minorem. Idemque de Rotis intellige, aliiſve Tympanis, aut etiam Sphæris.

Fig. 265.



6. Sunto enim ejuſmodi duo Cylindri, (vel, ſi mavis, duæ Rotæ, Sphæræve,) ut A B, α β, in fig. 265. qui vel Truſione vel Tractione movendi ſint, ſuper B β plano.

Manifeſtum eſt, ſi nulla eſſet medii reſiſtentia ſuperanda, nullumque à ſcabritie ſubjecti (ſuper quo movetur) impedimentum, aut quod horum inſtar ſit; pondus idem, ab eadem Vi, eadem facilitate antrorſum propelli, aut retrorſum trahi; per prop. 22. Cap. 1.

7. Si autem Reſiſtentiæ Medii ratio habeatur: Manifeſtum eſt, Cylindrum (cæteris paribus) mole majorem, majori Aeris (Aquæve) portioni obviam ire, unde major igitur erit Reſiſtentia; & propterea Major Cylindrus difficilius movebitur: contra quam expectandum erat. (Quod in duobus Globulis, plumbeo puta & ligneo, ejuſdem ponderis, per aerem miſſis, omnino obtinebit.) Adeoque hæc conſideratio diſſimulanda potius eſſet, quam in cauſæ partem advocanda. Sed tantilla poteſt hæc eſſe differentia, ut aliunde ſuperari poſſit.

8. Si vero Subjecti (ſuper quod movetur) Scabrities ſeu Aſperitas in conſiderationem advocetur.

Dico, primo, hinc potiſſimum eſſe (ſi non ſolummodo,) quod Rotunda præſertim corpora humi volvantur multo facilius quam labantur vel poſſint ſine volutione trahi. Cum enim nullæ ſint tam perfecte terſæ & glabræ Superficies, ut nihil prorſus aſperitatis habeant, qua ſe mutuo impediant detineantque: hinc fit, quod Cylindrus A B, impeditus (contactu plani) ad partes B, ſed non item ad partes A; qua poteſt expedite, præceps fertur; (A celerius quam B moto.) Atque hoc continue: Quod eſt, Volvi. Haud ſecus acſi Dentata Rota D B fig. 264. ſuper Dentata ſuperficie movenda eſſet: ubi ne labatur, impediunt impliciti dentes; (ut ad B videre eſt;) non item, ne volvatur. Id utique, niſi dentibus vel alterutris vel utriſque ruptis, fieri non poteſt: hoc poteſt; ne deſerente quidem ſuum tramitem Centro C. Atque eadem ratio eſt aſperitatum minutiorum utut minus obſervabilis.

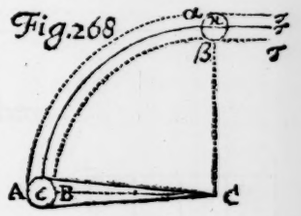
9. Idemque (ob eandem cauſam) in Curruum Rotis ſufflaminatis videre eſt; quæ multo difficilius ita trahuntur renitentes, (rotæ ambitu, terræque ſuperficie ſe mutuo radentibus,) quam ubi circa axem volvuntur.

10. Fallor, an non ob eandem cauſam ſit, quod projecta in Aere volvantur etiam; nempe, quia pars aeris ea quæ projecti partibus inferioribus obviam fit, humilior ſit adeoque pauxillo craſſior, magiſque propterea renitatur, quam quæ ſuperioribus.

11. Quamquam, & id etiam aliunde fieri poſſit; nempe ob impetum in projectione impreſſum. Cum enim quæ ex Funda (verbi gratia) projiciuntur, circulari motu prius lata fuerint, quam relicta funda per iſtius circuli tangentem procedant; projecti partes ab hujus circuli centro remotiores, majores propterea circumferentias eo motu deſcripſerant, adeoque velocioris motus conceperant impetum, quam quæ propiores; qui quidem impetus inæquales, ubi ex peripheria

ad

ad rectam tangentem transitur, volutionem inchoant, (projecti centro per rectam procedente, partibusque superioribus concitatius reliquis,) eademque cepta, cum nihil impediat, perseverat, (per prop. 11. Cap. 1.) Intelligatur enim (ut Schemate rem exponam,) Funda CBA, versari AB projectile, circa C Centrum motus, in situm $\alpha\beta$; ibique deserta funda, centro suo c (quod prius arcum describerat $c\varkappa$) secundum rectam tangentem $\varkappa\tau$ deinceps ferri. Cum itaque majorem impetum conceperit A, per $A\alpha$ arcum majoris circuli delatum, quam B per similem circuli minoris arcum $B\beta$: ubi ad parallelas rectas $\alpha\tau$, $\beta\tau$, perventum erit; impetus in α velocior quam in β, volutionem protinus inchoabit, circa centrum $\varkappa$; eademque, non impedita, perseverabit: ut dictum est. Idemque, si non semper, non raro tamen, in aliis projectionibus contingit.



12. Quod autem facit in Cylindris, Rotis, Sphæris, &c. humi volutis Asperitas Soli; idem facit in Trochlearum Orbiculis Asperitas Funis ductarii, ejusque propterea cum Orbiculo cohæsio. Unde fit ut facilius cum Fune convertatur Orbiculus, quam manente Orbiculo solus Funis ducatur. Quod & in aliis similibus conversionibus pariter obtinet.

13. Dico porro; ob eandem quam diximus superficierum Asperitatem esse, quod Cylindri Rotæve aut Sphæræ mole majores, (sed pondere æquales;) facilius volvantur quam minores. Fig. 265.

14. Intelligantur enim in eandem asperitatem seu eminentium PO impingere, AB Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) major, atque $\alpha\beta$ minor: Quæ quidem eminentia PO (quo possint AB, $\alpha\beta$, procedere) vel superanda erit, vel deprimenda, vel propellenda.

Manifestum primo est, cum sic impingit $\alpha\beta$, propius esse ad P punctum β; quam est punctum B, cum sic impingit AB. Si enim intelligeretur β in B; totus circulus minor (propter mutuum contactum in B) intra majorem esset; adeoque ad O non pertingeret; ut in fig. 267. (& minus adhuc, si esset β ultra B.) Adeoque (quo superetur eminentia PO) Acclivior erit Ascensus (& propterea difficilior, per 25. Cap. 2.) à β ad O, quam à B ad O. Et quidem illic per Circuli minoris Tangentem $O\tau$; hic per Tangentem majoris OT.

15. Vel etiam sic idem alias colligitur. Facto O centro motus, circa quod (quo superetur punctum O) rotandæ sint AB, $\alpha\beta$; seu, quod tantundem est (per prop. 16. Cap. 4.) eorundem Centra gravitatis C, γ; in peripheriis Cc, $\gamma\varkappa$: eadem erit Obliquitas motus in punctis C, γ, quæ est Tangentium CT, $\gamma\tau$; (quæ quidem ipsis OT, $O\tau$, parallelæ sunt.) Adeoque cum major sit Obliquitas in CT quam in $\gamma\tau$; (propter angulum $O\gamma\beta$, majorem angulo OCB, ut mox videbitur;) etiam facilior Ascensus erit. Et quidem in ea ratione facilius movebitur C, quam γ, (hoc est, AB quam $\alpha\beta$,) quam habet Secans Anguli TCA hoc est COV, vel TOP; ad Secantem Anguli $\tau\gamma\alpha$, hoc est γOV, vel τOP; (per prop. 25. Cap. 2.) hoc est (quippe hæc eadem est ratio) in reciproca ratione Cosinuum, seu Sinuum Complementorum; (Nam Secantes Angulorum sunt Complementorum Sinibus proportionales: Nempe in fig. 42. ut FT ad FS, seu FV ad FO, hoc est FV ad FB, sic est FQ ad FR; ut ad prop. 14. Cap. 2. ostensum est:) hoc est, ut Sinus Anguli $O\gamma\beta$, vel $O\tau$P; ad Sinum Anguli OCB, vel OTP. Quæ quidem nec eadem est cum ratione Diametrorum; neque eadem ubique ratio; sed alia atque alia pro varia ipsius PO altitudine. Sed quo minor est altitudo PO, adeoque & minores anguli OCB, $O\gamma\beta$; eo minor hinc est inæqualitas: eademque, si consideretur P vel O in ipsis B, β, punctis, protinus evanescit.

16. Manifestum item est, Arcum βO majorem esse (proportione ad suam peripheriam integram) quam est (ad suam) BO. Quippe PO, hoc est BV, vel $\beta\upsilon$, sinus versus erit arcus (proportione) majoris in circulo minore, quam in majore. Adeoque (junctis CO, γO,) major erit Obliquitatis Angulus $\beta\gamma$O, quam BCO. Et propterea, si deprimenda sit PO eminentia; fortius ad hoc valebit Pondus idem Cylindri (Rotæve aut Sphæræ) majoris, prementis secundum rectam

CO

C O minus Obliquam ; quam minoris, prementis ſecundum magis Obliquam rectam γ O: per prop. 21, vel 25. Cap. 2. (Quippe ibidem, quoad hoc, cenſendum erit Grave conſtitutum, ubi eſt ipſius Centrum gravitatis ; per prop. 16. Cap. 4.) Non quidem in ea ratione quæ eſt Diametrorum, (ut ubi de Axe in Peritrochio agitur) ſed in ea quam habet ſinus Anguli C O V, ad ſinum anguli γ O V. (per prop. 21. Cap. 2.) quæ alia atque alia erit, pro varia altitudine rectæ P O, manente eadem Diametrorum ratione. Sed inæqualitas continuo minor, prout P O propius eſt ad puncta B, β ; atque, in his, protinus evaneſcit.

17. Eſtque hic forſan angulus B C O vel β γ O, quem vult Ariſtoteles cum dicit, *Angulum majoris circuli, nutum quendam habere ad angulum circuli minoris* : (quod Interpretes alio trahunt ; puta, ad Angulum Contactus , vel Angulum Semicirculi, &c. de quibus videantur Monantholius , Baldus, Guevara ;) Nam & minor eſt angulus B C O quam β γ O, adeoque C directius imminet ; & obliquior angulus C O P quam γ O P, adeoque C minus offenſat. Si vero de Angulo contactus intelligeretur ; plus offenſaret rota vel ſphæra major quam minor, quia pluribus ſubjectis partibus ſimul incumbit Cylindrus ſeu Sphæra Materialis ; ut poſt dicetur.

18. Sive igitur Superanda ſit, ſive Deprimenda, eminentia P O ; (quorum, ut plurimum, vel alterum vel utrumque faciendum erit, quo volutio continuetur ;) magis ad hoc valebit Cylindrus ſeu Rota major, cæteris paribus , quam minor. Idque magis in eminentiis majoribus quam in minoribus.

19. Sin abrumpenda eſſet eminentia P O, vel Propellenda : cum hoc per pulſum lateralem faciendum ſit, & potiſſimum in Horizontali recta, ut V O, ſecundum quam (vel huic parallelam) fit tractio horizontalis ; (quæ magis hic ſpectanda eſt quam perpendicularis preſſio ;) id potius fiet per rectam γ O, (quæ à ſitu horizontali minus recedit,) quam per C O. Adeoque, hoc reſpectu, Cylindrus (vel Rota) minor, prævalebit majori. Verum hoc in hujuſmodi volutationibus rarius contingit, & vix niſi in altioribus obſtaculis. Sed eminentiæ minores, vel deprimi ſolent, vel ſuperari, potius quam propelli ; cui magis conducit (ut jam eſt demonſtratum) major quam minor Rota vel Cylindrus.

20. Sed & alia conſideratio eſt, quæ Majori favet præ Minore: Nempe dum ab eminentia una ad alteram tranſitur, magis deprimitur minor quam major Rota ſeu Cylindrus : Adeoque plus illi aſcendendum erit (quoniam ex depreſſiore valle) quo ſecundam ſuperet. Sunto enim (ut in fig. 266.) eminentiæ duæ, M N, & P O: Fig. 266. quarum quum altera ſuperata eſt ſed nondum reliqua ; manifeſtum eſt (propter majorem in arcu minoris circuli curvedinem) altius depreſſum iri β quam B, (adeoque & Centrum γ quam C, totumque propterea Solidum ; (Adeoque non modo Accliviorem ſed & Altiorem aſcenſum habebit Cylindrus (vel Rota ſeu Sphæra) minor quam major. Hic itaque facilius volvetur.

Fig. 266.

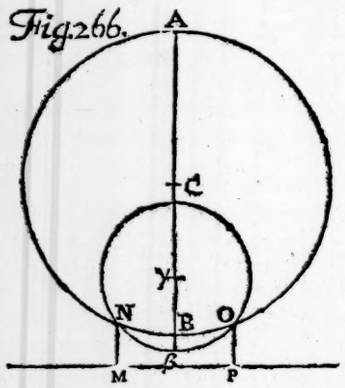
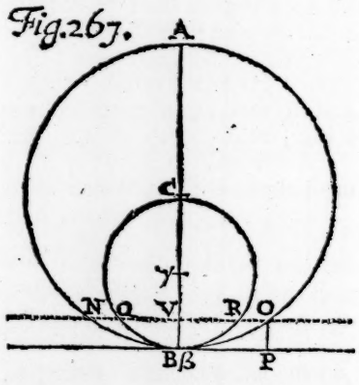


Fig. 267.



21. Huc accedit & alia ratio. Utut enim Circulus Mathematicus ſupponatur Planum in Puncto contingere ; in Corpore tamen Phyſico res ſecus eſſe ſolet. Quippe Corpus grave deprimit gravitate ſua ſubjectam planitiem ; & quidem plus minuſve pro majore vel minore pondere cæteris paribus. Intelligatur itaque Cylindrus ſeu Fig. 267. Rota minor (fig. 267.) planitiem N V O deprimere uſque ad B vel β. Neceſſe itaque

itaque eſt ut ſubjectæ materiæ tantundem deprimat ſeu loco ſuo pellat (quo ſibi locum paret) quantum eſt Segmentum Q R B. Quo autem major eo penetret, tantundem deprimendum erit ſeu loco pellendum, quantum eſt ſegmentum NOB: quod ſegmento Q R B majus eſt. Hoc itaque ut fiat, majore Pondere opus erit. Ponitur autem utriuſque Pondus æquale. Non igitur fiet. Non itaque tam alte penetrat Cylindrus ſeu Rota Major, quam penetraverat minor: Adeoque & hoc nomine facilius volvetur.

Atque hactenus Cylindrum ſeu Rotam conſideravimus ut Grave; pondere ſuo vel agens vel renitens: Atque ea ratione Majorem facilius motum iri quam Minorem oſtendimus: Et quibus de cauſis id fiat.

22. Poteſt autem, ſecluſa illa Gravitatis conſideratione, ut Vectis conſiderari; non quidem quatenus hoc ipſum Solidum, ſtante Obice, ſurſum movendum ſit quo ſuperetur obex, (quippe hac ratione conſiderandum erit ut Grave movendum;) ſed quatenus amoliendus eſt Obex iſte ſeu Obſtaculum P O. Intelligatur enim (in fig. 265.) A B vectis, cujus fulcrum B; ſitque Vis applicata ſive in A, Fig 265.
ſive (ut in Cylindris plerumque fit) in C: & pondus movendum, ſeu Obex amoliendus, in V; non quidem immediate, ſed mediante recta inflexili V O. (Eademque de $\alpha\gamma\upsilon\beta$, quæ de A C V B, intelligantur.) Erit igitur, (per prop. 2. Cap. præced.) ut A B vel C B, ad B V, hoc eſt P O; ſic Vis in A vel C, ad huic æqualem in V, vel O. Atque ſimiliter, ut $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$, ab $\beta\upsilon$, hoc eſt P O; ſic vis in α vel γ, ad eandem in υ vel O. Et conſequenter (propter eoſdem conſequentes) ut A B vel C B, ad $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$; ſic vis in A vel C, ad eandem in α vel γ applicatam. In eadem igitur ratione (nempe Diametrorum, vel Semidiametrorum,) facilius movebit vis eadem Cylindrum ſeu Rotam Majorem A B, quam Minorem $\alpha\beta$; quantum ad amoliendum obicem P O. Atque hoc, ubicunque contigerit obſtaculum P O; puta, ſive propius ſive remotius à puncto B, vel β.

23. Verum hic nulla ratio habita eſt Ponderis in utrovis Cylindro, (niſi quod hujus ope puncta B, β, fixa ſint tanquam ab Hypomochlio ſeu Fulcro, ne reſiliant;) ſed rectarum ſolummodo A B $\alpha\beta$, tanquam vectium nullius ponderis. Neque ad onus movendum, ſed ad amoliendum obicem tantummodo ſpectatur. Sin ſpectetur Onus ipſum, quod tanquam in C vel γ conſtitutum (quæ centra gravitatis ſunt) intelligendum erit: nihil hinc emolumenti habebitur. Quippe eadem utrobique ratio erit tum A B vel C B ad C B, tum $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$ ad $\gamma\beta$. Adeoque ſi Vectium A B, $\alpha\beta$, Fulcra intelligantur, B, β, & Pondera movenda in C, γ; Vires autem vel in A, α, vel in C, γ: quæ Ponderi æquipolleat Vis utrobique vel dimidia vel æqualis erit.

24. Sin concipiatur A B vel $\alpha\beta$ ut Libra cujus Centrum motus ſit B vel β: Ad Fig. 267.
quam (utpote per Centrum tranſeuntem) quæ utrinque ponantur ſolidi partes æquiponderant; adeoque ipſa A B ſeu $\alpha\beta$ libra, in neutram partem præponderans, quantumvis parvo pondere (niſi quod medii reſiſtentia, ſolique inæqualitas qua detinetur, impedirent,) in utramvis partem moveri poſſet: Vis applicata in A vel C, (utpote à Centro motus remotior,) in eadem ratione plus valebit, quam in α vel γ, qua ſunt ipſæ A B vel C B longiores quam $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$: per prop. 12. Cap. 3. Ob quam rationem etiam oſtendimus, longiorem Libram exactiorem eſſe; Schol. prop. 14. § 6. Atque ad hoc reſpexiſſe videtur Ariſtoteles quum eandem hic valere rationem dicit ob quam longiores Libræ ſunt brevioribus exactiores.

25. Eſtque hæc conſideratio etiam Trochlearum Orbiculis communis; ſed cum hoc diſcrimine: in Cylindris Sphæriſque humi volutis, Obſtacula ſeu Impedimenta motus (ob ſoli aſperitatem) ſunt in ipſarum orbitis, puta prope B, β; quæ itaque pro Fulcro, ſeu Libræ motuſque Centro habentur; ut dictum eſt: Sed in Trochlearum Orbiculis, quorum ambitus ab offenſionibus liberi ſunt, motus Impedimenta ſunt ad Axem, circa quem immotum volvuntur Orbiculi; & præſertim, in Orbiculis illis qui ſunt in Trochlearum parte ſuperiore, ad ſuperiorem Axis partem ſuper quam incumbit Orbiculus, moleque ſua & dependentis ponderis eam premit; ad partem vero Axis inferiorem (ob ſimilem rationem) in Orbiculis illis qui ſunt in Trochlearum parte inferiore. Quæ hinc oritur Frictio, impedit quo minus Orbiculus circa Axem ſuum expedite volvatur.

26. Et quidem eo magis, quo Axis major eſt; propter majorem propterea frictionem. Quod quidem eatenus verum eſt, ut exiſtimaverit Baldus ob hanc ſolam cauſam expeditius moveri Orbiculos majores quam minores, quoniam Majorum

Axes in minori ut plurimum ſunt ratione ad Orbes ſuos quam ſunt Axes Minorum: quod ſi Diameter Axis ad Diametrum Orbiculi ſit in eadem ratione in majoribus atque minoribus Orbiculis, nihilo facilius motum iri exiſtimat majores quam minores Trochlearum Orbiculos. Nempe, ſi intelligatur Orbiculi Centrum pro Vectis Fulcro, Vireſque ad ſupremum diametri punctum applicatas, & Frictionem hanc ſeu adhæſionem pro Onere ſubmovendo; in ea ratione plus minuſve valebit, Vis ad Onus ſubmovendum, qua major eſt aut minor Semidiameter Orbiculi ad Axis Semidiametrum. Puta; Si ſit, ut C B ad C A, fig. 269, ſic (reciproce) Vis in A, ad impedimentum à frictione ortum in B; Vis Impedimento æquipollebit, eademque aucta præpollebit: adeoque movebit: Atque hoc perinde ſive in majore ſive in minore Orbiculo.

Fig. A 269.



27. Quam quidem Demonſtrationem ego admitto. Verum hoc addo; Augmentum illud Virium quicquid ſit quod ſupra Æquipollentiam accedit, plus valiturum in Radio majore quam in minore; utpote ad Libram in majori à Centro motus diſtantia applicatum. Ut modo oſtenſum eſt; ex Cap. 3. prop. 12. & Schol. prop. 14. ejuſdem.

28. Eademque Frictionis conſideratio quæ ad Axem fit, (præter eam quam ante conſideravimus Soli Aſperitatem,) in Plauſtrorum Curruumve Rotis non minus locum habet quam in Trochlearum Orbiculis. Nam Axium extrema quæ Rotarum Modiolis immittuntur, onere preſſa, ita premunt foraminum ima, ut non poſſit ſine Frictione converti Rota circa Axem ſuum, in parte præſertim inferiori. (Quam cauſam aſſignat Ariſtoteles, Mechan. Queſt. 11. *Cur ſuper Scytalas*, quales R, S, fig. 258. (nos *Rollers* vocamus) *facilius geſtantur onera, quam ſuper currus*; nempe ob evitatam axis frictionem. Et quidem ad Axem majorem major erit Frictio, majuſque ex Frictione Impedimentum. Eaque Frictio majorem quæ æquipolleat vim poſtulat, ubi major eſt Diametri Axis ad Diametrum Rotæ ratio; ob eandem cauſam quam in Trochlearum Orbiculis jam oſtendimus. Quodque ſupra æquipollentiam accedit virium Augmentum, perinde in majoribus Rotis, atque in majoribus Trochlearum Orbiculis, plus valebit quam in minoribus; atque ob eandem cauſam.

29. Neque huic adverſatur, quod Trochlearum Axes fixi maneant, Axes Rotarum promoveantur. Quippe, dummodo Centrum Converſionis (quem motum ſolummodo hic conſideramus) in Axe ſit; perinde eſt ſive manente Solo promoveatur Axis (ut in Plauſtrorum Rotis;) ſive (ut in Trochlearum Orbiculis) manente Axe ducatur Funis tractorius; ſive etiam utrumque fiat. Quæque de Rotarum Axibus dicta ſunt; eadem etiam Cylindris aliiſve facile accommodantur, ubi tractiones per Axes fiunt.

30. Supereſt adhuc alia ratio, etiam à Frictionis hujus conſideratione petita, quæ majoribus Rotis (Cylindris, Tympanis, Orbiculis, Sphæris, &c.) præ minoribus favet. Poſita nempe eadem utrobique axis magnitudine; quod ex Frictione oritur Impedimentum, non modo difficilius in Rota minore ſuperatur (ob cauſam jam traditam;) ſed & hoc ſæpius repetendum erit. Cum enim tantundem tractione promoveri ſoleat Axis in una Rotæ converſione quantum ipſius Rotæ ambitum proxime æquet; ſæpius eodem tractu converti oportebit Rotam minorem quam majorem, totamque integræ converſionis frictionem ſæpius repeti: & quidem in eadem ratione ſæpius qua minor eſt rotæ ambitus. Et propterea, ob frictionem ſæpius repetendam, difficilius movebitur Rota minor.

31. Atque hinc eſt quod Plauſtrorum Curruumque Rotæ & Axes anteriores (cum minores eſſe ſoleant) citius terantur, ſæpiuſque reparari debeant, quam majores. (Cui tamen nonnihil conferre poteſt, quod cum Axis prior minus Altus ſit quam poſterior, ideo magis premitur, cæteris paribus, ab onere quod utrique incumbit. Ob eaſdem cauſas quas Cap. præced. aſſignavimus, cur duobus Fulcris inæqualiter altis incumbens Vectis, depreſſius magis premat.) Eademque Trochlearum Orbiculis facile accommodantur: quippe, dum tantundem elevatur pondus, ſæpius convertendus erit Orbiculus minor, cæteris paribus, quam major; adeoque & difficilius.

32. Atque hactenus de Cylindrorum, Rotarum, Tympanorum, Sphærarum, &c. converſionibus egimus, tum cur fiant, tum cur in Majoribus facilius fiant quam

quam in Minoribus, cæteris paribus. Quorum utriuſque cauſas conjecimus in ſuperficierum Aſperitatem, atque hinc ortam Cohæſionem; ſive qua cum Solo (aut quod hujus inſtar eſt) cohæret Orbita exterior; ſive qua cohæret Axis cum eo cui immittitur Foramine. Quippe ſi nihil horum eſſet; nihil eſt cur tracta Rota non recta procederet abſque volutatione, Funiſque ductarius immotos Trochlearum Orbiculos præterlaberetur, atque in reliquis ſimiliter. Et quidem, niſi hoc eſſet, (nec impediret medii reſiſtentia) Rotam quantumvis gravem, Vis quantumvis exigua, in ſitu Horizontali, vel traheret vel propelleret: in ſitu vero Declivi, etiam nulla Vi adhibita, ferretur ſponte ſua: in Acclivi vero, ea ſaltem Vi quam poſtulat tracti Pondus cum Acclivitatis gradu comparatum; (per ea quæ tradimus Cap. 2. prop. 27.) nulla habita ratione vel Magnitudinis vel Figuræ; nullaque volutatione ſuperaddita.

33. Reſtat alia non abſimilis Quæſtio; nempe, *Cur Plauſtrorum Currumve Rotæ Anteriores ſint Poſterioribus Minores*: atque cui bono hoc ſit.



Fig. 270.

Videri forte poſſit nonnullis, id fieri propter Declivem Plauſtri poſitionem; quaſi cum B rota præcedens humilior ſit quam ſequens A, Plauſtrum per AB rectam deſcendere proclive ſit. Atque hoc quidem valeret, ſi, manentibus AB rotis, labi oporteret Plauſtrum ſecundum ACB rectam. Quippe tum deorſum ferretur C Centrum, totumque Grave; fieretque Centro terræ propius. Verum ut jam ſe res habet, omnino ſecus eſt. Cum enim ſimul ferendum ſit Plauſtrum cum Rotis, puta à ſitu ACB in ſitum $\alpha\gamma\beta$, (Centro-gravitatis C deſcribente rectam Horizontalem Cγ,) nullus hoc motu acquiritur Deſcenſus, adeoque nulla eſt ad illum propter Gravitatem propenſio: per prop. 9. Cap. 2. vel prop. 16. Cap. 4.

34. Aliunde igitur petenda eſt ratio. Et quidem, quantum ad Rotarum poſteriorum altitudinem, res ex ante dictis jam ſatis patet. Quoniam (præterquam quod hac ratione Plauſtrum altius ex luto elevetur) Majores Rotæ facilius moventur quam minores; ob rationes jam traditas.

35. Quod vero Anteriores Rotæ minus Altæ ſint, duæ ſaltem ſunt cauſæ. Prima eſt, quoniam, cum propter viarum flexus Plauſtra ſint ſæpenumero nunc dextrorſum nunc ſiniſtrorſum ducenda; huic conducit multum anteriorum Rotarum parvitas; Quippe ſi anteriores eadem eſſent magnitudine cum poſterioribus, incommode admodum fierent ejuſmodi flexiones, & nonniſi magno circuitu facto. Quod vel Aurigæ, experimento docti, teſtabuntur: ipſaque Plauſtrorum inſpectio ſatis docebit.

36. Altera paulo altius petenda eſt. Conſiderandum itaque eſt, Lora, quæ Plauſtrum Equis alligant, affixa eſſe (ſaltem mediate) ad Axem anteriorem ejuſve Capita: ſaltem non inferius quam ſit Axis ille. Cumque Applicationum puncta Virium ad Pondus ibidem cenſenda ſint: ſi Axis ille tam altus ſit quam Pectus Equi; linea tractus (ſecundum quam Vis applicatur) puta BD, Horizontalis eſſet. Et propterea, dum per planum Horizontale trahatur Plauſtrum, erit ea virium Directa Applicatio, (cum eadem ſit *Directio Moventis* ſeu Virium Applicatarum, & *Directio Motus*.) Sed quoniam non ita complanatæ ſint Viæ, quin ſubinde ſuperandi ſint Montes, & Colles, variæque Aſperitates & Eminentiæ, (ut TO, vel PO;) quod niſi per acclivem Aſcenſum fieri non poteſt: ubi hoc contingit, Directa Applicatio non ea eſt quæ eſt Horizonti TP parallela; ſed quæ eſt parallela Acclivitati TO. Cum itaque præter tractum Horizontalem, huic etiam caſui proſpiciendum ſit; idque eo magis, quoniam Pondus per Acclive difficilius trahitur quam per Planitiem: Commodum igitur deprehenſum eſt ut Axis anterior, depreſſior ſit quam Pectus Equi; quo BD recta (ſecundum quam Vis applicatur) ſit parallela potius Acclivitati TO; (ſaltem, ut propius ad paralleliſmum accedat quam ſi tam altus eſſet Axis quam Pectus Equi,

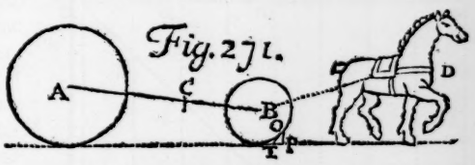


Fig. 271.

nedum eo ſuperior.) Sic utique directius eo loci Vis applicabitur, ubi plus opus eſt Virium; neque Attrahendum tantummodo, ſed Attollendum pondus erit, ſeu Elevandum. Atque hoc eo magis faciendum eſt, ubi per teſqua & ſalebras, viaſque inæqualiter aſperas, quam ubi per Planitiem trahendum eſt Plauſtrum.

37. Atque ad hunc etiam locum ſpectare poterit, ut reddatur ratio, cur quæ declivi plano incumbunt Gravia, ſi Rotunda ſint, deſcendendo Volvi ſoleant; Labi vero, ſi planis terminentur: atque illa facilius quam hæc moveri.

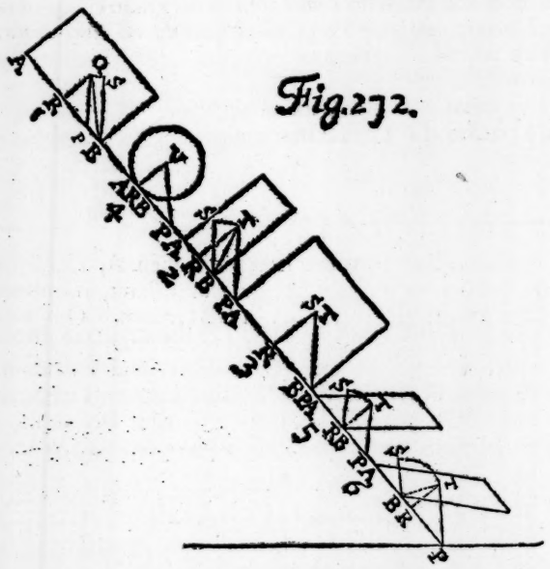


Fig. 272.

38. Intelligatur enim Q grave, declivi plano incumbens ſuperficie ſua plana AB: ſitque à ſui Centro Gravitatis perpendicularis ad declive planum QR, ad Centrum Terræ QP, declivi plano occurrens ſupra B. Manifeſtum eſt (ex Schematis inſpectu) non poſſe deorſum Volvi Q grave; niſi, facto B Centro motus, radio BQ deſcribatur peripheria, cujus ſupremum punctum erit S in recta BS ipſi PQ parallela ſeu ad Horizontem recta; & Centrum gravitatis Q per QS arcum continuo aſcendere; per prop. 20. Cap. 2. Et (aſcendente Centro gravitatis) aſcendere ipſum grave, per prop. 16. Cap. 4. Non igitur ob Gravitatem Volvetur circa B punctum permanens. Labi vero poteſt, (lato Q Centro in recta ipſi AB parallela,) quoniam ſic labendo deſcendet Q. Et quidem actu labetur, ſi tanta ſit in ea declivitate Gravitatis Vis ut ſuperare poſſit impedimentum (de quo ſupra aliquoties dictum) ex cohærentia, indeque orta Frictione.

39. Si vero, ut in Gravi T, recta à ſui Centro Gravitatis ad terræ centrum TP, declivi plano occurrat infra B: Volvendo deſcendet (& quidem potius quam Labendo, ob vitatam frictionem.) Quoniam peripheriæ Centro B, radio BT, deſcribendæ, ſupremum punctum S erit in BS recta, ipſi PT parallela; arcuſque ST deſcendens: (per prop. 20. Cap. 2.) adeoque præcipitabitur Grave T. Saltem niſi declivitas plani AB, ſeu rectæ huic parallelæ à T labente deſcribendæ, tanta ſit, ut gravitatis Vis in illa declivitate eo exceſſu ſuperet impedimentum à frictione ortum, ut exceſſus hic præpolleat Vi Gravitatis in ea declivitate quam habet arcus ST in puncto T; hoc eſt, (per prop. 15. Cap. 2.) quam habet Recta arcum in T puncto contingens.

40. Si B & P coincidunt; perinde eſt ad utrumvis caſum referas. Volvetur autem, non Labetur; ob Frictionem Impedientem.

41. Sin grave, ut V, Sphæricum ſit; (ſeu quod hujus inſtar eſt;) propter idem punctum AB, recta VP (ad horizontem recta) declivi plano infra B ſemper occurret; ſed & Declivitas Centri V Volventis (propter BV declivi plano rectam)

eadem

eadem erit atque V Labentis. Volvendo igitur (ob ſic vitatam frictionem) non Labendo deſcendet.

42. Quodque facilius moveatur V quam Q; manifeſtum item eſt. Quoniam, cum eadem ſit Declivitas Volventis V, atque Labentis Q; ſitque in Q (cum non poſſit niſi Labendo deſcendere) ſuperandum Impedimentum à Frictione ortum, ſed non item in V: facilius movebitur (cæteris paribus) V quam Q.

43. Sed & facilius quam T: propter Declivitatem Volventis V (eandem utique quæ eſt declivis plani) majorem quam Volventis T.

44. Intellige; Niſi angulus T B P; vel Rectus ſit, (coincidentibus R B;) quo caſu eadem erit Volventis T, atque Volventis V, declivitas: vel Acutus, (R infra B cadente) quo caſu major erit Declivitas Volventis T, quam volventis V; adeoque & facilius volvetur T quam V.

CAP. VIII.

De Trochlea, seu Polyspasto.

DEFINITIO.

Ex Orbiculis** (**uno vel pluribus**) **apte dispositis**, **circa axes suos volubilibus**, **quibus circumpositus Funis Ductarius pondus attrahit** (**seu quod tantundem est**) **compositum Instrumentum**, Trochleam **appellant.

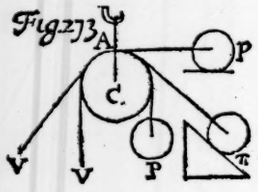
A Τρέχω, τροχὸς, τροχαλὸς, descendunt τροχάλειον, τροχαλία, τροχιλία, τροχιλαία (qua voce utitur Aristoteles in Mechanicis) ejusdem fere significatus omnia; atque hinc Latinorum *Trochlea*. Pappo πολύασπαστον dicitur à multiplici tractione. Nostri (à *pull* vello) *Pulley* appellant.

PROP. I.

Si Trochleæ Orbiculus singularis sit, & loco suo fixus; Vis Funi ductario applicata, Ponderi seu Impedimento amovendo æqualis, æquipollet: Adeoque sustinebit, atque aucta movebit, minuta vero ne sustinebit quidem.

PUta, si Orbiculo CA, circa Centrum seu Axem C volubili, ex Unco dependenti (aliasve sic fixo ut inde non amoveatur,) circumponatur Funis ductarius VAP, cui applicetur Vis in V, Pondus in P: Manifestum est, (nisi solvatur, rumpatur, extendatur funis, aliudve accidat simile, quod non supponimus,) quantum funis extremum V Vi trahitur secundum directionem suam, tantundem ascensurum extremum P cum annexo Pondere, contra suam. Et propterea (per prop. 7. Cap. 2.) si æqualia sint Vis & Pondus æquipollebunt; sin secus, præpollebit quod majus est. Unde constat propositum, per prop. 11, 12. Cap. 1.

Fig. 273



SCHOLIUM.

INtelligitur hæc propositio (ut & sequentes, quod hic moneo ne idem sæpius sit repetendum,) potissimum de Gravi directe dependente, ut P: Ubi scilicet Vis & Pondus agunt ut Vires contrariæ, (juxta prop. 12. Cap. 1.) Si vero Grave, ut π, situ Obliquo ferendum sit: Minuetur Ponderatio pro gradu declivitatis, (juxta prop. 19. Cap. 2.) Atque de Pondere sic minuto procedit propositio. Si vero pondus P movendum Humi jaceat, aut (ut in p) tractu horizontali ducendum sit, (ubi impedimentum ex scabritie ortum solummodo superandum sit,) vel Obex aliquis amoliendus sit, aliudve Obstaculum quod Impedimenti tantum rationem habeat, non Vis contrariæ; Vi sustentrice in V non opus erit (cum Onus illud intelligatur vel non niti in contrarium, vel ne eo feratur aliunde sustineri:) sed, quo moveatur, non minus requiritur, Vis æquipollente major. Aliaque ejusmodi sic intelligenda erunt ut in Capite præcedente.

Orbiculorum vero usus in Trochleis adhibetur, non tam propter rationem aliquam

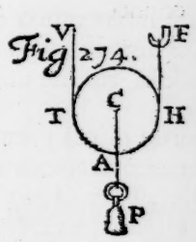
quam pure Mathematicam, quam propter rationem Phyſicam; ob corporum ſcabritiem. Quippe ſi tum Orbiculi tum Funis ductarii ſuperficies eſſent tam Mathematice Politæ ut nulla foret ad invicem adhæſio; quin poſſet Funis tam expedite labi, quam Orbiculus converti: Demonſtratio non minus procederet de C A Orbiculo (aliove duro corpore) permanente, quam circa C converſo. Cum vero (ut ad Cap. præced. oſtenſum eſt) hæc corporum Frictio, ſeu Abraſio mutua, impedimento ſit ne expedite moveatur Funis; ſitque hæc major futura ſi in A permanentem fieret, quam ſi circa axem C exiguum; (ob rationes in Cap. præced. oſtenſas:) hinc eſt, quod Orbiculorum uſus ſit ad motum expedite faciendum apprime utilis.

Manifeſtum item eſt, ob hujuſmodi Orbiculum ſingularem, loco ſuo fixum, (intellige, ita ut inde non amoveatur, utut inibi circa axem volvatur;) ſed neque ob plures ſic fixos, (ut poſt dicetur, & quidem ob eandem rationem;) nullam in V virium requiſitarum minutionem inferri: (cum Vis eadem in F, non minus quam in V, ſi ponderi æqualis ſit, ſuſtinebit; ſi major, movebit.) Poteſt tamen ob cauſas alias uſui eſſe hic Orbiculus. Quippe fieri poteſt, ubi Vis Humana (verbi gratia) applicanda ſit, ut, propter commodiorem corporis ſitum, vis ea poſſit fortius exeri in V quam in F: Vel etiam, in V, non modo vis nervorum (quæ ſola poterit in F applicari) ſed ipſum Pondus humani corporis applicari ad contrarium Pondus in P tollendum: Vel denique ob alias circumſtantias, (quæ præſenti conſiderationi omnino ſunt extrinſecæ, nec poſſunt facile numerari,) non parum adjumenti poterit accedere.

Quod autem Orbiculorum magnitudinem aut parvitatem ſpectat; ex Scholio propoſitionis ultimæ Capitis præcedentis petendum eſt.

PROP. II.

Si Trochleæ Orbiculus ſingularis, Ponderi conjunctus ſit, & cum eo trahendus; eique circumpoſiti Funis ductarii extremum alterum Unco (vel alias) fixum ſit, alteri Vis Motrix applicetur: Æquipollebit Ponderi (ſeu Impedimento amovendo) Vis *Dimidia* (directe applicata:) adeoque ſuſtinebit; atque aucta movebit; minuta vero ne ſuſtinebit quidem.



CUM enim, Aſcendente Orbiculo, ejuſve Centro C, (una cum annexo Pondere,) tantundem aſcendat T punctum contactus Orbiculi Funiſque V T, atque ob eam rationem tantundem promoveatur ſecundum directionem ſuam Vis motrix V: Sed & tantundem aſcendat punctum contactus Orbiculi ejuſdem cum fune penſili H F (ab F puncto fixo ad orbiculum in H pertingente,) & propterea tantundem abbrevietur funis F H; quantum autem funi F H ita demitur, tantundem vertente Orbiculo transferatur ad funem T V, qui propterea tantundem prolongatur: Hinc fit, quod Aſcenſus puncti V, (ſeu promotio Vis motricis ſecundum directionem ſuam,) Duplus ſit aſcenſus Centri C, ponderiſve P. Quippe tantundem promovetur V propter aſcenſum puncti T; atque ſecunda vice tantundem propter prolongatam T V rectam. Sed Ponderis P Aſcenſui, æquipollet Vis Dimidiæ Aſcenſio Dupla; per prop. 5. Cap. 2. Ponderi itaque in P æquipollebit Vis Dimidia in V. Adeoque (per prop. 11, 12. Cap. 1.) ſuſtinebit, & aucta movebit, minuta vero nequidem ſuſtinebit.

SCHO-

SCHOLIUM.

NOtandum hic est, (præter ea quæ ad prop. præced. monuimus,) ubi *Vim directe applicandam* dicimus; quo hoc fiat, requiri (illud utique hoc loco intellectum volumus) ut rectæ V T, F H, sint ipsi C P (directioni mobilis) parallelæ. Quippe, si parallelæ non sint; erit, pro obliquitate diversa, alia atque alia ratio tum tractionis secundum rectam T V, tum contractionis rectæ H F, ad ascensum C vel P: Et quidem (manentibus F V Punctis per quæ transeat funis) prout altius attollitur C vel P, Obliquitas ea continuo variatur. Verum ea consideratio non tam hujus loci est, quam ad Caput secundum spectat, ubi de motuum Obliquitatibus agitur. In Trochleis enim Chordæ vel parallelæ esse solent, vel tantillum à parallelismo declinare ut pro parallelis habeantur.



Fig. 275.

PROP. III.

Si Trochleæ Orbiculi plures sint; Calculo æstimabitur, ex Orbiculorum positione, quanta Vis expositio Ponderi æquipolleat; quæ & aucta movebit.

Nempe; Vis ea quæ est ad Pondus in reciproca ratione istius quam habet Virium in V Promotio ad Ascensum Ponderis in P.

Hoc est; in fig. 276. Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 8, 16, &c. (Geometrice proportionales) prout Orbiculorum numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 277, 278. (ubi Funis ductarius terminatur in puncto fixo, ut M.) Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 6, 8. &c. prout Orbiculorum infra positorum (cum Pondere tollendorum) numerus est, 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 279. (ubi ductarii Funis extremum cum Pondere trahendo connectitur ut in K,) Vis ad Pondus, ut 1 ad 1, 3, 5, 7, &c. prout numerus Orbiculorum infra positorum est 0, 1, 2, 3, &c.

Casus I.

NAm, in fig. 276. (per prop. 2. hujus) Vis in V æquipollet ejusdem duplo in A: Item, Vis in A, hujus duplo in B: Et Vis in B, ejusdem duplo in C

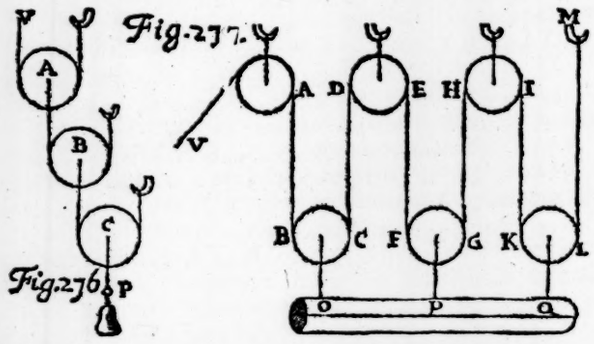


Fig. 276.
Fig. 277.

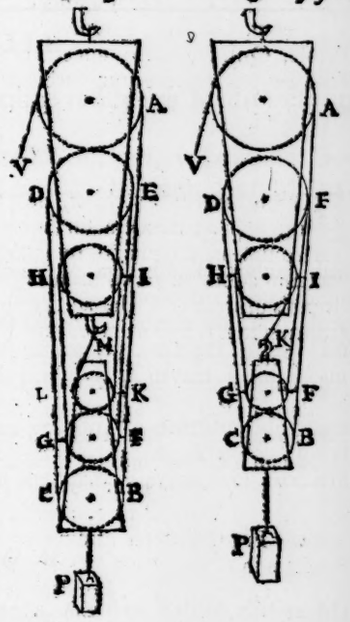
vel P. Atque sic porro quotcunque fuerint Orbiculi. Puta, Si Vis in V dicatur $\mathcal{V}$; tantundem valebit, atque $2\mathcal{V}$ in A; vel $4\mathcal{V}$ in B; vel $8\mathcal{V}$ in C vel P: (Atque

que sic porro quousque opus fuerit.) Hoc est, Vis in V, æquipollebit Ponderi in P, quod ad eam sit in rationis duplæ ratione toties multiplicata quot sunt Orbiculi: Nempe, in ratione Dupla, Quadrupla, Octupla, Sedecupla, &c. prout numerus Orbiculorum sit, 1, 2, 3, 4, &c.

Casus II, & III.

In Fig. 277, 278, 279. ubi Funis Ductarius V A B C, &c. singulos Orbiculos circumiens pertingit ad V punctum applicationis Virium: Si intelligatur Pondus pendere ex B (continuato fune A B ad Pondus P vel O P Q, ibique terminato,) Vis æquipollens in V vel A ad Pondus P erit ut 1 ad 1, per prop. 1. hujus.

Fig. 278. Fig. 279.



Si A B orbiculum B C (ex quo dependeat Pondus) circumiens figatur in D; erit (per prop. 2. hujus.) Vis in V vel A ad Pondus P, ut 1 ad 2; eo quod, elevato Orbiculo B C (cum appenso pondere,) tantundem abbreviatur utraque rectarum A B, C D; quantum autem utrique demitur, tantundem per A transit ad V; ut sit virium Promotio, Dupla ascensionis Ponderis. Idemque accideret, si funis V A B C D, orbiculum D E circumiens pertingeret ad F ibique figeretur; (non quidem ad Pondus quod sublevandum est, sed ad clavum aliquem seu palum fixum:) Cum enim, propter F punctum fixum, recta F E neutiquam abbreviaretur, nihilque inde transiret ad D; perinde est ad Vires in V vel A; sive in F vel E figatur funis, sive in D.

Si vero Funis V A B C D E F continuatus, cum Pondere connectatur in F (ut simul cum pondere punctum F elevetur:) propter rectas tres A B, C D, E F, tantundem abbreviatas singulas quantum est Ascensus Ponderis; omnium abbreviationes per A ad V translatas; vel (quod eodem recidit) si abesset orbiculus V A, ultra A protractas; erit Virium Promotio ad Ascensum Ponderis, ut 3 ad 1: adeoque Vis ad Pondus, ut 1 ad 3. per prop. 5. Cap. 2.

Similiter ostendetur; continuato fune V A B C D E F G ad H, ibique fixo, Vim ad Pondus (propter abbreviatas quatuor rectas A B, C D, E F, G H,) esse ut 1 ad 4. Et, continuato per I ad K, ibique cum Pondere connexo; ut 1 ad 5. Et, continuato per L ad M: ut 1 ad 6. Atque sic porro prout opus erit. Et quidem, quoties funis extremum cum Pondere connexum est, (ut ad K;) ut 1 ad numerum imparem; quoties extra figitur (ut ad M,) ut 1 ad numerum parem.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est; Chordas omnes seu Rectas abbreviandas, ut A B, C D, E F, G H, I K, L M, &c. tanquam Parallelas habitas esse. Et quanquam in Trochleis non raro contingat, (ut in fig. 278, 279.) ut à Parallelismo nonnihil recedant; eo quod Orbiculi inæquales esse soleant, quoniam si invicem æquales essent coinciderent Chordæ seque invicem impedirent: tantillum tamen illud est, ut negligi soleat.

Notandum item, Orbiculos superiores, loco suo fixos esse; (quique ad hos, aut horum syntagma, alligatur funis, perinde est acsi ad clavum extra positum figeretur:) Inferiores autem (eorumque syntagma) cum Pondere connexos esse, & juxta cum illo attrahi. Ab horum itaque, non ab illorum, numero determinatur Virium Potentia.

Trochlea fig. 278. tantundem valet cum illa fig. 277. sed ad formam commodiorem redacta; & quæ ad praxin adhiberi solet.

PROP. IV.

Trochleam ita construere, ut Pondus sit ad Vim æquipollentem, in data Multiplorum ratione.

Fig. 278, 279. SI data Multiplorum ratio à numero *Pari* denominetur, (ut Dupla, Quadrupla, Sextupla, &c.) Funis ductarii extremum remotius, extra figatur (puta ad Uncum, Clavum, Palumve, aut quiddam simile:) Si à numero Impari; (ut Tripla, Quintupla, &c. aut etiam Simpla:) cum Pondere trahendo connectatur: Totidemque adhibeantur Orbiculi quot innuit præcedens Propositio. Et fiet quod imperatum est. Per ibidem demonstrata.

SCHOLIUM.

POssunt autem Trochleæ, non tantum superne & situ perpendiculari suspendi, uti cum ad Pondera sursum tollenda adhibentur: sed etiam ad Tractionem Horizontalem, seu in alio quocunque situ positam; aut etiam ad amovendum Obstaculum adhiberi. Possuntque non modo seorsim, sed & conjunctim cum aliis Fig. 258. Organis usurpari. (Ut, ad fig. 258. junctim cum Ergata.) Potestque horum Organorum tum singulorum seorsim (pro sua cujusque natura,) tum simul junctorum, Potentia calculo æstimari.

Exempli gratia. Propter interpositam Ergatam inter A & P, facilitatur Tractio Ponderis in P, (seu augetur valor Virium in A,) in ratione CA ad CB; puta, ut 3 ad 1; adeoque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in P ut 3. Item, propter interpositam Trochleam inter P & Π, (cujus Chordæ abbreviandæ sint, verbi gratia, quatuor,) facilitatur porro Tractio Ponderis Π, ut 4 ad 1, respectu Virium in P; adeoque Vis in P ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 4; seu Vis ut 3, Ponderi ut 12. Ergo, propter utramque interpositam inter A & Π, facilitatur Tractio Ponderis in Π respectu Virium in A, in ratione (3×4=) 12 ad 1: adeoque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 12. Sed & porro, facilitatur Ponderis Q tractio, propter subjectas Scytalas sive Palangas R, S, (sive Rotulas habeant capitibus adjunctas ut R, sive non habeant ut S,) ob minorem exinde frictionem quam si humi traheretur: At, in qua ratione sic facilitatur, non ita facile est hic determinare; utpote quod dependeat à variis materiæ circumstantiis Physicis; puta, tum Humi, tum Scytalarum, tum Ponderis his proxime incumbentis, Duritie, Lævore, aliisque ejusmodi, quæ prout magis minusve adfuerint, plus minusve facilitant tractionem.

Atque ad eandem formam, (mutatis mutandis prout cujusque Organi natura postulat) in aliis conjunctis Organis Potentia calculo æstimabitur.

CAP.

CAP. IX.

De Cochlea.

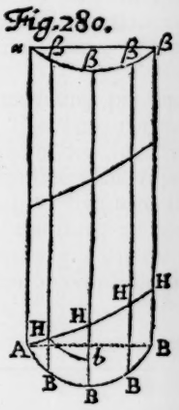
DEFINITIONES.

DEF. I. *Si in Cylindri Recti ſuperficie, intelligatur Recta, baſi inſiſtens circa Axem ferri, motu æquabili: Atque interim, per longitudinem iſtius rectæ Punctum moveri, motu item æquabili: Quæ à Puncto ſic moto deſcribitur Curva, vocatur* Helix (*ſive* Spiralis) circa Cylindrum; *Rectum, intellige.*

Angulumque quem facit hæc Curva cum Baſe Cylindri; Angulum Inclinationis *appellamus: Et, quem facit cum Latere Cylindri, Angulum* Obliquitatis.

PUta; Si circa Cylindrum rectum A B β α, cujus baſis A B B, feratur (in ſuperficie Cylindri) recta A α in ſitum B β, atque ſic porro; (ut cum deſcribitur Superficies Cylindrica;) motu æquabili: Atque in ea recta, ſic mota, feratur A punctum verſus α; hoc eſt, à B verſus β; puta, ad H; motu item æquabili: Adeoque, qua ratione creſcant A B, A B, eadem creſcant B H, B H, ubique: Curva A H H, eſt *Helix* ſive Spiralis *circa Cylindrum*; intellige, Rectum. Angulumque H A B, vocamus *Angulum Inclinationis*; & A H B, *Angulum Obliquitatis.*

Fig. 280.



Cylindrum autem *Rectum* innuimus; non quod circa Cylindros alios non poſſit deſcribi *Spiralis*: Sed quod ea, quæ nobis hic uſui eſt futura, illa ſit quæ circa Rectum deſcribitur. Et quidem, ut *Cylindrus* prout in Elementis definitur, eſt *Cylindrus Rectus*, (Scalenis enim non convenit ea definitio;) ſic & *Spiralis circa Cylindrum*, ſpeciatim ſolet intelligi de ea quæ eſt circa Cylindrum *Rectum.*

Helix autem ſeu *Helice*, (ἕλιξ, ἑλικὴ, ab ἑλίσσω *volvo*,) Latine *Spiralis* dici ſolet, à *Spira*, σπεῖρα, atque hoc à σπείρω *necto*: & *Torſionem* innuit, qualem in Funibus videmus.

II. *Cylindrum Rectum,* Helice *ſimiliter ſulcatum,* Cochleam *appellant. Et quidem* Cochleam Marem, *ſeu Interiorem, ſi ſic ſulcata ſuperficies Cylindrica* Convexa *ſit*: Fœminam, *ſeu exteriorem, ſi* Concava; *Hoc eſt, ſi Solidi cylindrice excavati ſuperficies Concava ſic ſulcata fuerit.*

DIcitur autem *Cochlea* Latine, Græce κοχλίας, ob *Limacis* (ſic item dicti) aliorumque ejuſmodi Teſtaceorum ſeu Conchyliorum, ſimilitudinem. Noſtri *Screw*, & *Vice*; Galli *Vis*, appellant; Itali, *Vite*; ob Vitis ſimilitudinem ambientis Ulmum, ut Hedera Quercum.

Potiſſimum adhiberi ſolent Cochleæ, obicibus propellendis, frangendis, aut durius comprimendis, aliiſque motibus Truſione factis. Atque in eum finem, Mas Fœminæ, hoc eſt Interior Exteriori intrudi.

Soletque forinſecus adhiberi Manubrium (aut quod hujus inſtar eſt) ut in Ergatis, aliiſque ſimilibus Inſtrumentis: Adeoque Potentia, Axis in Peritrochio, cum hac Cochleæ conjungi.

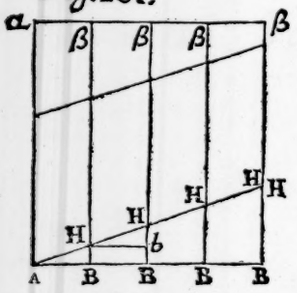
PROPOSITIONES.

PROP. I.

Helix circa Cylindrum Rectum, est Curva Similaris, seu Uniformis. Intellige; cujus pars quælibet cuilibet (æquali sumptæ) congruat. Eademque, si intelligatur in Planum expandi Superficies Cylindrica, fiet Linea Recta: (aut plures Rectæ.) Idemque, qui prius erant, manebunt, tum Inclinationis, tum Obliquitatis, Anguli.

Fig. 280. SUmpta enim (verbi gratia) arcui AB, æquali BB, hoc est Hb; erit (propter AB ad AB, ut HB ad HB) etiam (dividendo) ut AB ad BB, sic recta HB (hoc est recta Hb) ad rectam bH. Adeoque (propter æquales angulos HBA, HBA,) si intelligatur arcus Hb, arcui AB (simili & æquali) applicari, congruent; adeoque bH ipsi BH; atque hoc ubique. Et propterea HH, ipsi AH; pars quælibet cuilibet æquali. Quod demonstrandum erat.

Fig. 281.



Item; si (expansa in Planum superficie Cylindrica) intelligatur arcus ABB fig. 280. in rectam ABB fig. 281. extendi; cui applicentur, ut prius BH, BH rectæ: Cum sit ubique, ut AB ad AB, sic BH ad BH; adeoque ABH, ABH, similia Triangula; erit AHH Linea Recta: Aut etiam, (si dissecta secundum longitudinem superficie Cylindrica, secetur etiam Helix,) Rectæ plures. Quod itidem demonstrandum erat,

Cumque eadem omnino sit superficies ABH plana fig. 281. atque ABH curva fig. 280. nisi quod hic in singulis AB rectis parallelis fiat flexio; quæ Angulos HAB, AHB, neutiquam immutat: Iidem qui prius erant manebunt tum Inclinationis, tum Obliquitatis Anguli. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

AFfectionum harum, posteriores duæ, etiam Spiralibus circa Cylindros Scalenos conveniunt; aut etiam circa solidum Prismaticum quodvis: quod ex demonstratione satis patet. Nempe si intelligatur ABB, non quidem Cylindri basis circularis, sed planum Ellipticum quod ad Latus seu Axem Cylindri Rectum sit: Aut, in solido quovis alio Prismatico, Planum quodcunque fuerit quod ad Axem ejus, Latusve, Rectum sit: Sitque ut AB ad AB, sic respective BH ad BH, ubique.

Sed non item Prima; quæ, præterquam Circuli Peripheriæ, atque huic circa Cylindrum Rectum Helici, nulli ex lineis Curvis convenit.

Sed neque ita intelligendum est, quasi circa Cylindrum Rectum Helix quælibet cuilibet congruet; (nam neque Circuli Peripheria quælibet cuilibet congruit, sed æqualium tantum circulorum;) aut etiam Helicum cuilibet circa eundem Cylindrum factarum: Sed, pars quælibet cuilibet Helicis ejusdem; vel etiam diversarum, modo Cylindri, circa quos fiunt, æquales bases habeant, sitque idem Inclinationis Angulus quem cum Cylindri base facit Helix, atque ad easdem partes.

Ab hac autem Helicis similaritate, seu situ uniformi, dependet Cochlearum usus; ut ex propositione sequente patebit.

PROP.

PROP. II.

Si Cochlea Exterior (quam Fœminam vocant) ita Interiori (ſeu Mari) conformis ſit, ut pars parti apte reſpondeat, (hujus Eminentiis illius Cavitatibus congruentibus, & contra;) per Exteriorem permanentem, Interior tota labetur; (partibus ſequentibus in præcedentium loca continue ſuccedentibus:) aut etiam ſuper Interiorem permanentem propelletur Exterior.

SEquitur hæc ex Propoſitione præcedente. Cum enim, (propter Cochleam Helice ſulcatam, & quidem ſimiliter,) Superficies Cochlearis (ſive Interior ſive Exterior) vel etiam ipſa Cochlearis Soliditas, intelligenda ſit, (per def. 1. Cap. 4.) ex Helicibus

Fig. 282.

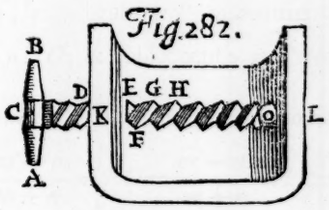
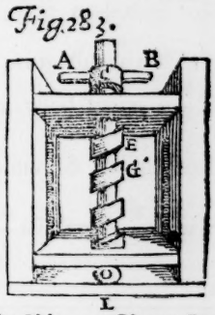


Fig. 283.



circa Cylindrum rectum, adeoque ſimilaribus, conflari: Si ita conſtitutæ ſint Cochleæ Interior atque Exterior, ut illius portio aliqua hujus correſpondenti portioni ita congruat, ut illius Eminentiæ hujus Cavitatibus recipiantur, & contra; etiam pars alia quælibet, reſpective ſumpta, ſimiliter congruet; totaque altera per alteram tranſibit, (ſuccedentibus cujuſque Helicis partibus ſequentibus in ejuſdem præcedentium loca, ut H H in A H, fig. 280.) Unde conſtat propoſitum.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, utut Cochlearum tum Eminentiæ tum Cavitates ita plerumque fieri ſoleant, quaſi ex Trianguli æquicruris (ut fig. 282.) vel Quadrati aut ſaltem Parallelogrammi rectanguli (ut fig. 283.) ductu ſecundum Helicem illam, cui tranſverſim inſiſtat: nihil tamen impedit, quin pro Triangulo illo ſeu Parallelogrammo quævis alia figura Rectilinea vel Curvilinea ſubſtituatur; modo ſic feratur (quod & in illis cavendum erit) ut ſimilem ubique ſitum ad Helicen illam retineat, quo ſulcatio ſit ubique ſui ſimilis.

Atque etiam, quo Interior Exteriori conveniat, illius Eminentiæ hujus Cavitatibus reſpondere debent, (& contra,) tanquam ex ſimili ejuſdem figuræ ductu formatæ: ut autem utriuſque Eminentiæ ita ſuis Cavitatibus reſpondeant, non eſt neceſſe.

PROP. III.

Datis in Cochlea, Ambitu Cylindri, cum Inclinationis Angulo, (ſeu, quod hinc reſultat, intervallo, ſecundum Cochleæ longitudinem æſtimato, duarum ejuſdem Spiralis converſionum continue proximarum;) & Manubrii cui Vis applicatur longitudine, (ſeu Ambitu quem Vis peragit in una Cochleæ converſione;) Cochleæ Vis calculo æſtimabitur.

Nempe; ut eſt Intervallum duarum continue proximarum Spiralis converſionum (ſecundum Cochleæ longitudinem æſtimatum,) ad Ambitum quem Vis applicata peragit in una Cochleæ converſione; ſic Vis illa Motrix, ad Pondus, Obicem, ſeu Impedimentum cui æquipollet: quæ itaque aucta movebit.

Adeoque; Quo longius eſt Manubrium, atque Intervallum illud brevius, eo major eſt (cæteris paribus) Cochleæ Vis.

Fig. 282. INtelligatur enim Cochlea CO interior ſeu Mas, per exteriorem ſeu Fœminam K fixam, ope Manubrii A C B verſando protrudi, adverſus Obſtaculum ſive Impedimentum O; quod itaque, protruſa Cochlea, vel propelli debeat, vel (ſi hoc impediatur per obſtinaciam ultra poſiti L) comprimi aut confringi. Manifeſtum eſt, dum Vis in A applicata, una converſione facta, circulum Centro C deſcribit, cujus diameter ſit A B; tantundem protrudi Cochleam adverſus Impedimentum O, quantum eſt Intervallum E G; perveniente ſcilicet D ad E, atque E (circuitu per F facto) ad G, atque G ad H, & ſic porro. Si itaque fiat, ut Circuli radio C A vel diametro A B deſcripti peripheria, ad rectam E G, ſic Pondus ſeu Impedimentum O, ad Vim in A; Vis Ponderi ſeu Impedimento Æquipollebit: per prop. 5. Cap. 2. Adeoque aucta movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1.

Patet hinc; Quo longius eſt Manubrium C A, vel A B, (in partem alteram vel utramque protractum;) Item, Quo minus eſt Intervallum E G, (ſive id fiat propter minorem Cylindri diametrum, ſive propter minorem Inclinationis Angulum, ſive propter utrumque;) eo fortius aget Cochlea, cæteris paribus.

Fig. 283. Idem ſimiliter oſtenderetur; ſi fixa Interiore Cochlea C O, puta in trabe lignea L; converſa Cochlea Exterior A B, interjectum quidpiam comprimeret: Seu quod hujus inſtar ſit. Idemque, aliis innumeris Cochleas applicandi modis, pariter accommodabitur.

SCHOLIUM.

AT interim hic nulla ratio habita eſt Impedimenti quod ex Frictione oritur, quod tamen in Cochleis magnum eſſe poteſt; (uti nec in aliis Organis habita eſt ratio difficultatis quæ eſt in ipſo Organo movendo:) Sed ſiquis iſtius etiam rationem habere velit; addendum erit illud ex Frictione Impedimentum, ei quod eſt in ipſo Obſtaculo O amovendo, comprimendo, frangendo, aliaſve amoliendo: totumque illud Impedimenti loco habendum erit in valore Vis motricis æſtimando.

PROP. IV.

Datum Pondus ſeu Impedimentum, data Vi, Cochlea movere.

Fig. 282, 283. CUM in Cochlea ſic conſtructa, ſi ſit, ut Peripheria Circuli A B, ad rectam E G, ita Pondus, Obex, vel Impedimentum quodvis datum ad datam Vim; Vis Impedimento æquipolleat; (per prop. præced.) Si fiat ea ratio aliquanto major; Vis præpollebit, adeoque movebit. Per prop. 11, 12. Cap. 1.

PROP. V.

Spiralis circa Cylindrum, Longitudinem exhibere.
Et quidem, ſive Cylindrus rectus ſit, ſive Scalenus; ſive etiam pro Cylindro ſubſtituatur Solidum quodvis Priſmaticum.

OStenſum eſt, (ad prop. 1. hujus,) Curvam Spiralem A H H, fig. 280. eandem eſſe atque A H H rectam, fig. 281. (expanſa ſcilicet in Planum ſuperficie Cylindrica.) Datur autem rectæ A H H fig. 281. longitudo: (utpote, cujus quadratum æquale eſt duobus ſimul quadratis rectarum A B B, B H, fig. 281. hoc eſt, A B B curvæ, rectæque B H, fig. 280.) Datur igitur & curvæ A H H fig. 280. longitudo; (utpote quæ illi rectæ æqualis eſt.) Quod erat faciendum.

Atque idem ſimiliter oſtendetur in Cylindro Scaleno: Aliove Solido Priſmatico vel Columnari quovis, ſive Rectum ſit, ſive Scalenum; (dummodo intelligatur, A B B planum, ejuſdem Lateri Axive Rectum eſſe; ipſaſque rectas B H, B H, ipſis A B, A B, rectis curviſque aut mixtis proportionales:) per ea quæ oſtenſa ſunt in Schol. prop. 1. hujus.

PROP.

PROP. VI.

Cochleæ Soliditatem exhibere.

INtelligatur Cylindri Cochleæ inſcripti ſuperficies Curva, in Planum ABβα parallelogrammum expandi: Atque in eo recta AHH, eadem quæ fuerat, in ſuperficie Cylindrica, curva Spiralis, cujus ductum ſequitur Cochlea.

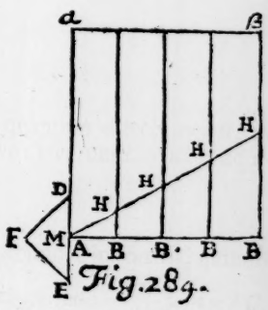


Fig. 289.

Intelligatur porro, ſecto per Axem Cylindro, in una aliqua Cochleæ revolutione, Sectio facta DEF; (puta Triangularis, Quadrata, aliave quælibet, pro expoſitæ Cochleæ natura; cujus Figuræ magnitudinem datam ſupponimus, ejuſque Centrum gravitatis M notum.) Cujus itaque Baſin (in latere Cylindri inſcripti poſitam) oblique ſecet, ſecundum Obliquitatis angulum HAα, ſeu AHB.

Si itaque intelligatur, ſuper ABβα planum, in recta DE, ad angulos rectos inſiſtere figura data DEF; atque (eiſdem ad planum angulis retentis) ſuper AHH rectam moveri, retento eodem Obliquitatis Angulo: Manifeſtum eſt, Priſma deſcriptum iri cujus Baſis ſit ipſa DEF, Latus autem ipſi AHH æquale, ſed Altitudo quanta eſt recta ABB.

Adeoque (propter Priſmata, ſuper æquales baſes, altitudinibus proportionalia,) tantundem erit Priſma Scalenum DEFHH, atque Priſma Rectum DEFBB: Nempe, quantum eſt quod fit ex DEF plano, in altitudinem ABB ducto.

Intelligatur demum, planum illud ABβα, in ſuperficiem Cylindricam (uti prius fuerat) curvatum; manente lineæ ABB longitudine: Manente item ejuſdem ad DEF planum poſitione perpendiculari. Unde fiet, ut recta quam prius deſcripſerat F punctum (ipſi ABB æqualem) protracta jam in arcum majoris circuli ſimilem ipſi ABB, longior jam futura ſit (propter curvaturam) quam prius fuerat. Idemque de arcubus qui ab aliis deſcribuntur ejuſdem DEF punctis, quæ ſunt extra DE rectam, intelligendum erit.

Et propterea majus erit ſolidum ſic curvatum, quam fuerat Priſma. Quantum nempe eſt, quod fit ex arcu qui ab M (ipſius DEF centro gravitatis) deſcribitur, in ipſam DEF ducto. per prop. 12. Cap. 5.

Cumque hoc perinde valeat, in ſitu ABB, atque in ſitu AHH: Si intelligatur DEF figura plana (quam in una aliqua Cochleæ circulatione facit Planum per Axem) in rectam duci quæ æqualis ſit arcui circulari quem deſcriberet ejuſdem DEF Centrum gravitatis M, ſecundum ductum arcus ABB latum, (circulatione una vel pluribus, perfectis vel imperfectis prout expoſitæ Cochleæ Circulationes eſſe contigerit:) habebitur (quicunque fuerit Obliquitatis Angulus) Cochleæ magnitudo. Et quidem (cum eadem utrobique valeat demonſtratio) ſive Cochlea Mas fuerit, ſive Fœmina. Quod erat propoſitum.

Sin porro Cylindri, cui adjacet Cochlea, magnitudinem adjungere libeat: id facile fiet ob notam Cylindri magnitudinem: per § O prop. 12. Cap. 5.

SCHOLIUM.

IDem valeret, quod ad Solidi magnitudinem ſpectat, ſi, pro vera Cochlea, ſubſtitueretur aliud ſolidum, ex ſimili ductu ejuſdem DEF plani per curvam AHH, aliter conſtitutam; puta, ſumptis BH, BH, non quidem in ipſarum AB, AB, ratione, ſed in harum ratione duplicata, triplicata, ſubduplicata, ſubtriplicata, aliaſve conſtituta; vel etiam per AHH curvam quamlibet. Quippe, non modo Priſma Scalenum utcunque Inclinatum, ſed & utcunque Diſtortum, æquatur Priſmati Recto æque alto: (Quod in Tractatu *de Conicis ſectionibus*, prop. 3, 4. oſtendimus:) Atque Curvatura Cylindrica utrobique tantundem præſtat. Verum de his, aliiſque ſimilibus, (cum ad præſens negotium non ſpectent,) non erit hic expatiandi locus.

CAP.

CAP. X.

De Motibus Compoſitis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.

PROP. I.

Si, Mobili in Motu poſito, accedat nova Vis, ſeu novus Impetus, ſecundum eandem directionem; fit Motus Acceleratio.

Si Impedimentum, ſeu Vis contraria: fit Retardatio.

Et utrobique pro ratione novi iſtius ſive Impetus, ſive Impedimenti, ſeu Vis contrariæ.

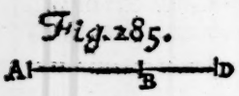
Adeoque ſi Impedimentum ſeu Vis contraria ſit Vi poſita minor; perſeverabit Motus ad eaſdem partes, celeritate minuta.

Si æquale; Motus tolletur: aut etiam ſi Impedimentum præpolleat.

Sin præpolleat Vis contraria; ponetur etiam Motus ad partes contrarias.

SIt A mobilis, ſecundum rectam AB moti, Celeritate C, Pondus P: Adeoque Vis ſeu Impetus quo movetur $V = PC$: per prop. 27. Cap. 1. Idemque Motus eadem Celeritate, niſi accedat Impedimentum, perſeverabit; etiamſi non accedat nova cauſa motrix. per prop. 11. Cap. 1. (Quippe concepto Motui tollendo, tantundem requiritur, quantum ponendo requireretur ſi non eſſet.) Accedat autem in B nova Vis ſeu novus Impetus, ſecundum eandem directionem, puta ut nV: Adeoque fit Vis tota, ut $V + nV = PC + nPC$. per prop. 8 & 27. Cap. 1. Cum itaque idem ſit, quod prius, Moti Pondus P; fiet (diviſo $PC + nPC$ per P) celeritas $C + nC$. per eandem prop. 27. Cap. 1. Adeoque acceleratur Motus, in ratione $1 + n$ ad 1. Quod demonſtrandum erat. Eademque celeritate (niſi quid aliud intercedat) deinceps movebitur, puta ad D. per prop. 11. Cap. 1.

Fig. 285.



Sin accedat Impedimentum aut Vis Contraria, ut nV, (quod itaque ſigno — notandum erit:) Adeoque Momentum ſeu Vis jam ſuperſtes (per prop. 8. vel 10. Cap. 1.) ſit $V - nV = PC - nPC$: Et, (propter idem, quod prius, Pondus P,) Celeritas $C - nC$. per prop. 27. Cap. 1. Motus minuitur ſeu retardatur; utpote cujus Celeritas jam ſit ad priſtinam, ut $1 - n$ ad 1. Quod itidem demonſtrandum erat. Eademque Celeritas (niſi quid aliud intercedat) deinceps perſeverabit. per prop. 11. Cap. 1.

Adeoque, ſi nV minus ſit quam V; ſeu n quam 1: manebit adhuc motus ad eaſdem partes, ſed celeritate minuta, nempe $C - nC$.

Si nV ſit ipſi V æquale, ſeu $n = 1$: Motus tolletur; propter Impedimentum Momento æquale: adeoque $C - nC = 0$, Celeritas nulla.

Atque hæc quidem indifferenter ſive nV ſit ſimpliciter Impedimentum, ſive ſit Vis contraria. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Si vero nV majus ſit quam V; (adeoque $V - nV$ quantitas negativa; per prop. 8. Cap. 1.) ſitque nV ſimpliciter Impedimentum: adhuc fortius ſiſtetur Motus, (propter Impedimentum Momento præpollens, adeoque potens etiam Majorem Motum ſiſtere:) per prop. 11. Cap. 1.

Sin nV (ipſi V præpollens) ſit (non ſimpliciter Impedimentum, ſed) Vis contraria: non modo totus qui prius fuerat motus tolletur, ſed ponetur contrarius, per prop. 12. Cap. 1. Celeritate $-C + nC$; per prop. 27. ejuſdem. Quæ erant ultimo demonſtranda.

PROP.

PROP. II.

Si Vis Motricis, per ſe æquabilis, continua fiat applicatio; producetur Motus continue Acceleratus.

Et quidem ita Acceleratus, ut temporibus æqualibus æqualia concipiat Celeritatis Incrementa: Quem Motum vocant *Æqualiter Acceleratum.*

Si Vis Impeditivæ, per ſe æquabilis, ſimilis fiat applicatio; ſimilis prodibit Motus Retardatio. Quem Motum vocant *Æqualiter Retardatum.*

Et quidem hoc eouſque donec totus tollatur; vel etiam (ſi Impedimentum illud ſit à Vi contraria) ponatur contrarius.

INtelligatur enim Cauſa Motrix aliqua, uno Temporis momento, Mobili imprimere gradum Celeritatis ut 1. Gradus hic, niſi fuerit Impedimento aliquo ſublatus, etiam ſine nova Cauſa perſeverabit. per prop. 11. Cap. 1. Eadem vero Cauſa, ſimiliter agens, ſecundo item Momento applicata, tantundem efficiet; per prop. 7. Cap. 1. Adeoque (perſeveranti gradui primo) ſecundum ſuperaddet. Et ſimiliter tertio momento (duobus illis perſeverantibus) ſuperaddet tertium. Atque ſic deinceps.

Adeoque (ſumpto initio Seriei à principio Motus) Celeritatum gradus (adeoque & Longitudines emenſæ; per prop. 23. Cap. 1.) Erunt, ut 1, 2, 3, 4, &c. ſeu (quod in infinite exiguis tantundem valet, per prop. 1. Cap. 5.) ut 0, 1, 2, 3, &c. vel etiam, ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionales; ſeu, ut rectæ Triangulum Complentes, per def. 1. Cap. 4. (Reſpicitur autem illic, figura ex parallelogrammis triangulo Circumſcripta; juſto Major: iſtic, Inſcripta; juſto Minor: hic, intermedia, partim Circumſcripta, partim Inſcripta; ipſi Triangulo Fig. 286.

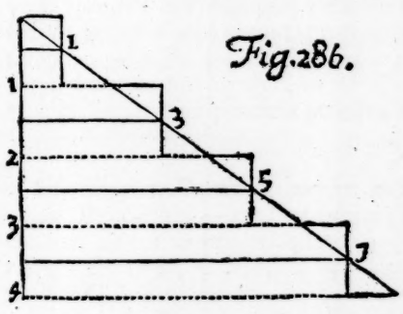
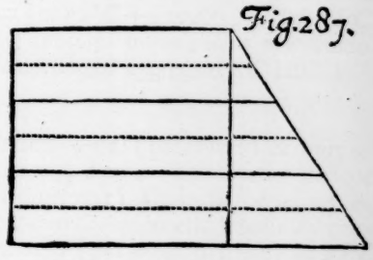


Fig. 286.


Fig. 287.

Æqualis: ut ad prop. 1. Cap. 5. dictum eſt.) Adeoque emenſæ Longitudines, ab initio computatæ, ut Triangulorum illorum Plana quæ complent illæ rectæ: adeoque in duplicata ratione Temporum.

Si vero, non ab ipſo Seriei initio, principium ſumamus; ſed ab acquiſito ſeu poſito aliquo Celeritatis gradu; puta, ſi à poſito Celeritatis gradu ut C initium ſumamus; ſimiliter oſtendetur, continuis momentis ſequentibus, Celeritatis gradus futuros $C+1$, $C+2$, $C+3$, &c. ſeu $C+1$, $C+3$, $C+5$, &c. Hoc eſt, ut rectæ in Trapezio, ſeu Triangulo truncato. Quale autem ſumendum erit Trapezium, facile determinabitur ex ratione quam habet Celeritas ultimo acquiſita; ad celeritatem primo poſitam: quippe inde determinabitur ratio parallelorum in trapezio laterum maximi ad minimum; eritque Triangulum ſuper eorum maximo æque altum, ad Trapezium, ut maximum illud ad ſummam utriuſque; Altitudine ſumpta qualibet. Fig. 287.

Eodem modo ostendetur, in motu Retardato: Puta, si, posito aliquo celeritatis gradu quo feratur mobile, ut C, intelligatur Vis impeditiva, in se æquabilis, continuo accedere; quæ propterea singulis momentis tantundem demat: Fient celeritatis gradus continue sequentes, ut $C-1$, $C-2$, $C-3$, $C-4$, &c. puta usque ad $C-C=0$, ubi motus primo positus plane absumitur.

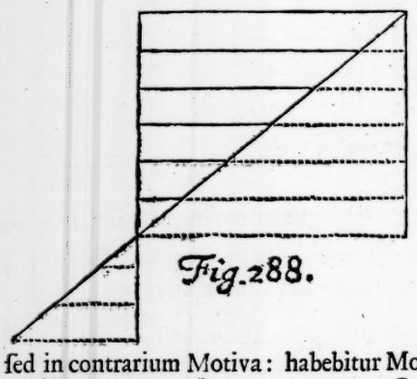


Fig. 288.

Adeoque, si porro continuetur ablatio, puta ad $C-C-1$, $C-C-2$, $C-C-3$, $C-C-4$, &c. hoc est, ad $0-1$, $0-2$, $0-3$, $0-4$, &c. seu -1, -2, -3, -4, &c. sitque Vis illa Impeditiva, non Impeditiva simpliciter, sed in contrarium Motiva: habebitur Motus in partes contrarias, cum celeritatis gradibus 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 12. Cap. 1. Si vero simpliciter Impeditiva sit; ubi ad $C-C$ pervenitur, tollitur Motus; sed quicunque deinceps succedat gradus Impedimenti, utut fortius impediat, non tamen in contrarias partes pellit: Supponitur utique Vim Motricem non habere.

Prioris instantiam habemus in Motu Gravium sursum projectorum (secluſa consideratione impedientis medii;) ubi post superatam à Gravitate Vim sursum projicientem, descendit grave. Posteriorem quadantenus refert motus projectorum (secluſa gravitatis consideratione) in quamcunque partem; Ubi Medii Densitas, vim projectricem obtundit, & sensim minuit, tandemque tollit; sed non in partes contrarias repellit.

PROP. III.

Si consideretur Gravitas tanquam Vis Motrix deorsum, in se æquabilis, atque continue applicata:

Descensus Gravium (secluſa consideratione medii resistentis, & siquid est ejusmodi) est Motus æqualiter Acceleratus.

Adeoque, temporibus quibusvis à principio decidentiæ sumptis, emensæ Longitudines sunt in duplicata ratione Temporum.

Puta, sumptis Temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines erunt ut horum quadrata 1, 4, 9, 16, &c.

Temporibus autem invicem æqualibus, à principio continue consequentibus, primo, secundo, tertio, quarto, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. quadratorum differentiæ, arithmetice proportionales.

Si vero à posito aliquo seu jam acquisito celeritatis gradu initium sumatur; longitudinibus jam dictis addendum erit quantum ea celeritate, æquabili motu, eo tempore acquisitum foret.

Gravium vero sursum projectorum Ascensus, est motus æqualiter Retardatus:

Et Longitudines ibidem emensæ habentur, si auferantur jam dictæ longitudines à longitudine quæ Celeritate prima eodem tempore foret acquisita.

SEquitur ex præcedente. Quippe, si intelligatur Grave in A; sublato fulcro, descensum ob gravitatem suam inchoans; momento primo celeritatis gradum
Fig. 289. acquisivisse, ut 1; secundo, ut 2; tertio, ut 3; & sic deinceps; (propter tantundem celeritatis singulis momentis additum:) adeoque celeritatum gradus temporibus à principio sumptis ubique proportionales: puta ut Tempus A b, ad Tempus

pus AB, ſic bβ (celeritatem in b) ad (celeritatem in B) Bβ: & ſic ubique: Cum Longitudines emenſæ, ſint Celeritatum gradibus proportionales; erunt omnes longitudines tempore Ab tranſactæ, ad omnes tranſactas tempore AB; (ſeu tota longitudo tranſacta tempore Ab, ad totam tranſactam tempore AB;) ut omnes rectæ complentes Abβ triangulum; ad omnes complentes triangulum ABβ; Hoc eſt, ut Triangulum Abβ ad ipſum ABβ Triangulum; Adeoque in Laterum Ab, AB, ratione duplicata (propter figuras ſimiles in duplicata ratione laterum homologorum.) Ideoque ſi ſumantur tempora Ab, Ab, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt Triangula Abβ, Abβ, &c. (adeoque & tranſactæ Longitudines,) ut 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, quæ temporibus æqualibus continue ſequentibus, Ab, bb, &c. tranſiguntur; Abβ, bββb, &c. ut eorum differentiæ, 1, 3, 5, 7, &c. Et ſic ubique.

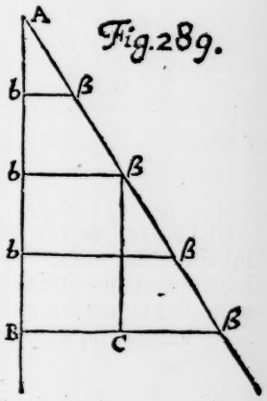


Fig. 289.

Puta, ſumptis in recta AE, Fig. 290. partibus AB, BC, CD, DE, &c. ipſis 1, 3, 5, 7, &c. proportionalibus: æqualibus illæ temporibus tranſigentur.



Fig. 290.

Si vero intelligatur, Fig. 289, non ab ipſo motus initio in A, computus inſtituendus; ſed à celeritatis gradu jam acquiſito, ut bβ ſeu BC; vel quod tantundem erit, ſi non ſuapte tantum gravitate motum concipiat Grave, ſed à Vi Motrice extrinſecus pellatur ſeu projiciatur, unde Celeritatis gradum concipiat ut bβ, (qua itaque ferretur niſi quid aliud accederet, per prop. 11. Cap. 1.) quæ deinceps ob gravitatis impetum continue applicatum, continue (ut dictum eſt) æqualiter acceleranda ſit: erunt Celeritatis gradus, ſingulis ipſius temporis bB momentis, ut rectæ trapezium bββB complentes, & Longitudo per id temporis emenſa, ut ipſum bββB trapezium; quæque temporis illius partibus tranſiguntur Longitudines, reſpectivis trapezii partibus proportionales. Et quidem ſi intelligatur Bbβ parallelogrammum, repræſentare longitudinem emetiendam tempore bB celeritate ubique ipſi bβ æquali: triangulum βCβ repræſentabit id quod propter accelerationem accedit.

Similiter ſi intelligatur Grave, in A, Fig. 291. ſurſum projectum ea Vi quæ Celeritatē imprimeret ut Aα; qua perſeverante tranſigendam tempore AB longitudinem repræſentet ABαα parallelogrammum. Ea vero, propter Gravitatem, ut Vim contrariam, contra renitentem; &, propter continuam applicationem æqualem, tantundem ſingulis momentis dementem; continue minuetur: ablatis rectis αβ, αβ, triangulum αβB complentibus; relictis bβ, reſiduos celeritatis gradus repræſentantibus; donec tandem, ita creſcentibus αβ, ut fiat αB ipſi Aα æqualis, tota Vis ſurſum tendens exhauriatur; adeoque in temporis puncto B deſinat Aſcenſus. Sed, creſcente porro ob Gravitatem impetu; non modo non feretur ſurſum, ſed incipiet deſcendere, (Vi deorſum jam præpollente;) & quidem (ob continue creſcentem impetum æquabiliter) motu æqualiter accelerato, (ut creſcunt cβ, cβ, rectæ, triangulum BCβ complentes;) donec, facto BβC triangulo, ipſi AαB æquali, tantundem deſcenderit quantum aſcenderat prius: atque adhuc ultra niſi quis Obex impediat.

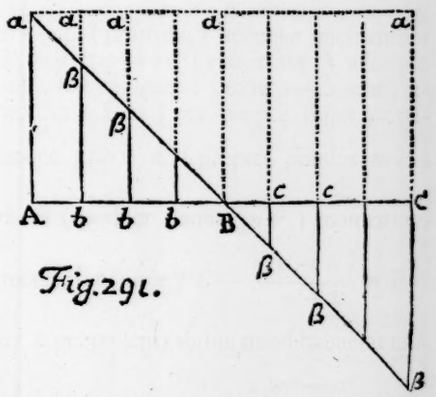


Fig. 291.

SCHOLIUM.

PRopositionem hanc Hypothetice proponimus: quoniam non inter omnes constat, vel quænam sit Gravitatis Causa, vel etiam secundum quam Regulam agat, (variis varias Gravitatis Hypotheses excogitantibus.) Neque nobis hic in animo est, illam in Physicis quæstionem determinare, in cujuscunque præjudicium. Sed, stante illa Hypothesi Physica, (quam vel reapse veram esse, vel ad veritatem quam proxime accedere, Experimenta testantur;) Theorema Mathematicum, ostensum est.

PROP. IV.

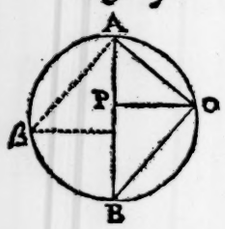
Eædem obtinent accelerandi & retardandi rationes, dum fertur Grave per rectam Inclinatam, seu in plano Inclinato; atque per rectam ad Horizontem Perpendicularem: Sed celeritatibus variis pro varia declivitate.

Hinc sequitur; Eodem tempore per quamlibet circulo inscriptam, diametro Perpendiculari (in Circulo Erecto) vel perpendiculari Succedaneæ (in circulo Inclinato) conterminam, ferri Grave; quo per illam Diametrum.

Item; Eandem celeritatem descendendo acquiri, & ascendendo deperdi, in recta inclinata; atque in perpendiculari æque alta: Adeoque & eundem utrobique impetum, & percussionem eandem.

NAM per prop. 26. Cap. 2. Obliquitas Plani in eadem ratione minuit omnium in eo descensuum celeritates; nempe in ea quam postulat plani declivitas: Hoc est (per prop. 25. ejusdem) celeritates erunt in declivitatum ratione, seu in reciproca rectarum æque altarum. Adeoque quæ erant in A P B perpendiculari, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt in inclinata A O, si hæc sit illius dupla, ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, &c. si tripla; ut $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c. & similiter in aliis proportionibus.

Fig. 292.



Vel etiam, idem ab origine demonstrabitur ut in prop. 2, 3. hujus. Nempe si, quod in A B gravitat ut 1, idem in A O (propter obliquitatem) gravitet, verbi gratia, ut $\frac{1}{2}$; unde momento primo, seu tempore exiguo, acquiratur celeritas ut $\frac{1}{2}$: ejusdem applicatione continua tempore secundo, acquiretur alterum $\frac{1}{2}$; tertio, tertium, &c. adeoque (prioribus permanentibus) celeritates erunt, ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, &c. eadem ratione cum ipsis 1, 2, 3, 4, &c.

Atque hinc colligitur Galilæi propositio illa; Eodem tempore percurri A O, vel O B, subtensas quaslibet circuli Diametro perpendiculari A B conterminas, quo ipsam A B diametrum. Cum enim (per ante demonstrata) celeritates omnes in A O, ad respectivas in A P B, sint in reciproca ratione rectarum æque altarum; hoc est, ut A P ad A O; hoc est (propter similia triangula) ut A O ad A B, (longitudines transactæ ad invicem:) eodem tempore percurrentur A O, A B. Idemque similiter ostendetur de O B, seu huic parallela, (adeoque æquali & pariter inclinata) A β.

(Quodque de A B perpendiculo in circulo erecto ostensum est; similiter obtinet de A B perpendiculi succedaneo, in circulo inclinato: propter omnes in eodem plano descensus in eadem ratione impeditos. per prop. 26. Cap. 2.)

Cumque (ut jam ostensum est) celeritates in A O, ad respectivas in A B, sint ubique proportionales; sintque eodem tempore percursæ A O, A B; erit celeritas in O (lati per A O,) ad celeritatem in B (lati per A B,) ut A O, ad A B. Sed & ita est celeritas in P ad eandem celeritatem in B (lati per A P B.) Nam (per prop.

prop. 2, 3. hujus,) tranſactæ longitudines ſunt in duplicata ratione temporum; adeoque & celeritatum, utpote quæ ſunt temporibus à principio ſumptis proportionales. Adeoque Celeritatis in P, ad celeritatem in B, in ſubduplicata ratione A P ad A B; hoc eſt, (propter A P, A O, A B, continue proportionales,) ut A O ad A B. Eadem igitur eſt celeritas in O, quæ in P. (Idemque ſimiliter obtineret, ob rationem modo dictam, ſi fuerit A P O planum inclinatum, & A P perpendiculi ſuccedaneum.) Adeoque & Impetus utrobique æqualis (cum idem ſit utrobique tum Pondus tum Celeritas;) & æqualis Ictus ſeu Percuſſio: ut in Capite de Percuſſione oſtendetur.

Quæque de Deſcenſuum Accelerationibus hic oſtenſa ſunt: eadem ſimiliter de Aſcenſuum Retardationibus oſtendentur. Quippe Obliquitas Plani eadem ratione Aſcenſum adjuvat qua impedit Deſcenſum. per prop. 25. Cap. 2.

PROP. V.

Si, in Motu continue Accelerato, Celeritates (ab initio computandæ) ſint in Temporum ratione Duplicata: Longitudines emenſæ, erunt in Temporum ratione Triplicata.

Adeoque, ſumptis temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines tranſactæ erunt, ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri Cubi.

Si Celeritates ſint in Temporum ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Longitudines emenſæ, erunt in Temporum ratione Quadruplicata, Quintuplicata, &c. Una ſemper vice plus multiplicata, quam Celeritates.

Adeoque, ſumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines erunt, ut 1, 16, 81, 256, &c. numeri Biquadrati: vel, ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri Superſolidi. Et ſic deinceps.

Longitudineſque, continuis temporibus æqualibus tranſactæ, ut illorum Cuborum, Biquadratorum, Superſolidorum, &c. differentiæ.

INtelligatur enim, Motu ab A inchoato, in Temporis A b B momentis b, B, Celeritates eſſe in duplicata ratione rectarum A b, A B; hoc eſt, ut ipſarum A b, A B, Quadrata: Puta, ut rectæ b β, B β, complentes A B β complementum Semiparabolæ. Erunt itaque Longitudines temporibus A b, AB, emenſæ, (per modo demonſtrata ad prop. 2. hujus,) ut ipſa Complementi plana A b β, A B β; hoc eſt (propter trilinea A b β, A B β, ſubtripla Parallelogrammorum A b β, A B β, per prop. 6. Cap. 5.) ut ipſa A b β, A B β, rectangula ſeu parallelogramma. Sunt autem, propter altitudines ipſis A b, A B, vel æquales vel ſaltem proportionales; baſeſque b β, B β, in earundem ratione duplicata; Parallelogramma ipſa (utpote in ratione ex Baſium & Altitudinum rationibus compoſita) erunt in earundem ratione Triplicata.

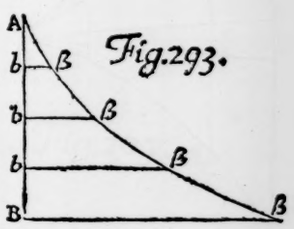


Fig. 293.

Et propterea, ſumptis ab initio temporibus A b, A b, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. reſpective Celeritates erunt, ut 1, 4, 9, 16, &c. & longitudines ab initio tranſactæ, ut 1, 8, 27, 64, &c. Adeoque, temporibus æqualibus, continue à principio ſumptis, 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum differentiæ.

Similiter oſtendetur; ſumpto Complemento Paraboloeidis Cubicalis (in quo rectæ b β, B β, ſunt in rectarum A b, AB, ratione Triplicata;) Longitudines emenſas (trilineis A b β, A B β, proportionales,) eſſe in earundem ratione Quadruplicata.

Atque ſic deinceps, pro poteſtatibus aliis, ſi ſumantur Paraboloeides reſpective conformes. Conſtat itaque propoſitum.

PROP. VI.

Si mobile, ob duas cauſas Motrices, duos concipiat directos impetus; puta ſecundum duas rectas poſitione datas, angulum facientes; Celeritatibus in ſe æqualibus, ad invicem vero eiſdem rectis, ut parallelogrammi lateribus longitudine datis, proportionalibus: feretur Mobile per Parallelogrammi diagonium, ea celeritate quæ ſit ad datas, ut diagonium illud ad reſpectiva latera.

Adeoque tantundem eſt, lationem quod ſpectat, ſive feratur Mobile motu ex duobus compoſito qui directiones habeant ſecundum Parallelogrammi latera, & celeritates ipſis proportionales; ſive Motu ſimplici, ſecundum ejuſdem diagonium, & celeritate proportionali. Quippe, utrovis modo, eodem tempore, per eundem tramitem, eadem celeritate feretur.

Idemque Motui ex pluribus compoſito accommodabitur; ſive Directiones habeant in eodem plano omnes, ſive ſecus.

Poteſtque idem proptèrea Motus infinitis modis componi.

INtelligatur A Mobile, ob cauſam aliquam Motricem, Impetum concipere ſecundum Directionem A α; aliumque, ob cauſam aliam Motricem, ſecundum Directionem A B: ſitque illius Celeritas ad Celeritatem hujus, ut A α recta ad rectam A B. Et compleatur parallelogrammum, cujus Diagonium ſit A β.

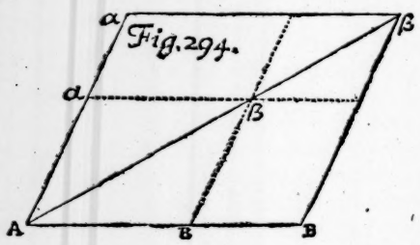


Fig. 294.

Manifeſtum eſt, quo tempore A, ſecundum directionem A α, feratur ad rectam α β; eodem ferri ſecundum directionem A B, ad rectam B β; adeoque fore in puncto β. (Et ſic ubique.) Et, propter eandem ubique celeritatum rationem, adeoque eandem ubique rationem laterum A α, A B, & communem Directionum Angulum A; ſimilia fore inter ſe omnia A β parallelogramma. Et propterea in eadem recta fore omnia β puncta. Cumque eodem tempore per A β rectam feratur A mobile; quo ſimul ferri intelligatur tum ſecundum directionem A α, Celeritate A α; tum ſecundum directionem A B, celeritate A B: Celeritas motus per A β; ad celeritates illas reſpective ſumptas; erit ut recta A β (diagonium) ad ipſas A α, A B, rectas, latera parallelogrammi. Adeoque tantundem erit, lationem quod ſpectat, ſive feratur motu ſimplici ſecundum directionem A β celeritate A β; ſive motu compoſito, ſecundum directionem A α celeritate A α, atque ſecundum directionem A B celeritate A B, ſimul. Quippe eodem tempore, eadem celeritate, atque in eodem tramite, feretur Mobile ab A ad β.

Cumque eadem A β recta poſſit eſſe Diagonium Parallelogrammorum infinitis modis variatorum, totidem Motuum Compoſitiones innuentium, quarum ſingulis æquipollet (per jam demonſtrata) idem Motus ſimplex: Manifeſtum eſt eundem poſſe Motum infinitis modis componi. Quod etiam ulterius patebit, ex caſibus ſequentibus.

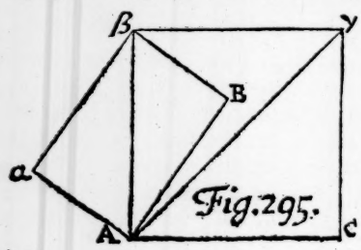


Fig. 295.

Intelligatur deinde, idem A mobile, ob totidem Cauſas Motrices, ſecundum tres in eodem Plano Directiones A α, A B, A C; celeritatibus ipſis A α, A B, A C, proportionalibus. Oſtendetur, ut prius, motum ex duobus illis ſecundum A α & A B compoſitum; tantundem eſſe atque motum ſimplicem ſecundum A β celeritate A β. Sed & ſimiliter oſtende-

oſtendetur, motum compoſitum ex hoc (duobus æquipollente) atque ex eo ſecundum A C celeritate A C, tantundem eſſe atque ſimplicem per Diagonium A γ celeritate A γ. Ergo, qui ex tribus illis per A α, A B, A C, (cum ſuis reſpective Celeritatibus,) componitur ; æquipollet ſimplici per A γ Celeritate A γ.

Idem ſimiliter oſtendetur, ſi intelligantur tres illæ Directiones A α, A B, A C, non in eodem plano omnes, ſed in diverſis ; puta, ut tria ejuſdem Parallelepipedi Latera communi puncto angulari coeuntia, (quo Caſu A γ erit Parallelepipedi Diagonium ;) aut etiam, ſi plures adhuc fuerint Directiones, utcunque ab eodem A communi puncto prodeuntes, ſecundum quas A Mobile feratur. Conſtat itaque propoſitum.

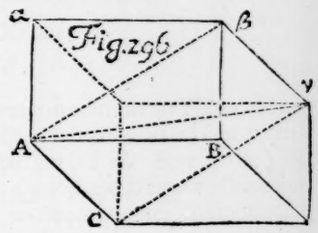


Fig. 296.

SCHOLIUM.

QUæ de Motibus per A α, A B, A C, æquabilibus oſtenſa ſunt ; ſimiliter oſtenderentur ſi eſſent illi omnes ſimiliter Accelerati vel ſimiliter Retardati ; non autem ſi diſſimiliter.

PROP. VII.

Si Motus Æquabilis, cum Accelerato vel Retardato componatur ; vel Motus Accelerati aut Retardati, ſed diſſimiliter, componantur : Alia atque alia linearum ſpecies emerget, per quam feretur Mobile, pro varia compoſitionum ratione.

Exempli gratia. Si Motus Æquabilis, cum Æqualiter (ſeu in ratione Temporum) Accelerato componatur ; (adeoque motus acceleratus in duplicata ratione motus æquabilis :) Latio erit in Curva Parabolica : Et (ſi Motuum Directiones ſint ad invicem rectæ) longitudines emenſæ, erunt ut reſpectiva plana Hyperbolica, Curvæ & conjugato Axi interjecta.

Si Motus Æquabilis componatur cum Accelerato in temporum ratione Duplicata, (ut hic ſit ad illum in ratione Triplicata :) Latio erit in Curva Paraboloeidis Cubicalis : Et Longitudines emenſæ, ut reſpectivæ iſtius curvæ particulæ, ſeu ſpatia plana ipſis proportionalia.

Si Motus Æqualiter Acceleratus (ſeu acceleratus in ratione Temporum) hoc eſt, qui ſit in Duplicata ratione temporum, cum motu qui ſit in Temporum ratione Triplicata (ſeu accelerato in temporum ratione Duplicata,) componatur : Latio erit in Curva Paraboloeidis Semi-Cubicalis : Et (ſi Motuum Directiones ſint ad invicem rectæ) Longitudines emenſæ, ut reſpectiva Spatia Parabolica, Axi & Curvæ interjecta.

Simileque in aliis caſibus Calculo determinabitur.

IN-

INtelligatur A T T recta, secundum quam, Vi aliqua Motrice, propellatur A mobile, Motu Æquabili; adeoque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A T, A T, &c. erunt item ut 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 26. Cap. 1.



Fig. 297.

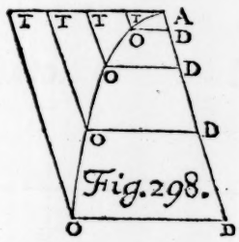


Fig. 298.

Atque intelligatur idem Mobile, alia Vi Motrice, impelli, secundum directionem A D, motu æqualiter accelerato; adeoque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A D, A D, &c. erunt ut 1, 4, 9, 16, &c. eorum quadrata. per prop. 2, 3. hujus.

Si itaque; dum, motu illo, fertur A mobile, Longitudine A T; hoc est, ab A D ad huic parallelam T O; feratur, motu hoc, longitudine A D; hoc est, ab A T ad D O; & sic ubique: Erunt ubique A D, A D; hoc est, T O, T O; in rectarum A T, A T; hoc est, D O, D O; ratione duplicata. Adeoque (propter naturam Parabolæ) quæ, per omnia O, O, puncta, transit Curva, (quæ est Lationis via, utpote in qua mobile semper erit,) est Parabola. Quod demonstrandum erat.

Atque hoc perinde obtinet sive ad angulum rectum coeant in A rectæ A T, A D, (ut ubi A est vertex Axis,) sive ad alium quemvis (ut ubi A vertex est cujusvis alterius diametri:) Et quicunque fuerit utrobique Celeritatis gradus; hoc est, quodcunque habeat Parabola illa Latus Rectum. Quippe semper erunt T O, T O, rectæ, in rectarum A T, A T, ratione duplicata; ob naturam Parabolæ.

Fig. 297. Si vero A sit Vertex Axis, erunt longitudines A O, A O, per quas fertur mobile; Spatiis Hyperbolicis, Curvæ & Conjugato Axi interjectis, respective sumptis proportionales. Per ea quæ alibi, in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθυώσει, demonstravimus; ubi de Parabolæ Ἐυθυώσει agitur.

Fig. 297, 298. Similiter; positis A T, A T, (pro motu æquabili) in ratione Temporum; & (pro motu accelerato in Duplicata ratione Temporum) A D, A D, in earundem ratione Triplicata, (per prop. 5. hujus:) Ostendetur, curvam A O O fore Paraboloeidem Cubicalem: Propter T O, T O, hoc est A D, A D, in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Triplicata. Quod itidem demonstrandum erat.

Et Curvæ particulis A O, A O, plana proportionalia exhibentur, per ea quæ generaliter ostendimus in Schol. prop. 38. *Arithmeticæ Infinitorum.*

Idemque aliis Accelerationum speciebus accommodabitur, sumptis Paraboloeidibus aliis, prout res postulaverit.

Intelligantur demum rectæ A T, A T, non in ipsa Temporum ratione, sed (pro motu æqualiter accelerato, per prop. 2. hujus) in Temporum ratione Duplicata; adeoque Tempora in earundem ratione Subduplicata: Item rectæ A D, A D, (pro motu accelerato in Duplicata ratione temporum) in temporum ratione Triplicata, (per prop. 5. hujus;) adeoque in rectarum A T, A T, ratione Subduplicatæ-Triplicata. Erit (propter istius paraboloeidis naturam) Curva A O O, paraboloeides quam *Semi-cubicalem* appello; cujus Index seu Exponens sit $\frac{3}{2}$. (Puta, in qua rectæ A D, A D, hoc est, T O, T O; sint in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Subduplicatæ-Triplicata.) Per illam itaque Curvam feretur Mobile, quod Motu ex sic acceleratis composito fertur. Quod item erat demonstrandum.

Istius autem Curvæ partes A O, A O, spatiis Parabolicis proportionales esse, demonstratum est in Tractatu modo memorato, de *Curvarum* Ἐυθυώσει, ubi de *Curva Semiparaboloeidis Cubicalis* agitur, cui æqualem rectam exhibemus.

Eodem

Eodem modo de aliis Motuum Compositionibus judicandum erit (mutatis mutandis) Curva sic posita ut Calculus indicaverit.

PROP. VIII.

Motus Projectorum (exclusa consideratione resistentis Medii) est in curva Parabolica.

Intellige; Nisi fiat Projectio illa vel directe Sursum, vel directe Deorsum: Quo casu motus erit in linea Recta; Sursum, Retardatus; Deorsum, Acceleratus.

SEquitur ex præcedente. Esto enim Vis à Projectore impressa, secundum directionem A T T; Mobile impellens Motu Æquabili, adeoque eadem ubique Celeritate: per prop. 11. Cap. 1. Interea dum Gravitas motum imprimit deorsum, puta secundum directionem A D D, æqualiter acceleratum: per prop. 3. hujus. Adeoque, qui ex utrisque componitur, est per A O O Curvam Parabolicam: per præcedentem. Fig. 297.

Sin fieri intelligatur projectio directe sursum, vel directe deorsum: degenerabit Parabola in lineam Rectam; (propter projectionis motum, & motum gravitationis, in eadem recta;) in qua fiet motus vel Retardatus sursum, vel Acceleratus deorsum; de quibus supra dictum est.

SCHOLIUM.

HUc spectant motus projectorum ex Bombardis, Arcubus, Balistis, aliisque Machinis projicientibus, aut ex projicientis manu, aliave Vi qualibet, ubi projecta Gravia, postquam à projiciente separantur, impresso Impetu feruntur.

Dico autem, *exclusa consideratione resistentis medii*: Quoniam, ob hanc resistentiam, Motus secundum directionem projicientis, qui supponitur Æquabilis, revera minuitur, & sensim extinguitur, ob continuam cum medio resistente luctam: & propterea sensim deficit à linea Parabolica.

Atque hinc fit, quod Globuli ex Bombardis, in majori distantia minus feriunt. Si enim, revera, eadem celeritate procederet latio secundum rectam A T, (quicquid sit de motu descensus secundum A D,) eadem violentia feriret objectum Murum (cui A T recta sit) sive longius, sive in propinquo positum: (per prop. 21. Cap. 1.) contra quam experientia compertum est.

CAP. XI.

De Percuſſione.

PROP. I.

Si Grave motum, tanquam perfecte Durum conſideretur; atque in Obicem ſive Obſtaculum firmum directe impingat, quod itidem perfecte Durum ſit; Sitque Vis Gravi ſic moto æquipollens, Minor quam eſt Vis Obſtaculi motui reſiſtentis, vel etiam ipſi æqualis: Motus ſiſtetur.

Sin Major fuerit: continuatur motus, ſuperato Obice; ſed ea ratione tardatus ſeu diminutus, quam exigit Obicis reſiſtentia; quam Calculus indicabit.

Nempe, Si ex Momento (quod ex Pondere & Celeritate componitur) tantundem auferatur quantum Obici amoliendo æquipolleat; reſiduumque, ſi quod ſit, per Pondus dividi intelligatur: prodibit gradus Celeritatis reſiduæ.

ESto Gravis Moti A, perfecte Duri, Pondus mP, Celeritas rC, cui æquipolleat Momentum ſeu Vis $mrPC$, per prop. 27. Cap. 1. Atque Obſtaculum B cui directe impingit, Vim reſiſtendi habeat ut $nsPC$.

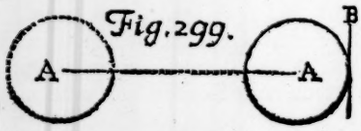


Fig. 299.

Si Minor ſit $mrPC$, quam $nsPC$; præpollebit Impedimentum: Sin Æqualis; ſaltem æquipollebit Impedimentum: Et Motus utroque caſu ſiſtetur. (Erit utique, ſi æquales ſint, $mrPC - nsPC = mrPC - mrPC = 0PC$, vis nulla: Si Impedimentum præpolleat, pro impedimento reputandum eſt.) Per prop. 10, 11, Cap. 1.

Sin Major ſit $mrPC$, quam $nsPC$; præpollebit Vis; adeoque ſuperabitur Impedimentum; Motuſque continuabitur, ſed Diminutus. per prop. 10, 11. Cap. 1.

Quantus autem deinceps futurus ſit Motus, & quanta Celeritas; Calculo ſic colligitur. Vis præpollens, $mrPC$; una cum Impedimento contrario, $nsPC$; tantundem valet atque Vis $mrPC - nsPC$, per prop. 10. Cap. 1. (Abſumitur utique in Obice rumpendo, proſtrando, ſeu utcunque amoliendo, tantundem Virium ſeu Momenti, quantum Obicis Firmitati ſeu reſiſtendi Vi æquipolleat: reliquumque, ſi quod eſt, Ponderi ultra ferendo impenditur.) Eſtque Gravis Moti pondus (idem quod prius) mP: Ergo Celeritas futura (ut quæ oritur ex Momento per Pondus diviſo) $\frac{mr-ns}{m}C$; per prop. 27. Cap. 1.

SCHOLIUM.

P*Erfecte Durum*, appello, quod ictui nequaquam cedit; Adeoque nec Molle, nec Elaſticum.

Molle, appello, quod ictui ita cedit ut priſtinam figuram amittat: Ut Lutum, Cera, Plumbum, aliaque ſimilia quæ ictu deformantur; aut etiam Corpora Fluida. Ubi enim hoc contingit, Virium pars aliqua in deformando Corpore abſumitur, nec tota in Obſtaculum impenditur: Cujus itaque ſeorſim eſt habenda ratio.

Elaſticum

Elaſticum appello, quod, utut ictui aliquantiſper cedat, ſe tamen in priſtinam formam ſuopte marte reſtituit: ut ſunt Elateres Chalybei, Lignei, aut cujuſcunque materiæ; (noſtrates *Springs* appellant;) & Corpora iſtiuſmodi quæ preſſa reſurgunt, aut quocunque modo à ſitu debito detorta vim habent ſemet reſtituendi. Qua de re poſt agetur Cap. 13. ubi de Reſilitione agetur.

Addi etiam hic poterit, ut non tam Fragile ſit aut Friabile Corpus Motum, ut ictu frangatur. Quippe tum, Virium pars aliqua frangendo Corpore abſumitur.

Eademque, quam hic ſupponimus, Durities, etiam in propoſitionibus ſequentibus intelligenda eſt. Quod hic monitum eſto, ne opus ſit ſæpius id repetere.

Sin objiciat quis (quod & fortaſſe verum eſt) ejuſmodi corpus nullum eſſe, quod nihil habeat vel Mollitiei vel Elaſticitatis; neque tam firmum aliquod Obſtaculum quod ictu vel leviſſimo non aliquantulum loco moveatur; quaſi Lapilli quantumvis exigui ictu, modica Vi jacti, Alpina rupes loco nonnihil dimoveretur, aut etiam quæ huic conjuncta eſt, ipſa Telluris moles; utut tantillum id ſit ut ſenſu percipi nequeat. Hoc neutiquam obeſt præſenti negotio. Quotcunque enim fuerint hujuſmodi accidentia in complexo ſubjecto; id nihil impedit, quin abſtractione mentis ſeparari poſſint; atque hæc quæ præ manibus eſt conſideratio, quaſi ea non eſſent, tractari; eaque, ſi tanti ſint ut negligi non debeant, ſeorſum conſiderari poterunt.

Directe impingere, hic dicimus, cum recta ſecundum quam movetur, per moti Corporis Centrum-Gravitatis & punctum Contactus ducta, ſit, ſuperficiei corporis in quod impingitur, perpendicularis: aut etiam, ſi non in puncto, ſed linea vel ſuperficie ſe tangant mutuo, cum recta illa ſit huic communi ſeu lineæ ſeu ſuperficiei perpendicularis. Si autem Oblique vel Indirecte impingat; ſive ideo fiat quod recta ſecundum quam movetur, per Centrum gravitatis tranſiens, ad punctum tactus non pertingat; ſive quod, quæ ſic pertingit, ſuperficiei corporis in quod impingitur non ſit perpendicularis; advocanda hic erunt in conſiderationem quæ ſupra de Motuum obliquitate traduntur Capite II.

PROP. II.

Si Grave motum, Gravi Quieſcenti directe impingat, ſed ita conſtituto ut aliunde ne moveatur non impediatur: utrumque junctim movebitur, ea celeritate quam Calculus (Ponderum rationibus & priſtina Celeritate rite computatis) indicabit.

Nempe; ſi Momentum (ex Moti Gravis Pondere & Celeritate compoſitum) per utriuſque ſimul Pondus dividatur; habebitur futura Celeritas.

Seu (quod eodem recidit) ut ſimul utriuſque Pondus, ad Pondus prius moti; ſic priſtina Celeritas, ad poſt futuram.

(Et quidem, ſi Quieſcens Moto ſit pondere æquale, ferentur deinceps celeritate dimidia.)

Quæ quidem Celeritas futura, in utriuſvis Pondus ducta, exhibebit iſtius momentum poſt futurum.

ESto A, Grave motum, ſecundum rectam A A ipſius Centro-gravitatis deſcriptam, quæ ad Quieſcentis B (cui directe impingat) Centrum Gravitatis pertingat; (nam & hoc requirimus quo Gravia junctim movenda dicantur directe impingere.) Sitque Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeoque Momentum ſeu Vis impellens $mrPC$: Et Gravis B, pondus nP, (celeritas, utpote quieſcentis, nulla in utramvis partem;) Adeoque ſimul utriuſque pondus $mP+nP$. Movenda autem deinceps erunt utraque eadem celeritate. Quippe B ſegnius moveri non poterit, propter inſequens A: Sed neque

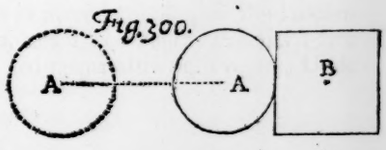


Fig. 300.

celerius; cum non moveri aliunde intelligatur quam quod ab A ſequente propellatur: (Et ſiquod aliud accedat quod celerius propellat; ut Vis Elaſtica, de qua alibi dicetur, aut aliud quidpiam; id non eſt hujus conſiderationis, ſed alterius loci.) Cum itaque Vi mPC, movendum ſit Pondus $mP+nP$; id fiet celeritate $\frac{m}{m+n}rC$: (diviſo ſcilicet Momento $mrPC$, per Pondus $mP+nP$:) per prop. 27. Cap. 1. Quod erat propoſitum. (Et quidem ſi pondera ſint æqualia, hoc eſt $m=n$, erit $\frac{m}{m+n}rC=\frac{1}{2}rC$, ut patet.)

Momentum itaque Ponderis nP, prius quieſcentis, jam moti celeritate $\frac{m}{m+n}rC$, erit $\frac{m}{m+n}mrPC$ ſeu $\frac{n}{m+n}mrPC$; Ponderiſque mP, prius moti celeritate rC, jam vero celeritate $\frac{m}{m+n}rC$; jam fit $\frac{m}{m+n}mrPC$. Adeoque momentum hinc demptum (gravi prius quieſcenti collatum) eſt $mrPC-\frac{m}{m+n}mrPC$ $=\frac{mn}{m+n}rPC$.

SCHOLIUM.

MAnifeſtum hinc eſt, ex quovis minimo cujuſvis exigui Gravis impulſu, etiam maximo cuivis quieſcenti, motum inferri poſſe; Uti etiam ex ſequentibus patebit, etiam maximi Gravis motum, cujuſvis exigui objectu, quadantenus impediri poſſe ſeu retardari; vel etiam hujuſmodi acceſſu, quadantenus accelerari.

Verum hoc tantillum eſſe poteſt, ut omnem ſenſuum perceptionem fugiat: adeoque negligi ſoleat. Unde fit, ut pro abſolute quieſcentibus reputentur aut immobilibus, quæ, ſi ſecundum Mathematicum rigorem æſtimanda forent, dicenda forſan eſſent aliquantillum moveri. Dato enim, quod tota Telluris moles fluido Æthere ſuſpenſa, cum ſaltu pulicis percuſſa ſit, dicenda eſſet loco ſuo tantillum dimoveri; aut etiam tranſlato de loco in locum (quod ſæpe fit) acervo ſatis gravi, Tellurem totam, propter mutatum Centrum Gravitatis, ſimiliter mutare ſedem; (quod quidni fieri poſſit haud facile dixeris; nedum ubi majores terreñæ molis concuſſiones ſeu mutationes contingunt:) Cum tamen hæc tantilla ſint ut ſenſum omnem fugiant; minime mirandum eſt, ſi, hiſce non obſtantibus, immota cenſeatur. Præſertim cum ipſa Aeris ſive Denſitas ſive Gravitas (utut ſenſui non plane imperceptibilis) negligi non raro ſoleat in motibus æſtimandis.

PROP. III.

Si Grave ſubſequens, ſegnius ſecundum eandem rectam præcedenti, directe impingat: utriuſque deinceps eadem erit celeritas; quæ calculo exquiretur.

Nempe; ſi ſimul utriuſque Momentum, per ſimul utriuſque Pondus dividatur; habebitur communis utriuſque futura Celeritas.

(Et quidem, ſi pondera ſint æqualia; erit ſemi-ſumma utriuſque Celeritatis.)

Eaque Celeritas futura, in utriuſvis pondus ducta, exhibet ejuſdem momentum poſt futurum.

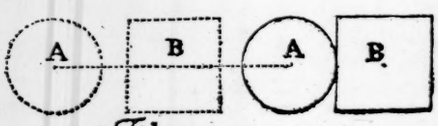


Fig. 301.

SI Grave A, ſegnius præcedenti B directe impingat; (*ſegnius* dico, nam ſi B eadem celeritate præcederet, ſubſequens A non illud eſſet aſſecuturum; nedum ſi velocius fugiat B, quam inſequatur A;) ſitque Gravis A, Pon-

A, Pondus mP, Celeritas rC, adeoque Momentum $mrPC$; Gravis B, Pondus nP, Celeritas (minor) sC, adeoque Momentum $nsPC$; Adeoque ſimul utriuſque Momentum $mrPC+nsPC$: Diviſo hoc per ſummam Ponderum $mP+nP$; habebitur communis utriuſque futura Celeritas $\frac{mr+ns}{m+n}C$: per prop. 27. Cap 1. (Et quidem ſi pondera ſint æqualia; hoc eſt, $m=n$; erit $\frac{mr+ns}{m+n}C=\frac{r+s}{2}C$.) Quod erat propoſitum.

Ideoque, præcedentis nP momentum, quod prius fuerat $nsPC$, jam fit $\frac{mr+ns}{m+n}nPC$; & ſubſequentis mP momentum, quod fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr+ns}{m+n}mPC$. Adeoque Momentum hinc demptum, & reliquo collatum, eſt $mrPC-\frac{mr+ns}{m+n}mPC=\frac{nr-ns}{m+n}mPC=\frac{mr-ms}{m+n}nPC=\frac{r-s}{m+n}mnPC$.

PROP. IV.

Si duo Gravia, ſecundum eandem rectam, contrariis motibus occurrentia, ſibi mutuo directe impingant: eadem deinceps celeritate, atque ad eas partes ferentur; quas calculus indicabit.

Nempe; Si Momentorum Differentia (quoniam ad contrarias partes) per Summam Ponderum dividatur; habebitur communis utriuſque Celeritas poſt futura; & quidem ad eas partes ad quas tendebat Vis præpollens.

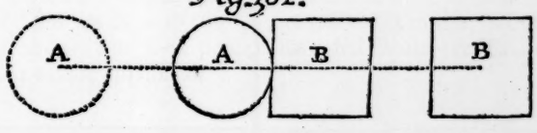
Et quidem, ſi pondera ſint æqualia; erit Celeritatum Semi-differentia.

Sin æquipolleant contraria Momenta, (propter æqualia invicem tum Pondera, tum Celeritates; aut has illis reciproce proportionales:) ad neutras partes ferentur; ſed quieſcent utraque.

Futura autem celeritas, in utriuſvis pondus ducta, exhibet ejuſdem momentum poſt futurum.

SIt Gravis A, Pondus mP, Celeritas $+rC$, adeoque Momentum $+mrPC$ (prorſum:) cui occurrat motu directe contrario Grave B, cujus pondus nP,

Fig. 302.



celeritas $-sC$, adeoque Momentum $-nsPC$ (retrorſum:) & utriuſque ſimul Momentum (ſeu Momentorum, utpote ad contrarias partes, Differentia,) $mrPC-nsPC$, (prorſum vel retrorſum, prout ſignum + vel − prævaluerit; per prop. 8. Cap. 1.) Hoc itaque per ſummam ponderum $mP+nP$ diviſum; exhibet communem utriuſque celeritatem deinceps futuram, $\frac{mr-ns}{m+n}C$ (prorſum vel retrorſum, prout ſignum + aut − prævaluerit:) per prop. 27. Cap. 1. (Adeoque, ſi Pondera ſint æqualia; erit, propter $m=n$, celeritas $\frac{r-s}{2}C$: Si vero tum $m=n$, tum $r=s$; vel m, n, ipſis r, s, reciproce proportionales; quo fiat $mr=ns$: nulla futura erit in utramvis partem celeritas; ſed ſe mutuo ſiſtent æquales vires contrariæ.) Quod erat propoſitum.

Ideoque Gravis A momentum, quod prius fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr-ns}{m+n}mPC$; & Gravis B momentum, quod fuerat $-nsPC$, jam fit $\frac{mr-ns}{m+n}nPC$. Adeoque momentum ex præpollente demptum & in reliquum collatum, est $mrPC-\frac{mr-ns}{m+n}mPC=\frac{mr+ns}{m+n}mPC=\frac{mr+ms}{m+n}nPC=\frac{r+s}{m+n}mnPC$.

PROP. V.

Ictus magnitudo æquipollet duplo momenti ablati in directe impingentium (si quod sit) fortiori.

SI intelligatur enim Motorum (si quod sit) fortius, (vel, si sint momentorum æqualium, utrumvis,) ut Percutiens; reliquum ut Percussum: Quantum Momenti Percutienti decidit, Percussum recipit, (puta; Vel resistendo seu sustinendo Vim; ut, si firmus Obex sit, cedere nescius; aut motum contrario impetu æquali: Vel suscipiendo novum impetum; ut, si prius quiesceret; aut in easdem partes moveretur: Vel denique partim hoc, partim illud; ut, si occurrat motu contrario debiliori: quæ singulatim suis locis ostendentur:) quorum cum utrumque sint effectus Ictus, Ictus utrique æquipollet; hoc est, duplo momenti ablati in fortiori. Quod erat propositum.

Designo autem Ictus magnitudinem, per momentum fortiori ablatum; quoniam effectus ictus in fortiori, uniformis est, (nempe sola semper momenti deperditio,) adeoque facilius & simplicius verbis exprimitur: effectus autem in reliquo est, nonnunquam impetus deperditio, nonnunquam acquisitio novi impetus, nonnunquam utrumque; sed, quicquid sit, æquipollet motui in fortiori deperdito.

PROP. VI.

Si Grave motum firmo Obici directe impingat: Ictus æquipollet duplo momento gravis impingentis.

Sin Obex minus firmus sit quam ut sustinendo valeat: Ictus æquipollet duplo Vis restitivæ in Obice.

Fig. 299. PUta; si Gravis moti A, pondus sit mP, celeritas rC; adeoque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: huic æqualis est in Obice Resistentia (utpote quæ Vim totam impactam immota sustinet atque hanc solam:) Cum utraque sint ab Ictu, Ictus utrique simul æquipollet, hoc est, duplo momenti impingentis, seu $2mrPC$. Quod propositum erat.

Dico autem, Vi impellenti æqualem esse *Resistentiam*, potius quam *Vim Restitivam*. Quippe Vis Restitiva major esse potest; nempe, si Obex majori vi impingenti sustinendæ par sit: sed quicquid virium supereſt, est hic inutile, (uti & vis tota esset si nihil impingeret;) quo enim sustineatur vis impacta, sufficit vis æqualis; nec motum alteri inferre potest, quoniam resistit tantum per modum impedimenti, non vis agentis contrariæ. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Similiter ostendetur propositionis pars altera. Quippe quantacunque sit Obicis infirmi vis restitiva, puta $nsPC$; tanta impenditur ei amoliendo vis impellens; (&, quæ supereſt, est hic superflua:) adeoque utriusque aggregatum (qui est effectus ictus) $2nsPC$, duplum vis restitivæ, est Ictus magnitudo. Quod itidem erat propositum.

Aliter.

Idem ostendi posset (sed mutato propositionum ordine) ex prop. seq. Quippe Obex

Obex firmus, ictum quod ſpectat, tantundem reſiſtit quantum directe occurrens impetu æquali, (utrobique enim ſiſtitur impingens Grave:) verum illic ictus æquipollet utriuſvis duplo; per prop. ſeq. Ergo & hic.

Similiter.

Oſtendetur idem ex prop. 14. Nempe, ſi duo Gravia utcunque inæqualia, quibuſcunque celeritatibus, directe occurrant; oſtenditur ictus magnitudo $\frac{r+s}{m+n}2mn\mathcal{P}C$: adeoque ſi intelligatur Obicis celeritas $sC=oC$ (quippe nulla;) ſeu quantumvis exigua; adeoque pondus $n\mathcal{P}=\infty\mathcal{P}$ infinitum (nam niſi hoc ponatur, propter $s=o$, momentum $nsPC$ non ſuſtinebit vim impactam,) erit $\frac{r+s}{m+n}2mn\mathcal{P}C$ $=\frac{\infty}{\infty+m}2mr\mathcal{P}C=2mr\mathcal{P}C$ (nam propter ∞ infinitum, tantundem erit $\frac{\infty}{\infty+m}$ atque $\frac{\infty}{\infty}=1$:) hoc eſt, vis impingentis duplum. Quod erat propoſitum.

PROP. VII.

Si duo Gravia Æqualia, æqualibus celeritatibus; vel Inæqualia, celeritatibus reciproce proportionalibus; ſibi mutuo directe occurrant: Ictus magnitudo æquipollet momentis ſimul utriuſque; ſeu utriuſvis duplo.

PUta, ſi ſit Gravis A, pondus $m\mathcal{P}$, celeritas rC, adeoque momentum $+mr\mathcal{P}C$ (prorſum:) atque Gravis B, pondus item $m\mathcal{P}$ & celeritas $-rC$; vel pondus $r\mathcal{P}$ & celeritas $-mC$; adeoque (utrovis caſu) momentum $-mr\mathcal{P}C$ (retrorſum:) Cum, quod Ictus hoc in caſu efficiat, ſit (propter æquales impetus contrarios) utriuſque ſublatio, per prop. 4. hujus; erit Ictus magnitudo $2mr\mathcal{P}C$ (momentis ſimul utriuſque æquipollens) per prop. 5. hujus. Fig. 302.

PROP. VIII.

Si duo Gravia communi aliquo motu ferantur; tantundem eſt, quantum ad Ictus magnitudinem, atque ſi utrobique abeſſet.

Adeoque communis motus, additus vel demptus, Ictus magnitudinem non immutat.

SI enim B præcedens eadem celeritate fugiat (aut etiam majori) qua ſequitur A, nulla ſit motus obſtructio ſeu impeditio, utut conjuncta fuerint A B, (nedum ſi disjuncta;) adeoque nullus Ictus. Si vero A celerius ſequatur, puta celeritate $rC=sC+tC$; & B præcedat ſegnius, puta Celeritate sC: ſaltem quantum ad celeritatem utrique communem sC, nulla ſit impeditio; quippe eatenus ſe ſubducit antecedens, ictum declinans; totumque illud motus cui ulla ſit obſtructio, eſt quod ex tC celeritatis exceſſu oritur. (Idemque eadem analogia oſtendetur de aliis motibus communibus.) Adeoque ob additum vel demptum communem motum (utpote qui, hoc reſpectu, nullius inſtar eſt) nulla fiet Ictus immutatio. Fig. 301.

SCHOLIUM.

HInc eſt, quod duorum in eadem Navi placide latorum alter alterum eadem vi percutit acſi uterque in littore ſtaret; motu navis, utpote utrique communi, ictum nec adjuvante nec impediente. Item, projectionum & percuſſionum

Phænomena

Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terra poſitos, ſive cum terra junctim ferantur omnia communi motu, ſive una cum terra quieſcant; quippe communis eorum cum terra ſive motus ſive quies hæc Phænomena non immutat, ſed projectiones & percuſſiones æſtimandæ ſunt ab iis motibus qui rebus hic in terra exiſtentibus peculiares ſunt, & non cum ipſa terra communes. Adeoque, quæ afferri ſolebant objectiones à projectionibus inæqualibus eadem vi faciendis, prout vel ad Orientem vel ad Occidentem fierent; atque inæqualibus percuſſionibus à Tormento Bellico globulum emittente futuris, prout in has aut illas partes exploſio fieret; & quæ ſunt hujuſmodi; etiam ipſis nunc dierum fatentibus qui motum Terræ negant, nihil in utramvis partem probant ſive de Quiete Terræ ſive de Motu. Hinc item qui ictum Gladii quadantenus declinans accipit, minori vulnere afficitur, quam ſi immotus acciperet, nedum ſi obviam iret. Aliaque multa hujuſmodi.

PROP. IX.

Si Grave motum, æquali quieſcenti, (non impedito,) directe impingat: Ictus magnitudo, momento gravis moti æquipollet.

Fig. 300. ESto Gravis moti A, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$; quod in æquale B quieſcens directe impingat; ferentur deinceps utraque celeritate dimidia, $\frac{1}{2}rC$; adeoque momentum A quod prius fuerat $mrPC$, jam propter pondus mP, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, amiſſo momenti dimidio $\frac{1}{2}mrPC$; & momentum B, quod prius (utpote quieſcentis) nullum erat, jam, propter itidem mP pondus, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, de novo acquiſitum; per prop. 2. hujus. Cum itaque deperdat A momentum $\frac{1}{2}mrPC$, atque acquirat B momentum itidem $\frac{1}{2}mrPC$, utriuſque aggregato $mrPC$ (quod momentum fuerat gravis A) æquipollet Ictus magnitudo, per prop. 5. hujus.

Idem Aliter.

Eſto, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$, quod in æquale B quieſcens directe incurrat. Atque intelligatur utrique accedere communis motus celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum.) Quo caſu feretur A celeritate $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorſum,) & B celeritate $oC - \frac{1}{2}rC = -\frac{1}{2}rC$ (retrorſum;) Eritque Ictus magnitudo $2mP \times \frac{1}{2}rC = mrPC$, per prop. 7. hujus. Sed eadem erit (per prop. præced.) Ictus magnitudo, dempto illo qui addebatur communi motu; qui eſt caſus propoſitus. Ergo, & hic, Ictus magnitudo eſt $mrPC$; ut prius.

PROP. X.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus Inæqualibus, in eaſdem partes ferantur; & ſequens antecedenti directe impingat: Ictus æquipollet momento utriuſvis, Celeritatum Differentia lati.

Fig. 301. SIt Gravis A, pondus mP, celeritas $rC = sC + tC$, adeoque momentum $mrPC$; quod in æquale B, celeritate sC præcedens (cujus itaque momentum $msPC$) directe impingat. Ferentur deinceps utraque (per prop. 3. hujus) celeritate $\frac{r+s}{2}C$; adeoque utriuſvis momentum (propter utriuſque pondus mP) $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A (propter s minorem quam r) momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Atque tantundem Gravi B acquiritur, propter $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC - msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Ergo, utriuſque Aggregatum $mtPC$ eſt (per prop. 5. hujus) Ictus

Ictus magnitudo. Hoc eſt, momentum ponderis utriuſvis mP, celeritatum differentia tC lati, (per prop. 27. Cap. 1.) quod erat propoſitum.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas $rC = sC + tC$; quod in æquale B celeritate sC præcedens directe impingat. Tantundem erit (ictum quod ſpectat) atque ſi (ſublato utrobique communi sC) ferretur A celeritate tC, in B quieſcens, (per prop. 8. hujus.) Adeoque (per prop. præced.) ictus magnitudo $mtPC$, ut prius.

PROP. XI.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus utcunque Inæqualibus, ad contrarias partes lata, ſibi mutuo directe occurrant: Ictus æquipollet momento utriuſvis, Aggregato celeritatum lati.

SIt Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorſum,) adeoque momentum $+mrPC$; & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorſum,) adeoque momentum $-msPC$, ſitque $r+s=z$; atque intelligatur $mrPC$ momentum præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriuſque deinceps celeritas $\frac{r-s}{2}C$; adeoque utriuſvis momentum $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mzPC$. Et Grave B (propter A præpollens) deperdit totum ſuum momentum retrorſum $msPC$; ſed & acquirit momentum prorſum $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC$: Quæ duo ſimul ſumpta ſunt $msPC + \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mzPC$. Ergo, omnium Aggregatum, $mzPC$ eſt (per prop. 5. hujus) ictus magnitudo. Hoc eſt momentum ponderis utriuſvis mP, celeritatum aggregato zC lati. Fig. 302.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorſum;) & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorſum;) ſitque $r+s=z$. Intelligatur utrique conferri motus communis celeritate $+sC$ (prorſum:) Unde fiet celeritas A, $rC+sC=zC$; & celeritas B, $-sC+sC=0C$. Hoc eſt, feretur A, celeritate zC in B quieſcens. Eritque ictus magnitudo (per prop. 9. hujus) $mzPC = mP \times zC$. Tantuſque erit ictus in caſu propoſito, per prop. 8. hujus.

PROP. XII.

Si Grave motum, Gravi quieſcenti, utcunque inæquali, directe impingat: Erit Ictus magnitudo, ad momentum Gravis moti, ut quieſcentis pondus duplum ad ponderis utriuſque aggregatum.

SIt Gravis A moti, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$; quod directe impingat in quieſcens B, cujus pondus nP, (momentum, utpote quieſcentis, nullum.) Erit (per prop. 2. hujus) celeritas deinceps utriuſque $\frac{mr}{m+n}C$: Adeoque momentum A (propter pondus mP,) $\frac{mr}{m+n}mPC$; & momentum B (propter pondus nP.) $\frac{mr}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{mr}{m+n}mPC = \frac{mnr}{m+n}PC$. Atque tantundem (ut oſtenſum eſt) acquirit B, (utpote cujus momentum prius nihil erat.) Ergo (per Fig. 300.

prop. 5. hujus) utriuſque aggregatum $\frac{2mnr}{m+n}\mathcal{P}C$ eſt ictus magnitudo. Eſt autem illud ad $mr\mathcal{P}C$ expoſitum momentum gravis moti, ut $2n$ ad $m+n$; hoc eſt, ut duplum pondus expoſiti quieſcentis, ad ſimul utriuſque pondus. Quod erat propoſitum.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus $m\mathcal{P}$, celeritas rC, adeoque momentum $mr\mathcal{P}C$; quod directe impingat in B quieſcens, cujus pondus $n\mathcal{P}$. Intelligatur celeritas rC in duas partes dividi, ponderibus reciproce proportionales; puta, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ reſpiciat pondus $m\mathcal{P}$; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ reſpiciat pondus $n\mathcal{P}$. Atque conferatur utrique motus communis celeritate $-\frac{m}{m+n}rC$ (retrorſum:) quo fiat celeritas A, $rC-\frac{m}{m+n}rC=\frac{n}{m+n}rC$ (prorſum;) & celeritas B, $oC-\frac{m}{m+n}rC=-\frac{m}{m+n}rC$ (retrorſum;) adeoque celeritates ponderibus reciproce proportionales, ad partes contrarias; ictuſque magnitudo (per prop. 7. hujus) $m\mathcal{P}\times\frac{n}{m+n}rC+n\mathcal{P}\times\frac{m}{m+n}rC=\frac{2mn}{m+n}r\mathcal{P}C=\frac{2n}{m+n}\times mr\mathcal{P}C$; quod itaque eſt ad $mr\mathcal{P}C$ expoſitum momentum moti A, ut $2n$ ad $m+n$, (ut prius:) Tantuſque erit ictus in caſu propoſito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIII.

Si duo Gravia, vel æqualia vel inæqualia, celeritatibus quibuſcunque, ad eaſdem partes ferantur, & Sequens Antecedenti directe impingat: Erit Ictus magnitudo, ad momentum gravis Sequentis celeritatum differentia lati; ut duplum ponderis Antecedentis, ad ſimul utriuſque pondus: ad momentum vero Antecedentis eadem celeritatum differentia lati, ut duplum Sequentis, ad ſimul utriuſque pondus: Hoc eſt, ad momentum utriuſvis differentia celeritatum lati; ut duplum reliqui ad ſimul utriuſque pondus.

Fig. 301. ESto Gravis A Sequentis, pondus $m\mathcal{P}$, celeritas rC, adeoque momentum $mr\mathcal{P}C$; Antecedentis B, pondus $n\mathcal{P}$, celeritas (minor) sC, adeoque momentum $ns\mathcal{P}C$; ſitque $r=s+t$. Erit (per prop. 3. hujus) utriuſque deinceps celeritas $\frac{mr+ns}{m+n}C$; adeoque momentum A (propter pondus $m\mathcal{P}$,) $\frac{mr+ns}{m+n}m\mathcal{P}C$; & momentum B (propter pondus $n\mathcal{P}$,) $\frac{mr+ns}{m+n}n\mathcal{P}C$. Deperdit itaque A, momentum $mr\mathcal{P}C-\frac{mr+ns}{m+n}m\mathcal{P}C=\frac{mnr-mns}{m+n}\mathcal{P}C$. Atq; tantundem acquirit B, propter $\frac{mr+ns}{m+n}nRC-ns\mathcal{P}C=\frac{mnr-mns}{m+n}\mathcal{P}C$. Adeoque (per prop. 5. hujus) utriuſque aggregatum eſt ictus magnitudo. Hoc eſt $\frac{2mnr-2mns}{m+n}\mathcal{P}C=\frac{r-s}{m+n}2mn\mathcal{P}C=\frac{2mn}{m+n}t\mathcal{P}C=\frac{2n}{m+n}m\mathcal{P}tC$ $=\frac{2m}{+n}n\mathcal{P}tC$: Hoc eſt, ad momentum Sequentis $m\mathcal{P}$ celeritatum differentia

tC

tC lati, ut $2n$ ad $m+n$; hoc eſt, ut duplum pondus Antecedentis ad ſimul utriuſque pondus: atque ad momentum Antecedentis $n\mathcal{P}$ eadem differentia tC lati, ut $2m$ ad $m+n$; hoc eſt, ut duplum pondus Seqnentis ad ſimul utriuſque pondus. Hoc eſt, ad momentum utriuſvis, celeritatum differentia lati, ut reliqui pondus duplum ad ſimul utriuſque pondus. Quod erat propoſitum.

Aliter.

Eſto, ut prius, Gravis A ſequentis, pondus $m\mathcal{P}$, celeritas rC; atque antecedentis B, pondus $n\mathcal{P}$, celeritas sC; ſitque $r=s+t$. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta celeritas sC. Quo facto, B ad quietem redigitur, propter $sC-sC=0C$; eique impingit A, tanquam quieſcenti, celeritate $rC-sC=tC$. Eritque ictus magnitudo (per prop.præced.) $\frac{2mn}{m+n}t\mathcal{P}C=\frac{2n}{m+n}mt\mathcal{P}C=\frac{2m}{m+n}nt\mathcal{P}C$, ut prius. Idemque erit ictus magnitudo in caſu propoſito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIV.

Si duo Gravia, æqualia vel inæqualia, quibuſcunque celeritatibus, motibus contrariis ſibi mutuo directe occurrant: Erit ictus magnitudo, ad momentum alterutrius gravium, celeritatum Aggregato lati, ut reliqui pondus duplum ad ſimul utriuſque pondus.

SIt Gravis A, pondus $m\mathcal{P}$, celeritas $+rC$ (prorſum,) adeoque momentum $+mr\mathcal{P}C$; & Gravis B, pondus $n\mathcal{P}$, celeritas $-sC$ (retrorſum,) adeoque momentum $-ns\mathcal{P}C$; quæ ſibi mutuo directe impingant; ſitque $r+s=z$; atque intelligatur momentum $mr\mathcal{P}C$ præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriuſque deinceps celeritas $\frac{mr-ns}{m+n}C$: Adeoque gravis A (propter pondus $m\mathcal{P}$) momentum $\frac{mr-ns}{m+n}m\mathcal{P}C$; & gravis B (propter pondus $n\mathcal{P}$) momentum $\frac{mr-ns}{m+n}n\mathcal{P}C$. Deperdit itaque A momentum $mr\mathcal{P}C-\frac{mr-ns}{m+n}m\mathcal{P}C=\frac{nr+ns}{m+n}m\mathcal{P}C$. Et B deperdit (propter A præpollens) totum quod habuerat momentum retrorſum $ns\mathcal{P}C$; & ſimul acquirit momentum prorſum $\frac{mr-ns}{m+n}n\mathcal{P}C$; quæ duo ſimul ſumpta ſunt $ns\mathcal{P}C+\frac{mr-ns}{m+n}n\mathcal{P}C=\frac{mr+ms}{m+n}n\mathcal{P}C=\frac{nr+ns}{m+n}m\mathcal{P}C$, (quantum ſcilicet perdiderat A.) Adeoque omnium aggregatum $\frac{r+s}{m+n}2mn\mathcal{P}C=\frac{2mn}{m+n}z\mathcal{P}C=\frac{2m}{m+n}nz\mathcal{P}C=\frac{2n}{m+n}mz\mathcal{P}C$, eſt (per prop. 5. hujus) ictus magnitudo. Quod itaque eſt ad $mz\mathcal{P}C$ ut $2n$ ad $m+n$, & ad $nz\mathcal{P}C$ ut $2m$ ad $m+n$; hoc eſt, ad momentum alterutrius gravium aggregato celeritatum lati, ut reliqui pondus duplum ad ſimul utriuſque pondus. Quod erat propoſitum. Fig. 302.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus $m\mathcal{P}$, celeritas $+rC$ (prorſum;) & Gravis B, pondus $n\mathcal{P}$, celeritas $-sC$ (retrorſum;) quæ ſibi mutuo directe occurrant; ſitque $r+s=z$. Intelligatur autem utrique addi, motu communi, celeritas $+sC$ (prorſum:) Quo fiat gravis A celeritas $rC+sC=zC$; & B quieſcens (propter $-sC$

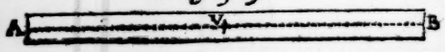
$-sC+sC=oC$;) Adeoque ictus magnitudo (per prop. 12. hujus) $\frac{2n}{m+n}mz\mathcal{P}C=\frac{2m}{m+n}nz\mathcal{P}C$; ut prius. Idemque eſt ictus magnitudo in caſu propoſito, per prop. 8. hujus.

PROP. XV.

Percuſſiones particularum Gravis percutientis, pro varia ejuſdem Figura & Poſitione; calculo æſtimantur.
Adeoque & *Centrum Virium*, ſeu *Percuſſionis*. Quod ipſum eſt Punctum Percuſſionis maximæ.

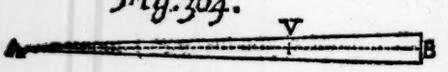
INtelligatur A B, Pertica, Cylindrus, Priſma, aut iſtiuſmodi corpus quodpiam; parallelo motu latum: Erunt ejus Partes infinitefimæ, (ſecundum longitudinem æquales,) ut 1, 1, 1, 1, &c. ſeries Æqualium: Earumque reſpectivæ Celeritates (utpote æquales, propter motum parallelum,) item ut 1, 1, 1, 1, &c. ſeries Æqualium: Adeoque &, quæ inde reſultant, Momenta ſeu Vires, erunt itidem ut 1, 1, 1, 1, &c. ſeries Æqualium. Et propterea, ſi per mediam longitudinem ſecetur Axis in V; erit utrinque tantundem Virium, & in diſtantiis Æqualibus. Adeoque V, *Centrum Virium*, ſeu Percuſſionis.

Fig. 303.



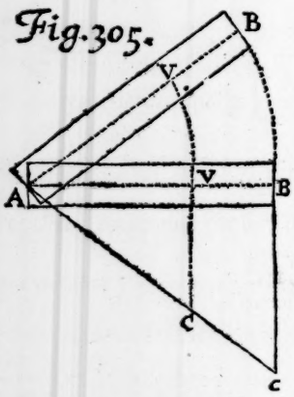
Quod quidem non aliter differt à Centro Æquilibrii, (de quo Cap. 3. dictum eſt,) quam quod (ſumpto Axe priſmatis pro Libra) momenta, ſeu Libræ Gravamina, ſunt illic (potiſſimum) nuda Pondera (quamquam nec alia gravamina ibidem excludantur,) hic vero Pondera cum Impetu, ex celeritate contracto.

Fig. 304.



Idem ſimiliter obtinet quæcunque fit figura Gravis A B, parallelo motu lati: Nempe, Centrum Virium V, idem eſſe atque Centrum Gravitatis figuræ. Quippe cum Celeritates ſint ſeries Æqualium; eadem erit Virium ſeries quæ Ponderum: per Schol. prop. 1, 2. Cap. 5.

Fig. 305.

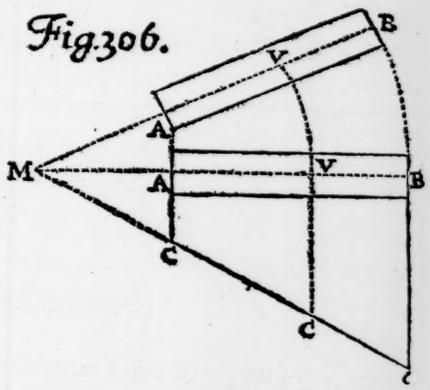


Intelligatur deinde idem Cylindrus ſeu Priſma A B, circa Axis extremum A rotari. Cujus itaque Particulæ (ut prius) erunt ut 1, 1, 1, 1, &c. ſeu $1\mathcal{P}, 1\mathcal{P}, 1\mathcal{P}, 1\mathcal{P}$, &c. ſeries Æqualium. Celeritates autem reſpectivæ, (ab A centro Motus inchoando) ut Arcus B B, & huic paralleli, ſectorem B A B complentes; (quippe, propter æqualia Tempora, Celeritates erunt ut tranſactæ Longitudines; per prop. 23. Cap. 1.) hoc eſt, ut eorum Radii, ſeu Diſtantiæ ab A; hoc eſt, ut Rectæ Triangulum A B C complentes, (ipſi B C parallelæ:) Nempe, ut 1, 2, 3, 4, &c. ſeu $1C, 2C, 3C, 4C$, &c. ſeries Primanorum. Adeoque, propter Pondera invicem æqualia, Vires itidem erunt ut ſeries Primanorum; puta ut $1\mathcal{P}C, 2\mathcal{P}C, 3\mathcal{P}C, 4\mathcal{P}C$, &c. ſeu ut eædem rectæ Triangulum complentes. Quæ itaque ſi ad A B latus Trianguli, tanquam ad Libram, applicari intelligantur; quæ per Trianguli Centrum gravitatis applicatur V C recta, deſignat in A B libra Centrum Æquilibrii V. Et propterea, ſi ſimiliter in V ſecetur A B axis Cylindri ſeu Priſmatis; erit V Centrum Virium: Quippe quæ Rectis illis ſunt proportionales.

Sin

Sin Cylindrus idem ſeu Priſma, Centro Motus M, in Axe ultra A continuato rotari intelligatur: Pondera erunt (ut prius) ut $1P, 1P, 1P, 1P$, &c. ſeries Æqualium: Celeritates autem, ut Arcus deſcripti, ſeu eorum Radii; hoc eſt, ut Diſtantiæ ab M; ſeu rectæ complentes Trapezium ACCB: puta ut $aC, aC+1C, aC+2C, aC+3C$, &c. Series Æqualium aucta Serie Primanorum. Adeoque Momenta, ſeu Vires, aut libræ Gravamina, (propter Pondera invicem æqualia,) ut $aCP, aCP+1CP, aCP+2CP, aCP+3CP$, &c. ſeries item Æqualium aucta ſerie Primanorum; ſeu ut eædem rectæ Trapezium complentes. Per cujus itaque Centrum gravitatis ſi ad AB latus trapezii ut Libram applicetur VC; erit V Centrum Æquilibrii: Et ſimiliter, in V, ſecto axe AB, erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Fig. 306.



Intelligatur demum AB Cuneus, ſeu Aſſerculus Triangularis (æquabiliter craſſus:) Cujus itaque (ab acie A computando) particulæ (ſecundum longitudinem in axe AB æſtimatam æquales) ſunt ut $0P, 1P, 2P, 3P$, &c. ſeries Primanorum: Celeritates (rotatione circa A facta) ut $0C, 1C, 2C, 3C$, &c. (diſtantiis ab A proportionales) ſeries itidem Primanorum: Vires itaque (in ratione ex utriſque compoſita) ut $0PC, 1PC, 4PC, 9PC$, &c. ſeries ſecundanorum; ſeu ut rectæ complentes ABC complementum Semi-parabolæ: (aut Plana Conum ſeu Pyramidem complentia.) Per cujus itaque Centrum gravitatis ſi ad Libram AB applicetur VC; atque ſimiliter, in V, ſecetur AB axis Cunei; erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

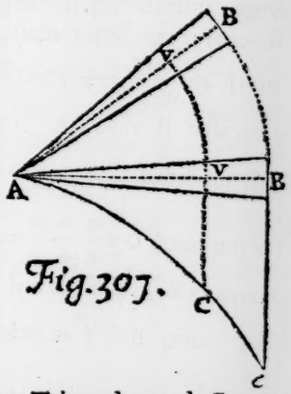


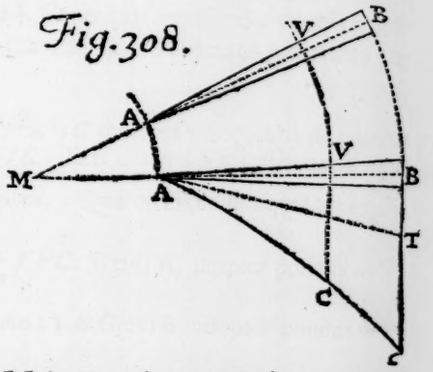
Fig. 307.

Si autem circa rectam B (baſin trianguli) rotetur Triangulum vel Cuneus AB: diſtantiæ à B erunt rectis huic parallelis, æqualiter à medio diſtantibus, reciproce proportionales; adeoque reſpectiva Momenta (utpote in ratione ex magnitudinum & diſtantiarum rationibus compoſita) invicem æqualia; & propterea Centrum Virium in axis AB medio.

Si vero intelligatur AB grave, ultra A (Centrum motus) continuari; id non impedit quin V ut prius ſit Centrum virium ſeu percuſſionis (ad partes B faciendæ;) ſed vis augebitur ab impetu partium ultra A. Et ſimiliter alibi.

Sin ſit M Centrum Motus ſeu Rotationis in axe ultra A protracto: Erunt Pondera (ut prius) ut $0P, 1P, 2P, 3P$, &c. ſeries Primanorum: Celeritates autem (diſtantiis ab M proportionales,) ut $aC, aC+1C, aC+2C, aC+3C$, &c. ſeries Æqualium ſerie Primanorum aucta. Et propterea Vires, ſeu Momenta, aut libræ Gravamina, ut $aPC, 1aPC+1PC, 2aPC, +4PC, 3aPC+9PC$, &c. ſeries Primanorum aucta ſerie Secundanorum. Puta, ut rectæ complentes Trilineum ABC, ex Triangulo ABT (quæ ſeries eſt Primanorum,) & ſemiparabolæ Complemento ATC (quæ eſt ſeries Secundanorum,) rite comparatis,

Fig. 308.



compoſitum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis quæ ad Libram applicatur V C, deſignat in A B libra Centrum Æquilibrii V: & ſimiliter, in V, ſecto axe Trianguli, ſive triangularis Cunei, habetur Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Fig. 307. Intelligatur demum A B Conus ſeu Pyramis: Cujus itaque Particulæ (ab A vertice numeratæ) erunt ut $0P$, $1P$, $4P$, $9P$, &c. ſeries Secundanorum: Celeritates autem (rotatione Centro A facta) ut $0C$, $1C$, $2C$, $3C$, &c. ſeries Primanorum: Adeoque Momenta ſeu Vires, ut $0PC$, $1PC$, $8PC$, $27PC$, &c. ſeries Tertianorum: Puta ut rectæ complentes Semi-paraboloeidis Cubicalis Complementum A B C. Per cujus itaque Centrum gravitatis ſi applicetur (ut prius) V C; habebitur (ut ſupra) V Centrum Virium.

Fig. 308. Sin M Centrum Motus ſeu Rotationis ſit in axe ultra A protracto: Pondera erunt (ut prius) ut $0P$, $1P$, $4P$, $9P$, &c. ſeries Secundanorum: Celeritates vero (diſtantiis ab M proportionales) ut aC, $aC+1C$, $aC+2C$, $aC+3C$, &c. ſeries Æqualium ſerie Primanorum aucta. Et propterea; Vires, ut $0aPC$, $1aPC+1PC$, $4aPC+8PC$, $9aPC+27PC$, &c. ſeries Secundanorum aucta ſerie Tertianorum: Puta, ut rectæ complentes Trilineum A B C, ex A B T complemento Semi-parabolæ, & A T C complemento Semi-paraboloeidis Cubicalis, (ſic invicem aptatis ut caſus poſtulaverit,) compoſitum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis ducta V C; habebitur V Centrum Virium, ut prius.

Atque ad eandem formam mutatis mutandis, procedendum erit, quæcunque fuerit figura Gravis moti, (ſive ordinata, ſive utcunque inordinata,) & ubicunque ponatur Centrum Rotationis. Nempe; Quæcunque fuerit Magnitudinum ſeu Ponderum ſeries; cum ea componenda erit ſeries Celeritatum (utcunque acquiſitarum;) ut habeatur ſeries Virium ſeu Momentorum. Atque hæc momenta, ſi conſiderentur ut Libræ Gravamina; eiſdem legibus hic exquirendum erit Centrum Virium; quibus, in Cap. 3. Centrum Æquilibrii; &, in Cap. 4, 5. Centrum Gravitatis. Nos caſus aliquot ex ſimplicioribus ſelegimus quæ ſpeciminum inſtar ſint; & in quibus Axis ſolidi ſaltem Rectam determinat in qua ſit illud Centrum Virium; ut nihil hic opus ſit aliud quam ut datæ Libræ (momentis virium gravatæ) Centrum Æquilibrii inquiratur; ſecundum tradita Cap. 3. Si vero illud non eſſet; determinanda eſſet ea recta, eiſdem methodis quibus determinandus eſt Axis Æquilibrii (in ordine ad Centrum Gravitatis inquirendum) Cap. 5. Atque in eo tandem Centrum Virium. Sed ſingulis caſibus immorandum non erat.

Denique; Quod in Centro Virium ſit maxima Percuſſio; ſequitur ex prop. 8. & 18. Cap 3. (ampliato ſenſu expoſitis.) Quippe Centrum Virium, eſt Libræ ſic gravatæ (non nudis Ponderibus, ſed Ponderibus cum Impetu) Centrum Æquilibrii; in quo ſi ſuſtineatur Libra (quod hic fit à corpore percuſſo) totarum Virium impetus ſuſtinetur, (quippe, propter Æquilibrium, in neutram partem rotando ferretur;) ſi vero extra hoc Virium Centrum (à percuſſo) ſuſtineatur; ad eas partes rotando propendebunt Vires qua eſt Virium Centrum; adeoque nec totus impedietur Motus; ſed ea ſaltem ſui parte qua Rotando minus procedit Centrum Virium ſeu Æquilibrii, quam ſi (non impeditum) recte procederet. Quod, locis citatis, generali demonſtratione oſtenditur.

Si vero, percuſſione non in V puncto facta, manu tenentis, puta in A, impediatur ne fiat Rotatio circa punctum ictus in corpore percuſſo: Res referenda erit ad Vectem cum duobus Fulcris. Quippe motus Virium (ſeu, quod tantundem eſt, Centri Virium, per prop. 9. Cap. 3. vel prop. 16. Cap. 4.) partim Corpore Percuſſo, partim Manu Percutientis, tanquam duobus Fulcris, (utroque inferius poſito, ſi Centrum Virium ſit inter illa duo Fulcra; vel, ſi extra, altero inferius altero ſuperius poſito;) ſuſtinetur: Secundum leges Cap. 6. (de Vecte duobus Fulcris ſuſtento) traditas.

SCHOLIUM.

MOnendum hic non incommodum duxi; proceſſum à dato corporis percutientis Centro Gravitatis, ad ejuſdem (circa Axem datum rotati) Centrum Virium inquirendum; alium non eſſe quam à dato plani Centro gravitatis ad Ungulæ eidem inſiſtentis (datam in eodem plano aciem habentis) Centrum gravitatis

vitatis inquirendum. Quippe, ut illic, cum serie magnitudinum in Plano, componenda erit series altitudinum super istius plani respectivas particulas, (quæ quidem altitudinum series alia non est quam Distantiarum ab illa Acie data,) & seriei compositæ commune Centrum inveniendum, (quod est Ungulæ Centrum gravitatis:) ita hic, cum serie magnitudinum in corpore percutiente, componenda erit series Celeritatum in respectivis istius corporis particulis, (quæ itidem series alia non est quam Distantiarum à dato Rotationis axe,) & seriei compositæ commune Centrum (quod est Centrum Virium) inveniendum. Quo pacto autem ea seriei Distantiarum cum serie Magnitudinum compositio fiat, ut seriei compositæ Centrum habeatur; ostenditur (tum alibi, in casibus simplicioribus; tum, in abstrusioribus,) ad prop. 10. Cap. 5. Quæ sæpius in Ungularum Centris gravitatis inquirendis (per totum illud caput) in auxilium advocatur; atque hic, pro inquirendis Centris Virium, similiter (ubi opus fuerit) advocanda erit. Quod generatim monuisse sufficiat; ne sit necesse ad particulares casus descendere (quod longum esset, & tædii plenum;) quos cujusque industriæ, ubi res postulaverit, calculo determinandos permitto, & ad generalem Methodum exigendos.

Notandum porro; cum Centrum Virium, uti illud jam determinavimus, sit (ut plurimum saltem) intra *ipsum* Solidum; Percussio autem, à Solido illo facta, sit in superficiei puncto aliquo: Si quis quærat, in quo superficiei puncto (pro hoc aut illo solidi percutientis situ) id contingat: Dicimus, in eo superficiei puncto contingere quod est in ipsa Directione Centri Virium in ictus instanti. Hoc est, si Centrum illud per rectam feratur, in ea recta per quam fertur: si vero per curvam, in recta curvam illam (in ipso Virium Centro) tangentem, eo instanti quo fit Ictus; (puta, in recta V T, seu V C, fig. 307. quæ curvam V V tangat in V:) eandem enim directionem esse Curvæ cujusvis (pro dato in ea puncto) atque Rectæ ibidem tangentis; ostendimus ad prop. 15. Cap. 2.

Moneo etiam (quod & supra insinuatum est,) Qua ratione Grave (Ponderationem si spectes) perinde se habere acsi totum ibidem esset ubi est ipsius Centrum Gravitatis, per Schol. prop. 16. Cap. 4. Eadem & (Percussionem quod spectat) perinde se habere Corpus percutiens, acsi totum ibidem esset ubi est Centrum Virium.

Atque hinc ad Funipendula æstimanda, via patet: Nempe, cujuscunque figuræ sit suspensum solidum, (puta Cylindricum, Conicum, aliudve,) tantæ longitudinis (vibrationem quod spectat) reputandum esse, quanta est distantia à suspensionis puncto ad Centrum Virium. Adeoque, verbi gratia, (dato quod Funipendula ejusdem longitudinis, æqualibus temporibus vibrent, quod præsumi solet,) si Conus vertice suspensus (cujus Centrum Virium, ut ex Calculo superius insinuato colligitur, à vertice distat, $\frac{4}{5}$ totius Axis seu Altitudinis;) cum Globulo ex tenuissimo filo (cujus itaque consideratio hic non habetur) suspenso, cujus longitudo sit (à puncto suspensionis ad Globuli *Centrum Virium*) ad longitudinem seu altitudinem Coni, ut 4 ad 5; æqualibus temporibus vibrabitur uterque: utpote quorum Centrum Virium æqualiter à puncto suspensionis distant. (Est autem Globuli *Centrum Virium*, non ipsum *Globi* Centrum, sed aliud ab hoc; & quidem aliud atque aliud, prout propius aut remotius distat Globus, ille à Puncto suspensionis.) Atque similiter in aliis judicandum erit.

MONITUM.

MOnendum denique; Id quod nos *Centrum Virium*, seu *Centrum Percussionis*, aut etiam *Vibrationis*, hic appellamus; id ipsum est quod Clar. *Hugenius*, opere post edito (de *Horologio Oscillatorio*) appellat *Centrum Oscillationis*. Quippe idem est (utut sub diversis Nominibus) quod uterque inquirimus. (Quod, qui utriusque Inquisitionem rite consideraverit, facile perspiciat.) Ille quidem sua Methodo, ego mea. Lector utramlibet ut potiorem eligat. Estque ejus *Oscillatio*, quæ nobis *Vibratio* dicitur.

CAP.

CAP. XII.

De Cuneo.

DEFINITIONES.

DEF. I. Cuneum, *plerumque adhibent, ex Ferro ſeu duriorum aliquo metallo; forma Priſmatis (non admodum alti) cujus oppoſitæ Baſes ſint Triangula Æquicrura Acutangula: Quorum utriuſvis Altitudinem, appello* Altitudinem Cunei, (*non, Priſmatis;*) *ejuſdem Baſem,* Cunei Craſſitiem *appello; Rectamque quæ Triangulorum illorum Æquicrurorum Vertices conjungit,* Cunei Aciem: *quodque eorum Baſes conjungit Parallelogrammum;* Cunei Dorſum.

II. Malleum, *ſeu* Tuditem, *adhibent plerumque ex Ligno duriore, forma Cylindrica (vel ad eam proxime accedente,) adjuncto ad Latus* Manubrio, *cujus ope Percuſſor Ictum infligit.*

III. *Eodem etiam referenda ſunt,* Malleus Ferreus *quo Clavos adigimus;* Aſcia, *vel* Securis, *quibus Ligna Dolamus, aut Diſſecamus; prægrandes* Tudites, *ſeu* Arietes, *quibus Pila, Palos, Sudes, (aliaque ſimilia,) in Terram adigimus: aliaque non abſimilia Organa innumera.*

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Datis Mallei Pondere & Celeritate Cuneum percutientis, Cuneique Forma: Vis Cunei, ſic percuſſi, Calculo æſtimabitur.

INtelligatur Ligni Tenacitas ſeu Firmitudo, Cuneo divellenda; aut quorumvis Obicum, Cuneo dirimendorum, Reſiſtentia, ut *O*.

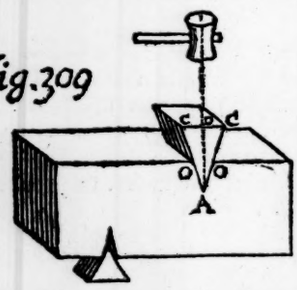


Fig. 309

Dico primo; ſi adhibeatur in Cunei Dorſo D, vis *V* quæ ſit ad *O*, ut CC cunei Craſſities, ad ejuſdem Altitudinem DA; (puta, ut *c* ad *a*:) Vis illa in D, æquipollebit Obici; Adeoque, aucta ſuperabit. Cum enim, per prop. 5. Cap. 2. Motus in ea ratione polleant quæ ex rationibus Virium Motricium, & Progreſſuum Regreſſuumve ſecundum lineam directionis ſuæ componitur: Sitque amolitio Obicis (contra directionem ſuam) ad progreſſum Virium (ſecundum directionem ſuam,) ut CC ad DA, ſeu ut *c* ad *a*, (quippe dum detruditur Cuneus per totam ſuam Altitudinem DA, dirimitur Obex per totam ipſius Craſſitiem CC, & in toto proceſſu proportionaliter;)

naliter;) Si vires V, O, ſint ipſis a, c, (progreſſibus ſuis,) reciproce proportionales; æquipollebunt motus, (propter ex Reciprocis compoſitam rationem Æqualitatis, per prop. 6. Cap. 1.) Hoc eſt, ſi ſit ut a ad c ſic O ad V; ſeu $V = \frac{c}{a} O$. Adeoque, ſi V major ſit, movebit: per prop. 9, 11. Cap. 1.

Dico ſecundo; ſi ſit Mallei ferientis Pondus, P; Celeritas, in percuſſionis inſtanti utcunque acquiſita, C; (puta, ſive id fiat ob Gravis motum naturaliter Acceleratum, ſive etiam ob porro additam à Percuſſore vim;) adeoque Mallei Momentum ſeu vires PC; ſitque $PC = V = \frac{c}{a} O$: Vis Mallei Cuneo directe applicata, Obici æquipollebit; adeoque aucta movebit.

Et quidem (ob eandem cauſam) eouſque amovere ſeu amoliri perſeverabit, donec ſic impenſa Vis PC, particulis Cuneo propioribus rumpendis aut flectendis per æquipollentiam abſorbeatur.

Idemque Momentum ſecundo adhibitum, tantundem præſtabit; & tertio, tantundem: atque ſic porro prout opus fuerit.

SCHOLIUM.

SUnt qui Cuneum, ad geminum Vectem referunt: quibus Vis in C, C, applicetur: Fulcra autem alii in O, O, ponunt; Oneraque in A utrinque protrudenda. Alii potius Fulcrum commune in A ponunt, & Onera in O, O; (eo potiſſimum quod, in Lignis aliiſve diffindendis, Cunei Acies non ſemper rem diffindendam attingit uſpiam, ſed medio ſuſpenſa pendet; adeoque non poteſt ibidem dici onus depellere.) Ego vero (ut alia taceam incommoda) rem ſimplicius exponendam duxi ex ipſis Motuum Elementis: uti factum eſt.

PROP. II.

Eadem ſimiliter accommodari poterunt, *Malleo ferreo*, Clavum adigenti; *Tuditi prægrandi*, Pila, Sudes, Paloſve præacutos in Terram altius defigenti; *Aſciæ*, *Bipenni*, aut *Securi*, Ligna aliave dolanti, dividenti, aut diſſecanti; aliiſve Inſtrumentis non abſimilibus.

QUippe *Clavi*, *Pila*, *Sudes*, *Palive*, præacuti; Cunei ſunt: qui Malleo vel Tudite adiguntur. *Aſcia*, *Bipennis*, *Securis*, & ſimilia; ſunt Malleus cum Cuneo connexo. Atque de aliis iſtiuſmodi ſimile fiet judicium. Eademque quæ ad prop. præced. habetur Demonſtratio; pariter ad hanc valebit.

CAP. XIII.

De Elatere, & Reſilitione ſeu Reflexione.

DEFINITIONES.

DEF. I. *Vim* Elaſticam *appello, eam qua Corpus de figura ſua Vi detruſum, ſeipſum in figuram priſtinam Reſtituere ſatagit.*

II. Elaterem *appello, Corpus* (*aut etiam Partem Corporis*) *ea Vi præditum.*

VIs ἐλαστικὴ, ab ἐλαύνω, *Agito, Abigo, Excutio, Expello,* deſcendit: ut & (ejuſdem originis) ἐλατήρ. Vim eam inſinuantes qua Corpus, reſiliendo, alia ab ſe Abigit.

Latinis (quantum ſcio) deeſt Vox propria qua hoc ſignificetur: unde factum eſt ut Vocabula Græca in uſum ſint recepta.

Elaterem Noſtri *a Spring* vocant; à Verbo *to ſpring*, ea ſignificatione qua *Saltre* ſeu *Exſilire* ſignificat, (ut Germanicum & Danicum *Springen*, Belgicum *Springhen*,) quæ eſt Vocis illius ſignificatio primaria. Significat etiam (& forte frequentius) ſenſu Metaphorico, *Germinare*; eo quod Germina de ſurculo quaſi *Exſiliant*: Atque hinc tempus Vernum *the Spring* dicitur; quo ſcilicet potiſſimum omnia Germinant. Sed & Aquæ Fons ſeu Scaturigo (Aqua Saliens dicta) *a Spring* dicitur; ob ſalientem Aquam. Item, *to ſpring a Mine*, dicimus, quando Cuniculum, pulvere pyrio inſtructum, admoto igne accendimus, & *Exſilire* facimus.

Hinc Corpus Elaſticum, *a ſpringy body* dicimus; hoc eſt, Corpus Elatere inſtructum: &, Vim Elaſticam, *Springyneſs*.

Unde ſit in Corporibus hæc Vis Elaſtica; non hic inquiro: Sed neque ipſius Naturam ſuſcipio me ita explicaturum, ut vel Lectori, vel mihi ipſi, per omnia ſatisfaciam. Neque enim id neceſſe eſt ad rem præſentem. Sufficit, ut undecunque fuerit, Vim iſtiuſmodi in rerum natura eſſe certum ſit: Cum & preſſa reſurgere; Corporaque ſuo niſu reſtituta, ab ſe alia abigere, nemo non videat. Atque de hac Vi, undecunque fuerit, jam agimus.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Grave motum, in firmum Obicem, directe impingat; ſitque vel alterum vel utrumque Corpus Elaſticum: Eadem celeritate reſiliet, ſeu repercutietur, qua advenerat; & per eandem rectam.

Fig. 299. ESto enim A Grave (cujus pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$,) quod, per A A rectam, in firmum Obicem B directe impingat. Sitque

que non ita perfecte Durum; ut nulla ratione ictui cedat, vel Corpus latum, vel Obex. Sed neque ita Molle, ut figuram priſtinam ictu deperdat (quod in Cera, Plumbo, Luto, aliiſque ejuſmodi Corporibus vel fragilibus vel ductilibus fieri ſolet,) ſed vim habeat Elaſticam (alterum vel utrumque Corporum) qua ſe reſtituere valeat in figuram priſtinam, quamprimum Vis Comprimens ceſſaverit.

Atque intelligatur Obicis pars percuſſa, Vi Corporis impellentis introrſum preſſa; quæ itaque inſita Vi Elaſtica ſe reſtituere conabitur.

Dico primo; Preſſionem hanc eouſque continue fieri, donec Vis Elaſtica, compreſſioni adverſa, Vi Comprimenti æquipolleat. Quippe quamdiu Vis Comprimens, fortior eſt quam Elateris Reſiſtentia, etiamnum Elaterem flectere ſeu comprimere perſeverabit. per prop. 12. Cap. 1.

Eſt autem ea Vis comprimens, dupla momenti Gravis impingentis. Nam vis ab impingente Gravi illata, eſt ipſius momento æqualis (utpote cujus motus totus ſiſtitur,) puta $mr\mathcal{P}C$. Sed &, propter æqualem Obicis reſiſtentiam, (quæ tantundem ad compreſſionem confert acſi æqualis vis contraria occurreret,) tantundem inde advenit, puta alterum $mr\mathcal{P}C$; (ſed cujus hic minor habenda ratio, utpote quod aliunde compenſatur:) Adeoque vis tota compreſſiva, $2mr\mathcal{P}C$.

Dico porro; Vim Impellentem ſeu Comprimentem, ubi ad Æquipollentiam res redigitur, ceſſare; (utpote quæ tota flectendo Elatere impenſa eſt.) Vis enim extrinſecus impreſſa, qualem ſupponimus Impellentem, (ſecus quam Vis inſita, qualis eſt Gravitas, & Vis Elaſtica compreſſa,) ubi ſemel ad quietem redigitur, perit; neque valet ſeipſam reſtituere: ut neque ſe accelerare, ubi retardatur. Utut enim Corpus in motu, niſi impediatur, eo ipſo perſeverat: non acceleratur tamen, aut ex quiete in motum reducitur, abſque cauſa poſitiva. per prop. 11. Cap. 1.

Dico itaque tertio; ceſſante (ut dictum eſt) motu Impellente, ſeu Comprimente, Vim Elaſticam, jam liberam, & (ut modo demonſtratum eſt) Vi pridem comprimenti æqualem, æqualiter utrinque ſe explicare nitentem, vim dimidiam ſeu alterum $mr\mathcal{P}C$ in Obicem impendere (utut irrito conatu,) alterum vero $mr\mathcal{P}C$ in advectum Grave. Quod itaque eadem Vi, adeoque & eadem Celeritate, Corpus A repellit, qua advectum fuerat. (Nempe, Vi $mr\mathcal{P}C$; adeoque, propter pondus $m\mathcal{P}$, Celeritate rC) Nam vis Æqualis, eidem Ponderi applicata, eadem Celeritate movet; per prop. 27. Cap. 1.

Dico denique; per eandem rectam repercuſſum iri. Cum enim à corpore directe impingente introrſum flectatur Elater, idemque Vi Elaſtica in figuram priſtinam ſe reſtituat, per def. 1. hujus, (adeoque eadem via redeat qua premebatur,) eandem Directionem Corpori repercuſſo impertit quam inde acceperat, niſi quod ſit ad partes contrarias. Quod itaque per eandem rectam redibit.

Quodque jam demonſtratum eſt, poſita in Obice Vi Elaſtica: perinde obtinet ſi Vis illa ſit in Corpore impingente; vel etiam in utroque. Quippe illud utcunque obtinet; Non prius ſiſti Vim Impellentem, quam æquipolleat Elateris (ſive Singularis, ſive Gemini,) adverſa Reſiſtentia; ſed neque ultra perſeverare. Unde reliqua ſequuntur.

Idem aliter.

Si Elater nullus eſſet; ſiſteretur motus A, ad quietem redactus: per prop. 1. Cap. 11. Totus igitur qui deinceps eſt motus, eſt ab Elateris Vi reſtitutiva. Ea vero ſemper æqualis eſt Ictus Vi, (Cap. 11. prop. 5. & ſeqq. traditæ.) Vis enim Elateri illata, Ictui (quem totum ſuſtinet) æqualis eſt: quæ itaque Elaterem eouſque comprimit donec hujus reſiſtentia illi æquipolleat. Et quidem ſi reſiſteret ut nudum Impedimentum; quieſceret adhuc advectum Grave: Cum vero Elater reſiſtat, non ut nudum Impedimentum, ſed ut Vis contraria, & quidem tantundem renitendo agens quantum compreſſus pateretur; ſitque hoc quod patitur, Ictui ſeu Vi illatæ æquipollens: etiam eidem æquipollet Vis reſtitutiva. (Quod & in propoſitionibus ſequentibus non minus locum habet, adeoque & ibidem pro demonſtrato habeatur.) Eſt autem, hoc caſu, (poſito Gravis A, pondere $m\mathcal{P}$, & Celeritate rC,) Ictus magnitudo (per prop. 6. Cap. 11.) $2mr\mathcal{P}C$: tanta igitur erit Vis Elateris reſtitutiva: Quæ itaque cum utrinque ſe explicare ſatagat, adeoque Vi dimidia ſeu $mr\mathcal{P}C$ in Obicem, utut irrito conatu; & in advectum A, vi

item dimidia $m r \mathcal{P} C$ repellendo: Erit, propter pondus $m\mathcal{P}$, Celeritas (retrorſum) rC. Quod erat propoſitum.

Adhuc aliter.

Cum nullus forte ſit tam firmus Obex quin aliquatenus percuſſioni cedat; utut tam exigua poſſit eſſe ea ceſſio ut omnem ſenſum fugiat, adeoque merito negligatur & pro nulla habeatur, & Obex pro immobili; (ut, verbi gratia, ſi muſca vel pulex in telluris molem in aere pendulam inſultum faceret:) Si res ita concipiatur; demonſtrabitur idem (mutato propoſitionum ordine) ex prop. 8. hujus: Ubi ſupponitur A motum, in B quieſcens, ſed non impeditum, impingere. Quippe ſi illic ſit A, ponderis $m\mathcal{P}$ (exigui) cum celeritate rC; B vero ponderis $n\mathcal{P}$ (immenſe magni) quieſcens: Erit impingentis A celeritas poſt contactum $\frac{m-n}{m+n} rC$ prorſum, (per prop. 8. hujus;) hoc eſt, (propter prævalentiam ſigni —, ponitur enim $n\mathcal{P}$ multo majus quam $m\mathcal{P}$,) $\frac{n-m}{m+n} rC$ retrorſum; quod (propter exiguam & plane contemnendam ponderis $m\mathcal{P}$ magnitudinem reſpectu immenſi ponderis $n\mathcal{P}$) tantundem erit, hoc caſu, atque $\frac{n}{n} rC = rC$ retrorſum: Reliqui autem gravis B (per eandem prop. 8.) celeritas poſt contactum $\frac{2m}{m+n} rC$; quæ (propter exiguam & plane contemnendam rationem m ſeu $2m$, ad n nedum ad $m+n$,) inſtar nullius erit; ut non immerito dici poſſit B immotum quieſcere.

Sin ea ſuppoſitio non admittatur, ſed Obex B cenſeatur plane immobilis; cenſenda erit ejus firmitas æquipollere ponderi quieſcenti ſed non impedito $n\mathcal{P}$ infinito, (pondus enim finitum non impeditum, nonnihil ſaltem movebitur, per eandem prop. 8.) Adeoque impingentis A, Celeritas poſt contactum (ibidem exhibita) $\frac{n-m}{m+n} rC$ retrorſum, erit $\frac{\infty-m}{m+\infty} rC$; quod tantundem eſt (propter finiti m ad infinitum ∞, rationem infinite exiguam ſive nullam,) ac $\frac{\infty}{\infty} rc = rC$. Et quieſcentis pridem B, Celeritas poſt contactum $\frac{2m}{m+n} rC$, erit $\frac{2m}{m+\infty} rC$; quod tantundem eſt (propter m finitum, & n infinitum) atque $\frac{2m}{\infty} rC$, ſeu $\frac{2}{\infty} rC$, celeritas nulla; quare & B etiamnum quieſcet. Prout alias ante demonſtratum fuerat.

SCHOLIUM.

NON ignoro; pleroſque Mechanicorum Vim neſcio quam in Motu incepto ponere, qua (ſi procedere non poſſit) mutata directione (etiam abſque nova cauſa) reſiliat. Cum vero hoc Gratis dictum videatur, (ut novus motus abſque nova cauſa incipiat,) & Poſtulatum; atque multis porro incommodis urgeri poſſit: Id me potiſſimum movet, quod, utut nudum Impedimentum Motui tollendo ſufficiat, (adeoque inceptum motum impedire valeat ne procedat;) quo tamen contrarius ponatur, Vi Poſitiva videtur Opus: (per prop. 11, 12. Cap. 1.) Cumque ea in Vi Elaſtica præſto ſit, cur illam reſpuamus non video. (Præſertim cum in Molli Corpore, vel etiam Fluido, in Solidum impacto, motum Siſti videamus, ſed non Reflecti.)

Si tamen iſtiuſmodi Corpus ſit, ut nec ita Molle ſit quin aliquid habeat Elaſticæ Virtutis; nec ita interim Elaſticum plane quin fractis Elaterum fibris aliquot (nec tamen omnibus) figuram quadantenus immutari patiatur: Reſilitio quidem fiet, ſed imperfecta. (Supponit enim Demonſtratio, tam Validam eſſe Vim Elaſticam, ut Vi Impellenti ſuſtinendæ par ſit, abſque aliqua ſui ruptione.) Sed & idem quadantenus accidit ob Medii reſiſtentiam: quæ Motum tum Directum, tum Reflexum, ſenſim imminuit. Item, ob naturalem gravium Deſcenſum; qui ſe cum reliquis motibus ſenſim inſinuabit. Sed eas conſiderationes, & (ſi quæ ſint) extrinſecas alias, hic ſecludimus.

Notandum

Notandum etiam; utut Vim Impellentem, quaſi totam extrinſecus Impreſſam ſupponamus; adeoque ceſſare totam ubi ad Æquipollentiam res redigitur: Fieri tamen poſſe, ut ea partim naturalis ſit, à Gravitate orta; uti cum deorſum projicitur corpus impactum, aut etiam deorſum cadens motu naturaliter accelerato eum acquirit Impetum quo in Obicem impingit. Quod ubi contingit, moderatione opus erit. Separanda utique eſt Vis extrinſecus impreſſa, ab ea quæ Gravitatis eſt ſimpliciter conſideratæ: Eaque tota perit; dum hæc permanet, & Vim Elaſticam eatenus obtundit, quo Reſilitio imperfectior evadat & minori cum celeritate; Quin & tanta eſſe poteſt ut Elaſticam Vim ita ſuperet, ut quamvis aliquantulum reſurgat (ob ſublatam Vim extrinſecus impreſſam, qua etiam primitus comprimebatur,) non valeat tamen impactum corpus ab ſe abigere.

Sed & qui accelerando acquiritur Celeritatis gradus, ſeparandus erit à nativa gravitate: Quippe Grave acceleratum, ubi Objecto Obice ne procedat impeditur, nativam quidem Gravitatem retinet, ſed acquiſitam Celeritatem deperdit; atque deinceps tanquam à Quiete incipiens procedit, nulla ratione habita Celeritatis pridem acquiſitæ ſed jam deperditæ.

Sin (contra hanc de Vi Elaſtica hypotheſin) objiciatur; Omnia omnino Corpora Dura, hujuſmodi Reſilitionem ſeu Reflexionem admittere; & quidem ea fortius quæ Duriora ſunt & firmiora: Fieri quidem id omnino poteſt, nec interim adverſari huic de Vi Elaſtica doctrinæ; Nempe, ſi & illa omnia Dura Corpora, ſint etiam Elaſtica. Quod quidni dicendum ſit, non video. Et quamquam quo Duriora ſiunt, eo minus preſſui cedant: cedunt tamen; &, quo minus cedunt, eo fortius reſiſtunt, adeoque & repercutiunt. Et quamquam Cap. 11. (ubi de Percuſſione agitur) Duritiem præcluſa Elaſticitate conſideremus; (ut quid inde ſequeretur demonſtremus ſi nulla eſſet Vis Elaſtica:) Non tamen id volumus ut Vim Elaſticam de Duris ſimpliciter negemus; cum nulla forſan ſint Corpora ita ſimpliciter Dura ut illam non habeant: (Utut, ita Mollia, forſan eſſe poſſint.) Et quidem ego (ut dicam quod res eſt) omnino exiſtimo; Vel nulla eſſe Dura Corpora, quæ non ſint Elaſtica; vel ſaltem (ſiqua ſint) ea, invicem commiſſa nullam Reflexionem pati; ſed obſervare leges Capitis XI. Et quidem in Marmore, Vitro, Ligno, Fictilibus, Metallis durioribus, aliiſque duris innumeris, Vim Elaſticam ineſſe; non tantum ex ſono edito (Bombo vel Tinnitu, prout repercuſſio tardior eſt vel expeditior,) auribus percipimus; ſed Oculo, & Tactu, obſervare licet, ob tremorem utique notabilem.

PROP. II.

Si Grave motum, in firmum Obicem Oblique impingat; ſitque vel Alterum vel utrumque Elaſticum: Reſilitio, eadem Celeritate (& in eodem Plano) ita fiet, ut Angulus Reflexionis ſit angulo Incidentiæ æqualis.

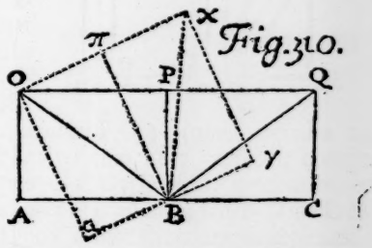


Fig. 310.

INtelligatur, in ABC planum firmum, per OB rectam obliquam, impingens Grave; Angulum Incidentiæ faciens OBA. Componetur hic motus Obliquus per OB, ex duobus motibus (per prop. 6. Cap. 10.) altero Parallelo, ut OP ſeu AB; altero Perpendiculari, ut PB. Quorum quidem ille (utpote parallelus) in ABC planum neutiquam offenſat, neque ab eo impeditur: adeoque eadem Celeritate qua prius procedet; puta, quo tempore ferebatur ab OA ad PB, eodem vel æquali feretur (æquali longitudine) à PB ad QC. Altero vero (utpote perpendiculari) per PB in ABC planum directe impingit; adeoque, propter Vim Elaſticam (ſive alterius ſive utriuſque Corporis) in B puncto Incidentiæ, eadem Vi, adeoque & eadem celeritate, directe repercutitur per BP. per prop. præced. Hoc eſt, eodem ſeu æquali tempore feretur ab AC ad OQ quo ab OQ ad AC ferebatur; hoc

eſt, eodem quo à P B ad Q C. Adeoque per rectam B Q. per prop. 6. Cap. 10. Et propterea, propter O P ipſi P Q æqualem, & P B ſeu B P communem, (omneſque æquali tempore tranſactas,) erit B P O triangulum triangulo B P Q ſimile & æquale, (& quidem, propter O P Q unam rectam, in eodem plano utraque:) Adeoque tum P B Q angulus æqualis angulo P B O, tum (reliquus ad rectum) Q B C angulus Reflexionis, (reliquo item ad rectum) O B A angulo Incidentiæ, æqualis. Quæ erant demonſtranda.

SCHOLIUM.

SIquis autem ex Tironibus (aut alius quiſpiam Tirone major) quiritet, Cur ſimpliciſſimum motum rectum O B, ex duobus compoſitum affirmem Gratis? Aut etiam, ſi compoſitum eſſe velim; cum tamen mille modis aliis, æquo jure, dici poſſit componi; cur ego, reliquis poſthabitis, hoc præ cæteris modo compoſitum, affirmem Gratis; (nec Probem, tum Compoſitum eſſe, tum hoc non alio modo compoſitum?) Reſpondeo, Nullum ita ſimplicem eſſe motum poſſe, quin in plures componentes reſolvi poſſit. Dum autem hunc præ cæteris modum feligo; utor ego meo jure, qui (cum quamlibet poſſim) eam adhibeo compoſitionem quæ præſenti negotio ſit accommoda. Neque probandum erit, Compoſitionem hanc, unicam eſſe poſſibilem; ſed, ex multis unam. Liberum utique eſt, pro ſuo cujuſque conſtructoris arbitrio, ex Veris innumeris ea ſeligere quæ ad rem præſentem conducant.

Atque hoc perinde obtinet (ut aliis compoſitionibus rem illuſtrem) in aliis atque in præſenti caſu. Notum utique eſt, numerum 12, componi ex 3 × 4, ſed & ex 2 × 6, item ex 1 × 12, (aliiſque modis innumeris per numeros fractos.) Si itaque exponatur numerus 12, dato Diviſore 2 dividendus, & quæratur Quotiens: Afferam ego protinus, numerum 12 ex 2 × 6 compoſitum; adeoque ſumpto Diviſore 2, Quotiens erit 6. Sin oggerat aliquis, Numerum hunc Duodenarium de quo fit ſermo, nulla hujuſmodi compoſitione conſtructum fuiſſe; ſed nuda Unitatum collectione; (puta, ſi totidem homines viritim collecti fuerint:) Cur itaque velim ego, numerum (additione mera conſtructum) multiplicando compoſitum affirmare Gratis? Et quidem, ſi velim eſſe multiplicando compoſitum, cur ſic compoſitum (ex 2 × 6) affirmem Gratis, cum poſſit eodem jure ex 3 × 4, vel 1 × 12, &c. componi dici? nec probem, eo potius modo fuiſſe compoſitum? Num audiendus, inquam, eſt hic Objector? Annon reponendum ſtatim videas, Non eo minus numerum 12 ex factoribus 2 × 6 compoſitum eſſe, vel in eos reſolubilem, quod fuerit (hac vice) additione conſtructus? Quippe cum conſtitutus eſt numerus, utcunque conſtituatur, non ideo deperdit proprias affectiones. Quod autem non dixerim ex 3 × 4, vel 1 × 12, Compoſitum, (utut hæc vera ſint, atque alias, ubi opus fuerit, dicenda,) ſed ex 2 × 6: ratio in promptu eſt: Nempe, non quod reliquæ compoſitiones non ſint veræ, ſed quod ad præſens negotium ſint inutiles. Quippe non quærebatur numerus qui cum 1, vel 3, vel 4 compoſitus, ſed qui cum 2 compoſitus conſtituat 12.

Similiter; cum poſſit Ratio A ad B, mille modis componi; puta ex A ad C & C ad B; vel ex A ad D & D ad B; vel ex A ad E & E ad B; &c. Si tamen datis rationibus A ad B (puta 1 ad 2) & A ad C (puta 1 ad 3) quæratur, quæ ſit ratio C ad B: Dicendum erit, non quidem rationem A ad B compoſitam eſſe ex A ad D & D ad B; aut ex A ad E & E ad B; (quippe hæ compoſitiones, utut veræ ſint, ad rem præſentem non faciunt;) ſed, ex A ad C & C ad B: Adeoque, ſi ex ratione A ad B eximatur (altera componentium) A ad C, habebitur (reliqua) C ad B; (puta 3 ad 2.)

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{B}=\frac{A}{D}\times\frac{D}{B}=\frac{A}{E}\times\frac{E}{B}\ \&c.\quad \frac{A}{C}\Big)\frac{A}{B}\left(\frac{C}{B}.\ \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}.\right.$$

Siquis autem quærat; cur velim ego rationem ſimpliciſſimam, 1 ad 2, compoſitam eſſe gratis affirmare? Et quidem, Cur ſic compoſitam, cum aliis mille modis non minus componi poſſit? Omnino imprudenter atque imperite hoc quæritur: Cum nulla ſit tam ſimplex ratio quæ non poſſit in plures reſolvi: Neque, cur, reliquis poſthabitis, hanc ſelegerim compoſitionem; aliam reddendam eſſe cauſam, quam quod hæc ſit præſenti negotio reliquis accommodatior.

Pari-

Pariter; si expositi Gravis, datum sit Momentum $mr\mathcal{P}C$, & datum Pondus $2m\mathcal{P}$, quæratur autem Celeritas: Respondendum, non quidem $mr\mathcal{P}C = m\mathcal{P} \times rC$, vel $= r\mathcal{P} \times mC$ (quæ quidem vera sunt, & alias dicenda, sed nihil ad rem præsentem,) sed $mr\mathcal{P}C = 2m\mathcal{P} \times \frac{1}{2}rC$; (adeoque Celeritatem quæsitam esse $\frac{1}{2}rC$:) Non utique quærebatur, qua Celeritate pondus $m\mathcal{P}$, seu $r\mathcal{P}$, sed qua $2m\mathcal{P}$ ferendum sit ut momentum habeatur $mr\mathcal{P}C$.

Atque similiter omnino in casu præsenti. Quippe cum constet motum OB, eundem esse cum eo qui componitur ex OP & PB, (neque enim hoc negabitur;) quidni dicam motum OB ex OP & PB componi, aut (quod tantundem est) in hos resolubilem esse? (eodem jure quo, si constet numerum 12 eundem esse cum eo qui componitur ex 3×4, dixerim 12 ex 3×4 componi?) Et quamquam multis adhuc aliis modis componi possit; dum hunc præ cæteris seligo ut negotio præsenti accommodum; utor ego meo jure: Eodem usurus, si, expositio plano alio, aliam selegero compositionem. Quippe si pro ABC exponeretur planum $\alpha B \gamma$; eundem OB motum, compositum dicerem (non, ex OP & PB, sed) ex $O\pi$ & πB. Adeoque, propter æquales $O\pi$, $\pi\chi$, in eadem parallela recta; & $B\pi$ ipsi πB vel æqualem vel eandem; Reflexionem futuram esse in $B\chi$ recta; Angulumque Reflexionis $\chi B\gamma$, angulo Incidentiæ $OB\alpha$ æqualem. Has autem (respective) compositiones adhibeo, non quasi aliæ non essent veræ; sed quod, ex veris multis, ea seligenda sit (utrobique) quæ ad rem propositam conducat. Id autem hic loci est; ut totum illud motus Obliqui OB cui adversatur planum ABC, vel $\alpha B\gamma$, ab eo separem cui non adversatur: quod non aliter obtinetur, quam resolvendo motum obliquum in Parallelum & Perpendicularem.

Estque res hæc tam Clara, ut nulla illustratione putaverim indiguisse, si non hoc ipsum serio objectum viderim à Viro cum tironibus non numerando: Nempe ab *Honorato Fabri*, Dialog. Physic. 2. p. 195; & Tract. de Motu. lib. 6. & alibi.

PROP. III.

Si duo Gravia invicem Æqualia, æquali Celeritate sibi mutuo directe occurrant; sintque (alterum vel utrumque) Corpora Elastica:
Aut etiam, si Gravia illa sint Inæqualia, sed Celeritates habeant reciproce proportionales, (quo saltem Momenta sint æqualia:)
Resiliet utrumque eadem Celeritate qua accesserat, & per eandem rectam.

INtelligantur, sic occurrentia, A, B, gravia: quorum utriusque Pondus sit $m\mathcal{P}$, Celeritas rC: Vel, illius quidem Pondus $m\mathcal{P}$, Celeritas rC; hujus vero Pondus $r\mathcal{P}$, Celeritas mC: Adeoque (utrovis casu) Momentum utriusvis $mr\mathcal{P}C$, & simul utriusque $2mr\mathcal{P}C$. Quorum cum utriusque Vim sustineat Elater (sive singularis sive geminus,) nec prius flecti cesset quam hujus resistentia eorum utrique æquipolleat, (per demonstrata ad prop. 1. hujus;) tum vero Vis impellens (ad quietem redacta, adeoque destructa,) urgere cesset: Elater Vi sua (impellentibus æquali) æqualiter utrinque se expedire satagens, utrinque eadem Vi (totius dimidia) $mr\mathcal{P}C$ repellit gravia; hoc est, eadem qua advehebantur; adeoque & eadem respective Celeritate; per prop. 27. Cap. 1. Hoc est, si utrinque sit pondus $m\mathcal{P}$, celeritate utrinque rC, (sed ad contrarias partes:) Sin secus; pondus $m\mathcal{P}$ Celeritate rC, & pondus $r\mathcal{P}$ celeritate mC: (propter $mr\mathcal{P}C = m\mathcal{P} \times rC = r\mathcal{P} \times mC$:) Hoc est, eadem Celeritate utrumque qua advenerat. Et quidem per eandem rectam (contrariis motibus) propter Elaterem eadem Directione redeuntem qua premebatur; utpote ad figuram pristinam se restituere satagentem. Quod & in sequentibus propositionibus pariter intelligendum erit; adeoque & ibidem pro demonstrato habeatur. Fig. 302.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus uterque, ad quietem redactus; per prop. 4. Cap. 11. Adeoque totus qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutiva:

Quæ

Quæ tanta ſemper eſt quanta eſt Vis Ictus; (ut ad prop. 1. hujus, oſtenſum eſt:) Hoc eſt, in caſu præſenti, (per prop. 7. Cap. 11.) $2mrPC$. Quæ utrinque æqualiter ſe expedire ſatagens, agit utrobique ut $mrPC$: Adeoqûe repellit Pondus mP celeritate rC, & pondus rP celeritate mC: ut prius.

PROP. IV.

Si duo Gravia Elaſtica (non ab invicem compreſſa) vel quieſcant utraque; vel utraque per eandem rectam ad eaſdem partes æquali celeritate ferantur; vel denique Antecedens Celeritate majore; (ſive invicem contigua ſint, ſive disjuncta:) Nullus Impulſus fiet, aut Elateris compreſſio; adeoque nulla propterea motuum immutatio.

Quare &, ſi, Gravibus alias motis, communis addatur (vel auferatur) Celeritas; nulla fit inde impulſus mutatio, (aut quæ hinc ſequuntur) ſed perinde eſt (Impulſum quod ſpectat, aut Elateris compreſſionem,) ſive adſit ſive abſit communis illa celeritas.

PRopoſitio patet. Quippe, ſi utraque quieſcant, nulla Vis utrivis infertur, nullus obſtruitur motus, neutrum impellit reliquum, nullaque fit quæ ab impulſu eſſet Elateris compreſſio, aut quæ ab utrovis procederet motuum immutatio, (puta, quæ vel Celeritatem ſpectet, vel Directionem,) utut contigua fuerint ea Gravia; nedum ſi disjuncta.

Similiter, ſi ferantur utraque ad eaſdem partes eadem Celeritate. Quippe, ſi disjuncta ſint, manebunt adhuc disjuncta, (& quidem eodem intervallo,) propter eandem utriuſque Celeritatem; adeoque ne quidem ſe contingent mutuo, nedum impellent. Sin contigua ſint; dum tamen Antecedens eadem Celeritate fugit qua ſequitur Inſequens; utcunque nulla Vis infertur, nulla motus obſtructio; adeoque nullus impulſus, nulla compreſſio, nullaque inde motus immutatio.

Sin Antecedentis Celeritas ſit major: tantum abeſt ut à ſeguius Inſequente prematur, ut hoc à tergo relinquatur, facto intervallo ſi fuerint contigua, & aucto ubi disjuncta fuerint.

Addo tamen, *modo ne ſint ab invicem compreſſa*: Quippe, ſi hoc contigerit, Vis Elaſtica, quamprimum poterit, ſe exſeret, motuſque immutationem efficiet.

Atque eadem ratione conſtabit Corollarium. Quippe, qua Celeritate fugit Antecedens, adeoque ſe ſubducens declinat ictum; eatenus ſequenti non obſtat, ejuſve motum obſtruit, unde ſequeretur impulſus vel compreſſio, (non magis utique quam ubi ſequenti contiguo ſe ſubducit antecedens;) ſed tota Vis impulſiva ſeu compreſſiva, æſtimanda eſt, ab exceſſu Celeritatis ſequentis ſupra Celeritatem antecedentis ad eaſdem partes moti; qui idem utcunque erit quicunque vel addatur vel auferatur motus utrique communis.

Aliter.

Vel ſic; Ob motum communem, nullus fit Ictus, vel ictus immutatio; per prop. 7. Cap. 11. Ergo, nulla Elateris compreſſio (aut quæ hinc ſequuntur) ut quæ Ictui æquipollet; per demonſtrata ad prop. 1. hujus.

PROP.

PROP. V.

Si Grave motum, Æquali Quieſcenti (nec impedito tamen) directe impingat; ſitque vel alterum vel utrumque Elaſticum: Motum quieſcet; & Quieſcens movebitur, ea Celeritate quæ fuerat prius moti.

ESto Gravium hujuſmodi invicem æqualium, A, B, pondus utriuſvis mP. Quorum B quieſcat; eique directe impingat A, Celeritate rC, adeoque Momento ſeu Impetu $mrPC = mP \times rC$. Vim huic æquipollentem Imprimeret Elateri, (eadem ſeipſum exuens) qua (retenta) Elater poſt repelleret ipſum A (ad quietem redactum,) modo B firmum eſſet: per prop. 1. hujus. (Ut taceam id quod eſt ab Obice atque in Obicem rependitur.) Sed, propter non impediti B ceſſionem, quam ab A recipit Vim Elater, eandem cedenti B protinus impertit, (nec in ſe retinet, ut in caſu prop. 1. quo poſſit A poſt repellere.) Unde factum eſt, ut impellens A (vi ſua deſtitutum quam in Elaterem impenderat) Quieſcat; eaque Vi $mrPC$ (Elateris interventu in B collata) propellatur B; adeoque (propter mP pondus) Celeritate rC (prorſum,) quæ fuerat impellentis. Fig. 300.

Demonſtratio alia.

Sunto hujuſmodi Gravia æqualia A, B, quorum utriuſvis Pondus ſit mP. Atque, in B quieſcens, directe impingat A, Celeritate rC; adeoque Momento ſeu Impetu $mrPC$. Quo itaque, propter ceſſionem non impediti B, utraque junctim ferenda eſſent (ſi Vis Elaſtica abeſſet) Celeritate dimidia, $\frac{1}{2}rC$ prorſum (propter $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$,) per prop. 2. Cap. 11. Sed (propter Vim Elaſticam) Elateri imprimitur Vis reſtitutiva ipſi $mrPC$ æquipollens. (Nam quamdiu Elateris flexio facilius fiat quam utriuſque Gravis proceſſus, Elater porro flectitur; & qua Vi flectitur, eadem propter Vim Elaſticam ſe reſtituit.) Elater itaque, utrinque ſe explicare ſatagens (diremptis invicem Gravibus) Repellit A, Vi $\frac{1}{2}mrPC$; atque eadem Vi $\frac{1}{2}mrPC$ Propellit B; Adeoque (propter pondus utrobique mP,) A quidem Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum;) B vero, Celeritate $+rC$ (prorſum.) Sed ferendum erat A alio nomine (ut dictum eſt) Celeritate $+rC$ (prorſum;) Ergo, cum hoc nomine accedat Celeritas $-rC$ (retrorſum;) quieſcet A (ſeu nulla in utramvis partem Celeritate movebitur) propter $+\frac{1}{2}rC - \frac{1}{2}rC = 0C$. Ferendum autem erat B alio nomine (ut item oſtenſum eſt) Celeritate $\frac{1}{2}rC$ (prorſum;) ſed & hoc nomine propellitur item Celeritate (prorſum) $\frac{1}{2}rC$: Ergo, tota Celeritas eſt $\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = rC$ (prorſum;) hoc eſt, ea quæ fuerit prius moti.

Vel ſic brevius.

Poſitis ut prius; ferenda eſſent utraque ſi Elater nullus foret, Celeritate $\frac{1}{2}rC$ prorſum; adeoque utrumvis momento ſeu Vi $\frac{1}{2}mrPC$; per prop. 2. Cap. 11. Eſt autem (per prop. 9. Cap. 11.) ictus magnitudo $mrPC$; atque huic æqualis Vis Elateris reſtitutiva, (per demonſtrata ad prop. 1.) quæ ſe utrinque explicare ſatagens, dimidia Vi tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque ipſi A impertit Vim $-\frac{1}{2}mrPC$ (retrorſum,) & B, Vim $+\frac{1}{2}mrPC$ (prorſum:) quæ ſi prius poſitis reſpective addantur, fiet Vis in A, $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}mrPC = 0PC$; quod itaque quieſcet; in B vero $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}mrPC = mrPC$; (prorſum;) quod itaque (propter pondus mP;) feretur prorſum Celeritate rC quæ fuerat ipſius A.

Adhuc alia.

Sunto ea Gravia æqualia (ut prius) A, B; & quieſcenti B, directe impingat A, Celeritate rC prorſum. Intelligatur autem utrique ſuperaddi motus communis, Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum;) quo fiat Gravis A Celeritas $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorſum,) & Gravis B Celeritas $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum.) Quo caſu, ferretur A, poſt contactum Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum,) & B Celeritate $+\frac{1}{2}rC$ (prorſum,) per prop. 3. hujus. Sed (propter communem motum nullius inſtar, impulſum quod ſpectat, per prop. præced.) idem erit impulſus effectus in caſu præſenti. Si

itaque in ſtatum priſtinum reſtituantur, dempta utrinque quæ addebatur Celeritate $-\frac{1}{2}rC$, (ſeu, quod eodem recidit, addita Celeritate $+rC$ prorſum,) habebitur Gravis A Celeritas $-\frac{1}{2}rC+\frac{1}{2}rC=0C$; & Gravis B, Celeritas $+\frac{1}{2}rC+\frac{1}{2}rC=+rC$. Hoc eſt, quieſcet A, & feretur B prorſum, ea Celeritate quæ fuerat ipſius A.

SCHOLIUM.

PLures hic demonſtrationes congeſſi (ut & in aliis propoſitionibus,) non quod diffidam ſingulis (velimque Numero ſupplere quod Vi deeſt,) ineſt enim ſingulis ſua Vis: Sed, cum pro vario lectorum guſtu modo hic modo ille demonſtrandi modus placeat magis, ut quam magis velit Lector eligat. Prima quidem, aut etiam ſecunda (ut ad prop. 1. & 3.) Phyſicam rei cauſam magis explicant; quam tamen in ſequentibus parcius proſequor, ut quæ ab his dependent. Penultima (quæ ex Vi quæ foret ſi Elater nullus eſſet, eaque quæ ex Elateris Vi reſtitutiva, ictui ſemper æquali, colligit Vim integram,) meis hypotheſibus Cap. 11. traditis maxime accommodata eſt, & demonſtratio Geometrica (uti mihi videtur) maxime genuina. Adjunxi tamen ultimam, in eorum præſertim gratiam quæ hypotheſibus illis meis (vix dum receptis) difficilius forſan ſint aſſenſuri. Ea quippe methodo (quam, una cum præcedente, ſequentibus item propoſitionibus accommodo,) quæ, miſſis aliis, ex ſolis prop. 3. & 4. hujus admiſſis (quas alii poſtulant, potius quam probant, tanquam per ſe claras, aut experimentis Phyſicis ſatis comprobatas) ſequentes ſolo calculo elicit: ut (quicquid ſit de illis hypotheſibus, quas tamen ego maxime genuinas exiſtimo) nullus ſit de propoſitionum illarum veritate dubitandi locus; ut quæ non aliter à meis hypotheſibus dependeat, quam quod ego inde probem propoſitionem tertiam hujus, quam alii gratis poſtulant. Sed & exiſtimavi non abs re fore, utriuſque methodi conſenſum indicare: Adeoque Phænomena Motuum in Hypotheſi noſtra, (utut ſint ex aliis principiis deducta; ipſaque Hypotheſis noſtra, in *Tranſactionibus Philoſophicis* poſtmodum vulgata, *Societati Regiæ* prius fuerit exhibita & Regeſtis inſerta, quam eorum vel vulgatæ fuerint vel exhibitæ;) eadem plane ſint cum Phænomenis Hypotheſium D. *Chriſtophori Wrennii* noſtri, & D. *Chriſtiani Hugenii* Batavi. Id utique intereſt; quod, quæ illi vel poſtulant vel ex obſervatis nulla habita Elateris ratione ſupponunt; nos, Elateris ope, ex primis Principiis deducimus: Phænomenis interim quæ nos inde ratiocinando colligimus, iiſdem provenientibus quæ ex factis Experimentis obſervarunt ipſi. Ut inde minus dubitandum ſit, (cum ſinguli, clam reliquis, à diverſis principiis, & diverſis methodis ad eadem Phænomena perveneriſmus,) quin in veritate Phænomenum conſentiamus omnes.

PROP. VI.

Si duo Gravia (Elaſtica) invicem æqualia, ferantur (per eandem rectam ad eaſdem partes) Celeritatibus inæqualibus, & conſequens (majori Celeritate latum) antecedenti directe impingat: Ferentur, poſt contactum, ad eaſdem partes utraque, celeritatibus alternatis, ſeu invicem permutatis.

Fig. 301. SIt Gravium illorum æqualium A, B, utriuſvis pondus mP; celeritas illius, $rC=sC+tC$; hujus sC: adeoque momentum illius, $mrPC$; hujus, $msPC$; prorſum utraque. Eritque propterea Vis Elateris reſtitutiva (utpote Ictui æqualis, per demonſtrata ad prop. 1.) $mrPC-msPC=mtPC$; per prop. 10. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque ſe explicare nitens, vi dimidia $\frac{1}{2}mtPC$, tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque (propter pondus utrobique mP) confert illi celeritatem $-\frac{1}{2}tC=-\frac{r-s}{2}C$ (retrorſum;) huic, $+\frac{1}{2}tC=+\frac{r-s}{2}C$ prorſum. Sed & aliunde (ſi Elater nullus eſſet) ferendum foret utrumque Celeritate $r+s$

$\frac{r+s}{2}C$; per prop. 3. Cap. 11. Qua utrobique addita, fit Gravis A, celeritas $-\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C=sC$; & Gravis B, celeritas $+\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C=rC$: Hoc eſt, prorſum utraque & celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sint Gravia illa æqualia A, B; ſitque antecedentis B, celeritas sC; inſequentis A, celeritas (major) $rC=sC+tC$. Cum itaque ſit utrique communis celeritas sC, tantundem eſt (compreſſionem quod ſpectat) atque ſi utrobique abeſſet; (per prop. 4. hujus.) Adeoque ſequens A, celeritatis exceſſu tC, impingeret in B quieſcens. Quo caſu ferretur B, poſt contactum, celeritate tC (quæ fuerat inſequentis A,) A vero (quieſcens utique) celeritate oC; per prop. 5. hujus. Si itaque utrique reſtituatur, quæ communis fuerat, celeritas sC (modo dempta;) habebitur celeritas A, $oC+sC=sC$; & celeritas B, $tC+sC=rC$: Hoc eſt, ferentur utraque ad eaſdem partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VII.

Si duo Gravia (Elaſtica) invicem æqualia, Celeritatibus inæqualibus (per eandem rectam ad contrarias partes) ſibi mutuo directe occurrant: Ferentur deinceps ad partes contrarias, Celeritatibus invicem permutatis.

SIt Gravium æqualium A, B, utriuſvis pondus mP; illius vero celeritas, rC (prorſum;) hujus vero $-sC$ (retrorſum;) ſitque $r+s=z$. Erit momentum illius, $+mrPC$; hujus, $-msPC$: Adeoque Elateris (qui utrumque ſuſtinet) Vis reſtitutiva (Ictui æqualis) $mrPC+msPC=mzPC$: per prop. 11. Cap. 11. Quæ, æqualiter ſe utrinque explicans, vi dimidia $\frac{1}{2}mzPC$ utrumque repellit; adeoque, propter pondus mP utrobique, confert Gravi A celeritatem $-\frac{1}{2}zC=-\frac{r+s}{2}C$ (retrorſum;) & Gravi B celeritatem $+\frac{1}{2}zC=+\frac{r+s}{2}C$ prorſum.) Sed & ferenda erant utraque (ſi Elater nullus eſſet) celeritate $\frac{r-s}{2}C$; per prop. 4. Cap. 11. Quæ ſi utrobique addatur; habebitur celeritas A, $-\frac{r+s}{2}C+\frac{r-s}{2}C=-sC$ (retrorſum;) B vero, $+\frac{r+s}{2}C+\frac{r-s}{2}C=+rC$ (prorſum:) Hoc eſt, ad partes contrarias, celeritatibus permutatis. Fig. 302.

Aliter.

Sit Gravis A celeritas (prorſum) $rC=sC+tC$; & Gravis B (eidem æqualis) celeritas $-sC$ (retrorſum;) quæ ſibi mutuo directe occurrant. Cumque habeatur utrinque celeritas sC, ſed ad contrarias partes; ferrentur poſt contactum (propter has celeritates) A quidem, celeritate $-sC$ (retrorſum;) B vero, celeritate $+sC$ (prorſum;) per prop. 3. hujus. Sin demi intelligantur celeritates hæ; relinquetur Gravi A, celeritas tC, qua feratur in B ut quieſcens: Et, propter hanc celeritatem, ferretur B (prorſum) celeritate tC; & A (quieſcens) celeritate oC: per prop. 5. hujus. Quæ ſi prius memoratis reſpective addantur; habebitur Celeritas A, $-sC+oC=-sC$ (retrorſum;) & celeritas B, $+sC+tC=+rC$ (prorſum;) Hoc eſt, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

Adhuc aliter.

Sint Gravia æqualia A, B, quæ ſibi mutuo directe occurrant; A quidem celeritate $rC=sC+tC$ prorſum; & B, celeritate $-sC$ (retrorſum.) Intelligatur

autem utrique conferri (motu communi) celeritas $+sC$ prorſum; quo fiat Celeritas A, $rC+sC$ (prorſum;) B vero, $-sC+sC=oC$: (ut feratur A celeritate $rC+sC$, tanquam in B quieſcens.) Quod ſi ponatur; erit, poſt contactum, celeritas A, oC; B vero $rC+sC$ (prorſum;) per prop. 5. hujus. Sed & idem erit (impulſum quod ſpectat) in caſu propoſito. Si itaque utrinque dematur (quæ adjecta fuerat) celeritas $+sC$: habebitur ipſius A celeritas $oC-sC=-sC$ (retrorſum;) & B, celeritas $rC+sC-sC=rC$ (prorſum:) Hoc eſt, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VIII.

Si Grave motum, quacunque Celeritate, in Grave quieſcens (æquale) vel inæquale) directe impingat; (ſintque Elaſtica, alterum vel utrumque:)

Celeritas, poſt contactum, Gravis Impingentis, ad eam quæ prius fuerat, eſt, ut differentia ponderum, ad eorundem ſummam; (& quidem prorſum vel retrorſum, prout Pondus impingentis majus eſt aut minus Pondere quieſcentis; ſin ea ſint æqualia, quieſcet:)

Celeritas autem Quieſcentis, fiet (poſt contactum) ad eam quæ fuerat Impingentis, ut duplum ponderis impingentis ad eandem ponderum ſummam. Adeoque ſi pondera fuerint æqualia, ea celeritate quæ fuerat prius moti.

Fig. 300. ESto Gravis A moti, Pondus mP, Celeritas rC, adeoque Momentum $mrPC$: Et quieſcentis B (cui directe impingit A) Pondus nP. Erit Elateris vis reſtitutiva (ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}rPC$, per prop. 12. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque ſe explicans, Celeritate dimidia $\frac{mn}{m+n}rPC$ tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque confert illi (propter pondus mP) Celeritatem $-\frac{n}{m+n}rC$ (retrorſum;) huic (propter pondus nP) Celeritatem $+\frac{m}{m+n}rC$ (prorſum.) Sed & aliunde ferenda erant utraque (ſi Elater nullus eſſet) communi Celeritate $\frac{m}{m+n}rC$ (prorſum;) per prop. 2. Cap. 11. Quæ ſi utrinque addatur, habebitur Celeritas A, $-\frac{n}{m+n}rC+\frac{m}{m+n}rC=\frac{m-n}{m+n}rC$ (prorſum vel retrorſum prout m vel n majus fuerit; neutra vero ſi fuerint æqualia, propter $m-n=o$:) & Celeritas B, $+\frac{m}{m+n}rC+\frac{m}{m+n}rC=\frac{2m}{m+n}rC$: Et quidem, ſi $m=n$, Celeritate rC. Quæ demonſtranda erant.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; & Gravis B, pondus nP: atque intelligatur A, Celeritate rC, directe impingere in B quieſcens. Intelligatur item dividi Celeritas rC, in partes ponderibus reciproce proportionales; Nempe, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ reſpondeat ponderi mP; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ reſpondeat ponderi nP. Atque

que intelligatur porro utrique ſubtrahi Celeritas (quæ B reſpicit) $\frac{m}{m+n} r C$, ſeu tantundem retrorſum addi; (Quæ communis vel additio vel ſubductio impulſus valorem non immutat, per prop. 4. hujus:) Quo fiat Celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n} rC = \frac{n}{m+n} rC$; & Celeritas B, $oC - \frac{m}{m+n} rC = -\frac{m}{m+n} rC$; quæ itaque ſunt Ponderibus reciproce proportionales. Repercutientur itaque (per prop. 3. hujus) eiſdem Celeritatibus utraque quibus acceſſerant: Hoc eſt, A, Celeritate $-\frac{n}{m+n} rC$, (retrorſum;) & B, Celeritate $+\frac{m}{m+n} rC$ (prorſum.) Idemque erit impulſus ratio in Caſu præſenti. Adeoque ſi reſtituatur utrobique (quæ modo ablata eſt) Celeritas $\frac{m}{m+n} rC$ prorſum; habebitur Gravis A futura Celeritas $-\frac{n}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{m-n}{m+n} rC$ (prorſum vel retrorſum prout m vel n majus fuerit; neutra vero ſi ſint æqualia;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{2m}{m+n} rC$ (prorſum.) Ut prius.

PROP. IX.

Si duo Gravia (Elaſtica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuſcunque Celeritatibus, ferantur utraque per eandem rectam, ad eaſdem partes; (ita tamen ut Inſequens, majore Celeritate latum, in Antecedens directe impingat:) Ferentur utraque, poſt contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas ſubjectus Calculus indicabit.

SIt Antecedentis B, pondus nP, Celeritas sC prorſum: Sequentis A, pondus mP, Celeritas (major) $rC = sC + tC$. Erit Elateris Vis reſtitutiva (Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n} tPC$; per prop. 13. Cap. 11. Quæ utrinque ſe æqualiter explicans, adeoque vi utrinque dimidia, $\frac{mn}{m+n} tPC$; Gravi A, propter pondus mP, Celeritatem confert $-\frac{n}{m+n} tC$ (retrorſum;) & Gravi B, propter pondus nP, Celeritatem $+\frac{m}{m+n} tC$ (prorſum.) Sed & aliunde ferenda erant (ſi Elater nullus eſſet) Celeritate communi $\frac{mr+ns}{m+n} C$, per prop. 3. Cap. 11. Quæ itaque ſi utrobique addatur; habebitur Gravis A futura Celeritas, $-\frac{n}{m+n} tC + \frac{mr+ns}{m+n} C = \frac{mr+ns-nt}{m+n} C = \frac{mr-nr+2ns}{m+n} C$ (prorſum vel retrorſum, prout ſignum + vel − prævaluerit, adeoque neutra ſi æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} tC + \frac{mr+ns}{m+n} C = \frac{mt+mr+ns}{m+n} C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n} C$ prorſum. Quod oſtendendum erat. Fig. 301.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP: & ferantur utraque per eandem rectam ad eaſdem partes; puta, prorſum utraque: B quidem, Celeritate sC; A vero, Celeritate (majore) $rC = sC + tC$, atque in B directe impingat. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta Celeritas sC, (Quæ, cum communis ſit, impulſum non mutabit, per prop. 4. hujus.) Quo facto, B ad quietem redigetur (propter $sC - sC = oC$;) eique directe impinget A, Celeritate $rC - sC = tC$. Quo caſu, ferretur poſt contactum A Celeritate $\frac{m-n}{m+n} tC$ (prorſum vel retrorſum prout m vel n major fuerit) B vero Celeritate $\frac{2m}{m+n} tC$ (prorſum;) per prop. præced. Cum itaque eadem ſit ratio (impulſum quod ſpectat) in caſu præſenti: Si reſtituatur utrobique, quæ modo ablata eſt, Celeritas sC prorſum; habebitur futura Celeritas Gravis A, $\frac{m-n}{m+n} tC + sC = \frac{mt+ms-nt+ns}{m+n} C = \frac{mr-nr+2ns}{m+n} C$ (prorſum vel retrorſum, prout ſignum + vel − prævaluerit, adeoque neutra ſi æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{2m}{m+n} tC + sC = \frac{2mt+ms+ns}{m+n} C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n} C$ prorſum. Ut prius.

PROP. X.

Si duo Gravia (Elaſtica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuſcunque Celeritatibus, per eandem rectam, ſibi mutuo directe occurrant: Ferentur utraque, poſt contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas calculus indicabit.

Fig. 302. SIt Gravis A, pondus mP, Celeritas $+rC$ (prorſum;) & Gravis B, directe occurrentis, pondus nP, Celeritas $-sC$ (retrorſum;) ſitque $r + s = z$. Erit Elateris Vis reſtitutiva (utpote Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n} zPC$; per prop. 14. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque ſe explicare ſatagens, utrinque diſtribuit Vim dimidiam $\frac{mn}{m+n} zPC$. Adeoque Gravi A, propter pondus mP, celeritatem confert $-\frac{n}{m+n} zC$ (retrorſum;) & Gravi B, propter pondus nP, celeritatem $+\frac{m}{m+n} zC$ (prorſum.) Sed aliunde ferenda erant utraque (ſi Elater nullus eſſet) celeritate $\frac{mr-ns}{m+n} C$, per prop. 4. Cap. 11. Quæ itaque ſi utrobique addatur; habebitur Gravis A futura celeritas $-\frac{n}{m+n} zC + \frac{mr-ns}{m+n} C = \frac{mr-nz-ns}{m+n} C = \frac{mr-nr-2ns}{m+n} C$ (prorſum vel retrorſum prout ſignum + vel − prævaluerit, adeoque neutra ſi æquipolleant;) & Gravis B, celeritas $\frac{m}{m+n} zC + \frac{mr-ns}{m+n} C = \frac{mr+mz-ns}{m+n} C = \frac{2mr+ms-ns}{m+n} C$ (prorſum item vel retrorſum, prout prævaluerit ſignum + vel −, adeoque neutra ſi æquipolleant.) Quod oſtendendum erat.

Aliter

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP; quæ ſibi mutuo directe occurrant: A quidem celeritate rC (prorſum,) B vero celeritate $-sC$ (retrorſum:) ſitque $r+s=z$. Intelligatur autem (motu communi, qui itaque impulſum non immutabit, per prop. 4. hujus,) addita utrique celeritas $+sC$ (prorſum;) quo redigatur B ad quietem (propter $-sC+sC=oC$;) cui ut quieſcenti impingat A celeritate $rC+sC=zC$. Quo caſu ferretur, poſt contactum, A celeritate $\frac{m-n}{m+n}zC$; B vero, celeritate $\frac{2m}{m+n}zC$, per prop. 8. hujus. Adeoque, dempta utrobique, quæ modo addebatur, celeritate sC; habebitur Gravis A, futura celeritas $\frac{m-n}{m+n}zC-sC=\frac{mz-ms-nz-ns}{m+n}C=\frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorſum, vel retrorſum prout ſignum $+$ vel $-$ prævaluerit; neutra ſi æquipolleant:) & Gravis B, celeritas $\frac{2m}{m+n}zC-sC=\frac{2mz-ms-ns}{m+n}C=\frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorſum item vel retrorſum, prout ſignum $+$ aut $-$ præpolleat; neutra ſi æquipolleant.) Quod oſtendendum erat.

CAP.

CAP. XIV.

De Hydroſtaticis.

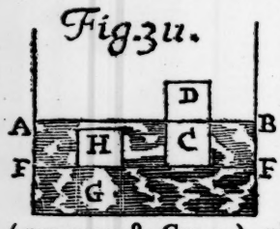
PROP. I.

A. Si Grave Fluidum (à latere ex omni parte & fundo ne effluat, concluſum; & ab alia Vi liberum;) ſuperne vel non prematur, vel æqualiter prematur ubique: Retinebit illud, ſupernam ſuperficiem quod ſpectat, ſitum Horizontalem, ſeu potius Sphæricum, Telluri con-
B. centricum: (quæ hic pro eodem habentur.) Atque inde deturbatum, ſuapte ſe Gravitate eo reſtituet.

C. Sin ſuperne prematur Inæqualiter, (plus alibi, alibi minus;) ea parte qua majori preſſu urgetur, Deſcenſus fiet; partibus ita preſſis, alias, quæ vel non preſſæ ſunt, vel minus preſſæ, loco ſuo detrudentibus; quæ itaque, pro illo deſcenſu, aſſurgent.

D. Quodque de Superficie ſuprema dictum eſt; alii cuivis (intra fluidum) parallelæ, ſimiliter accommodabitur.

A. ESto Gravis Fluidi (vaſe concluſi, & ab alia Vi liberi,) ſuperficies A B plana Horizontalis, (conſiderato ſcilicet Terræ Centro tanquam in infinita diſtantia, adeoque rectis perpendicularibus ut invicem parallelis;) ſeu potius Sphærica Telluri concentrica, (quæ hic pro eodem habentur,) quo partes ejus omnes ſint æqualiter altæ, ſeu à Terræ Centro remotæ, (per prop. 3. Cap. 2.) Sitque ſuperne vel non preſſa, vel æqualiter ubique preſſa. Cum itaque partes inferne poſitæ ſurſum (propter Gravitatem ſuam) non nitantur, (per prop. 1. Cap. 2.) quo poſſit ſuperficiei hujus pars ulla elevari; nec locus infra ſit (utpote qui æque gravibus jam occupatus eſt) quo poſſit deſcendere; neque ſit quod ſuperne deprimat, ſi non prematur; vel ſaltem quod hic magis quam alibi deprimat, ſi æqualiter prematur; nulluſque ea propter fiat motus, (per prop. 8. Cap. 2.) nihil eſt quod ſuperficiem illam deturbet, quin retineatur.



B. Et quidem, ſi extra hunc ſitum, externa Vi, deturbetur; ut ſit pars alia, puta D, cæteris altior: ſe ipſum, ad ſitum debitum, gravitate ſua reducet Fluidum. Quippe pars illa D, partim deprimet (cum gravis ſit) ſubjectas partes (ut poſt dicetur,) partim (cum fluida ſit) diffluet in partes humiliores (propter Deſcenſum qui ſic obtinebitur, nec à partium connexione impeditur, utpote fluidum) per prop. 1. Cap. 2. Atque hoc (ob eandem cauſam) quamdiu pars ulla manet reliquis altior. Redigetur igitur ad ſitum Horizontalem, ſeu (quem diximus) Sphæricum.

Sin aliquid hic accidentarium contingat, ſive propter Fluidi tenacitatem ſeu lentorem; ſive quod ſuperne premens non ita commode ſe poſſit omnibus partibus accommodare, (quæ cauſa eſſe poteſt cur Hydrargyrum in vaſe vitreo protuberet;) ſive ejuſmodi aliud: id hujus loci non eſt; ſed à præſenti conſideratione præcludendum.

C. Si qua vero ſui parte præ cæteris magis prematur, ut in C; puta propter incumbens D Grave (quod ſaltem gravius ſit quam tantundem incumbentis Aeris, aliuſve

aliuſve quicquid ſit æqualiter prementis,) aut aliam utcunque vim adhibitam: deprimentur fluidi partes in C, ſurgentibus alibi aliis, quo locus fiat depreſſis. per prop. 8. Cap. 2.

Quodque de ſuperficie A B oſtenſum eſt, ſimiliter oſtendetur de quavis alia intra fluidum eidem parallela, ut E F; quæ ſcilicet ſit Sphærica Terræ concentrica, ſeu (quod nobis hic tantundem ſignificat, ut & in ſequentibus,) Planum Horizontale, (conſiderato ſcilicet Terræ centro tanquam in infinita diſtantia.) Nempe, ſi æqualiter ubique prematur, (à fluidi parte ſuperiore, & ſiquod aliud eſt ſuperne, vel intra fluidum, vel fluido innatans,) ſitum retinebit; ſicubi vero magis premitur, puta in G, ab incumbente H, (quod gravius ſit quam Fluidi tantundem cujus locum occupat,) ibi deprimetur, ſurgentibus partibus minus preſſis. per prop. 8. Cap. 2. ut prius. D.

Atque hinc, ut totidem Corollaria, inferuntur propoſitiones ſequentes.

PROP. II.

Si Grave D, ſummæ fluidi ſuperficiei A B horizontali, in C incumbens, æque gravitet atque tantundem Aeris circumpoſiti, (aut quicquid ſit quod Aeris inſtar eſt, æqualiter prementis;) retinebit A B ſitum horizontalem. Fig. 311.

(Quod de Aere hic dicitur, & ſimiliter in ſequentibus, ſimiliter intelligendum erit de alio quovis quod Aeris inſtar eſt; puta ſi Aquæ ſupernatet Oleum, vel Spiritus vini, vel horum aliquod Hydrargyro, aut aliquod ſimile; nam & hic eadem eſt ratio.)

SEquitur ex præcedente. Quippe cum C tantundem præciſe prematur ab incumbente D, acſi hoc ſublato tantundem Aeris circumpoſiti (aut quod Aeris inſtar eſt) eundem locum occuparet; æqualiter ubique premitur.

PROP. III.

Sin illud D minus gravitet quam tantundem circumpoſiti Aeris, aut quod Aeris inſtar ſit, (nec avolet tamen, aut ab Aere circumpoſito ſurſum pellatur;) Aſſurgent ſubjectæ partes C, (utpote minus preſſæ,) ſubſidentibus aliis. Fig. 311.

Qui quidem Aſcenſus partium C ſubjectarum, eouſque perſeverabit (nec diutius) donec fluidi partes ſic aſcendentes compenſant ipſius D levitatem, ut aggregatum ipſius D partiumque ſic aſcendentium æque gravitet atque tantundem Aeris, aut quod Aeris inſtar eſt.

SEquitur ex prima hujus. Quippe dum (propter incumbens D levius quam tantundem Aeris, aut quod Aeris inſtar eſt, ut ad prop. præced. expoſitum eſt,) minus premitur C quam ſuperficiei A B partes reliquæ; aſſurgent partes C ſubjectæ, utpote minus preſſæ: (per prop. 1. hujus;) ſubſidentibus aliis. Idque eouſque donec quod fluidi ſic aſcendit, ut K, una cum D, tantundem ſimul gravitent, quantum circumpoſiti Aeris (aut quicquid aliud ſit ita circumpoſitum) tantum, quantum utriuſque locum impleret. Donec enim id fit, minus premitur; tum vero, æqualiter cum cæteris ipſius A B partibus premetur. Fig. 312.



Dico autem, *Si non avolet D, aut ab Aere circumpoſito ſurſum pellatur.* Quoniam ſi à circumpoſito aere non aliquo modo defendatur, D levius ſurſum fe-

retur, (ſive à levitate ſua, ut dici ſolet; ſive à circumpoſito aere ſurſum pulſa, quod potius dicendum eſt;) deſerens eam cui incumbebat ſuperficiem A B; neque propterea ſic aſcendent fluidi partes ſubjectæ, Aere ipſo (depulſo D) æquilibrium reſtituente. Si vero ita ab aere circumpoſito defenſum intelligatur D ne hoc fiat; demonſtratio locum habet.

PROP. IV.

Fig. 311. **Si illud D plus gravitet quam tantundem circumpoſiti Aeris (aut quod Aeris inſtar eſt,) minus autem quam tantundem fluidi ſubjecti: innatabit D; ſed depreſſis eouſque partibus C ſubjectis, donec eum ſitum obtinuerit D, ut æquigravitet aggregato Aeris & ſubjecti Fluidi quorum locum occupat.**

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Deprimentur enim partes C ſubjectæ, quia (propter D gravius quam tantundem Aeris) magis premuntur, aſſurgentibus quæ minus premuntur, utpote ab his depulſis: idque eouſque donec ſitum aſſignatum obtineat; quippe tamdiu minus premuntur ſubjectæ partes. Ubi vero eouſque perventum eſt ut ipſum D æque gravitet atque tantundem ſubjecti Fluidi quantum impleret locum immerſæ partis K, atque tantundem circumpoſiti Aeris quantum impleret locum partis eminentis I: non ultra ſubſidet, ſed innatabit; quippe jam contigua ſuperficies horizontalis E F, tantundem premitur in G, atque ſi locum I occuparet Aer, & locum K ſubjectum Fluidum; adeoque ſuperficies E F eſt æqualiter ubique preſſa.



PROP. V.

Si illud D, vel H, non modo plus gravitet quam tantundem circumpoſiti Aeris, ſed & quam tantundem ſubjecti Fluidi: Mergetur penitus, ad fundum uſque ſubſidens.

Fig. 311. SEquitur & hoc ex prop. 1. hujus. Sive enim in ſummo intelligatur, ut D premens partes C; ſive intra fluidum ubivis, ut H premens partes G; utcunque deprimet partes ſubjectas. Nempe partes C, quoniam gravius eſt quam tantundem aeris; & partes G (in quacunque fluidi profunditate) quoniam gravius eſt quam tantundem iſtius fluidi; adeoque C vel G magis premitur quam ſi abeſſet D vel H, ejuſque locum ſuppleret tantundem fluidi; & propterea magis quam ſuperficiei E F partes aliæ. Atque hoc, donec ad ipſum fundum pervenitur.

SCHOLIUM.

FIeri quidem poteſt, (ſi fluidum illud non ſit in omnibus ſui partibus æque grave, ſed prope fundum gravius quam prope ſummum,) ut non ad fundum uſque mergatur H; utpote gravius quam fluidum in ſummo, ſed levius quam fluidum in imo. Verum hoc demonſtrationem non turbat, quoniam ubi eo pervenitur, non jam plus gravitat H quam tantundem *ſubjecti* fluidi. Idemque alibi intellige ubi opus erit; aut quod huic æquipolleat: ne opus ſit iſtiuſmodi monitum ſæpius inſinuare.

PROP.

PROP. VI.

Si immerſum H, minus gravitet quam tantundem fluidi cui immergitur; magis autem quam tantundem aeris (ſeu quod aeris inſtar eſt:) Surſum propelletur; idque eouſque donec eum obtinuerit ſitum, ut æque gravitet atque tantundem Fluidi & tantundem ſuperpoſiti Aeris (ſeu quod hujus inſtar eſt,) quorum reſpective locum obtinet ſimul ſumpta. Fig. 311.

Sin præciſe quantum tantundem Aeris (ſeu quod hujus inſtar eſt,) aut eo minus: aſſurget ad fluidi ſummam ſuperficiem, aut etiam altius.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Dummodo enim immerſum H, minus Gravitat quam tantundem circumpoſiti fluidi; minus premitur G quam ſuperficiei contiguæ E F partes aliæ; adeoque partes ad G, ſimul cum H, ſurſum pellentur à partibus plus preſſis. Atque hoc eouſque donec ad ſitum aſſignatum pervenitur; quoniam tamdiu minus premitur G. Ubi vero eo perventum eſt, ut ipſius H ſeu D, pars extra fluidum ita emineat, ut totum ſimul tantum præciſe gravitet quantum tantundem Fluidi iſtius cujus locum occupat pars immerſa K, & tantundem Aeris cujus locum occupat pars emerſa I, (qui caſus eſt propoſitionis quartæ;) ibi perſtabit: quippe jam, ſuperficiei E F contiguæ, partes omnes æqualiter premuntur. Fig. 313.

Sin æque gravitet atque tantundem incumbentis aeris, (aut quod aeris inſtar eſt:) feretur ad ſummam fluidi ſuperficiem, ibique conſiſtet; (qui eſt caſus prop. 2.) nam eouſque minus premuntur partes ſubjectæ.

Sin minus adhuc gravitet: aut avolabit, aut ſurſum pelletur: per prop. 3. hujus.

SCHOLIUM.

NOtandum interim erit; id tantum hic in conſiderationem venire quod ex Gravitate ſimpliciter conſiderata provenit, non vero quod aliunde ex Impulſu ſeu præconcepto Impetu oritur. Si enim id in conſiderationem veniat, res omnino ſecus erit. Quippe Grave, utut levius quam eſt tantundem ſubjecti fluidi; ſi Vi dejiciatur aut deprimatur, vel, propter acceleratum gravium deſcenſum, vim cadendo conceperit; non ſtatim in fluidi ſuperficie hærebit, ſed altius immergetur, pro impetu quo prius ferebatur. Et ſimiliter, ſi ſubmerſum Grave, utut levius ſit quam tantundem fluidi, & gravius quam tantundem ſuperpoſiti aeris; dum tamen vel Vi ſurſum pellitur, vel, propter inceptum motum, impetum conceperit; etiam extra ſuperficiem fluidi altius in aerem proſiliet. Sed eam Impetus conſiderationem hic loci præcludimus; ut & in ſequentibus. Quanquam enim certum ſit rem ita fore; tamen, poſt vibrationes aliquot hinc inde ab impetu factas, ubi ad quietem redacta res eſt, eum ſitum obtinebit quem indicamus; & quem, ſi impetus aſcititius abeſſet, ſtatim aſſequeretur.

PROP. VII.

Si immerſum H, æque gravitet atque tantundem Fluidi cui immergitur: ſitum quem habet retinebit, abſque vel aſcenſu vel deſcenſu.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Quippe cum tantundem gravitet acſi, eo abſente, locus fluido ſuppleretur; ſubjecta ſuperficies neque magis premitur in G, quo hic ab H deprimeretur; neque minus, quo hic aſſurgeret ipſumque H propelleret. Fig. 311.

SCHOLIUM.

SEcundum has leges; reddenda erit ratio variorum in Experimento, *Torricelliano* dicto, Phænomenum. Et quidem, in eam cauſam, hæc olim ſcripta erant, & *Societati Regiæ Londini* exhibita, Auguſti 13 & 20. 1662. quo plurium Experimentorum, ibidem tum temporis agitatorum, ratio Statica redderetur: Qualia ſunt quæ ſequuntur.

PROP. VIII.

Sit Hydrargyri, ſubjecto vaſe contenti, ſuperficies Horizontalis AB externo Aeris preſſui expoſita, atque Tubus CD, (clauſus in D, & apertus in C,) hydrargyro impleatur, & dein invertatur, immerſo ejus Orificio C infra ſuperficiem ſubjecti hydrargyri AB, (obturato aliquandiu orificio C donec ſic immergatur, ne Hydrargyrum invertendo effluat, atque tum recluſo;) atque in eo ſitu ſuſtineatur. Quibus poſitis:

Si Hydrargyrum tubo contentum, quod ſuperficiei AB eminet, plus gravitet in ſubjectas partes C, quam preſſus incumbentis aeris in reliquas ejuſdem AB partes; fiet deſcenſus in C, depulſis quæ à latere ſunt partibus minus preſſis, etiamſi à preſſu ſuperincumbentis aeris, clauſo in D tubo, defendatur Hydrargyrum tubo contentum.

Qui quidem deſcenſus eouſque perſeverabit; donec, effluente Hydrargyri parte (relicto intra tubum ſpatio DI vacuo Hydrargyri,) & ſurgentibus (propter hunc effluxum) ſuperficiei AB partibus reliquis; quod in Tubo reliquum eſt IC tantundem premat C quantum Aer partes reliquas ipſius AB: eumque ſitum retinebit.

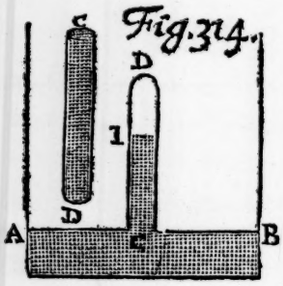


Fig. 314.

PAtet ex præcedentibus. Quippe dum Hydrargyrum tubo contentum (ut-ut ab Aere ſuperne defenſum) plus premat C quam ab aere premuntur partes reliquæ, deprimetur C (hydrargyro effluente:) ubi vero eo perventum eſt ut hydrargyri reliquum CI tantundem premat C, quantum premuntur ab aere partes reliquæ; (propter æqualem ubique preſſum,) ſitum illum retinebit. per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

DIco autem, *Spatium* DI *vacuum Hydrargyri*: non enim hic libet (neque opus eſt ad præſens negotium) diſputare, num ſit ſimpliciter vacuum, necne. Siquis enim vel gratis aſſerat, vel aliunde probatum eat, materia aliqua repletum eſſe, quod vel pondus nullum habeat, vel nullum quod in ſenſuum noſtrorum obſervationem incurrat; nobis illud hac in re neque obeſt neque prodeſt.

Dico etiam *plus gravitat*, & *tantundem gravitat*, potius quam plus aut æque Grave eſt: Quoniam quæ in ſe æque gravia ſunt, poſſunt tamen pro vario ſitu inæqualiter gravitare.

Atque

Atque hic occurrit primo expedienda difficultas; Cur, ſi Tubus erectus DC, in ſitum obliquum reclinetur ut GE, Hydrargyrum nihilominus inibi contentum EF in ſitu obliquo, in eadem altitudine perpendiculari conſiſtet atque CI in ſitu erecto; cum tamen (propter FE longiorem quam CI) ſuſpenſum Hydrargyrum FE plus ſit (adeoque gravius) quam CI.

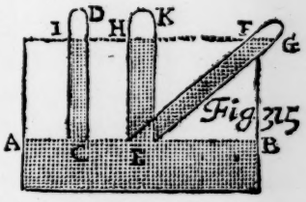


Fig. 315

Hæc autem difficultas facile ſolveretur ſi non ſubeſſet latentior alia. Quanquam enim verum ſit, Cylindrum reclinatum EF majorem eſſe erecto CI, & plus Hydrargyri continere: tamen non minus interim verum eſt, Baſin etiam ampliari; nam ejuſdem Cylindri ſectio Obliqua E (Elliptica) longior eſt (nec latior tamen) quam ſectio recta (circularis) C; adeoque baſin E in eadem ratione majorem eſſe baſe C, qua recta E (ellipſeos Axis major) longior eſt, quam C recta, Circuli diameter, eademque Ellipſeos axis minor.

Sed & (quod mox demonſtrabimus) in eadem ratione prolongatur C in E, qua prolongatur CI in EF: Ut non ſit mirum ſuper majore baſe (elliptica) plus hydrargyri ſuſtineri (& quidem in eadem ratione plus) quam ſuper minore (circulari) C; utut C & E ſint ejuſdem Cylindri ſectiones. Si autem intelligatur, ſuper eadem baſe E, Cylindrus EK; invenietur ejus portio æque alta EH, tantundem hydrargyri continere atque EF; propter Cylindros (aut Priſmata) ſuper eadem baſe æque altos, invicem æquales. At vero jam, Cylindrus (ſeu Priſma) EH (propter majorem baſin) major erit quam CI; atque in eadem ratione major, qua baſis baſe major eſt.

Quod autem eandem rationem habeat C ad E, quam CI ad EF, ſic oſtenditur. Intelligatur Cylindrus CD ſitu erecto ſectionem horizontalem habens LCM Circularem, obliquam vero NCO ellipticam: atque reclinetur Cylindrus hic in ſitum EG, ut ſectio illa NCO jam fiat in ſitu NEO horizontalis, cui inſiſtat Cylindrus EF inclinatus erecto EH æqualis (propter eandem utrobique tum baſin tum altitudinem,) ipſique CI æque altus. Manifeſtum eſt (demiſſa, in NEO rectam, perpendiculari FC,) propter æquales angulos FEC, LNE, (quorum alter cum LEN, alter cum huic verticali, complet rectum,) adeoque ſimilia triangula rectangula FEC, ENL; eandem habere rationem EF ad FC, hoc eſt, ad CI; quam habet NE ad EL, ſeu NO ad LM; hoc eſt, quam habet baſis E ad baſin C. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

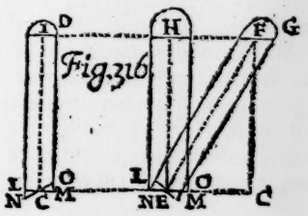


Fig. 316

Sed nova hinc ſuboritur difficultas. Quippe cum ſuper eadem baſe E, Cylindrus EH in ſitu erecto, tantundem contineat Hydrargyri quantum in ſitu obliquo EF; quidni magis in baſin illam gravitet EH quam EF, propter deſcenſum illic Decliviorem, (gravitant autem æqualia Pondera in ratione Declivitatum, ſeu reciproca rectarum æque altarum, per prop. 19. Cap. 2.) adeoque, quidni baſis E in ſitu obliquo EF plus hydrargyri ſuſtinere valeat (& propterea Cylindrum altiorem) quam in ſitu erecto EH.

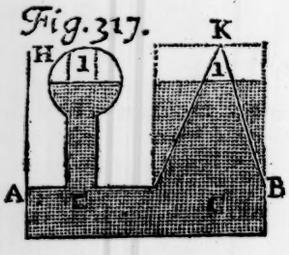
Verum & hic paria paribus compenſanda ſunt. Quippe, ut Hydrargyrum per deſcenſum obliquum FE minus deorſum premit quam per FC vel HE (perpendicularem) premeret; ſic & vis ſurſum in E (quæ Hydrargyrum ſuſtinet) minus premit ſurſum per EF quam per EH premeret; & quidem in eadem utrobique ratione, propter eundem utrobique obliquitatis angulum EFC ſeu FEH. Adeoque non minus valet Vis ſurſum in E ſecundum directionem ſuam EH directe ſurſum premens, ſuſtinere pondus Hydrargyri ſecundum directionem ſuam HE deorſum prementis, quam Vis eadem per EF directioni ſuæ EH obliquam, pondus idem per FE directioni ſuæ FC pariter obliquam deprimens ſuſtinere; propter vires utrobique in eadem ratione diminutas.

Vel ſic idem explices. Qua ratione impeditur deſcenſus hydrargyri, recta tendentis deorſum, à latere MO (producto) pondus illud partim ſuſtinente, ea-

dem ratione impeditur aſcenſus Vis recta ſurſum tendentis in E, à latere (producto) N L eundem partim coercente ſuperne; (propter eandem utrobique obliquitatem;) adeoque eadem, quæ prius erat, manebit ratio preſſuum contrariorum.

Supereſt adhuc alia difficultas expedienda, quæ non tam ex Situ, quam ex Figura tubi ſeu vaſis ſuperpoſiti oritur. Conſideravimus enim hactenus Tubos ſuperpoſitos tanquam Cylindros ſeu Priſmata, ejuſdem ubique Craſſitiei; (quod erat neceſſarium ubi de mole ſeu pondere ſuſpenſi hydrargyri agebatur:) Poteſt autem ſuperponi Tubus ſeu Vas cujuſcunque figuræ, quod vel plus vel minus hydrargyri continebit quam Cylindrus ſeu Priſma ſuper eadem baſe æque altum; altitudo tamen ſuſpenſi hydrargyri in omnibus eadem erit.

Fig. 317.



Verbi gratia; In tubo Capitato C H, atque in Acuminato C K, eadem erit Hydrargyri C I altitudo, atque in Cylindro illic inſcripto hic circumſcripto.

Cauſa eſt, quod illud Hydrargyri quod in C H extra Cylindrum eſt, non tam à C ſuſtinetur quam à tubi partibus ſeu lateribus ſibi ſubjectis, quippe quibus ſic manentibus non poterit illud niſi à latere latum iri quo deſcendat: Ne autem ad latus ferantur Hydrargyri partes, (ſive quæ in Cylindro C H, ſive quæ extra illum,) ſe mutuis occurſibus & contrario niſu impediunt, ut nihil à C ſuſtineatur præterquam quod eſt intra Cylindrum C H. Dummodo enim quod intra Cylindrum eſt ab æquipollente Vi in C ſuſtineatur ne decidat; & quod extra eſt, ſimiliter à Tubi lateribus: perinde eſt acſi ſolido fundo, ſed minime plano, coercerentur utraque; quo poſito, ſuperficiem ſupernam Horizontalem fore ad prop. 1. hujus oſtenſum eſt.

Simili modo; quanquam, in tubo Acuminato C K, minus contineatur Hydrargyri in trunco C I quam in Cylindro huic circumſcripto; attamen non altius aſcendet in illo quam in hoc Hydrargyrum. Quippe, quantum ad eas baſis partes ubi libero aſcenſui locus patet, ad juſtam altitudinem aſcendet C I; non ultra tamen, ne quæ ſubjectæ ſint ſuperficiei A B partes plus cæteris premerentur, & preſſæ deſcenderent donec ad juſtam altitudinem perveniretur: quantum vero ad eas ipſius C partes quibus convergentia tubi latera liberum aſcenſum non permittunt, quod deeſt in pondere hydrargyri ſupereminentis, ſuppletur à coercentibus tubi lateribus; quippe quæ, utut non deprimant ut vis contraria, coercent tamen ut impedimentum, ne altius poſſit à vi inferne ſurſum premente Hydrargyrum protrudi.

Atque ſimile in aliis caſibus fiet judicium.

Si vero vaſa ſuperpoſita, non tantum figura ſint diverſa à Cylindrica ſeu Priſmatica, quod hic ſupponitur; ſed etiam obliquo ſitu ponantur, quod ſupponebatur in difficultate priori: quæ utrobique repoſita ſunt; hic, conjuncta, locum obtinebunt: adeoque quæcunque ſit vaſis forma, & quocunque ſitu ponatur, ad eandem ſemper altitudinem (quatenus coercentia vaſis latera non impediunt) hydrargyrum aſcendet.

Nos autem tum hic tum in ſequentibus (præſertim ubi moles ſuſpenſi hydrargyri conſideratur aut calculo ſubjicitur) Cylindricam tubi formam potiſſimum ſpectamus: Inde autem, vi illorum quæ in hoc Scholio tradidimus, utut non quo ad eandem molem ſeu pondus, quo ad eandem tamen altitudinem ſuſpenſi hydrargyri, ad vaſa cujuſcunque formæ, utcunque inclinata, eadem transferentur.

PROP.

PROP. IX.

Poſitis ut prius; Si Tubus ſic inverſus vel ex ſe tam brevis ſit, vel Orificium infra ſuperficiem A B tam alte immerſam habeat, vel denique ita inclinetur tubus, ut quod inibi (ſupra A B) continetur Hydrargyri, minus gravitet in partes ſubjectas, quam aer in reliquas: Non effluet Hydrargyrum. Fig. 318.

Sed &, ſi (manu vel alias) Tubus elevetur, aſcendet etiam intus Hydrargyrum; idque donec ad eam ſtationem perveniat, ut tantundem in partes ſibi ſubjectas gravitet quantum in reliquas Aer.

Si vero non aliunde elevetur Tubus; non ab Hydrargyro propelletur ſurſum: ſed deprimetur potius (ſi locus infra ſit quo recipiatur) ab incumbente aere; niſi aliunde ab aeris vi defendatur.

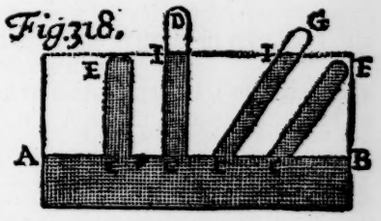


Fig. 318.

SI enim tubus E brevior ſit, vel ita immergatur orificium ejus ut quod ſupereſt C E brevius ſit, quam ut inibi Contentum Hydrargyrum tantundem premat ſubjectum C quantum ab aere premuntur partes reliquæ; vel etiam, ſi tubus F, utut ſatis Hydrargyri continere cenſeatur, ita tamen inclinetur ut non ſatis gravitet: Non deprimentur partes ſubjectæ, utpote non magis preſſæ quam reliquæ; (ſupponimus enim Tubos manu vel alias ita ſuſtentos ut ab Aere Tubis incumbente nulla vis hydrargyro inferatur.)

Quinimo ſi elevetur tubus; aſſurget inibi Hydrargyrum, (loco jam facto quo recipiatur,) propter partes ſubjectas minus preſſas quam quæ aeri exponuntur. Idque eouſque donec ad altitudinem C I pervenitur, (qua ſtatione ſupponimus partes ſubjectas æque cum reliquis preſſas;) quippe tamdiu minus premuntur, adeoque Hydrargyrum à partibus plus preſſis intro pellitur.

Si vero altius elevetur tubus, ut ad D; illud tubi quod eſt ſupra I, manebit hydrargyro vacuum; quippe, cum partes ſubjectæ jam æque cum reliquis premantur, ceſſabit illa ſurſum protruſio; (nec ob decantatam olim Fugam Vacui ſurſum altius trahi, experimentis nunc dierum ubique gentium notis abunde comprobatum eſt.)

Similiter ſi tubus F inclinatus, erigatur; aſcendet ſimul Hydrargyrum, tubum replens: ita tamen ut ſi altius erigatur quam eſt C I; quod ſupereſt, ut I G, manebit hydrargyro vacuum; ob cauſas modo dictas.

At vero ſi tubus ille brevior, ut E, ſibi permittatur; non tamen ab Hydrargyro aſcenſum moliente ſurſum propellettur; ſed, contra, detrudetur ad fundum uſque; (niſi quatenus ob Tubum minus gravem quam tantundem Hydrargyri impeditur.) Non quod Hydrargyrum alibi ab aere preſſum non valeat illud in tubo & ſuſtinere & ſurſum pellere; ſed quoniam (niſi tubus alias ſuſtineatur aut ab externo aere defendatur,) non tantum ab eminente hydrargyro, ſed & à ſupereminente aere tubum cum hydrargyro deprimente, premuntur partes ſubjectæ; adeoque fortius quam reliquæ, propter hydrargyrum in tubo plus gravitans quam tantundem aeris: Quamdiu autem manu vel alias ſuſtinetur tubus; eo impeditur aer ille (ob tubum in ſummo clauſum) ne gravitet in partes tubo incluſas aut illi ſubjectas.

Sin alias, quocunque modo, defendatur tubus ille brevior à ſuperno aere; non modo ſuſtinebitur, ſed & ſurſum propelletur (donec ad Altitudinem I perveniat) ab hydrargyri partibus reliquis plus preſſis quam quæ Tubo ſubjiciuntur; propter ſuperficiem A B eo loci minus preſſam.

Tota demonſtratio dependet ex prop. 1. hujus varie pro variis caſibus applicata.

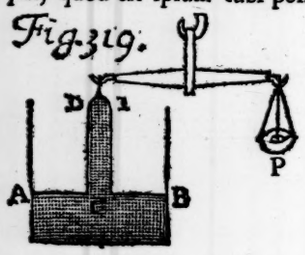
PROP.

PROP. X.

Poſitis ut prius; Si tubi ſic inverſi altitudo (ſupra AB planum) CD, tanta ſit quanta eſt CI, aut ea major; quo Hydrargyrum inibi contentum tantundem gravitet in partes ſubjectas quantum aer in reliquas: non minori Vi ſuſtinebitur tubus, nedum elevabitur, (ſive id manu fiat; ſive libra, poſitis ponderibus in adverſa lance; ſive utcunque alias;) quam quæ potis ſit ſuſtinere ſeu elevare (præter ipſum tubi pondus) totum ſuperincumbentem aerem, ſeu (quod eodem recidit) tantundem hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

Fig. 314. DUmmodo enim tanta ſit tubi intus altitudo ut retinere poſſit tantum hydrargyri quantum valeat ita premere ſubjectas partes quantum reliquæ ab aere premuntur; (vel etiam major; quod tamen caſum non mutabit, quippe plus inibi non retinebitur, quæcunque fuerit altitudo tubi, ſed quod ſupereſt ſpatii ID relinquetur hydrargyro vacuum; ut ſupra oſtenſum eſt;) adeoque non adjuvetur vis elevans à vi partium hydrargyri extra tubum tanquam plus preſſarum ſurſum pellente quod partibus C ſupereminet, tanquam minus preſſis: Suſtinendum jam erit vel elevandum, non modo tubus ipſe cujuſcunque fuerit ponderis, ſed & totum illud aeris quod tubi cavo ſuperincumbit; (*Tubi*, inquam, *Cavo*; nam quod Tubi lateribus utcunque craſſis ſupereminet, ab Hydrargyro Tubi labiis ſubjecto ſuſtinebitur.) Nam niſi hoc fiat, tubus (qui hydrargyrum jam deſerturus eſt, ut quod altius non propelletur,) non ſuſtinebitur vel elevabitur. Cui quidem, cum Hydrargyrum, ex pulſu ſurſum, jam nihil ferat auxilii; (ut prius tulerat, cum ad juſtam altitudinem nondum pervenerat;) nec poſſit aer (propter tubi orificium, quod ſupponimus, in hydrargyro infra AB ſubmerſum,) ut alibi fieri ſolet, circuitu facto, à tergo in locum derelictum ſuccedere, (adeoque, quod ex prop. 1. hujus facile demonſtrabitur, tantundem quaſi ſurſum propellere, quantum ſuperne deprimit; dempto ſaltem pondere quo res elevanda ſuperat tantidem aeris pondus:) tantundem virium in ſuſtinente vel elevante requiretur, quantum (præter ipſum tubi pondus) totum illud aeris quo cavum premitur ſuſtinere aut elevare poterit; (dummodo enim Vis ſuſtinens aut elevans vi deprimente minor eſt, non ſuſtinebit aut elevabit, per prop. 12. Cap. 1.) Id autem aeris quod ſuſtinendum aut ſubmovendum eſt, æquipollet hydrargyri Cylindro CI, (ſaltem dempto tantidem aeris pondere cujus locum occupat CD, propter Atmoſphæræ minorem altitudinem ſupra D quam ſupra C; quod merito tamen negligi poſſit: ut & ſubmerſa tubi labia minus gravia quam tantundem hydrargyri; cujus differentia auferenda erit, ſi ſtricte agas, à pondere elevando. Sed hæc negligimus.) Cum enim, Vis aeris extra Cylindrum hydrargyrum deprimens, tantum premat partes ſibi ſubjectas quantum hydrargyrum in tubo premit ſubjectas ſibi (quo ſuperficiei partes omnes æqualiter premantur,) tantundem valet pondus aeris incumbentis quantum Cylindrus hydrargyri altitudinis CI: ut igitur tubus elevetur, adeoque ſubmoveatur Vis aeris deprimens, vis ea requiritur quæ potis ſit (præter exceſſum ponderis tubi ſupra pondus tantidem aeris cujus locum occupat, quod eſt ipſum tubi pondus in aere,) etiam tantundem hydrargyri elevare quantum eſt Cylindrus CI: &, quo ſuſtineatur, quæ hydrargyri tantundem potis eſt ſuſtinere. Quod demonſtrandum erat.

Fig. 319.



Adeoque ſi intelligatur tubi fundus D (fili ope) de libra pendere, atque ex adverſo pondus P: quo hoc tubo Gravato æquiponderet, requiritur ut æquet pondere tum tubi pondus (demptis ſaltem, quas diximus, minutiis,) tum tantum hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

PROP.

PROP. XI.

Poſitis ut prius; Si tubi ſic inverſi, altitudo (ſupra AB planum) CD, minor ſit quam CI, (quo, ſi locus eſſet, pertingeret hydrargyrum;) adeoque, qui partibus reliquis eminet, aer præponderet: Quantum valet hæc præponderantia, tantundem preſſui in C ſurſum concedendum eſt; quod æquipollet ſublationi tantidem ponderis iucumbentis, aut ponderi æquali in adverſa lance poſito: Adeoque tanto minor Vis (ſive in tenentis manu, ſive ponderis in adverſa lance poſiti, ſive alias ſimiliter applicata,) requiretur ad tubum ſuſtinendum in hoc caſu, quam in caſu propoſitionis præcedentis. Fig. 319.

Quæ vero in ea altitudine ſuſtinere potis eſt Vis, non tamen altius elevabit; propter pondus elevando auctum, ſeu minutum ſubſidium Vis ſurſum prementis: ſed neque in majore altitudine ſuſtinebit.

CUm enim Vis ſurſum in C, potis ſit ſuſtinere tantundem ponderis quantum eſt Cylindrus Hydrargyri, ſuper ea baſe, altitudinem habens CI; ſitque CD eo pondere minus: Suſtinere valebit (&, niſi aliunde impediatur, elevare) præter illud hydrargyri quod incumbit, tantundem ultra ponderis, quantum illic à juſto pondere deeſt; Adeoque tanto onere ſublevare ſuſtinentis manum (ſeu quod hujus inſtar eſt;) & propterea tanto minus virium requiretur, quam (qui caſus eſt propoſitionis præced.) ſi Hydrargyri Cylindrus juſtam altitudinem CI obtineret.

Et quidem ſubſidium illud à vi ſurſum premente propter Hydrargyri altitudinem juſta minorem, tantundem eſt atque additamentum illi æquipollens ſuſtinentis viribus additum, ſeu pondus æquipollens in adverſa lance poſitum. Et, ſi, quod porro deeſt ad pondus prop. præced. requiſitum, in lancem illam immittatur; ſuſtinebitur tubus (cum incumbente aere) pariter atque ſi, in caſu prop. præced. totum illud pondus immitteretur.

At vero, utut tubum ſic ſuſtinere poſſit, non tamen elevare poterit, quoniam prout elevatur tubus (donec ad juſtam altitudinem CI pervenit) aſſurget intus Hydrargyrum (propter locum jam factum quo recipiatur) adeoque minuitur quod prius erat ſubſidium, adeoque vis (debilior facta) tubum ſuſtinere in ea altitudine non potis erit.

Et quidem, ſi alia vi altius elevetur, ſibi tamen permiſſa; ad eam altitudinem deprimetur: Sin infra detrudatur; eo aſſurget: ut nempe, præter illud oneris quod ponderi P æquipollet, reliquum quicquid ſit æquipolleat Hydrargyri Cylindro CI. Quæ omnia, per prius demonſtrata conſtant.

SCHOLIUM.

SUmma rei huc redit. Æquabilis aeris alibi incumbentis preſſura, poteſt (per æquiponderantiam ſuam) ſuſtinere in C; Vel Columnam Aeris æqualtam; Vel Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; Vel partem hujus partem illius (quæ ſimul earum alteri æquipolleant:) Non autem utramque totam, aut plus quam quod earum alteri æquipolleat.

Adeoque, Si pars C, externo Aeri exponatur: ſuſtinebitur hic, ut in partibus reliquis, Columna incumbentis Aeris. Sed tunc nihil ultra Hydrargyri ſuſtinebit vis ea, nedum elevabit.

Si ab incumbentis Aeris preſſu (inverſi tubi fundo, vel alias,) defendatur: ſuſtinebit, iſtius vice, Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; aut etiam (ſi locus ſit quo recipiatur) tantundem elevabit. At vero jam nihil Aeris ſuſtinet; quippe à quo defenditur ab inverſo tubo, qui aliunde ſuſtineri intelligitur; puta à tenentis manu, vel pondere in adverſa lance.

Si vero ab incumbentis aeris preſſu defendatur quoad partem, ſed non quoad totum; puta à pondere P in adverſa lance quod minus ſit quam ut totius aeris preſſui æquipolleat: potis erit, propter hoc ſubſidium; ſuſtinere, non tantum totum aerem incumbentem, (quem quidem ſine auxilio ſuſtineret,) ſed & tantundem Hydrargyri quod iſti auxilio æquipolleat; neque ſuſtinere tantum, ſed & (ſi opus ſit) eouſque tubum impellere donec tantundem recipere poſſit.

Sin denique pondus P in adverſa lance majus ſit quam ut aeris preſſui æquipolleat: proripiet tubum (niſi aliunde impediatur) in altum, etiam extra ſubjectum Hydrargyrum.

Exempli gratia. Intelligatur ſuperficiei A B, pars C (inverſo tubo incluſa,) tantæ amplitudinis eſſe, ut quæ, aperto aeri expoſita, columnam aeris ſuſtineret Ponderis unciarum 12 unius Libræ; (adeoque pars alia quælibet huic æqualis, propter æqualem aeris preſſum, tantundem ſuſtinere intelligenda eſt:) & propterea, ſi ab hoc aeris preſſu penitus defendatur, tantundem Hydrargyri, iſtius vice, ſuſtinere poterit; hoc eſt, columnam hydrargyri Unciarum 12 unius Libræ.

Cumque Tubus, quo ſic ab aere defenditur C, ſuum pondus habeat; Ponatur hoc, Unciarum 2. (Pondus aeris, qui tubi lateribus ſupereminet non computamus; quoniam id ab Hydrargyro tubi labiis ſubjecto ſuſtinetur.)

Totum igitur Onus (tubi cum ſuperincumbente aere) erit Unciarum 14; quod aliunde ſuſtinendum erit, quo pars C toto preſſu aeris tubique liberetur. Quod factum intelligatur, poſito, in adverſa lance, pondere P, unciarum 14.

Suſtinebit igitur C (ab omni alio pondere ſic liberata) columnam Hydrargyri Unciarum 12, (utpote vi ſurſum in C prementi æquipollentem;) atque ad illam altitudinem (ſi opus ſit) tubum ſic liberatum propellet. Donec enim hoc fiat, minus premetur C quam partes reliquæ; nec huic aſcenſui quicquam officit Tubus cum incumbente aere, utpote qui ſunt cum P pondere in æquilibrio poſiti. Verum jam, Contraponderans P, gravius eſſe debet (puta unciis 2, propter pondus tubi,) quam eſt ſuſpenſa Hydrargyri columna; (utut Hydrargyrum illud non à P pondere, ſed à vi ſurſum in C, ſuſtineatur.)

Si vero à Pondere P auferantur, verbi gratia, unciæ 4, ut nonniſi 10 ſuperſint, non poterit hoc pondus, Tubi aeriſque incumbentis preſſum ſuſtinere (utpote unciarum 14,) ſed iſtius tantum 10 uncias; adeoque reliquis unciis 4 adhuc urgetur pars C; quæ itaque (cum non poſſit pluſquam 12 uncias omnino ſuſtinere) non ultra 8 uncias hydrargyri (quæ cum illis 4 conficiunt 12) ſuſtinere poterit. Sed & ad hoc requiritur contraponderans P, unciarum 10, quod gravius ſit (puta 2 unciis) quam ſuſpenſum Hydrargyrum, unciarum 8: utut hoc, non à P, ſed à Vi in C ſuſtineatur.

Sin, pro demptis unciis 4, tolleretur totum Pondus P unciarum 14, vel ſaltem inde demerentur unciæ 12: Subſideret Hydrargyrum omne cum onuſto Tubo; vel demptis 2 unciis; quippe jam pars C onere ſaltem unciarum 12 (quo majus ferre non poteſt) Oneratur. (Saltem ſi tubi partem ſubſidendo demerſam ponderi eximamus; atque etiam, ſi omnes minutias ſectari velimus, exceſſum ponderis Hydrargyri ſupra pondus demerſæ partis tubi: Quæ tanta non ſunt quin hic merito poſſint negligi.)

Si jam ex demptis illis Unciis 4, reſtituantur unciæ 2, (quo Pondus P jam fiat unciarum 12; adeoque ex omnibus 14, nonniſi unciis 2 prematur C;) Aſſurget Tubus donec ſupra A B emergant Hydrargyri unciæ aliæ duæ: Adeoque ſuſtineat C, à preſſu aeris tubique Uncias 2, atque Hydrargyri uncias 10; quæ ſimul faciant ipſius juſtum onus unciarum 12. Sed & adhuc pondus P unciarum 12, majus eſt (puta unciis 2) quam ſuſpenſi Hydrargyri unciarum 10; utut hoc, non à P ſed à Vi in C ſuſtineatur.

Atque ſi adhuc reſtituantur aliæ 2 Unciæ, quo fiat Pondus P (ut prius) unciarum 14: Aſcendet Hydrargyrum ad juſtam altitudinem C I, (tubumque, ſi opus ſit, eo propellet,) quo pars C (ab alio onere penitus libera) ſuſtineat Hydrargyri Uncias 12, quæ preſſui aeris in reliquis partibus æquipolleat.

At vero ſi porro augeatur pondus P, ut fiat, verbi gratia, Unciarum 16: Surſum adhuc in altum proripietur tubus (propter ponderis præpollentiam;) ſed non ſimul Hydrargyrum, (utpote quod jam ad ſummam altitudinem aſcenderit quam ferre poteſt C;) ſed relinquetur ſuperna tubi pars hydrargyri vacua. Idque eouſque, donec vel obice impediatur deſcenſus ponderis aut aſcenſus tubi;

vel

vel ſaltem donec, emerſis extra ſubjectum hydrargyrum tubi labiis, Hydrargyrum inibi contentum (via jam patente) totum decidat, eique protinus ſuccedat Aer irruens, tantundem quaſi ſubtus propellens ſurſum, quantum ſuperne deprimit tubum; ut jam nihil aliud ſuſtinendum reſtet quam ipſum tubi pondus.

Quod autem Experimenta his Demonſtratis reſpondebunt; tantum abeſt ut metuam, ut ea jam ante in *Societate Regia* adminiſtrata fuerint (& quidem cum hoc eventu) quam hæc primo ſcriberentur (Anno ſcil. 1662, ut ſupra inſinuatum eſt.) Nempe, præter notiora Experimenti Torricelliani phænomena; (quæ recenſere non erit opus,) obſervatum erat, 1. Si tubus ad juſtam altitudinem CI extenderetur; opus erat in adverſa lance quo ſuſtineretur tubus, pondere aliquanto majore quam erat Hydrargyri ſuſpenſi pondus; (& quidem tanto majore quantum conjectando æſtimabant ipſius tubi pondus.) Idemque accideret, ſi altius adhuc elevaretur D; relicto ID, hydrargyri vacuo. 2. Si infra juſtam altitudinem CI, ſubſideret CD; minori opus eſſet pondere in adverſa lance, quo (propter æquilibrium) ſuſtineretur tubus; & quidem tanto minori quanto minus erat pondus hydrargyri ſuſpenſi. 3. Si tamen ſuperfluum illud pondus aut ejus pars aliqua (ultra quam quod neceſſarium erat) in lance relinqueretur; aſcenderet Tubus, una cum hydrargyro, donec fieret æquilibrium. 4. Denique, ſi pluſquam illud ſuperfluum pondus lanci eximeretur; ſubſideret tubus, una cum hydrargyro, ad æquilibrium. Et quidem, univerſim, (prout in Regiæ Societatis Commentariis res ſummatim colligitur) *Pondus in adverſa lance contraponderans, æquipollebat ſuſpenſi Hydrargyri, cujuſcunque altitudinis, atque ſimul (quantum conjectando æſtimabant) ſuſpenſi Tubi ei parti, quæ ſtagnantis in ſubjecto vaſe hydrargyri ſuperficiei ſupereminebat.*

Quæ quidem res, cum primo aſpectu incautis nonnullis, atque ad rem Staticam minus attentis, facile imponeret; quaſi ab adverſo pondere P ſuſtineretur, non tantum Tubus ipſe, ſed (propter neſcio quam cum tubo connexionem, ſeu Vacui fugam) contentum inibi Hydrargyrum: Quo ſcrupulus ille facilius tolleretur; ea ſtatim ſcripſi quæ in hoc Capite hactenus habentur, (eiſdem fere verbis, niſi quod jam in Propoſitionum & Demonſtrationum formam redacta ſint;) eademque *Regiæ Societati* enarravi, Auguſti 13. 1662. quo Obſervata illa libero ſermone exponebantur; atque deinde (id rogatus) ſcripto etiam Aug. 20. quo die etiam Obſervatorum illorum ſumma ab ipſis Obſervatoribus ſcripto exhibebatur. Quibus oſtenderem, ex Principiis Hydroſtaticis, rem ita omnino accidere debere, ſi ſuſpenſus Hydrargyri Cylindrus poneretur à Vi in C ſurſum premente ſuſtineri, dummodo inverſo Tubo ab incumbente Aere defenderetur, Tubuſque ille ſuſtineretur aliunde.

Si vero jam quæratur, Quanta ſit illa altitudo CI; ubi, propter preſſum aeris in partes reliquas, conſiſtet ſuſpenſum Hydrargyrum ſupra ſubjecti ſuperficiem AB:

Dicendum eſt, Altitudinem illam neque omnibus Locis, neque omnibus Temporibus, eandem eſſe; ſed, pro varia Aeris Gravitate, ſubinde mutari.

Hic autem *Oxonii*, quomodo ſe res habet, quantum ex propriis Obſervatis colligere licuit, ſic habeto. Jam ante Sex Annos, Tubum (Quatuor pedes longum cum ſemiſſe) implendum curavi Hydrargyro, ab intermiſto Aere diligenter purgato, (non ſumma tamen diligentia;) eumque ſic impletum inverti, obturato primum diligenter orificio, nec prius recluſo quam infra ſuperficiem Hydrargyri in ſubjecto vaſe contenti demergeretur; dein, facta ſubtus exeundi poteſtate, effluxit Hydrargyri tubo contenti pars magna, cum impetu notabili; factiſque propter impetum illum vibrationibus aliquot, ſubſiſtebat tandem ad altitudinem Unciarum pedis Anglicani (plus minus) 29. Tubumque cum ſubjecto vaſe (cujus fundo nitebatur apertum tubi orificium, ſed ita ut intrandi & exeundi à Vaſe in Tubum Hydrargyro via non intercluderetur) in pegma quoddam prius ad id paratum intuli, atque in hunc diem in eo ſtatu conſervo.

Nec ita multo poſt; ſcilicet à Calendis Januariis Anni (exeuntis 1664, ſed) ineuntis 1665, Ephemeridem continuam Altitudinis Hydrargyri in Tubo contenti, ſupra ſtagnantis in ſubjecto vaſe ſuperficiem, inſtitui, (niſi cum forte me domo abeſſe contigerit,) atque etiamnum inſtituo.

Obſervavi autem, ut plurimum, infra triginta Uncias pedis Anglicani ſubſidere, ſed ſupra Uncias Viginti octo; intra hos limites ſubinde nunc aſcendendo, nunc deſcendendo. Semel autem iterumque tantillo ſupra 30 aſcenderat, ſemelque ſubſiderat infra 28, (ſed vix aut ne vix decima unius Unciæ parte, utrovis caſu,) ut altitudo media ſit Unciarum 29.

Verum quidem eſt, me aliquoties comparaſſe altitudinem in Tubo meo, cum altitudine in Tubo ſimiliter inverſo Honoratiſſimi D. *Boylii*, dum hic Oxonii ageret; atque altitudinem illius, altitudine mea, aliquanto majorem deprehendiſſe, (quaſi octava parte unius unciæ, ſi rite memini,) ſive quod in variis ejuſdem urbis locis poſiti fuerint Tubi, ſive quod Hydrargyrum ejus meo fuerit aliquanto levius, ſive quod alterum altero fuerit ab intermiſto aere aliquanto depuratius, ſive quod non eadem fuerit utrobique proportio inter diametrum tubi & latitudinem ſubjecti vaſis, ſive quod non in eadem aeris temperie impleti fuerint utriuſque tubi, non dixerim: ſed exiguum quicquid eſt diſcriminis innuere viſum eſt, quo perſpiciatur tantillum diſcriminis ex minutis & non obſervatis circumſtantiis oriri poſſe.

Obſervo etiam, à Scriptoribus Gallis, altitudinem aſſignari ſolere Unciarum 27 pedis Pariſini. Quod non tam altitudinum hic atque illic differentiæ dandum eſt; quam differentiæ pedis Pariſini, atque Londinenſis ſeu Anglicani. Quippe Pes Pariſinus ſuperat Pedem noſtrum Anglicanum, quaſi quatuor quintis unciæ noſtræ, (quod ego, collato ſemipede noſtro, cum ſemipede Pariſino ut dicebatur accuratiſſimo, memini me ſatis accurate obſervaſſe;) Adeoque Unciæ Pariſinæ 27, reſpondent noſtris 29 quam proxime. (Nam $12.12\frac{1}{5}::60.64::27.28\frac{4}{5}$.) Ut vix ulla inde inferri poſſit differentia altitudinis iſtius apud illos obſervatæ ab altitudine media Oxonii obſervata; quin eadem hic & illic (præter propter) altitudo cenſenda ſit.

At interim, eadem manente Aeris (quoad gravitatem) conſtitutione, aliam atque aliam deprehenſam fuiſſe, eodem tubo æſtimandam, altitudinem Hydrargyri, non tantum in ejuſdem Montis, ſed & ejuſdem Turris, ſummo & imo, obſervatum fuit: minorem utique eſſe in ſummo quam in imo altitudinem Hydrargyri, propter breviorem illic quam hic incumbentis aeris Cylindrum, & leviorem preſſum: quod, una cum Honoratiſſimo *Boylio*, ego aliique experimentis aliquoties factis deprehendimus. Sed qua proportione decreſcat, altior eſt inquiſitio quam ut eam hic expedire locus ſit.

Atque hactenus conſideravimus preſſum incumbentis Aeris, nullo facto diſcrimine, ſive ab Aeris Gravitate, ſive ab ejuſdem Elatere procedat: Et quidem perinde eſt ad rem hactenus traditam utrovis modo fiat, modo preſſus fiat.

Verum aliunde certum eſt, ab innumeris Experimentis hoc ſeculo inſtitutis, tum in *Organo Pneumatico Boyliano*, tum alias: Et Aeri ineſſe *Gravitatem*, qua deorſum premit; & Vim *Elaſticam*, qua ſe vel à Gravitate ſua vel aliunde compreſſum reſtituere conatur.

Quibus poſitis; neceſſe erit, propter Aeris Gravitatem, ut ſuperiores ejuſdem partes proxime ſubjectas deprimant, & deprimendo comprimant, adeoque Elateri vim undiquaque reſtitutivam imprimant gravitati partium incumbentium æquipollentem, (donec enim æquipollet renitentia, porro flectetur;) & quidem eadem vi undiquaque ſe expedire ſatagentem; (Quod enim ad prop. 1. Cap. præced. oſtenſum, de Elatere, puta recto, ſe prorſum atque retrorſum æqualiter porrigente: pariter valet de Corpore Elaſtico ſe in Orbem explicante; Nempe, ſiqua parte minus vel prematur vel coerceatur, ea ſe expediet, preſſum alibi declinans; idque eouſque donec undiquaque comprimatur æqualiter.) Eademque vis, una cum harum pondere; in partes adhuc ſubjectas propagatur: Atque ſic porro, ad imum uſque, aucto continue preſſu ob auctum pondus incumbens. Unde fit ut partes Aeris inferiores ſint ſuperioribus magis compreſſæ; adeoque & (propter plus aeris intra eaſdem dimenſiones) graviores ſuperioribus.

Haud ſecus atque Lanæ Vellera accumulata, quæ ſunt & Gravia ſimul & Elaſtica. Vellus ſupremum, gravitate ſua premit ſecundum; cui vel Vim imprimit reſtitutivam ſurſum gravitati comprimenti æquipollentem (ſecus enim adhuc ultra comprimeretur;) quæ cum ſurſum ſe liberare non poſſit (propter urgens onus quod compreſſerat) eadem Vi deorſum nititur; addita tamen gravitate ſua; quibus cum premitur tertium, tantundem eſt atque utriuſque gravitate premi: Vel, quod

quod eodem recidit, (quodque omnino dicendum eſſet ſi Elateres abeſſent,) ſecundum ſuſtinet ſupremi pondus; & tertium, utriuſque; ſeu ſecundi primo gravati. Utut enim ſecundum à primo quantum poteſt comprimatur, id tamen non impedit quin ſic compreſſum adhuc deprimatur, & utriuſque onus à tertio ſuſtineatur. Id ſaltem intereſt, quod, propter compreſſionem ſecundi, primum tertio propius quidem, ſed eodem pondere, incumbat. Atque ſic porro, Quartum à trium illorum Gravitate (ſive interveniente, ſive non interveniente, vi Elaſtica,) premitur; & Quintum ab illorum quatuor; & ſic porro ad Sextum, & quæ ſequuntur: Ut perinde omnino ſit, ſive à ſuperiorum omnium Gravitate per ſe, ſive interveniente Vi Elaſtica, comprimi dicamus. Dummodo ſaltem Vellera perfecte Elaſtica ponamus, nec ſimpliciter-Mollium naturam quadantenus participare; quippe, quatenus hoc obtinet, ad Gravitatem ſimpliciter recurrendum erit.

Sed &, propter Vim Elaſticam, ſive in Vellere ſive in Aere, ad latera etiam undiquaque ſe expedire ſatagentem (ſiqua parte debilior ſit reſiſtentia;) eadem Vi Elaſtica (quæ incumbenti Gravitati, in quacunque altitudine, æquipolleat,) ad latus undiquaque premit, qua deorſum; haud ſecus atque alia fluida, quæ (propter facilem partium ſeparationem) ſiqua fortius premantur, ea qua minus premuntur ſe expediunt; ſive id deorſum ſit, ſive à latere, ſive etiam ſurſum.

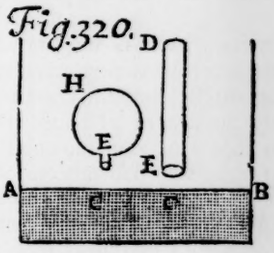
Dato igitur, quod Aer ſit corpus elaſticum, (de quo non ambigendum eſt,) quaqua verſum à preſſu ſe liberare ſatagens, procedimus ad propoſitionem ſequentem.

PROP. XII.

Vis Aeris Elaſtica Vaſe incluſi, ejuſdem tenoris cum ambiente, tantundem præſtat atque onus incumbentis aeris aperti.

Atque hinc ex *Experimentis Boylianis* plurima (nempe quæ ex Aeris Elatere dependent) explicationem facilem ſortientur, & Phænomenum cauſa reddetur. Quod de aliorum item Experimentis Hydraulicis, aliiſque innumeris, pariter intelligendum eſt.

Fig. 320.



INtelligatur Tubus D, ſeu Vas quodpiam H (cujuſcunque formæ, & quocunque ſitu,) orificium habens E apertum, quo cum aere externo communicet internus. Si adjacentes aeris externi partes minus premantur quam quæ ſunt intra vas, hæ dilatabunt ſeſe donec ad æquipollentiam res redigatur, (per prop. 1. hujus.) Si vero partes extra adjacentes (ob preſſum aeris incumbentis) magis premantur quam quæ intus ſunt, ſeu quam harum vis elaſtica potis ſit ſuſtinere, comprimentur adhuc quæ intus ſunt (per eandem prop. 1. hujus,) eouſque donec æquipolleat earum Vis Elaſtica Vi extra comprimenti, hoc eſt oneri incumbentis aeris. Re itaque ſic ad Æquipollentiam redacta (ut ejuſdem tenoris ſeu tenſionis ſit aer internus cum externo, adeoque Elateris vis eadem utrobique, ea ſcilicet quæ Oneri incumbentis aeris ſuſtinendo par ſit,) ſi firmetur orificium E, Vis Elaſtica (propter eandem quæ prius tenſionem) etiamnum æquipollebit oneri incumbentis aeris externi.

Atque hinc, ex D. *Boylii* aliorumque Experimentis Pneumaticis, Hydraulicis, aliiſque, plurimorum ratio facile aſſignabitur. Quippe ſi, ad ea quæ alias preſſu vel truſione fieri poſſent, iſtius vice adhibeatur vis Aeris Elaſtica æquipollens, idem effectus conſequetur. Quod in ſingulis proſequi ſupervacaneum eſſet, cum Theorematis generalis ad particulares caſus applicatio facilis ſit: ſintque ea fere omnia vel hinc orta quod Aeris incluſi compreſſio (adeoque Vis Elaſtica) major fiat quam eſt exterioris aeris, (unde plurima in Hydraulicis Phænomena derivantur à compreſſo aere orta;) vel, quod aeris exterioris compreſſio & vis elaſtica debilitetur minorque fiat quam eſt aeris concluſi, (quod in *Antlia Boyliana* ſæpe fit; puta ſi Antliæ *Recipienti* immittatur Veſica ſeu Phiala vitrea Aerem ordinariæ tenſionis continens, atque Recipientis Aer quadantenus ſaltem exhauriatur; qui, utut reſpectu aeris liberi Internus ſit, reſpectu tamen aeris in Veſica illa ſeu

Phiala contenti eſt Externus; cujus itaque exhauſtione partis debilitetur Vis: idem fit acſi, hoc in ſtatu ſuo permanente, fortius comprimeretur ille:) Utroque enim caſu aer qui reliquo magis compreſſus eſt vim ſuam Elaſticam in eum qui minus eſt compreſſus exercebit.

SCHOLIUM.

DIci quidem poteſt, aliud eſſe Externi aeris pondus ad E, quam ad H vel D, quoniam E premitur, non tantum ab aeris partibus quæ ipſis H vel D ſupereminent, ſed & ab interjectis. Quod quidem verum eſt, utut in exigua altitudine tantillum id ſit ut merito negligatur. Sed hoc, quicquid ſit, præſentem ſpeculationem non turbat; quippe idem intra vas evenit. Nam & hic partes E (infimæ) plus premuntur, quam (ſupremæ) H vel D, quoniam illæ partium interjectarum pondus ſuſtinent. Adeoque Vis Elaſtica interni aeris in E, æquipollet preſſui externi in E; atque interni in H, externi itidem in H. Quod utut in vaſtis altitudinibus fieri poſſit alicujus momenti, in minutis tamen negligendum eſt.

PROP. XIII.

Si inverſi Tubi, aliuſve Vaſis, D vel H, aere pleni (ejuſdem tenoris cum ambiente) Orificium apertum, Hydrargyri plano AB applicetur: Hydrargyri nihil inibi vel aſſurget, vel deprimetur.

Fig. 320. INtelligatur enim Tubi ſeu Vaſis D vel H (aere pleni) orificium E, ſuperficiei Hydrargyri AB admoveri in C. Cum Vis Elaſtica aeris incluſi, æquipolleat oneri incumbentis externi, (per prop. præced.) æque premitur AB in C atque in reliquis ejuſdem partibus; (vas ipſum enim aliunde ſuſtineri ſupponimus:) Adeoque nulla propterea Hydrargyri inibi vel aſcenſio vel depreſſio: per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

PRopoſitiones has duas de aeris Vi Elaſtica, ejuſque effectu, apponendas cenſui, ut obviam eatur ſcrupulis quorundam inde ortis quod huic non attenderint.

Puta, Si inverſus Tubus DC, aere plenus ejuſdem tenoris cum ambiente, Hydrargyro in C ſuperponatur; Tuboque (aliunde ſuſtento) impediatur preſſus ſuperincumbentis aeris; adeoque pars C aere tantum qui tubo includitur (modicæ altitudinis) prematur, reliquæ autem toto onere aeris incumbentis (altitudinis immenſæ:) Certum eſt, pondus aeris prementis C, longe minus eſſe quam alibi prementis partem huic æqualem; adeoque, ſi pondus tantum ſpectetur, aſſurgere deberet Hydrargyrum in C; (neque huic obſtaret aer tubum occupans, ut qui compreſſionis capax eſt, & reapſe comprimeretur ſi elater debilior eſſet quam vis in C ſurſum prementis:) Sed, propter Elateris vim æquipollentem ponderi externi aeris, non minus ab aere qui includitur tubo premitur C, quam ab aperto aere partes reliquæ.

Similiter in *Antlia Pneumatica*, ſeu *Organo Pneumatico Boyliano*, ſi pondere tantum, non elatere, ageret incluſus aer; immiſſa animalia, etiam abſque aeris exſuctu, paria fere paterentur (utpote minus preſſa quam in aperto aere) atque jam poſt exſuctum aerem.

Item, in eadem Antlia, ſi intromittatur Vas hydrargyrum continens, cui ita ut ſupra dictum eſt immergantur inverſi Tubi (hydrargyro prius repleti) labia: poſtquam undique occluditur Antlia ne ulla fiat communicatio cum externo aere, manet adhuc hydrargyrum in tubo eadem qua prius altitudine ſuſpenſum, puta ad uncias pedis Anglicani plus minus 29; non quod eodem quo prius pondere prematur ſubjecti vaſis hydrargyrum, ſed quod incluſi aeris vi elaſtica externi aeris ponderi æquipollente prematur; nec prius ſubſidit, quam vis illa debilitetur. Ubi vero, propter exſuctam aeris partem, reliqui (utpote jam minus compreſſi)

preſſi) Elater debilitatur, ſubſidit Hydrargyrum ad minorem minoremque continue altitudinem prout plus pluſque Aeris exſugitur: Idque eouſque, me ſpectante, aliquando factum fuit, ut vix ultra pedis Unciam unam altitudinis ſuſpenſum manſerit: (Sed &, ſi intruſo aere fortuor redderetur elateris vis, adhuc altius aſcenderet Hydrargyrum quam extra Antliam.) Quod & inter Experimenta *Boyliana*, *Phyſico-Mechanica* occurrit; *Experimento*, 17. Sed &, ex eo tempore, vaſe jam commodius præparato, obſervavit idem Honoratiſſimus *Boylius* aliquoties (quod ab eo ipſo accepi;) Hydrargyrum in Tubo contentum, eadem operatione præſtita, ad ipſam uſque ſtagnantis infra Hydrargyri ſuperficiem ſubſidiſſe, neque ſupra illam omnino eminuiſſe.

Atque ſimilis ratio aſſignanda erit in variis iſtiuſmodi phænomenis quæ non ab aeris gravitate immediate dependent, ſed ab ejus vi elaſtica à gravitatis preſſu impreſſa. Quippe niſi foret hæc vis Elaſtica, gravitas aeris ubi non poſſet directe applicari (ut in vaſe clauſo) non id præſtaret: Sin autem Gravitas non foret, nec eſſet ea vis Elaſtica, à preſſu ponderis aeris incumbentis orta; Elater enim, utcunque in ſe fortis, niſi comprimatur nil agit, utpote cujus tota Vis activa eſt tantum conatus ſe reſtituendi in ſitum unde detruſus fuerat.

Ex eodem principio (de concluſi Aeris Elatere) reddenda eſt ratio, *Cur Aeris pondus non ſentiamus.* Quippe ſi tanti ponderis ſit Aer quanti jam perhibetur (cum antehac, non modo nullius ponderis cenſeretur, ſed poſitive levis,) mirum videri poſſit quod tantum onus ſuſtinentes non eo nos premi ſentiamus.

Item, *Cur Aqua immerſi non ſentiant Aquæ pondus.* Cum enim, non modo nunc dierum, ſed & in veteri Philoſophia, Aquam gravem eſſe non dubitetur; eo magis mirandum videatur, quod, Aquæ ſuppoſiti, incumbentis gravitatem non ſentiant; cum interim minorem aquæ molem alibi impoſitam ferentes opprimerentur. Quodque de Aqua hic dictum eſt, de aliis item fluidis intelligendum eſt: imo & quæ fluidorum inſtar ſunt; puta, ſiquis Arenæ ſeu Farinæ cumulo penitus immergeretur, non magis ille (credo) Arenæ ſeu Farinæ, quam Aquæ, pondus ſentiret.

Ratio eſt, (non, quod dici ſolet, quod Aqua non gravitet in ſuo loco; puta ſupra aquam, aut gravius quiddam; contrarium utique dicendum eſt, nam ſuperiores aquæ partes premunt inferiores, ut ex multis Experimentis ſeu Obſervatis ſatis liquet; ſed) quoniam Aer vel Aqua ex omni corporis immerſi parte æqualiter premens, partium poſitionem non turbat. Comprimit quidem (propter Aerem in ſanguine aliiſque humoribus compreſſionis capacem) quod obſervavit Honoratiſſimus *Boylius* (*Paradox. Hydroſtat.* in fine) in Gyrinis (noſtrates, alibi *Tad-poles* appellant, alibi *Hob-nails*,) aqua incluſis valide compreſſa, ubi ſatis vivide ſe movebant, ſed magnitudine imminuta: Sicut, ex adverſo, Animalia, Antlia Pneumatica incluſa, ſubducto aere, augeri ſolent; propter aerem humoribus contentum inſigniter dilatatum; neque id ſine dolore, propter inſignem vaſorum continentium & fibrarum ſeu membranarum diſtentionem, forte & laceratiouem.

Aerem autem, ſeu quod Aeris inſtar eſt, (*Spiritus* forte dicas,) magna copia in Sanguine contineri, certiſſimum eſt, poteſtque ad oculum demonſtrari: Sanguinem enim, in aperto vaſe contentum, ſi *Antliæ Pneumaticæ Boylianæ* immiſeris; ſubducto aere (quod ipſe aliquoties vidi) ſpumeſcit protinus, & non in ſpumam tantum ſed ampliſſimas bullas ſe expandit, (aere ſanguini immiſto, propter ſublatam ab extra compreſſionem, ſe inſigniter ampliante;) & quidem plus quam ſperaveris, ita ut ſaponis inter lavandum expanſio in bullas, huic aeris in ſanguine expanſioni cedat.

Quodque inde rumpantur fibræ, videtur hinc ſaltem exiſtimandum, quod Sanguis ille, poſt innumeras iſtiuſmodi bullas turgente aere ſic inflatas ruptaſque, per aliquot dies poſtea reſervatus, non (ut fieri ſolet) in grumoſam maſſam coaluerit, ſed liquidus permanſerit. (Quod ipſe vidi, & inter Experimenta *Boyliana* alicubi, ſi bene memini, memoratur.)

Contra vero; ubi ex omni parte (pro fluidorum natura) æqualiter premitur immerſum Corpus; aeriſque particulæ, in minutiſſimas quaſque partes ſeſe cum humoribus inſinuantes, & pridem fuerant æqualiter preſſæ (nam niſi ſic fuiſſent, partes minus preſſæ reliquis locum concederent quo ampliarentur, per prop. 1. hujus,)

hujus,) &, nova preſſione jam accedente ab incumbente aqua, æqualiter item (ob eandem rationem) porro comprimuntur; manent partes ſimiliter ut prius ad invicem ſitæ, nec ulla fit fibrarum ſeu membranarum diſtractio aut laceratio, adeoque nullus dolor ſeu ſenſus oneris.

Contrahuntur quidem hac ratione fibræ membranæque ſed non renitentes; (quippe jam ante in ſtatu tenſionis erant; quod patet ex fibrarum aut membranarum, ſiquando ſecantur, ſpontanea contractione;) adeoque nec dolor inde oritur ſeu ſenſus oneris. Et quidem, dummodo nulla fit inæqualis preſſio ſeu partium diſlocatio, nec caro oſſium (utcunque conjunctorum) nec oſſa carnis ullam ex ſenſu perceptionem habent; ſed ſicubi inæqualis preſſio aut diſlocatio fiat, qua partes extra ſitum ſuum detrudantur, tum tandem fit tactus perceptio. Sed hoc in immerſis fluido (ut jam oſtenſum eſt) non contingit; adeoque nec ſenſus Oneris, ſive ab Aere ſive ab Aqua (aliove liquore) incumbente.

Poſſunt hæc ex *Antlia Boyliana* confirmari. Quippe, ſi Antliæ *Recipienti* immiſeris Veſiculam, flaccidam quidem (utpote parum aeris inibi habentem,) ſed ſtricto collo probe obturatam (nequid effluat;) dummodo eadem ubique maneat aeris Compreſſio, adeoque & Vis Elaſtica, omnia ut prius perſeverant.

Sin ex Recipiente aliquid aeris exhaurias, adeoque compreſſionem & vim elaſticam aeris in Recipiente minuas; aer in Veſica (utpote magis compreſſus adeoque & magis elaſticus quam qui eſt extra Veſicam in Recipiente) ſe expandet, veſica interim (tanquam inflata) turgente. Idque eouſque fiet quamdiu Veſicæ latera ita extendi poſſint ut aeri intus contento expanſionem ſimilem concedant ei quam habet aer Recipientis. Ubi vero non ita poſſit extendi Veſica, ſi Recipientis aer reddatur adhuc minus elaſticus, qui itaque preſſui interno minus æquipolleat; violenter diſtenditur veſica, (nempe pro eo gradu vis Elaſticæ quo ſuperat interior aer exteriorem;) quod quidem, ſi adeſſet ſenſus, non ſine dolore fieret; eaque violentia, ſi major ſit quam quæ laterum Veſicæ firmitati æquipolleat, rumpetur veſica. Quod & in phialis vitreis, tenuis corticis, ſæpius obſervatum eſt.

Si vero inflata ſic veſica (nec rupta tamen) aerem in Vas *Recipiens* denuo admittas; flacceſcet iterum veſica atque in minorem locum (fibris ſe retrahentibus) recipiet: quod, etiamſi adeſſet ſenſus, ſine dolore fieret, cum nulla vis fibris inferatur. Quodque in hac veſicula unica videre eſt, idem de innumeris in corpore veſiculis ſive bullis (exiguas Aeris ſeu Spirituum particulas continentibus) intelligendum eſt; quarum preſſio ex aere æquabiliter incumbente vix major erit quam quæ fibrarum extenſio prius fuerat ſe jam retrahentium.

Verum quidem eſt, ſi veſicæ loco phialam vitream immiſeris, cujus latera rigida ſint, neque ſe (ut fibræ) contrahant, (modo vitri tenuitas & forma tales ſint ut externæ preſſionis exceſſum ſupra internam ſuſtinere non valeant,) rumpetur phiala, partibus corticis intra truſis: at hoc in immerſis fluido ſecus eſt, ubi veſicularum cortices flaccidi ſunt, & preſſuum ſine violentia capaces. Si vero eo uſque urgeretur (ob immenſam puta aquæ profunditatem) compreſſio, ut non poſſent veſicularum cortices ſe ulterius ſine dolore contrahere; non dubito quin oneris & doloris ſenſus tum futurus eſſet. Oſſa vero, & cartilagines, in compreſſionibus minoribus, utut flaccida non ſint, dolorem à preſſu illo non ſentiunt, eo quod partes illæ corporis duræ, ſint perceptionis minus (ſi omnino) capaces; ſitque ſenſatio tantum in nervis, fibris, membranis, aliiſve corporis partibus mollioribus.

Quanta vero ſit ea ſive Compreſſio ſive Dilatatio cujus capax eſt Aer, non facile dictu eſt. Magnam certe eſſe, ultra quam quis putaverit inexpertus, experimentis plurimis compertum eſt.

Illum Aeris ſtatum qui nobis ordinarius eſt, naturalem eſſe (quem ſponte ſua ſubiret aer non vi compreſſus,) non eſt exiſtimandum. Quippe, niſi compreſſus eſſet, nulla foret in eo ſtatu vis Elaſtica, (quam eſſe experimur,) ut quæ ab Elateris compreſſione tota pendet, in ſitum ampliorem conantis ſe reſtituere.

Quouſque vero, ſi omnis compreſſio tolleretur, ſe ampliaturus eſſet Aer (qui ex innumeris corpuſculis Elaſticis varia figura varioque ſitu videtur componi,) tentatum potius quam penitus exploratum eſt.

Merſennus olim, Æolipilæ ope, ingenti caloris vi adhibita, (quantam ejuſmodi vaſa

vaſa ſine fuſione ferre poſſent,) Aerem ſe ita dilataſſe affirmat ut ſpatium *Septuagecuplum* illius quod prius habuit occupaverit.

Honoratiſſimus *Boylius* noſter, abſque caloris ope, ſola vi ſua elaſtica Aerem ſe dilataſſe expertus eſt, in locum priſtino majorem vicibus primum 9; tum, vicibus ſaltem 31, (ſed majoris adhuc expanſionis capacem eſſe ſi ſpatium eſſet quo reciperetur:) deinde, pluſquam vicibus 60: tum, vicibus pluſquam 152; (quæ pluſquam dupla eſt expanſionis Merſennianæ, vi caloris obtentæ, quæ tamen tantum non incredibilis exiſtimata fuerat:) Quæ recenſet ille, inter *Experimenta* ſua *Phyſico-Mechanica de Aeris Elatere*, &c. Experim. 6.

Poſt id temporis, ſed jam ante Octennium vel Novennium plus minus, (ut idem refert in Experimentis nuper Editis *de Admiranda Aeris Rarefactione*,) Expanſionem illam, aliis mediis, multo adhuc promovit; nempe, uſque ad vices ſaltem 8000, (vi ſua Elaſtica ſola, abſque caloris ope:) atque, iterato experimento etiam adhuc major inventa erat: quibus Experimentis etiam ipſe interfui.

Idemque, Experimento adhuc aliter inſtituto, (prout ibidem recenſetur) ad vices pervenit pluſquam 10000, (ſeu pluſquam *Decies Millecuplum* loci quem prius occupaverat idem Aer,) imo ad locum occupandum vicibus 13769 majorem.

Et quidem, inter ingenioſa illa atque ſubtilia *Experimenta Florentina* ante paucos annos edita, inventus eſt Aer, non modo abſque *Caloris* ope, ſed & abſque ope (quam *Boylius* adhibuerat) *Antliæ Pneumaticæ*, ſolius *Experimenti Torricelliani* auxilio, expanſus in molem ſaltem 173 vicibus priſtina majorem.

At quis interim ſpondere poſſit, etiam in expanſionum harum actu præſtitarum maximis, compreſſionem omnem penitus ſublatam eſſe? Quod ni factum fuerit, etiam adhuc majoris Expanſionis capax cenſendus erit Aer. Quem itaque judicemus, ex tenuiſſimis, eiſque maxime convolutis, particulis, & Elatere forti præditis, compoſitum eſſe. Quippe ſecus, vix cogitari poteſt quomodo in tam vaſtam amplitudinem, ſola ſua Vi Elaſtica (ſublata vi extrinſecus comprimente) ſe dilatare poſſet exiguus Aer.

Cumque ſe ita ſponte dilataturus foret (ſi abeſſent impedimenta) quem hic habemus Aer; manifeſtum inde eſt, quod parem huic Compreſſionem jam ſuſtineat. Sed majoris adhuc Compreſſionis capacem eſſe, non eſt quod dubitemus; imo quotidie experimur.

Huc referri poſſunt *Sclopeti Pneumatici* dicti, ſeu *Spiritalis*, (noſtri *Wind-gun* appellant) Experimenta, à *Merſenno* recenſita; ubi, à compreſſo Aere, globulus magna vi projicitur, tanquam à pulvere Pyrio. In quo tamen ſumma qua potuerunt induſtria non in minorem quam partem quindecimam, ejus quem prius occupaverat loci, aerem vi comprimere valuerunt: & quidem etiam de hoc dubitat, qui illa inſtituit, *Merſennus* ipſe (*Phænom. Pneumat.* prop. 32.) an in partem $\frac{1}{15}$, an $\frac{1}{8}$ potius dicendum fuerit, ob fallaciam aliquam quam Experimento ſubeſſe ſuſpicatus eſt.

Item quæ in *Machina Compreſſiva* (à *Societate Regia Londini* in hunc uſum parata) inſtituta ſunt Experimenta: in qua compertus eſt Aer in ſoliti ſpatii partem $\frac{1}{10}$, vel etiam $\frac{1}{12}$ (*decimam*, vel *duodecimam*,) vi coerceri.

Eaque quæ habet *Boylius* idem (à quo & cætera deſumpſi) *Experimenta Condenſationis Aeris a Frigore*. Alterum quidem; in quo, quum Glaciem Sale mixtam circumpoſuerat undiquaque vaſi vitreo quo continebatur concluſus Aer, (eo modo qui in congelanda aqua adhiberi ſolet,) contractum deprehendit in ſpatium quod ad priſtinum erat ut 147 ad 158 plus minus; (quæ multo minor eſt quam quæ vi mechanica obtineri ſolet; quippe hic non niſi $\frac{11}{158}$ priſtini ſpatii amittitur, hoc eſt, $\frac{1}{14}$ fere; cum illic adhibita vi mechanica vix tantundem retineretur: dum tamen frigus ſic adhibitum tantum fuerit ut aquæ congelandæ abunde ſufficeret, ſummumque hyemis apud nos rigorem ſuperaverit.) Alterum; quo quum Glaciem vel Nivem Sale mixtam vaſi ſimiliter circumpoſuerat, cui Aeris exiguum & Aquæ multum includebatur, Aqua vi frigoris expanſa (utpote congelationi proxima) Aerem ſic compreſſit ut intra partem *Quadrageſimam* ſeu $\frac{1}{45}$ priſtini ſpatii concluderetur; fortius adhuc eundem compreſſura ſi non (quod contigit) vas ipſum rumperetur. Quæ quidem Contractio, ſeu Condenſatio, utut minor ſit quam modo dicta Expanſio ſeu Rarefactio, (eo quod Aer jam fuerat, in ſtatu ordinario, inſigniter compreſſus;) multo tamen major eſt quam vel hybernum Frigus, (aut illud artificiale, hyberno fortius,) vel vis Mechanica hactenus adhibita, potuerit efficere.

Si vero utramque (ſummæ Rarefactionis ſummæque Condenſationis ſupra quam eſt in ſtatu aeris apud nos ordinario) conſiderationem componamus: Cum ſpatium quod occupat Aer ſic Dilatatus, ſit ad ſpatium quod occuparet Aer nobis Ordinarius, ut 13769 ad 1; atque quod Aer Ordinarius occupat ad ſpatium quod occupat ſic Compreſſus, ſit ut 40 ad 1; erit ſpatium Aeris ſic Dilatati ad ſpatium ejuſdem ſic Compreſſi, ut (13769 × 40 =) 550760 ad 1; vel, numero rotundo, ut 550000 ad 1, ſeu ut *Quinquies Centena & Quinquaginta Millia*, ad *Unum*. Et, quanto, per media olim forte excogitanda, removeri adhuc poſſit ab invicem uterque terminus; conjicere non valemus.

Unicum adhuc ex iiſdem D. *Boylii* (de Aeris Rarefactione & Condenſatione, ſeu Dilatatione & Contractione,) Experimentis monendum duxi. Nempe, quod, utut Aerem in ſtatu admodum laxo ſeu dilatato concluſum detinuerit in vaſe vitreo per Menſes aliquot, imo per aliquot Annos; non tamen hactenus obſervare potuit, quin Elaterem ſuum retinuerit, & quidem in eodem quo prius vigore; nec ob laxitatem illam languorem contraxerit: Cum tamen non raro obſervemus, Corpora Elaſtica (puta, laminam Enſis, aliamve chalybeam) ubi aliquandiu in ſitu indebito detenta fuerint, Elaterem ſuum deperdere, nec vi ſua ſe in priſtinum ſitum reſtituere; Sed & Magnetem, Acumve Magnete incitatam, ſi extra ſitum ſuum longo tempore detineas, vel polos mutare, vel ſenſim deperdere verticitatem ſuam. Tantus ſcilicet eſt, etiam in rebus inanimatis, diuturnæ in eodem ſitu poſitionis effectus.

Verum hic loci diſſimulandum non eſt Experimentum aliud, illuſtre quidem & ſatis ſtupendum, quodque me de Phænomeni cauſa ſolicitum tenuit.

Nempe; *Si Hydrargyrum inverſo Tubo* (ut dictum eſt) *ſuſpenſum, ſit ante inverſionem ab omni Aere accuratiſſime depurgatum* (quod nonniſi ſumma cura & diligentia fiet,) *atque inverſione caute facta, Tubus in loco firmo ab omni concuſſione liber conſtituatur*; *Hydrargyrum* (*aperto infra orificio*) *ſuſpenſum permanebit, etiam longe ultra altitudinem ſupra indicatam: Si vero, Hydrargyro ſic ſuſpenſo, vel tantillum Aeris admittatur, vel concutiatur Tubus*; *ſtatim præcipitabitur Hydrargyrum uſque ad ſolitam altitudinem, ibique* (poſt reciprocationes aliquot factas) *conſiſtet.*

Phænomenon hoc, Experimentis quibuſdam, in *Organo Boyliano* primum, deinde in aperto aere factis, debemus. Obſervaverat utique Honoratiſſimus *Boylius* (quod ex ejus *Experimentis Phyſico-Mechanicis*, Anno 1660. editis, *Exper.* 17. ante monuimus,) Hydrargyrum, intra Antliam ſuam Tubo ſuſpenſum, ſubducto Aere gradatim deſcendere, uti expectaverat, non ita tamen quin, quamcunque adhibuerit diligentiam, ſupra ſtagnantis inferius Hydrargyri ſuperficiem (contra quam ſperaverat) extaret adhuc ad altitudinem *Unciæ* vel ſaltem *Semi unciæ* (præſertim ſi ab aere prius depuratum fuerit,) cui in Aqua reſpondent pedis Unciæ ſaltem 7 aut 8. Idemque in Aqua expertus, immiſſis in Antliam tubis brevibus (puta, 5 aut 6 unciarum pedis) ea repletis, Aquam reperit (ſaltem ſi ab Aere prius depurgata fuerit) non deſcendere. Quæ quamquam Organo minus præciſe obturato, quam ut potuerit Aer omnis inde exhauriri, imputari poſſe videretur; rem tamen cum iis è *Societate Regia* qui tum temporis ſolebant convenire communicavit, ut altiore dignam examine.

Cumque, poſt Librum illum editum, Organumque ipſum *Londini* 1661 conſpectum, variis adhibitum uſibus, id eouſque approbavit Clar. *Hugenius*, ut domum reverſus aliam ſibi ad ejuſdem Antliæ formam parandam curaverit: id ipſum ille in Aqua expertus ſimiliter evenire deprehendit, (neſcius, credo, D. *Boylium* id pridem deprehendiſſe:) Nempe; immiſſo in Antliam tubo breviuſculo aqua repleto ab aere depurata, poſt Aerem ex Antlia quantum potuit exſuctum, Aqua adhuc ſuſpenſa manſit.

Idemque (ſuis literis) ut notabilem in doctrina *Boyliana* (de Aeris Pondere & Elatere) difficultatem objecit.

Cui (literis ſuis) reponebat D. *Boylius*, rem plane ita eſſe, atque ab ipſo jam ante obſervatam, tum in Aqua (ut D. *Hugenio*) tum etiam in Hydrargyro; agnitamque difficultatem, & cum Societate Regia communicatam, ut ulteriori adhuc examine dignam. Interea tamen ſolvi difficultatem videri poſſe ob Antliam non ita penitus exhauſtam quin ut reſiduus Aer exiguum illud pondus ſuſtinere potuerit;

tuerit; & ſiquando Aqua illa brevium tuborum, aut huic æquipollens Hydrargyrum, ab aere nondum depuratum, ſubſideret, id imputari poſſe latenti intus Aeri elatere ſuo depellenti vim Aeris extra tubum jam valde debilitatam.

Quod quidem reſponſum, utut Objectioni (prout tum res erant) ſatisfacere videretur; non tamen fecit quin *Societati Regiæ* viſum fuerit in rem illam altius inquirere. Experimentis tum coram ipſis publice, tum alibi privatim, præſertim ab Honoratiſſimo Præſide D. Vicecom. *Brounckero* & D. *Boyle*, (quorum præſertim curæ res ea demandata fuit;) ſive in Organo *Boyliano* ſive in aperto Aere, faciendis.

Poſtque varia facta tentamina, retulit tandem Societati Regiæ D. *Præſes*, ſe Hydrargyrum ſic ſuſpenſum detinuiſſe, ultra ſolitam altitudinem ad Æquipondium neceſſariam (puta unciarum 29 aut 30,) nempe ad pedis uncias uſque 34: Poſteaque D. *Boylius*, ſe idem expertum in altitudine unciarum 52: Iterumque D. *Præſes*, ſe idem ad pedis uſque uncias ſaltem 55; pollicitus porro ſe rem ulterius adhuc proſecuturum. Quæ ex Regiæ Societatis Regeſtis Annorum 1662 & 1663 liquent.

Idemque ex eo tempore, frequenti experientia, in aperto Aere (abſque Antliæ ope) Experimentis Honoratiſſimorum *Brounckeri*, *Boylii*, aliorumque, crebro iteratis (quibus & ego aliquando interfui) confirmatum eſt; Hydrargyrumque, non tantum ad ſolitam altitudinem (quo Æquilibrium cum externo Aere fieret,) puta, ad pedis Anglicani Uncias 29 circiter, ſed etiam ad Uncias uſque 40, 50, 60, imo & 72, ſuſpendi deprehenſum eſt, atque ita ſuſpenſum per dies aliquot conſiſtere; ſed concuſſione facta, vel tantillo Aeris admiſſo, ſtatim præcipitari ad Æquilibrium uſque: Ut de Phænomeni certitudine jam dubitandum non ſit.

Atque hoc quidem Experimentum, illuſtre & inſperatum, cum leges Staticas ſupra poſitas quadantenus turbare videatur, in Gravitatis naturam altius inſpiciendum monet, eoque facem non contemnendam præferre forte deprehendetur olim.

Interim, donec certius aliquod à Viris Eruditis concluſum fuerit, hæc mihi ratio videtur non improbabilis. Nempe; Cum olim, in veteri Philoſophia, Terra, Aqua, aliaque ejuſmodi Corpora, Gravia cenſerentur; Aer autem Levis; videri poſſit contrarium quadantenus hinc dicendum; omnemque Gravitationem actualem ab Aeris Ætheriſve preſſu vel Elatere (expanſionem moliente, cæteraque propterea loco ſuo deturbante,) provenire: Abſque quo, ſegnia hæc Corpora, quæ Gravia dicimus, in quiete poſita ſic permanerent, ſine Gravitatione actuali ſive deſcenſu; neque magis eſſent ad motum deorſum proclivia quam ad lateralem. Hydrargyrum itaque ab omni intus Aere depuratum, atque ita ut dictum eſt ſuſpenſum, etiam ultra conſuetam altitudinem ad æquilibrium neceſſariam, cum ab omni Aeris preſſu liberum ſit, nec ejus vel gravitate vel elatere urgeatur, (quippe, qui intus deprimeret, nullus eſt; quique extra eſt, ſi omnino premeret, ſurſum premeret; nempe, per Tubi orificium, qua ſolum patet aditus; nam à preſſu aeris ſuperno vel laterali à Tubo defenditur;) in quiete poſitum immotum manet, ſuumque ſitum retinet. Si vero, propter Tubi concuſſionem aliquam, aliquamve intus commotionem ab Aeris elatere, vel prius inibi relicti vel jam demum admiſſi, in motu ponatur; motum illum (pro ratione quantitatis materiæ, vel denſitatis partium, vel quicquid id ſit quod *Ponderis* nomine vulgo inſinuamus,) proſequitur, deorſum (qua via patet) vergens. Adeoque, quicquid id ſit quod in Hydrargyro (aliiſque ſimilibus) *Pondus* dicimus, utut abſque Elatere vel preſſu aeris aut quod hujus inſtar ſit non inchoaret motum, motu tamen undecunque orto rationes Staticas deinceps obſervat. Atque hæc eſt quæ mihi videtur Phænomeni hujus non improbabilis ratio.

Addo tamen, Tubi ſuperficiem utcunque politam (quod de aliis ſuperficiebus pariter intelligendum) non ita ab omni aſperitate ſeu inæqualitate immunem cenſendam eſſe, quin etiamnum aliquid aſperitatis ſuperſit, unde corporis adjacentis cohæſio aliqua & (ſi moveatur) frictio oriatur, (ut ſupra aliquoties inſinuatum eſt,) qua motus aliquatenus impediatur, atque ob quam mota corpora alii contigua Volvi facilius quam Labi deprehenduntur. Atque hinc, ſi poſt omnem adhibitam diligentiam nonnihil aeris utut exiguum permanere cenſeatur, compenſatio fieri poſſit ne Hydrargyrum excutiat.

Fateor interim mihi ne ſic quidem penitus ſatisfactum eſſe, ſcrupuloſque adhuc ſupereſſe & difficultates quibus reſpondendis necdum ſufficio, quin aliquid adhuc

mecum hæreat. Et quidem fieri poteſt (quod D. Vicecom. *Brounckerus* ſuſpicatur) Aeris pondus multo majus adhuc eſſe quam ut altitudini Hydrargyri unciarum plus minus 29 reſpondeat; ſed ab aere intus latente (niſi expurgetur) ad eam uſque altitudinem depreſſum eſſe Hydrargyrum: At ubi expurgatur Aer, nihilque tum ſuperſit quod externi aeris ponderi ſe opponat præter nudum Hydrargyri pondus, rem ſecus deprehendi, hydrargyrumque ab aeris æquipondio altius ſuſtentum iri.

Sunt qui idem explicare ſatagunt, propter Aerem quendam ſubtiliorem (quam eſt Communis Aer) Aeri noſtro craſſiori immiſtum; qui quidem tam ſubtilis ſit ut per Antliam Pneumaticam expurgari non poſſit, nec ita tamen ut poſſit per vitri poros tranſire: (qualem revera reperiri, aliis aliunde Experimentis confirmatum eunt:) Hunc Aerem ſubtilem, utut vitrum penetrare non poſſit, poſſe tamen (poſt concuſſionem Tubi factam, aut Undulationem aliunde ortam) ita per internam tubi ſuperficiem ſe ſenſim inſinuare exiſtimant, ut (præterito & ſuperato quod intus eſt Hydrargyro) culmen conſecutus, Hydrargyrum depellat.

Sed nihil certi hic auſim determinare, ſeveriori adhuc diſquiſitione rem dignam cenſens.

PROP. XIV.

Quæ de Hydrargyro propoſitionibus ſuperioribus oſtenſa ſunt eadem in aliis Fluidis, ſervata Gravitatum proportione, pariter obtinent.

CUm enim omnium Demonſtrationes Hydrargyro ſpeciatim applicatæ, procedant ex generali Fluidorum natura, eædem pariter obtinebunt in fluidis aliis, pro ſua cujuſque gravitate.

Verbi gratia: Cum pondus Aquæ ad pondus Hydrargyri, æqualis magnitudine, ſit ut 1 ad 14 (numero rotundo,) ſeu potius (quod D. *Boylius* ex ſuis Experimentis accuratius judicat) ad $13\frac{3}{4}$ circiter; (*Getaldus*, in ſuo *Archimede promoto*, ponit ut 1 ad $13\frac{4}{7}$:) Quo Cylindrus Aquæ æquipolleat externi Aeris preſſui, requiritur ut altior ſit Cylindro Hydrargyri æquipollente, vicibus 14, ſaltem $13\frac{3}{4}$, aut $13\frac{4}{7}$; prout hæc, illa, vel iſta proportio ſit accuratior; & quidem pro diverſo ſive Aquarum ſive Hydrargyrorum pondere, poterit nunc hæc nunc illa eſſe accuratior; poteſt enim & Aqua aqua & Hydrargyrum Hydrargyro levius eſſe graviuſve. Adeoque quam poſuimus altitudinem CI, (fig. 314.) in Hydrargyro, unciarum plus minus 29; ponenda erit, in Aqua, pedum plus minus 33.

Huic conſonum eſt D. *Boylii* Experimentum (cui & ipſe cum aliis interfui) cujus meminit in *Continuatione Experimentorum Phyſico-Mechanicorum*, Experim. 15. Qui, experimento quærens quouſque poſſet Aqua Suctione elevari in tubo, ſupra ſuperficiem infra ſtagnantis aquæ cui inſiſtebat, invenit (ſumma adhibita diligentia) maximam ad quam tunc temporis elevari poſſet altitudinem fuiſſe pedum 33 & unciarum 6, hoc eſt pedum $33\frac{1}{2}$; quo tempore altitudo Hydrargyri propter Atmoſphæræ æquipondium ſuſpenſi, fuit unciarum pedis $29\frac{1}{4}$ proxime; quæ quidem Hydrargyri altitudo per $13\frac{3}{4}$ multiplicata, exhibet uncias 402 proxime, hoc eſt pedes 33 cum 6 unciis. Atque, eadem analogia, quo tempore aſſurgeret Hydrargyrum ad pedis Anglicani uncias 30 (qui aſcenſus eſt quaſi maximus,) aſſurgeret Aqua ad altitudinem unciarum $412\frac{1}{2}$, hoc eſt pedum 34 & unciarum $4\frac{1}{2}$: Quo tempore vero Hydrargyri aſcenſus eſſet nonniſi unciarum 28 (qui quaſi minimus eſt,) aſcenderet aqua ad altitudinem unciarum 385, ſeu pedum $32\frac{1}{12}$. Ut maximam Aquæ aſcenſionem ob Suctionem (ſeu, quod tantundem eſt, ob Atmoſphæræ æquiponderantiam) obtinendam, rite judicemus, nunc pedum $34\frac{1}{2}$, nunc pedum 32, (proxime,) nunc his intermediam, prout maxima minima vel intermedia fuerit Atmoſphæræ gravitatio; ſaltem ab his limitibus quam parum recedendum erit.

Verum non opus eſt, ad hoc de Aqua Phænomenon probandum, (quod non ultra certam altitudinem ſuctione poſſit elevari,) ut ad idem in Hydrargyro tenta-

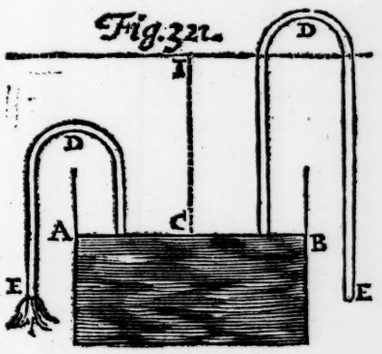
tentatum recurramus. Quippe illud in Aqua primo deprehenſum eſt. Utut enim, qui ob Fugam Vacui ſuctiones fieri exiſtimaverint, putaverint etiam (nec quidem inconſequenter) ad quantamcunque altitudinem ſic poſſe Aquam elevari; nec dubitarint quin Antliarum atque Siphonum ope poſſet aqua etiam ſupra altiſſimas Turres nedum Montes ſuctione trahi: Deprehenderant tamen Antliopœi, cum ad praxin deventum eſſet, rem non ſuccedere; omneſque aquam ſupra certam altitudinem his mediis elevandi conatus fruſtra eſſe. Atque hoc ipſum eſt quod *Galilæo* primum in animum induxit, Vacui Fugam illam non infinitam eſſe, ſed intra certos limites coerceri; Aeriſque Æquipondium illius loco ſubſtituendum. Indeque *Torricellio* anſa data eſt idem in Hydrargyro tentandi. Quippe non imprudenter conjecit ille, ſi ob Aeris Æquipondium nonniſi ad certam altitudinem elevaretur Aqua, ad minorem adhuc elevandum fore Fluidum aqua Gravius: atque, in Hydrargyro tentata, res ſucceſſit ex voto. Atque exinde, Torricellio præeunte, res jam redacta ab altitudine pedum plus minus 33, ad altitudinem tubi breviuſculi, unciarum puta 29 plus minus, facta eſt magis tractabilis; (cum tubi tot pedes alti, liquoribus aerique impervii, nec facile obtineri poſſent, nec commode tractari:) Unde tot tantique momenti Experimenta profluxerunt, profluuntque indies.

Quodque in Aqua oſtenſum eſt, in Fluidis aliis, ſervata proportione gravitatum, perinde obtinere cenſendum eſt.

PROP. XV.

Quæ de Hydrargyro, aliiſve Fluidis, in Tubo ſuſpenſis oſtenſa ſunt; eadem Siphonibus, Antliis, aliiſque ejuſmodi organis, accommodanda ſunt.

ESto enim, verbi gratia, Siphon ſeu Tubus incurvus CDE (utrinque aperFig. 321.
tus,) cujus alterum extremum C Aqua aliove Fluido immergatur, alterum E extra propendeat. Notum eſt Experimentum (ut in deplendis vaſis vinariis,



aliiſve,) ſi ſugendo in E proliciatur liquor donec effluat, omiſſa deinceps ſuctione continuabitur effluxus, donec liquor in vaſe vel penitus exhauriatur, vel à juſta altitudine deficiat: Ea tamen lege, ut orificium E inferius ſit quam AB liquoris in vaſe ſuperficies.

Hujus Phænomeni cauſa à Fuga Vacui peti ſolebat olim; nempe, quod exſucto in E aere qui in Siphone fuerat, aſcendat (contra gravitatis ſuæ propenſionem) Fluidum in C, ne daretur (quod naturam omnibus modis averſari putabatur) Vacuum in Siphone. Et, conſequenter, hujuſmodi artificio etiam ſupra altiſſimos montes in oppoſitas valles aquam transferri poſſe putabatur.

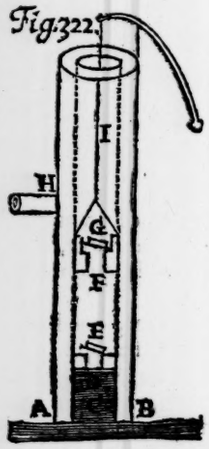
Poſtquam vero experimento compertum eſt, non poſſe aquam (aliudve fluidum) ultra certam altitudinem ſuctione attrahi, eamque in altitudinem immenſam ſic elevandi ſpes fuiſſe fallaces; cœpitque in Fugæ Vacui locum ſuccedere (Galilæo id primum ſuggerente, & promovente Torricellio,) Aeris Æquipondium:

ad leges Staticas deventum eſt, quo altitudines illæ pro cujuſque Fluidi gravitate determinentur.

Exſucto igitur Aere in E, (ſeu potius, loco facto in ſugentis Thorace dilatato quo recipiatur aliunde protruſus aer,) ſubjectum Fluidum ab aeris extra incumbentis preſſu in Siphonem protruditur (eadem ratione qua, ſupra, in Tubum rectum) in C; idque eouſque (nec ultra) donec fiat Æquilibrium cum externi Aeris preſſu, (per ante demonſtrata;) puta, ad altitudinem C I; (hoc eſt, in Hydrargyro, Unciarum quaſi 29; in Aqua, Pedum quaſi 33, plus minus; atque in aliis liquoribus proportionaliter pro ſua cujuſque gravitate.) Si itaque Siphonis ſummum D, altius non ſit quam I; aſſurget fluidum ad ſummum uſque; exituque illic invento per crus deſcendens D E, effluet ex E; atque hoc continue, cauſis perſeverantibus. Ea tamen lege, ut inferius ſit E quam C (ſuperficiei A C B:) Secus enim, cum æquali Atmoſphæræ preſſu urgeantur C & E, ſi Cruris D E altitudo minor ſit quam Cruris D C, adeoque fluidum quod illo continetur minus gravitet quam quod in hoc, contrario curſu feretur fluidum ab E per D ad C, ſuccedente Aere in E: Saltem, niſi Siphonis amplitudo tanta ſit ut poſſit Aer ſimul aſcendere (per fluidi latera) dum defluit fluidum cruris D E; quo caſu, partiri poterit fluidum in D, deſcendente parte altera per D C, altera per D E, aſcendente Aere per fluidi D E deſcendentis latera; in Siphonibus vero ſtrictioribus retro feretur fluidum in E, per E D C, ab aere in E urgente propulſum.

Sin D altius ſit quam I, ſurſum propelletur Fluidum (ob cauſas ſupra traditas) à C ad I uſque, ſed non ultra; adeoque ad D non pertinget: Adeoque tantum abeſt ut ceſſante ſuctione continue profluat per D ad E, ut nulla ſuctione ad E protrahi poſſit. Cum enim ſuctio non aliter agat quam (aperto Thorace, aut quod Thoracis inſtar eſt,) locum faciendo quo recipiatur fluidum (non ſuctionis vi tractum, ſed) ab externi aeris preſſu (ſeu quod hujus inſtar eſt) propulſum; ſi, utut loco facto, non valeat tamen externus aer eo propellere Fluidum (propter D altius quam I,) Fluidum ad I conſiſtet, neque altius feretur quo per D ad E poſſit pertingere. Et quidem, ſi totus fluido impleatur Siphon C D E; aperto utrinque orificio, facta partitione in D, quod eſt in crure D C deprimetur ſaltem uſque ad I, (ne plus prematur C quam ſuperficiei A C B partes reliquæ,) quodque eſt in crure D E effluet per E (aere in illius locum ſuccedente;) ſaltem niſi tam ſtrictum ſit crus D E ut non commode poſſit aſcendens Aer deſcendens fluidum præterire; quo caſu, poſtquam deſcenderit fluidum in D E uſque ad altitudinem I, ſuſpenſum illic detinebitur donec ſe poſſit Aer ſenſim inſinuare; viaque tandem facta qua poſſit externus Aer libere per E intrans vim ſuam exercere, deprimetur quod erat reſiduum in crure D E ad C uſque.

Fig.322.



Idemque in Antlia (ſeu Organo Cteſibico) obtinet; Cujus ſtructura ad hunc fere modum fieri ſolet; Lignum oblongum (vel ex pluribus, ſi opus ſit, compoſitum) intus excavatum Cylindrice, in puteum demittitur, (extante parte ſuperiore,) infra ſuperficiem aquæ in putei fundo; quæ quidem Aqua intelligenda eſt, non libera ab aeris preſſu, ſed eidem obnoxia (ſecus enim non ſurſum propelletur aqua;) Atque alicubi in Antliæ cavo repagulum tranſverſum figitur in cujus medio eſt foramen D per quod aſcendat Aqua; & huic foramini incumbens operculum ſeu valva E, tranſverſario ita fixa ut aperiri aut claudi poſſit prout infra ſuprave premitur; Item, Situla à manubrio ſuperne demiſſa, (ita Cavi lateribus aptata ut non poſſit Aer per latera ſe inſinuans tranſire,) quæ ſimiliter in fundi medio foramen habeat F, eique ſic aptatam valvam G, ut E ad D.

His ita conſtructis; dum manubrium verſando Situla ſurſum trahitur, cumque illa incumbens Aer, quo minus ſubjecta intra Antliam aqua eo prematur, impelletur in Antliæ cavum aqua aliunde preſſa per C ad D, & per foramen (valvam E aperiens) ad fundum uſque ſitulæ (modo altior non ſit quam C I ſumma æquilibrii altitudo,) utpote à preſſu ſuperne libera, atque infra propulſa: Contra vero; dum manubrium

brium alias verſando deprimitur Situla, deprimatque proxime ſubjectam aquam quæ per D aſcenderat; clauditur hac depreſſione valva E, atque aperitur G; per quam aqua, ſitulam ſupergreſſa, cum retracta ſitula (clauſa G valva) ſurſum trahitur, viaque illic inventa per orificium H effluit, ſuccedente ut prius in retractæ ſitulæ locum aqua per D denuo aſſurgente: atque hoc continue.

At vero, ſi altitudo C D major ſit vel non minor quam C I (qua fieri ſupponimus æquilibrium cum externi aeris preſſu) Aqua per D non aſcendet (ne plus premeretur C quam ſuperficiei A C B partes reliquæ,) totuſque Antliæ labor incaſſum erit. Sin D ſit infra I, aſcendet aqua per D ad I uſque, modo non impediatur; ſaltem ad uſque fundum ſitulæ, niſi altior ſit hic quam I. Si vero eouſque ſurſum trahatur ſitula ut F vel G ſuperet altitudinem I, deſerta ſitula infra ſubſiſtet aqua ad I; ita tamen ut ſi ſitula, dum infra I fuerat, aquam per F G hauſerat, hanc ſecum (clauſa G valva) elevabit atque per H effundet; ſed cum majore exantlantis vi, utpote cui nihil ſubſidii conferat aqua inferne premens.

Hinc eſt, quod Hydrargyrum non poſſit Siphone, Antlia, Syringa (nam & illic eadem eſt ratio,) aliove Suctionis Organo quocunque, ultra pedis Uncias 29 aut 30 in altum trahi; nec Aqua, ultra pedes 33 aut 34, circiter; aliaque Fluida pro ſua cujuſque gravitatis ratione. Cauſa utique in omnibus eadem eſt; Nempe, Ea quæ Suctione fieri videntur omnia, Pulſione revera fiunt; puta, ab aere extra gravitante, aliove preſſu; ſuctione nil aliud faciente quam ut locus paretur ad recipiendum id quod preſſu aliunde pellitur.

CAP.

CAP. XV.

Epilogus, ex Miſcellaneis.

CUM tandem ad umbilicum perveniendum ſit, ne opus in immenſum creſcat, (utut pro materiæ copia ſatis arctum;) nonnulla in caput hoc ſtrictim congerere viſum eſt, quæ vel ſuis locis omiſſa fuerant, vel conſulto huc rejecta.

PROP. I.

Quæ hic proponebantur (de *Spatiis Hyperbolicis*) Addenda; jam habentur (ſuo loco) ad calcem Prop. 31. Capitis Quinti.

PROP. II.

Quæ hic proponebantur (de *Spatio Ciſſoidali*) Addenda; jam habentur (ſuo loco) ad calcem Prop. 29. Capitis Quinti.

PROP. III.

Inflata Veſica pondus elevare.

EXperimentum hoc primum vidi *Oxoniæ* inſtitutum Anno (ſi recte memini) 1651. (ſaltem non anno integro ſerius citiuſve) in Conventu ſtudioſorum qui tunc temporis ibidem convenire ſolebamus ſtato die ſingulis ſeptimanis, ad ſtudia communicanda, inſtituenda experimenta, & rem Philoſophicam promovendam. Verum non tum primum inventum erat, ſed (ut res jam ante cognita) repetitum. Idemque poſt id tempus in Societate Regia *Londini* repetitum fuit. Sic autem inſtituitur.



Fig. 333.

Sit B veſica; cujus cervix N pegmati ſeu fulcro alicui firmo figatur; ita tamen ut per calamum ſeu fiſtulam Q inflari poſſit: fundoque affigatur pondus P. Experimento compertum eſt, flatu ſpiritus humani, inflata veſica, adeoque lateribus diſtentis & longitudine contracta, pondus librarum 50, 60, 70, aut etiam plurium (pro viribus pulmonum flantis) notabiliter elevari poſſe.

Id autem ne incredibile videatur; conſiderandum primo erit; vim ſpiritus humani, præſertim ubi ſummo niſu intenditur, non ita exiguam eſſe ut quis prima vice exiſtimet. Quod manifeſtum erit ſi conſideremus, ad quantam diſtantiam, & quam celeri fortique motu, globulus argillaceus flando expelli ſoleat ex Tubo oblongo, quali in occidendis avibus utuntur, etiam ad diſtantiam non exiguam.

Conſiderandum porro erit, (quod hic præſertim ſpectamus,) quam accommode ad motum hunc præſtandum adhibetur vis illa; quippe non niſi magna ſpiritus

tus inflantis copia in veſicam immiſſa pondus ad exiguam altitudinem elevatur.

In hunc finem conſideranda erit Veſica Bubula, utut irregularis ſit figuræ ad Sphæroeidem tamen proxime accedens, Ellipſeos M N O P circa longiorem Axem N P converſione factam; cujus quidem Ellipſeos Perimeter ſi eadem intelligatur vel ſibi ſemper æqualis, Ellipſeos Species continue mutabitur prout veſica plus inflatur; aucta ſolida capacitate, propter auctum axem breviorem M O, dum longior N P contrahitur; ſphæroeide facta latiore, ſed breviore, atque ad ſphæram magis accedente. Quod cum fieri non poſſit retracta cervice, ut quæ intelligitur ſtabili fulcro firmiter alligari, fit elevato Pondere: Cujus elevatio itaque tanta erit quanta eſt longitudinis N P contractio.



Fig. 334

Hanc autem longitudinis contractionem, adeoque elevationem ponderis, quo aliquatenus æſtimemus; ſepoſita aliquantiſper Ellipſi, ſubſtituamus Rhombum M N O P; adeoque, pro Sphæroeide, Rhombum Solidum; intellige, Solidum converſione Rhombi circa longiorem axem N P factum; adeoque ex duobus conis ſimilibus & æqualibus compoſitum, quorum communis baſis ſit M O circulus, & vertices N, P. Non quod hæc figura propius ad Veſicæ formam accedat; ſed quod ad calculum ſit accommodatior, nec ita ab veſicæ forma recedat quin præſenti negotio ſatis ſit accommoda; non enim propter peculiarem veſicæ formam res ita miranda videtur, ſed propter pondus tantum tantilla vi elevatum.

Rectam N P (Rhombi diagonalem longiorem) appello *Solidi Altitudinem*: quæ quoniam pro varia poſitione varia eſt, *poſitionem primam* eam ſuppono qua, nulla adhuc inflatione facta, lineæ N M P, N O P, in rectas extenduntur, adeoque cum N P recta coincidunt; quo caſu N P recta æqualis erit duobus Rhombi lateribus; puta N O, O P, vel N M, M P. Diſtantiamque punctorum N, P, in hac poſitione prima appello *Primam Altitudinem.*

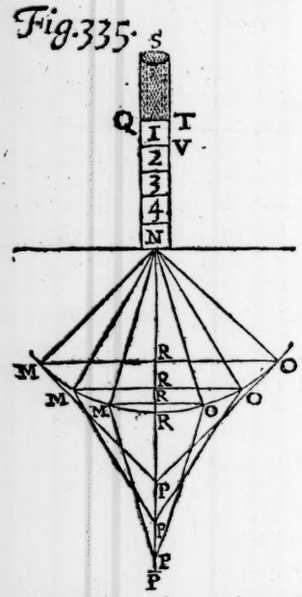
Calamus ſeu Fiſtula Q (per quam fit inflatio) intelligatur Cylindrice excavari, Cavique diameter ponatur, verbi gratia, $\frac{1}{100}$ (pars Centeſima) Primæ Altitudinis.

Vim Flatus (quo aer in veſicam impellitur) quaſi æqualem reputo vi Muſculorum pectus comprimentium, adeoque aerem ex pectore in veſicam impellentium. Utut enim Flatus humanus in libero aere imbellis videatur, eo quod quam primum ſpiritus ex ore in aerem tranſeat undiquaque expandatur: quum tamen per fiſtulam impellitur, cujus lateribus cohibetur ne diffluat, vis ejus in Fiſtulam eadem quaſi eſt ei qua ex Pectore detrudebatur. Dico tamen *quaſi eadem* potius quam *eadem præciſe*; quoniam non negaverim quin virium aliquid pectus comprimentium impendi potuerit in comprimendo expulſo aere, reliquumque tantum in expellendo.

Vim Flatus hanc (ſive major fuerit ſive minor) ponamus æquipollentem preſſui ponderis in S (cavi Summo) incumbentis, ſubjectum aerem in Fiſtulæ ſpatiis 1, 2, 3, 4, &c. deprimentis, adeoque impellentis in Veſicam; unde Veſicæ lateribus diſtentis, capacitas augetur pro ratione ingeſti aeris; ſeu pro ratione deſcenſus ponderis S. Nam dum pondus S per ſpatia 1, 2, 3, 4, &c. deſcendit (quæ ſunt in Cylindro altitudinibus proportionalia) tantundem aeris in veſicam intruditur quantum illis ſpatiis continebatur, atque tantundem augetur veſicæ capacitas.

Quoniam vero negandum non eſt, quin aer, propter elaterem quem habet, compreſſionis capax ſit; adeoque veſicæ extenſio minor aliquanto ſit quam ſpatium quod S deſcendens occupat, (virium parte aliqua in comprimendo aere impenſa, reliquaque tantum in extendenda veſica:) Deſcenſum ponderis S, utut revera aliquanto major ſit, tantum jam reputabimus quanta eſt illa Veſicæ extenſio; hoc eſt, quantum oporteret deſcendere propter illam extenſionem ſi aer non eſſet capax compreſſionis. Quod tamen facio potius ne ſit objectioni color aliquis, quam quod ſit præſenti inſtituto neceſſarium. Nam (præterquam quod Calculo ſumme exquiſito hic opus non ſit,) quicquid id ſit, non tam Quantitatem ſpectat quam Celeritatem aſcenſus ponderis P.

Fig. 335.



His ita Calculo præstructis; Altitudinem Primam NP, hoc est NM + MP in quolibet Rhombo, ponamus $= n$; adeoque $NM = \frac{1}{2}n$. Item NP pro particulari aliquo Rhombo, $= a$; adeoque $NR = \frac{1}{2}a$. Erit itaque in Rhombo illo $MR = \surd : NMq - NRq := \surd : \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}a^2 := \frac{1}{2}\surd : n^2 - a^2$: Adeoque $MO = \surd : n^2 - a^2$: cujus quadratum $MOq = n^2 - a^2$ in $NR = \frac{1}{2}a$ ductum, exhibet $\frac{1}{2}n^2a - \frac{1}{2}a^3$ æquale Parallelepipedo circumscripto Cono NMO; hujusque duplum $n^2a - a^3$ æquale Parallelepipedo quod toti solido Rhombo MNOP circumscribatur; Cui parallelepipedo si intelligatur Cylindrus inscribi, erit hic Triplus Rhombi solidi.

Intelligantur porro, Cylindri QN spatia 1, 2, 3, 4, &c. totidem esse Cylindros æque altos & super æquales bases: Et ponamus Basis diametrum $QT = u = \frac{1}{100}n$; atque altitudinem item $TV = u$, quæ in diametri basis quadratum ducta, exhibet u^3 æqualem Parallelepipedo circumscripto Cylindro QV.

Est autem, ut Parallelepipedum ad Parallelepipedum, sic inscriptus Cylindrus ad inscriptum Cylindrum (propter æquales altitudines & bases proportionales:) Estque (per prius posita) Cylindrus QV æqualis solido Rhombo qui fit descensu ponderis S per spatium QV; hoc est, æqualis trienti Cylindri huic Rhombo circumscripti: Ideoque & Parallelepipedum circumscriptum Cylindro illi, æquale trienti Parallelepipedi Cylindro huic circumscripti. Sed, per modo ostensa, Parallelepipedum circumscriptum Cylindro QV est u^3; & Parallelepipedum circumscriptum respectivo Rhombo solido MNOP, $n^2a - a^3$; cum itaque illud sit hujus trienti æquale, erit $u^3 = \frac{1}{3}n^2a - \frac{1}{3}a^3$; adeoque $3u^3 = n^2a - a^3$. Quæ quidem Æquatio respondet solido Rhombo facto ex descensu ponderis S per primum spatiorum 1, 2, 3, &c.

Et, consequenter; (cum, propter illa spatia æqualia, æqualia etiam sint Rhomborum solidorum respectiva incrementa,) $6u^3 = n^2a - a^3$ respondebit descensui per spatia duo; $9u^3 = n^2a - a^3$ descensui per tria; & sic de cæteris. Hoc est, (posito $n = 100$ & $u = 1$)

Dum S descendit per spatia.	Æquationes respectivæ erunt $n^2a - a^3 =$	Vel, $10000a - a^3 =$
1	$3u^3$	3.
2	$6u^3$	6.
3	$9u^3$	9.
4	$12u^3$	12.
5	$15u^3$	15.
6	$18u^3$	18.
7	$21u^3$	21.
8	$24u^3$	24.
&c.	&c.	&c.

Quibus æquationibus resolutis; propter cognitas quantitates n, u, reperietur quantitas a; hoc est, respectiva altitudo NP pro quolibet Rhombo: Et consequenter, quantum ea deficit ab altitudine prima; hoc est, quantum ascenderit interea pondus P supra primam ejus positionem.

Æquationes illæ sic resolutæ exhibebunt nobis subjectam Tabellam. In qua Columna S numerat spatia per quæ descendisse supponitur vis seu pondus S. Æ exhibet respectivas æquationes his spatiis respondentes. A, respectivas altitudines NP pro illis descensibus. P, harum complementa ad altitudinem primam 100; hoc est, mensuram ascensuum ponderis P, descensibus illis respondentium. D, differentias complementorum continue consequentium; hoc est, quantum ascenderit P propter descensum S per singula spatia 1, 2, 3, &c. respectiva. Nempe,

Dum

Dum S descendit per spatia | Æquationes correspondentes sunt, 100000 $z - z^3 =$ | Adeoque respectivæ altitudines, $NP = z$ | Quarum complementa ad 100 (altit. primam) seu Elevatio ponderis supra positionem primam, | Complementorum differentiæ, seu elevatio P pro singulis spatiis,

S	Æ	A	P	D
1	3	99.999,849,999,66	00.000,150,000,34	00.000,150,000,34
2	6	99.999,699,998,6	00.000,300,001,4	00.000,150,001,06
3	9	99.999,549,997,0	00.000,450,003,0	00.000,150,001,6
4	12	99.999,399,994,6	00.000,600,005,4	00.000,150,002,4
5	15	99.999,249,991,6	00 000,750,008,4	00.000,150,003,0
6	18	99.999,099,987,9	00.000,900,012,1	00.000,150,003,7
7	21	99.998,949,983,4	00.001,050,016,6	00.000,150,004,5
8	24	99.998,799,978,3	00.001,200,021,7	00.000,150,005,1
9	27	99.998,649,972,6	00.001,350,027,4	00.000,150,005,7
10	30	99.998,499,966,2	00.001,500,033,8	00.000,150,006,4
11	33	99.998,349,959,2	00.001,650,040,8	00 000,150,007,0
12	36	99.998,199,951,	00.001,800,049,	00.000,150,008,
13	39	99.998,049,943,	00.001,950,057,	00,000,150,079,
14	42	99.997,899,933,	00.002,100,067,	00.000,150,010,
15	45	99.997,749,923,	00.002,250,077,	00.000,150,010,
16	48	99.997,599,913,	00.002,400,087,	00.000,150,010,
17	51	99 997,449,902,	00.002,550,098,	00.000,150,011,
18	54	99.997,299,890,	00.002,700,110,	00.000,150,012,
19	57	99.997.149,878,	00.002,850,122,	00.000,150,012,
20	60	99.996,999,865.	00.003,000,135,	00.000,150,013,
49	147	92.992,949,25	00.007,050,75	
50	150	99.992.799,22	00.007,200,78	00.000,150,03
99	297	99.985,146,69	00 014,853,31	
100	300	99 984,996.62	00.015,003,38	00.000,150,07
149	447	99.977.642,503,	00.022,357,497,	
150	450	99.977,492,402,	00.022,507,598,	00.000,150,101,
199	597	99.970,136,624,	00.029,863,376,	
200	600	99 969.986,489,	00.030,013,511,	00.000,150,135,
299	897	99.955,119,789,	00.044,880,211,	
300	900	99.954,969,589,	00 045,030,411,	00.000,150,200,
399	1197	99.940.096,184.	00.059,903,816,	
400	1200	99.939,945,914,	00.060,054,086,	00.000,150,270,
499	1497	99.925,065,795,	00.074,934,205,	
500	1500	99.924,915,455,	00.075,084,545,	00.000,150,340,
999	2997	99 849,811,822,	00.150,188,178,	
1000	3000	99 849,661,143,	00.150,338,857,	00.000,150,679,
4999	14997	99.241.542.959,	00.758,457,041,	
5000	15000	99.241,389,480,	00.758,610,520,	00.000,153,479,
9999	29997	98.464,986,865,	01 535,013,135,	
10000	30000	98.464,829,682,	01.535,170,318,	00,000,157,183,
13595	40785	97 894,734,392,786.6	02.105,265,607,213,4	
13596	40788	97.894.574.393,555.3	02.105,425,606,444,7	00.000,159,999,231,3
13597	40791	97.894,414,393,521.9	02.105,585,606,478,1	00.000,160,000,033,4

Patet ex hac Tabella, dum S per Spatium 1 descendit, vix plus assurgere P quam $\frac{0.000,15}{1.000,00}$ istius altitudinis, (nempe tantillo plus, ut in decimalium fractionum loco inferius quarto ne quidem 1 habeatur, quod hic merito negligi poterit.) Adeoque, cum Descensus S sit ad Ascensum P, ut 100000 ad 15; si pondus seu vis flatus S sit ad P pondus elevandum saltem ut 15 ad 100000, (hoc est, ut 3 ad 20000,) Vis Ponderi æquipollebit; si major, præpollebit, adeoque elevabit, saltem tantundem quantum Descensui S per spatium 1 respondeat.

Sed & illa proportio tam parum variatur pro spatiis subsequentibus aliquammultis, ut donec S descendisse intelligatur ultra spatia 13596 (hoc est, donec per fistulam ingestum sit in vesicam tantum aeris quantum impleat plusquam 13596 spatia ipsi Q V æqualia) non opus erit tanta vi in S quæ sit $\frac{0.00016}{1.00000}$ ponderis P, seu quæ sit ad P ut 16 ad 100000, hoc est, ut 1 ad 6250. Adeoque, si Vis Flatus S sit ad pondus P saltem ut 16 ad 100000, seu 1 ad 6250: elevabitur P saltem tantundem quantum Descensui S per spatia 13596 respondebit; hoc est (ut ex Tabella liquet) plus quam $\frac{2.1}{100.0}$ altitudinis primæ.

Cum itaque non incongruum sit ut Vis Flatus humani accedat saltem ad

$\frac{16}{100000}$ ſeu $\frac{1}{6250}$ Ponderis ſatis magni, non mirum videri debet, ut Flatu hoc Pondus illud attollatur; & quidem, ultra $\frac{21}{1000}$ altitudinis primæ, vel (paulo rotundius) pluſquam eſt $\frac{1}{50}$ (pars quinquageſima) ſemiperimetri NM+MP, quæ ſatis eſt notabilis. Quod oſtendendum erat.

Patet hinc etiam, ſi ponamus vel S augeri vel P diminui, adhuc altius elevatum iri P, eadem veſica manente, eodemque fiſtulæ cavo.

Patet etiam, pro diminuto foramine fiſtulæ ſeu diametro ejus QT, diminui etiam proportionem S ad P neceſſariam ad pondus elevandum: Et quidem, ſi Mathematice ſolummodo res conſideretur, ad proportionem quantumvis exiguam, ſeu ut datum pondus data vi ſic moveatur; Verum, ſi ad praxin Phyſicam deveniatur, non expectandum eſt ut res ſuccedat; quoniam Aer per foramen valde exiguum non poteſt niſi magna vi protrudi etiamſi non contra urgeret pondus P; ſed neque ad exiguum iſtiuſmodi foramen poteſt quis ita ſe accommodare ut totam flatus potentiam eo exerat. Eſt itaque mediocris quædam foraminis magnitudo neceſſaria ad praxin hanc efficacius exercendam; quæ, cum ex Phyſicis circumſtantiis dependeat, experimento potius quam demonſtratione determinabitur. Sin Mathematice tantum rem ſpectemus, (ſecluſis hujuſmodi circumſtantiis;) auctio vel diminutio diametri foraminis, contraria vice minuit augetque vim flatus, in duplicata ratione iſtius auctionis vel diminutionis diametri. Quod ex præmiſſis facile probaretur, ſi res tanti eſſet.

Facile item oſtenſu eſt, Ad quantam altitudinem (pro dato foramine) data vis flatus datum pondus elevare poſſet: Et, vice verſa, quanta vis (pro dato foramine) requiratur ut datum pondus ad datam altitudinem (poſſibilem) elevetur: Sed &, datis altitudine (poſſibili,) vi flatus, & pondere, quantillum foramen eſſe debeat.

Dico, *altitudinem Poſſibilem*: quoniam non ad quantamvis altitudinem hoc fiet; ſed ſaltem ubi, ad maximam vaſis capacitatem perventum eſt (ut alias omittam circumſtantias Phyſicas) non ultra flando extendetur. Ea autem eſt (data perimetro MNOP) in Rhombo ſolido (quo hactenus uſi ſumus) quando quadratum lateris NM, æquat tria quadrata ſemialtitudinis NR, (hoc eſt $NMq = 3NRq$, vel $\frac{1}{4}n^2 = \frac{3}{4}a^2$:) in Sphæroeide vero (cui propius accedit veſica) ubi ex Sphæroeide fit Sphæra, facta peripheria tranſverſa MO æquali perimetro expoſitæ MNOP.

Verum quoniam hæc à præſente propoſito aliena ſunt, demonſtrationes horum omitto; quas tamen fuſius olim, in ſcripto in Societate Regia *Londini* exhibito, Martii die 4. 1662. expoſui.

Sed redibimus tandem à Rhombo ſolido ad Sphæroeidem. Quanquam Sphæroeides ſit figura minus ad calculum accommodata: Cum tamen conſtet, Ellipſin Rhombo (ſi rite comparentur) capaciorem eſſe; adeoque & Sphæroeidem Rhombo ſolido; non dubitandum eſt quin, quod de Rhombo ſolido oſtendimus, de Sphæroeide abundantius conſtet. Cum enim, poſitis utriuſque figuræ perimetris MNOP æqualibus, major ſit Sphæroeidis Sphæræque capacitas quam Rhombi in reſpectivis poſitionibus; adeoque, quo extendantur, plus Aeris illic quam hic ingerendum, quod majori deſcenſui S æquipollet; contra vero major ſit hic quam illic altitudinis contractio, adeoque aſcenſus P; (quæ ex figurarum natura ſatis conſtant:) Erit, propter majorem deſcenſus ad aſcenſum rationem in Sphæroeide (adeoque in Veſica) quam in Rhombo, facilior quidem (utut tardior & ad minorem altitudinem) Ponderis per Veſicam quam per Rhombum elevatio. Adeoque abundantius conſtat propoſitum. Siquis vero exiſtimet, in inflata Veſica, non modo ambitum tranſverſum MO, ſed & erectum MNOP, augeri: Utut ego contrarium potius putem, contrahique non tantum altitudinem NP ſed & ambitum MNOP ob diſtentum ambitum NO; illud tamen ſi concedatur, non officit jam poſitis, ſed prodeſt potius: nam & ſic augebitur Veſicæ capacitas, aſcenſus P minuetur, adeoque facilitabitur, propter minorem altitudinis NP contractionem, dummodo tamen contractio fiat. Unde fortius adhuc confirmatur propoſitum; ne mirum ſit, (quod experimento comperimus,) inflata Veſica ſat grave Pondus elevari.

PROP.

PROP. IV.

Solvuntur aliquot aliæ Quæſtiones Mechanicæ.

MUlta alia ſunt ad rem Staticam & doctrinam de Motu ſpectantia, quæ vel Capitibus ſuperioribus interſeri poſſent, vel pluribus adhuc capitibus materiam ſuppeditare, niſi quod operis moles jam nimium excreverit. Sed ea ex ſupra traditis pleraque non difficulter elici poſſunt ad rem præſentem rite accommodatis. Nonnulla tamen hic ſtrictim attingam; quæ utut res ludicræ non nemini forſan videri poſſint, ſeriam tamen in Staticis cauſam habent.

Verbi gratia. Si quæratur, Cur, *qui ad erectum murum ſtat erectus, dorſo & utriſque calcibus murum attingens, non poteſt, niſi promoto pedum altero, nummum humi jacentem prorſum incurvatus tollere, quin præcipitabitur*: Ratio petenda à ſitu Centri gravitatis. Quippe, cum fulcrum corporis ſit in pedibus, qui cadere non volet hoc curare debet ut totius Corporis Centrum gravitatis pedibus emineat, ſaltem non extra eorum extrema hac vel illac ulterius deflectat quam ut muſculorum & tendinum vires ſic poſitum ſuſtinere valeant & revocare. Hinc, qui erectus ſtat, ſtat firmus, utpote qui totam corporis molem habet pedibus ſupereminentem. Qui vero quid humo tollere velit, dum demiſſum Caput protendit antrorſum, Nates retrorſum tendit, quo fiat æquilibrium, centrumque totius pedibus ſeu fulcro ſuperemineat, ſaltem extra pedum ambitum vel non omnino vel tantillum deflectat. Qui autem propter murum à tergo hoc non poſſit, dum (quo quid humo tollat) protendit Caput non retractis Natibus, præcipitatur, (propter totius Centrum poſitum extra fulcrum ſeu fulcrorum extremum ambitum, & quidem magis quam ut valeant tendines id oneris ferre iterumque ſublevare;) ſaltem, niſi vertebrarum tendines, muſculique eo ſpectantes, admodum robuſti fuerint.

Hinc item eſt, quod *Alii fortius, alii mollius terram ambulando feriant*, adeoque *ſonitum majorem minoremque ſonoro pavimento incedentes edant*. Nempe, duo ſunt incedendi modi, utut pauci id animadvertant. Quippe, Alii, dum pedem promovendum attollunt, corporis centrum gravitatis à reliqui pedis perpendiculo non prius amovent quam pes promotus terram iterum attingat: (Atque hoc *Chorodidaſcali* ſeu *Saltatoriæ artis Magiſtri*, ſi rem ſuam intelligant, imprimis curare debent diſcipulis inſinuandum, quo ſaltem uni pedi inſiſtens corpus agile in omnem partem prout opus erit convertere paratus ſit:) Alii vero feſtinantiores, dum pedem promovent, promovent ſimul & Centrum gravitatis; quod itaque, relicto priore fulcro, procidere ſtatim incipit, donec pes promotus terram iterum attingens caſurum ſuſtineat; (apud quos itaque Inceſſus eſt quaſi Caſus & Suſtentatio ſe-mutuo continue excipientes:) Hi itaque, propter procidentem corporis molem ponduſque, fortius terram feriunt & cum majori ſonitu, quam qui (ſuſtento à pede altero totius Centro gravitatis & onere) pedem promotum mollius demittunt; & quo præcipitantius Centrum gravitatis ſic promovent, eo fortius ſolum feriunt.

Hinc item reddenda eſt ratio cur *Alii aliis ſæpius titubent, & titubatu cadant*: Nempe, poſtquam relicto priori fulcro Centrum promovetur, promoto pedi mox ſtatuminando confidens, ſi pes promotus vacillet aut infidæ terræ ſe committat aut expectato fulcro deſtituatur, decidit corpus, ſaltem caſui proximum eſt; pariterque ſi inexſpectato pes impingat, ut non poſſit ſat cito eatenus promoveri ut valeat cadenti corpori mature ferre ſuppetias. Qui vero perſtantis pedis fulcrum non prius deſerunt quam pes promotus iterum firmetur, minus ſunt his periculis obnoxii: Adeoque, qui incedunt erecti, minus quam qui prono Capite.

Hinc porro eſt (quod Funambulos maxime ſpectat) quod *Qui Dextrorſum caſuri ſint, protendant brachium Siniſtrum; qui Siniſtrorſum, Dextrum; qui Retrorſum, alterum vel utrumque Porrigant; qui Prorſum, Retrahant*. Nam qui Dextrorſum caſurus (ob corporis centrum dextrorſum propendens) Siniſtram protendit, ſiniſtræ gravitationem auget (utpote remotius à fulcri perpendiculo poſitæ) adeoque commune totius Centrum gravitatis ſiniſtrorſum retrahit, quo vel

non omnino vel minus ad dextram propendeat, & caſum moliatur. Et in cæteris ſimiliter.

Atque ad idem intenti ſunt *Athletæ colluctantes.* Quippe qui, Antagoniſtæ corporis, varie torquendo, Centrum gravitatis extra fulcrorum ambitum longius dimoverit, facile illum ſubvertet.

Huc item referendum erit, quod, *Qui promiſſis brachiis incedunt, dum pedem dextrum promovent, promovent ſiniſtrum brachium; dum ſiniſtrum pedem, brachium dextrum.* Quippe hac alternatione totius Centrum melius retinetur in perpendiculo duobus pedibus ceu fulcris intermedio; nequa propendeat, totique caſum minitetur.

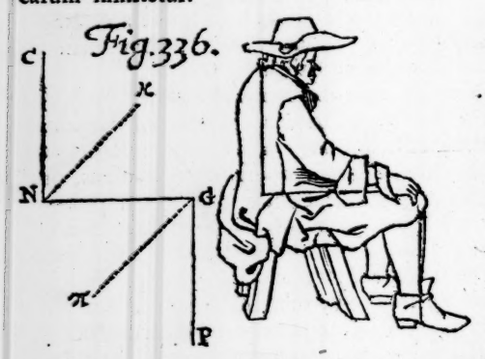


Fig. 336.

Item (quæ inter *Ariſtotelis* Quæſtiones Mechanicas occurrit) Cur, *Qui ſedet, non poteſt ſe in rectum erigere, niſi vel protenſo Capite, vel Pedibus retractis.* Nempe, qui ſedet, (puta, in ſitu CNGP, factis in N & G angulis rectis,) longe majorem corporis partem habet à G verſus N poſitam (nempe totam partem CNG, à Capite ad genua;) adeoque Centrum gravitatis (ejuſve perpendiculum) procul à G verſus N. Cum itaque ſtanti futurum ſit Fulcrum in Pedibus P, adeoque (manentibus ut prius cruribus GP in ſitu perpendiculari) revocandum ſit totius CNG Centrum ad perpendiculum GP, ut ipſi G ſuperemineat; vix aut ne vix illud fiet niſi ſupra modum robuſtos ſupponamus muſculos tendineſque eo ſpectantes. Erigendus enim eſt, rotationis Centro G, vectis GN (& ipſe gravis,) onere NC in extremo onuſtus. Si vero retrahantur pedes à P ad π, quo Fulcrum Centro gravitatis ſubjiciatur; vel protendatur caput à C ad κ, quo Centrum gravitatis propius ad P fulcrum Centrumque motus G feratur, aut etiam ipſis immineat; vel partim hoc, partim illud: magno onere liberantur muſculi tendineſque.

Hinc item reſpondendum quæſtioni, (quæ quamvis ridicule proponi ſoleat, ſeriam tamen meretur reſponſionem,) Cur *Anſer horrei oſtium intrans utcunque altum*, (quod plauſtrum demeſſo tritico onuſtum admittere poſſit,) *Caput demittat.* Cui ridicule reſpondere ſolent (acute forſan, ut ipſi cogitant,) Quoniam Anſer eſt, (hoc eſt, animal ſimplex & imprudens;) id factum reputantes, quaſi metuerit anſer ne caput ſuperliminari (in tanta diſtantia remoto) impingeret. Sed (niſi illud quandoque fiat, quod anſer etiam ab ipſo ſtatim horrei introitu grana quærat quibus paſcatur;) vera cauſa eſt, quod ad horrei oſtium (ſicut ad oſtia minora) poni ſoleat Limen (ſeu quod liminis inſtar ſit) ab anſere ſuperandum quo horreum ingrediatur: Quod ut fiat, pedum antecedente limini ſuperimpoſito, circa quod itaque ut fulcrum ſeu motus Centrum rotandum erit corporis totius Centrum gravitatis, rotationem illam facilitat porrecto capite ultra limen, adeoque aucta ipſius gravitatione, Centrum totius propius ad fulcrum admovet. (Sin dicatur, non ſemper eſſe ad oſtium horrei quod Liminis inſtar ſit, ſive Aſcenſus; dicendum, nec Anſerem ſemper introeuntem caput demittere.)

Quodque Anſer ipſis ridiculus, idem faciunt ipſi, atque ob eandem cauſam; Nempe, *Dum ſcalam, gradus, montemve aſcendunt, caput protendunt.* Cauſa eſt, quod, hoc facto, facilior fiat circa pedem anteriorem, gradui ſcandendo impoſitum, rotatio, (quæ omnino facienda erit ut fiat aſcenſus,) ob porrectum capitis pondus ultra fulcrum. Saltem, ſi hoc nondum faciant, ab Anſere diſcant.

Item, Cur *Bajuli, ſi onus Humeris ſeu Tergo geſtant, ſe antrorſum incurvant; ſi Ulnis, retrorſum*: & *Ancilla, ſi aquæ ſitulam promiſſo brachio ſiniſtro ferat, dextrorſum ſe incurvat, (extento etiam brachio dextro;) ſi dextro, ſiniſtrorſum; ſi utroque, recta incedit; ſimiliterque ſi capiti impoſitam ferat.* Nempe his modis omnibus efficitur, ut Corporis Oneriſque commune Centrum gravitatis communi fulcro ſuperemineat, ſaltem extra fulcrorum ambitum minus recedat.

Vidique ipſe non neminem, *Qui cum pondus, manibus latum, antrorſum projecit,*

jecit, cecidit ipſe retrorſum. Nempe ; Quo Corporis Ponderiſque commune Centrum gravitatis fulcro immineret, Corporis ſui Centrum gravitatis nonnihil retro motum erat ; quod itaque ipſum poſt ſeparatum quod manibus geſtaverat pondus, ita retraxit, ut antequam ſe in debitum ſitum reſtituere poſſet, retro ceciderit.

Hinc item eſt, quod *Homines Obeſi, Ventrioſique, ſoleant Erecti incedere, ſeu Reclinato etiam Capite,* (nempe propter Onus ante geſtatum,) *Contra vero, qui* λαγαροὶ *gracileſque, Capite Proclinato ſæpius incedant ; ſimiliterque, qui Gibbis humeris* : propter Onus retro geſtatum.

Hinc item liquet, omnino male conſultum eſſe, ſiqui *Proclinantibus appendant a Tergo grave,* eo fine, ut, revulſo collo, caput erigere cogantur : Conſultius utique facturi, ſi *pro Pectore Ventreve appenſam Plumbi laminam adhiberent* (aliudve grave,) ut, erecto vel reclinato Capite, affectent æquilibrium.

Aliaque multa, quæ à mutato totius Centro gravitatis ob mutatum ſitum dependent, (quorum exempla innumera, ne longe abeamus, animalium inceſſus aliique motus ſuppeditabunt,) ſolutionem ex eodem fonte ſortientur.

Et quidem, de motibus pure Staticis (quæ à ſola Gravitate dependent) vel efficiendis vel non efficiendis, judicium fiet ex illo generali principio (à Torricellio aliiſque paſſim adhibito ;) *Si, effecto motu propoſito, Gravis movendi Centrum gravitatis, vel Aggregati ex pluribus conjunctis Commune Centrum, deſcenſurum ſit ; Motus conſequetur* : *ſin minus ; non conſequetur.* Quod nos Univerſalius efferimus, (quo ad alios etiam motus res extendatur,) *Si Proceſſus Secundum directionem moventis, (vel aggregati proceſſuum plurium,) Magnitudo (ex Virium gradu, & Altitudine proceſſus, æſtimanda,) præpolleat Magnitudini (ſimiliter æſtimandæ) Regreſſus (regreſſuumve aggregati) Contra moventis directionem ; Motus efficietur* : *Sin minus ; non efficietur.* Ut ex prop. 2, 5, 6. Cap. 2. liquet. In motibus autem facilitandis, ſeu minori Vi perficiendis, *Pro diminutis Viribus effectricibus, in eadem ratione diminuitur Celeritas* ; (adeoque Virium defectus Temporis diſpendio redimendum :) per prop. 27, 28. Cap. 1.

Atque hæc Principia, ad Quæſtiones Mechanicas innumeras ſive apud *Ariſtotelem* ſive alios occurrentes, ſive in communi vita humana paſſim obvias, ſolvendas ; facile eſſet accommodare. Sed, creſcente volumine, alicubi tandem ſiſtendum erit, ne nimii ſimus ; totique operi finis imponendus.

F I N I S.

Cum, in hoc Tractatu de Motu, ad Figurarum aliquas sæpius respiciendum sit, quas tamen toties repetere non videbatur commodum; sed & ipsæ figuræ non eo semper numerantur ordine quo occurrunt, sed eo potius quo fuerant primitus descriptæ, quibus tamen cum sua facta fuerant nomina, non erant ea temere mutanda (ne citationes turbarentur) licet (in progressu operis) nonnulla post fuerint inserenda (sive ut Lemmata ad subsequentia, sive ut Corollaria ad ante dicta;) quæ novas poscebant figuras interponendas, numeris nondum occupatis insigniendas: Visum est hac Synopsi simul indicare, qua quæque pagina sit conspicienda; quo Lectori minus molestum sit, cum opus fuerit, eas exquirere.

Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.
1	578	44	605	86	646	128	675	170	754	212	922	254	966	296	999
2	580	45	605	87	647	129	675	171	765	213	922	255	966	297	1000
3	580	46	607	88	648	130	678	172	765	214	922	256	967	298	1000
4	580	47	607	89	648	131	680	173	805	215	931	257	967	299	1002
5	580	48	610	90	649	132	683	174	805	216	932	258	967	300	1003
6	580	49	611	91	649	133	683	175	814	217	934	259	968	301	1004
7	584	50	612	92	650	134	683	176	814	218	935	260	968	302	1005
8	584	51	616	93	650	135	693	177	838	219	936	261	968	303	1012
9	584	52	618	94	650	136	695	178	839	220	937	262	968	304	1012
10	584	53	618	95	654	137	696	179	839	221	942	263	968	305	1012
11	584	54	618	96	654	138	696	180	840	222	942	264	972	306	1013
12	587	55	620	97	656	139	696	181	842	223	943	265	974	407	1013
13	587	56	620	98	658	140	696	182	844	224	943	266	975	308	1013
14	587	57	620	99	659	141	698	183	844	225	944	267	975	309	1016
15	587	58	620	100	659	142	700	184	847	226	944	268	975	310	1021
16	589	59	631	101	659	143	701	185	854	227	944	269	978	311	1032
17	589	60	621	102	659	144	701	186	757	228	944	270	979	312	1033
18	589	61	622	103	659	145	701	187	857	229	945	271	979	313	1034
19	589	62	622	104	661	146	701	188	857	230	945	272	980	314	1036
20	589	63	622	105	661	147	701	189	865	231	945	273	982	315	1037
21	589	64	622	106	664	148	702	190	866	232	947	274	983	316	1037
22	590	65	623	107	669	149	705	191	868	233	947	275	984	317	1038
23	590	66	623	108	669	150	705	192	868	234	947	276	984	318	1039
24	590	67	623	109	669	151	706	193	868	235	947	277	984	319	1040
25	590	68	624	110	669	152	707	194	871	236	949	278	985	320	1045
26	591	69	626	111	669	153	707	195	872	237	949	279	985	321	1053
27	591	70	628	112	669	154	708	196	872	238	950	280	687	322	1054
28	591	71	629	113	670	155	708	197	872	239	950	281	988	323	924
29	591	72	629	114	670	156	712	198	873	340	950	282	989	324	924
30	595	73	629	115	671	157	713	199	880	241	951	283	989	325	926
31	596	74	629	116	671	158	717	200	881	242	951	284	991	326	926
32	597	75	629	117	671	159	717	201	883	243	953	285	992	327	927
33	597	76	633	118	671	160	717	202	895	244	954	286	993	328	906
34	597	77	634	119	671	161	723	203	899	245	954	287	993	329	906
35	597	78	635	120	673	162	723	204	899	246	955	288	994	330	907
36	599	79	635	121	673	163	725	205	904	247	955	289	995	331	907
37	598	80	642	122	673	164	727	206	910	248	961	290	995	332	908
38	598	81	645	123	673	165	733	207	912	249	961	291	995	333	1056
39	598	82	645	124	673	166	802	208	912	250	963	292	996	334	1057
40	598	83	645	125	673	167	803	209	912	251	963	293	997	335	1058
41	601	84	645	126	673	168	803	210	917	252	963	294	998	336	1062
42	602	85	645	127	675	169	754	211	917	253	963	295	998	337	928
43	603														